Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Общие квантовые многочлены: неприводимые модули и Морита-эквивалентность, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 5, 3–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:26:00

УДК 512.667.7+512.666+512.553+ 512.552.4

В. А. Артамонов

Общие квантовые многочлены: неприводимые модули и Морита-эквивалентность

В настоящей работе продолжены исследования строения конечно порожденных модулей над кольцами общих квантовых (лорановских) многочленов. Получено описание решетки подмодулей периодического конечно порожденного модуля, описаны неприводимые модули. Исследован вопрос о Морита-эквивалентности колец общих квантовых полиномов, рассматриваются свойства тел частных и решается проблема Зарисского для квантовых многочленов.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования строения конечно порожденных модулей над кольцами A общих квантовых (лорановских) многочленов. Напомним необходимые основные определения и полученные ранее результаты. Пусть D — тело с фиксированными автоморфизмами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, где $n \geq 2$. Предположим, что выделены элементы $q_{ij} \in D^*$, $i, j = 1, \dots, n$, причем

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1, \quad \alpha_i(\alpha_j(d)) = q_{ij}\alpha_j(\alpha_i(d))q_{ji}, \quad (1)$$

где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$, $d \in D$. Положим

$$Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, D) \text{ и } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Элементы матрицы Q называются системой *мультипараметров*. Через

$$\Lambda = D_{Q, \alpha}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n] \quad (2)$$

обозначим ассоциативное кольцо, порожденное элементами тела D , элементами $X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_r^{-1}$ и заданное определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, & 1 \leq i \leq r; \\ X_i d &= \alpha_i(d) X_i, & d \in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, & i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Это кольцо называется *кольцом квантовых полиномов*. Как отмечено в [1], кольцо Λ из (2) разлагается в скрещенное произведение $\Lambda = D \#_t H$, где биалгебра H является тензорным произведением целочисленного группового кольца свободной абелевой

Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 99-01-00382, № 96-15-96050), программой “Университеты России” (грант № 5527), программой INTAS93-436.

группы с базой $\{X_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ и целочисленного полугруппового кольца свободной абелевой полугруппы с базой $\{X_i \mid r < i \leq n\}$.

Кольцо Λ из (2) мы будем также обозначать через

$$\Lambda = D_{*,*}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n]$$

в случае, когда значения Q , α понимаются однозначно.

Квантовые многочлены тесно связаны с групповыми кольцами бесконечных разрешимых групп (см. ниже). Кроме того, квантовые многочлены возникают в некоммутативной геометрии как алгебры функций на квантовом аффинном пространстве [2], [3, гл. 2, § 2.6]. Квантовые многочлены связаны также с мультипараметрическими квантовыми алгебрами Вейля в смысле [4] (см. также [5], [3]). Именно, как показано в [5], тело частных квантовых алгебр Вейля совпадает с телом частных квантовых многочленов. Отметим в связи с этим работу [6] по телам частных квантовых многочленов.

Кольцо Λ из (2) является левым и правым векторным пространством над D , базу которого составляют одночлены

$$u = X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}, \quad (4)$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$ при $1 \leq i \leq r$ и $m_i \in \mathbb{N} \cup 0$, если $r < i \leq n$. В частности, кольцо Λ из (2) является нётеровым слева и справа областью с телом частных

$$F = D_{Q,\alpha}(X_1, \dots, X_n) = D_{*,*}(X_1, \dots, X_n). \quad (5)$$

Если M – конечно порожденный Λ -модуль, то *рангом* M называется число

$$d = \dim_F F \otimes_{\Lambda} M.$$

Каждый автоморфизм α_i продолжается на F , причем

$$\alpha_i(f) = X_i f X_i^{-1} \quad (6)$$

для всех $f \in F$. Каждое подкольцо L в Λ из (2), порожденное D и частью неизвестных, а также, возможно, их обратными, инвариантно относительно указанных продолжений автоморфизмов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Пусть S – множество всех ненулевых элементов из L . Тогда $S^{-1}L$ является телом частных в L , в котором продолжают действовать автоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из (6). Таким образом, можно построить кольцо квантовых многочленов над телом $S^{-1}L$ от оставшихся переменных X_j и, возможно, их обратных, если $j \leq r$. Снова получается кольцо квантовых многочленов, содержащее Λ в качестве подкольца. Эти соображения показывают, что S удовлетворяют условию Оре в Λ .

В [7] показано, что если $D = k$ – поле, α – набор тождественных автоморфизмов k , то

$$k_{Q,\alpha}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \simeq k_{Q',\alpha}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}]$$

тогда и только тогда, когда существует такая матрица

$$M = (m_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}),$$

что

$$q'_{ij} = \prod_{r,s} q_{rs}^{m_{ri} m_{sj}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть N – подгруппа в мультипликативной группе D^* , порожденная коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1}\alpha_i(z)$, где $z \in D^*$ и $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что N является нормальной подгруппой в мультипликативной группе D^* , причем $\overline{D} = D^*/N$ является мультипликативной абелевой группой.

В работах [1] – [10] предполагается, что D удовлетворяет условию

(*) *образы всех элементов q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в $\overline{D}$.*

Это условие впервые рассмотрено в [7]. В этом случае будем говорить, что кольца

$$A = D_{Q,\alpha}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}], \quad C = D_{Q,\alpha}[X_1, \dots, X_n] \quad (7)$$

являются соответственно кольцом *общих квантовых лорановских многочленов* и кольцом *общих квантовых многочленов*. Кольцо Λ мы будем также называть кольцом *общих квантовых многочленов*. Отметим, что свойство кольца быть общим кольцом сохраняется при переходе к подкольцу, порожденному телом D и частью переменных, а также при локализациях по всем ненулевым элементам из указанного подкольца.

Укажем пример колец общих квантовых многочленов. Пусть группа W порождена элементами

$$X = \{X_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Предположим, что W обладает нормальным рядом

$$W = W_0 > W_1 > W_2 > \dots > W_{t+1} = 1$$

с конечно порожденными свободными абелевыми факторами W_i/W_{i+1} , причем базу W/W_1 составляют элементы множества

$$Y = \{X_i W_1 \mid 1 \leq i \leq n, \quad X_i \in X\},$$

а базу W_1/W_2 составляют элементы

$$\{q_{ij} W_2 \mid 1 \leq i < j \leq n, \quad q_{ij} = [X_i, X_j]\}.$$

Предположим, что в качестве $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ взяты внутренние автоморфизмы группы W , соответствующие сопряжениям с помощью $X_1, \dots, X_n$. В частности,

$$\alpha_i(q_{ij}) \equiv q_{ij} \pmod{W_1}. \quad (8)$$

Пусть k – некоторое поле. По [11, § 11] мультипликативная полугруппа $S = kW_1 \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре в групповой алгебре kW , и поэтому существует тело частных D групповой алгебры kW_1 . Тогда в качестве кольца A из (7) можно брать кольцо $S^{-1}kW$.

Напомним ряд полученных ранее результатов. Следующая теорема доказана сначала в частном случае в [7], а затем в общем случае в [1] (см. [8, теорема 3.13]).

Теорема 1.2. Пусть A – кольцо общих квантовых лорановских многочленов из (7). Тогда $\text{K. dim } A = 1$. Другими словами, пусть $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n$ – набор индексов, где $h \leq n-2$, и $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-h} \leq n$ – все оставшиеся индексы от 1 до n . Положим

$$G = D_{*,*}(X_{i_1}, \dots, X_{i_h}).$$

Если M – конечномерное (левое) векторное пространство над G , являющееся модулем над $G[X_{j_1}^{\pm 1}, \dots, X_{j_{n-h}}^{\pm 1}]$, то $M = 0$.

Теорема 1.3 [1]. Если выполнено условие (*), то все конечно порожденные проективные модули над кольцом Λ из (2) ранга не меньше двух свободны.

Напомним, что элемент t модуля M над кольцом Λ из (2) называется *периодическим*, если $at = 0$ для некоторого $a \in \Lambda \setminus 0$. Через $t(M)$ обозначается *периодическая часть* модуля M , т.е. множество всех его периодических элементов. Так как кольцо Λ из (2) является нётеровой слева и справа областью, то оно удовлетворяет условию Оре. Следовательно, периодическая часть $t(M)$ модуля M является подмодулем в M .

Теорема 1.4 [9]. Пусть выполнено условие (*), кольцо A из (7) и M – конечно порожденный A -модуль ранга $r \geq 0$. Тогда $M = t(M) \oplus N$, где $t(M)$ – циклический артинов A -модуль, N – проективный A -модуль ранга r . Если $r = 0$, то $N = 0$. Если $r = 1$, то модуль N изоморфен левому идеалу в A . Если $r > 1$, то модуль N свободен.

Ситуация, в некотором смысле противоположная условию (*), рассмотрена в [12], [13]. Например, пусть выполнено следующее условие:

(**): $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – тождественные автоморфизмы, тело D конечномерно над k , и все мультипараметры q_{ij} являются корнями из 1.

Теорема 1.5 [12]. Пусть выполнено условие (**) и задан конечно порожденный проективный Λ -модуль P ранга не меньше двух. Тогда модуль P свободен.

Теорема 1.6 [13]. Пусть выполнено условие (**). Если $t \geq 4$ и $U \in \text{GL}(t, \Lambda)$, то

$$U = \text{diag}(zu, 1, \dots, 1)U_1,$$

где u – обратимый одночлен из Λ , $z \in D^*$ и $U_1 \in E(t, \Lambda)$.

Целью настоящей работы является описание решетки подмодулей периодических (циклических) модулей, в частности, строения неприводимых модулей над кольцом общих квантовых (лорановских) многочленов (см. теорему 2.16), решение вопроса о Морита-эквивалентности общих квантовых многочленов (теоремы 6.16, 6.18) и решение проблемы Зарисского для общих квантовых многочленов (см. теоремы 7.1, 7.2).

В связи с рассмотрением вопроса о Морита-эквивалентности колец квантовых многочленов отметим книгу [14], а также близкие работы [17], [15], [16]. Отметим, что подробный обзор полученных результатов по проективным модулям над квантовыми многочленами можно найти в [8].

Всюду в работе все модули предполагаются левыми. Для любого кольца K через $\mathbb{P}(K)$ обозначается категория конечно порожденных проективных левых K -модулей. Через B обозначается подкольцо

$$B = D_{*,*}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-1}^{\pm 1}]$$

в A . Заметим, что $A = B[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]$ – кольцо косых многочленов с коэффициентами в B .

Все необходимые определения и полезные результаты относительно нётеровых некоммутативных колец можно найти в [14].

§ 2. Неприводимые модули

Элемент

$$f \in A = B[X_n^{\pm 1}, \alpha_n], \quad f = \sum_{i=d}^q b_i X_n^i, \quad b_i \in B,$$

называется *унитарным по X_n* , если коэффициенты b_d, b_q обратимы в B , т.е. b_d, b_q являются одночленами от $X_1, \dots, X_{n-1}$. Несложно доказывается

Предложение 2.1 [14, предложение 9.3]. *Элемент $f \in A$ является унитарным по X_n тогда и только тогда, когда A/Af является конечно порожденным B -модулем.*

Предложение 2.2 [14, предложение 9.3]. *Пусть $U = U(A)$ – множество всех унитарных по X_n элементов из A . Тогда U удовлетворяет левому условию Ore.*

В дальнейшем нам потребуется

Предложение 2.3. *Пусть в кольце A из (7) задан ненулевой элемент*

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in D. \quad (9)$$

Предположим, что $p > 2 \max_{j=1, \dots, n} |i_j|$. Положим

$$Y_j = \begin{cases} X_j X_n^{p^j}, & \text{если } j < n, \\ X_n, & \text{если } j = n. \end{cases}$$

Тогда

$$A = D_{*,*}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}],$$

причем f как многочлен относительно $Y_1, \dots, Y_n$ унитарен по Y_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого одночлена из (9) имеем

$$a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} = a'_{i_1, \dots, i_n} Y_1^{i_1} \dots Y_{n-1}^{i_{n-1}} Y_n^{i_n + p^{i_1} + \dots + p^{n-1} i_{n-1}}.$$

Следовательно, разные одночлены из (9) имеют разные показатели при Y_n . Таким образом, коэффициенты при наибольшей и наименьшей степенях Y_n являются одночленами относительно $Y_1, \dots, Y_{n-1}$.

Отметим, что при указанных заменах свойство кольца A быть общим кольцом не меняется [10].

Предложение 2.4. Пусть задан A -модуль M , являющийся конечно порожденным модулем над подкольцом

$$D_{*,*}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-2}^{\pm 1}]. \quad (10)$$

Тогда $M = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M \neq 0$ и S — множество ненулевых элементов из (10). Тогда S удовлетворяет условию Оре в A и $S^{-1}M$ является модулем над

$$S^{-1}A = D_{*,*}(X_1, \dots, X_{n-2})[X_{n-1}^{\pm 1}, X_n^{\pm 1}],$$

имеющим конечную размерность над телом частных (10). Следовательно, $S^{-1}M = 0$ по теореме 1.2. Таким образом, M является периодическим конечно порожденным модулем над (10). По теореме 1.4 модуль M циклический над (10) с порождающим элементом m . Пусть f — ненулевой элемент из кольца (10), аннулирующий m . По предложению 2.3, совершая замену переменных $X_1, \dots, X_{n-2}$, можно считать, что f унитарен по X_{n-2} . Тогда модуль M конечно порожден над

$$D_{*,*}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-3}^{\pm 1}].$$

Продолжая этот процесс, получим, что M имеет конечную размерность над D , что снова противоречит теореме 1.2.

Предложение 2.5. Пусть задан A -модуль M , являющийся B -модулем с образующими $m_1, \dots, m_n$, причем существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n \in B \setminus 0$, что $b_i m_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $M = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре в A , то существует такой элемент $b \in B \setminus 0$, что $bm_1 = \dots = bm_n = 0$. Как и в [9], совершая в B замену переменных вида

$$Y_i = \begin{cases} X_i X_{n-1}^{p^i}, & \text{если } i < n-1, \\ X_i, & \text{если } i = n-1, \end{cases}$$

для достаточно большого натурального числа p , можно считать, что элемент $b \in B$ унитарен по X_{n-1} . По предложению 2.1 M является конечно порожденным модулем над

$$D_{*,*}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_{n-2}^{\pm 1}].$$

Остается воспользоваться предложением 2.4.

Следствие 2.6. Пусть задан A -модуль M , являющийся конечно порожденным B -модулем. Тогда периодическая часть T в M равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $B \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре, то T является A -подмодулем в M , причем T — конечно порожденный B -модуль, ибо B нётерово слева. Остается применить к T предложение 2.5.

Следствие 2.7. Пусть задан A -модуль M , являющийся конечно порожденным B -модулем. Тогда $M \in \mathbb{P}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно воспользоваться следствием 2.6 и [9, теорема 1.6] (см. теорему 1.4).

Пусть H – тело частных кольца B . Как отмечено в (6), автоморфизм α_n продолжается на H . Так как $B \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре в A , то

$$R = (B \setminus 0)^{-1}A = H[X_n^{\pm 1}, \alpha_n]. \quad (11)$$

Всюду в дальнейшем через R будем обозначать кольцо из (11).

Если M – модуль над произвольным кольцом K , то через $L_K(M)$ обозначается решетка K -подмодулей в M .

Предложение 2.8. *Пусть M – конечно порожденный периодический A -модуль. Совершая замену переменных вида (11), как и выше, можно считать, что $M \in \mathbb{P}(B)$. Имеется естественный изоморфизм решеток подмодулей*

$$\varphi : L_A(M) \rightarrow L_R(R \otimes_A M),$$

индуцированный вложением M в $R \otimes_A M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что ядро естественного гомоморфизма

$$M \rightarrow R \otimes_A M$$

совпадает с подмодулем T из следствия 2.6. Поэтому естественный гомоморфизм из M в $R \otimes_A M$ является вложением. Пусть $U \supseteq V$ – подмодули в M , причем

$$R \otimes_A U = H \otimes_B U = H \otimes_B V = R \otimes_A V,$$

и поэтому

$$R \otimes_A (U/V) = H \otimes_B (U/V) = 0. \quad (12)$$

Так как кольцо A нётерово слева и справа, то модуль U конечно порожден. Из (12) получаем, что модуль U/V удовлетворяет условиям предложения 2.5, и поэтому $U/V = 0$, т.е. $U = V$. Отсюда вытекает, что φ является вложением.

Обратно, пусть задан подмодуль L в $R \otimes_A M$ и $h \in L$. Тогда $bh \in L \cap M$ для некоторого $b \in B \setminus 0$. Следовательно, $h = b^{-1}(bh) \in H \otimes_B (L \cap M)$. Таким образом, $L = H \otimes_B (L \cap M)$ и φ сюръективно.

Следствие 2.9. *Для A -модуля $M \in \mathbb{P}(B)$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) M неприводим;
- 2) R -модуль $R \otimes_A M$ неприводим.

Следствие 2.10. *Пусть заданы A -модули $M_1, M_2 \in \mathbb{P}(B)$ и*

$$f : R \otimes_A M_1 \rightarrow R \otimes_A M_2$$

– гомоморфизм R -модулей. Тогда $f(M_1) \subseteq M_2$. Другими словами, f индуцировано гомоморфизмом A -модулей $f|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $M = f(M_1) + M_2$ является конечно порожденным B -модулем, причем $R \otimes_A M = R \otimes_A M_2$. По предложению 2.8 получаем $M = M_2$. Отсюда $f(M_1) \subseteq M_2$.

Следствие 2.11. *Если заданы A -модули $M_1, M_2 \in \mathbb{P}(B)$, то любой изоморфизм R -модулей*

$$f : R \otimes_A M_1 \rightarrow R \otimes_A M_2$$

индуцирован изоморфизмом A -модулей $f|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$. В частности, если $R \otimes_A M_1 = R \otimes_A M_2$, то $M_1 = M_2$.

Пусть, как и выше, задан A -модуль $M \in \mathbb{P}(B)$. Нетрудно видеть (см. теорему 1.4), что A -модуль M периодичен. Следовательно, по [9, теорема 1.6] модуль M является циклическим, т.е. $M \simeq A/I$ для некоторого левого идеала $I \subseteq A$. Так как R – кольцо главных левых идеалов, то $I = Rf \cap A$ для некоторого $f \in R \setminus 0$.

Предложение 2.12. *Пусть $f \in R \setminus 0$ и задан изоморфизм левых A -модулей $M \simeq A/(Rf \cap A)$. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $M \in \mathbb{P}(B)$;
- 2) $Rf \cap A$ содержит унитарный по X_n многочлен из A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие 1) и $M = A/(Rf \cap A)$. Положим $m = 1 + (Rf \cap A)$. Так как кольцо B нётерово слева и $M \in \mathbb{P}(B)$, то существует такое натуральное число r , что

$$X_n^r m, X_n^{-1} m \in \sum_{i=0}^{r-1} B X_n^i m.$$

В частности, найдутся такие $b_i, c_i \in B$, что

$$\left(X_n^r + \sum_{i=0}^{r-1} b_i X_n^i \right) m = \left(X_n^{-1} + \sum_{i=0}^{r-1} c_i X_n^i \right) m = 0.$$

Положим

$$g = X_n^{-1} + \sum_{i=0}^{r-1} (b_i + c_i) X_n^i + X_n^r.$$

Поскольку $g \in A$ унитарен и $gm = 0$, то $g \in Rf \cap A$. Итак, выполнено условие 2).

Обратно, пусть выполнено условие 2) и $g \in Rf \cap A$ – унитарный многочлен. Тогда $A/Ag \in \mathbb{P}(B)$ по предложению 2.1. Следовательно, существует эпиморфизм A -модулей $A/Ag \rightarrow M$. Остается воспользоваться следствием 2.7.

Используя соображения из предложения 2.12 для A -модуля $M \in \mathbb{P}(B)$, можно описать решетку $L(M) = L(R \otimes_A M)$. Имеем $M = A/(Rf \cap A)$, причем $Rf \cap A$ содержит унитарный по X_n элемент. При этом

$$R \otimes_A M = R/Rf.$$

Так как R – кольцо главных левых идеалов, то имеется взаимно однозначное соответствие между подмодулями в $R \otimes_A M$ и правыми делителями h элемента f в R . Именно, если $f = uh$, где $u, h \in R$, то h сопоставляется подмодуль

$$M(h) = (Rh \cap A)/(Rf \cap A).$$

При этом $M(h) \supseteq M(h')$ тогда и только тогда, когда $h' \in Rh$. Заметим, что

$$H \otimes_B M(h) \simeq Rh/Rf \simeq R/Ru.$$

Таким образом, по следствиям 2.9, 2.10 получаем $M(h) \simeq A/(Ru \cap A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Пусть DU – множество всех таких $f \in R \setminus 0$, что $Rf \cap A$ содержит ненулевой элемент из множества $U(A)$ всех унитарных по X_n элементов из A . Другими словами, DU состоит из всех таких $f \in R$, что $Rf \cap U(A)$ непусто.

Предложение 2.14. DU является мультипликативной полугруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, g \in DU$. Тогда существуют такие $h_1, h_2 \in R$, что $h_1 f, h_2 g \in U(A)$. Достаточно показать, что $Rh_1 f g \cap U(A)$ непусто. Можно считать, что $h_1 = 1$, $f \in U(A)$. Кроме того, можно предполагать, что $h = h_2 \in A$. Так как $U(A)$ удовлетворяет условию Оре, то найдутся такие $f_1 \in U(A)$, $f_2 \in A$, что $f_1 f h = f_2 f$. Но $f_1 f h g = f_2 f g$, откуда $f_1 f(hg) \in U(A) \cap Afg$ и $fg \in DU$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Элемент $f \in A \setminus 0$ (соответственно $f \in R \setminus 0$) *неприводим по X_n в A* (соответственно в R), если из условия $f = gh$, где $g, h \in A$, (соответственно $g, h \in R$), вытекает, что либо g , либо h обратим в A (соответственно в R).

Из предыдущих рассуждений получаем, что справедлива

Теорема 2.16. Пусть задан A -модуль $M \in \mathbb{P}(B)$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A -модуль M неприводим;
- 2) $M \simeq A/(Rf \cap A)$, где $f \in R \setminus 0$ неприводим и $f \in DU$, т.е. $Rf \cap A$ содержит унитарный по X_n многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.12 можно считать, что $M = A/(Rf \cap A)$, причем $Rf \cap A$ содержит унитарный в A элемент. При этом $R \otimes_A M = R/Rf$. Остается воспользоваться следствием 2.9.

Теорема 2.16 имеет следующую интерпретацию. Пусть A -модуль M неприводим и $M \in \mathbb{P}(B)$. Предположим, что $m \in M \setminus 0$, причем элементы

$$m, X_n m, \dots, X_n^{r-1} m, \quad r \geq 1, \tag{13}$$

независимы над B , но

$$b_r X_n^r m = \sum_{i=0}^{r-1} b_i X_n^i m$$

для некоторых $b_i \in B$, причем $b_r \neq 0$. Тогда

$$f = b_r X_n^r - \sum_{i=0}^{r-1} b_i X_n^i$$

является многочленом из условия теоремы 2.16, причем $Rf \cap A$ содержит унитарный по X_n многочлен. Элементы вида (13) образуют базис $H \otimes_B M = R \otimes_A M$ над телом H . В силу теоремы 2.16 указанным способом получается любой неприводимый A -модуль.

Итак, каждый неприводимый A -модуль параметризуется натуральным числом p , связанным с заменой переменных вида (11), и неприводимым многочленом f из теоремы 2.16.

Предположим, что A -модуль M задается одним числом p и двумя неприводимыми многочленами $f_1, f_2 \in R$. Это соответствует тому, что в M выбраны два образующих $m_1, m_2 \in M \setminus 0$, причем Rf_1 и Rf_2 — аннуляторы $m_1, m_2 \in M$. Предположим, что $m_2 = hm_1$, $h \in R \setminus Rf_1$. Тогда $f_2 h \in Rf_1$, т.е. $f_2 h = uf_1$ для некоторого $u \in R$. Итак,

$$f_2(A \setminus Rf_1) \cap Rf_1 \neq 0. \quad (14)$$

Обратно, предположим, что $f_1, f_2 \in R$ неприводимы и выполнено (14). Пусть $Rf_1 \cap A$ содержит элемент, унитарный по X_n . По предположению $f_2 h = uf_1$, $h \in A \setminus Rf_1$, $u \in R$. Заметим, что

$$M \simeq A/(A \cap Rf_1) \subseteq R/Rf_1.$$

Таким образом, $z = h + Rf_1 \in M \setminus 0$. Так как модуль M неприводим по теореме 2.16, то $M = Az$. Кроме того, если $w \in R$ и $wz = 0$, то $wh \in Rf_1$. Если бы $w \notin Rf_2$, то $Rw + Rf_2 = R$, поскольку f_2 неприводим. В этом случае $Rh = Rwh + Rf_2h \subseteq Rf_1$, т.е. $h \in Rf_1$, что неверно. Итак, $w \in Rf_2$ и $\text{Ann } z = Rf_1$. По теореме 2.16 $Rf_1 \cap A$ содержит элемент, унитарный по X_n . Следовательно, если пара (p, f_1) из теоремы 2.16 определяет неприводимый A -модуль, то любая пара (p, f_2) , где f_2 — неприводимый элемент из R , удовлетворяющий (14), определяет тот же модуль M и наоборот.

§ 3. Примеры

Рассмотрим ряд примеров неприводимых A -модулей.

Предложение 3.1. Пусть $f \in A$ унитарен по X_n . Если L — левый идеал в A , содержащий Af , причем $L \cap B \neq 0$, то $L = A$.

Доказательство. Пусть $M = A/L$. Тогда M является конечно порожденным A -модулем. Более того, если $b \in L \cap B$ и $m_1 = 1 + L$, то $bm_1 = 0$. Так как $M = Am_1$, то остается воспользоваться предложением 2.5.

Предложение 3.2. Пусть $f \in A \setminus 0$ унитарен по X_n и неприводим в R . Если $w \in A \setminus Af$, то $Aw + Af = A$.

Доказательство. Кольцо R является кольцом главных левых идеалов. Следовательно, по условию $Rw + Rf = R$. Таким образом, $(Aw + Af) \cap B \neq 0$. Остается воспользоваться предложением 3.1.

Теорема 3.3. Пусть $f \in A$ унитарен по X_n . Следующие условия эквивалентны:

- 1) f неприводим в R ;
- 2) f неприводим в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие 1) и $f = gh$, где $g, h \in A$. Предположим, например, что $g \in H$. Тогда $g \in H \cap A = B$. Сравнивая старшие коэффициенты при X_n в f и в gh , получаем, что g имеет правый обратный в A . Но тогда g — одночлен, т.е. g обратим в A .

Предположим теперь, что выполнено условие 2) и $f = gh$, $g, h \in R$. Так как $B \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре, то существует такой элемент $b \in B \setminus 0$, что $h = b^{-1}u$, где $u \in A$. Заменяя g на gb^{-1} и h на u , можно считать, что $h \in A$.

Если $h \in A \setminus Af$, то $Ah + Af = A$ по предложению 3.2. В частности, $1 = vh + wf$ для некоторых $v, w \in A$. Но тогда $1 = (v + wg)h$, т.е. h обратим в A .

Пусть $h \in Af$. Тогда $h = rf$ для некоторого $r \in A \setminus 0$. Отсюда $f = gh = grf$, т.е. g обратим в A .

Теорема 3.4. Пусть $f \in A$ унитарен и неприводим по X_n в A . Тогда A -модуль A/Af неприводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно воспользоваться предложением 3.2 и теоремой 2.16.

Следующее утверждение в качестве следствия приведено в [10]. Изложим его доказательство. Пусть I — левый идеал в B . Как показано в [10, предложение 3.3], на I существует структура A -модуля.

Теорема 3.5. I является неприводимым A -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан ненулевой A -подмодуль J в I . Тогда для любого $z \in I$ существует такое $c \in B \setminus 0$, что $cz \in J$. Если $M = I/J$, то по предложению 2.5 получаем $M = 0$.

В заключение этого параграфа приведем серию примеров неприводимых A -модулей. Для этого в силу теоремы 3.4 укажем серию унитарных неприводимых по X_n полиномов из A . Пусть $m, n \geq 2$ и $f = X_n^m - X_{n-1}$. Ясно, что f унитарен по X_n и по X_{n-1} .

Предложение 3.6. Полином $f \in A$ неприводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = gh$, где $g, h \in A$. Тогда g, h унитарны по X_n . Поскольку f унитарен и по X_{n-1} , то степени g, h по X_{n-1} равны либо 0, либо 1 и g, h унитарны по X_{n-1} . Пусть, например, степень g по X_{n-1} равна 1. Можно считать, что $g = a + bX_{n-1}$, где a, b лежат в подкольце Q в A , порождаемом $D, X_1^{\pm 1}, \dots, X_{n-2}^{\pm 1}, X_n^{\pm 1}$. Кроме того, степень h по X_{n-1} равна нулю, т.е. $h \in Q$. Тогда $ah = X_n^m$, $b\alpha_{n-1}(h) = -1$. Следовательно, h обратим в Q и поэтому h обратим в A . Аналогично рассматривается случай, когда степень g по X_{n-1} равна нулю.

Отметим, что если $f = X_n^m - X_{n-1}$, то A/Af является свободным B -модулем ранга m .

§ 4. Неприводимые модули над многочленами

Обозначим, как и выше, через Λ кольцо (2), где $n > r \geq 0$. Опишем неприводимые Λ -модули.

Предложение 4.1. *Пусть задан произвольный Λ -модуль M . Тогда $X_i M$ является Λ -подмодулем в M . В частности, если модуль M неприводим, то либо $X_i M = 0$, либо $X_i M = M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно воспользоваться соотношением $X_i \Lambda = \Lambda X_i$.

В силу этого предложения можно считать, что неприводимый Λ -модуль M является точным. Если $t \in M \setminus 0$, то найдется такое $a \in \Lambda$, что $t = -aX_{r+1} \dots X_n t$, т.е. $(1 + aX_{r+1} \dots X_n)t = 0$. В силу [1, предложение 2] модуль M является неприводимым A -модулем. Таким образом, в силу теоремы 2.16 получаем $M \simeq \Lambda/(Rf \cap \Lambda)$, где $f \in R$ неприводим, $Rf \cap \Lambda$ содержит унитарный по X_n полином g и, кроме того, $Rf \cap \Lambda$ содержит элемент $1 + aX_{r+1} \dots X_n$. Отсюда следует, что $Rf \cap \Lambda$ содержит элемент

$$1 + aX_{r+1} \dots X_n + (X_{r+1} \dots X_n)^d g,$$

являющийся унитарным при достаточно большом натуральном числе $d \geq 2$.

Теорема 4.2. *Пусть задан точный Λ -модуль M , причем M как модуль над $B \cap \Lambda$ конечно порожден. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) M – неприводимый Λ -модуль;
- 2) $M \simeq \Lambda/(\Lambda \cap Rf)$, где $f \in R$ неприводим и в $\Lambda \cap Rf$ содержит унитарный по X_n элемент $h \equiv 1 \pmod{X_{r+1} \dots X_n \Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше показано, что 1) влечет 2). Обратно, пусть выполнено условие 2). По [1, предложение 2] модуль M является неприводимым над A и, следовательно, неприводимым Λ -модулем.

Теорема 4.3. *Пусть $f \in \Lambda$ унитарен по X_n и $f \equiv 1 \pmod{X_{r+1} \dots X_n \Lambda}$. Элемент f неприводим по X_n в Λ тогда и только тогда, когда f неприводим по X_n в R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f неприводим по X_n в R и $f = gh$, где $g, h \in \Lambda$, причем, например, степень g по X_n меньше степени f . Тогда $g \in H \cap \Lambda = B \cap \Lambda$. Сравнивая свободные члены f и gh , получаем, что g обратим слева в $B \cap \Lambda$, т.е. $g \in D^*$.

Обратно, пусть f неприводим по X_n в Λ и $f = gh$ в R . По теореме 3.3 можно считать, что $g, h \in A$. Кроме того, можно предполагать, что $g = u^{-1}g_1$, $h = v^{-1}h_1$, где u, v – одночлены от $X_{r+1}^{-1}, \dots, X_n^{-1}$, и $g_1, h_1 \in \Lambda$, причем их свободные члены отличны от нуля. Отсюда $vu f = (vg_1 v^{-1})h_1$. Сравнивая свободные члены, получаем, что $vu = 1$, $vg_1 v^{-1}, h_1 \in \Lambda$ и $f = (vg_1 v^{-1})h_1$ – нетривиальное разложение для f в Λ .

Следствие 4.4. *Пусть $f \in \Lambda$ унитарен по X_n и $f \equiv 1 \pmod{X_{r+1} \dots X_n \Lambda}$, причем f неприводим по X_n в Λ . Тогда $\Lambda/\Lambda f$ – неприводимый Λ -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно воспользоваться теоремами 3.3, 4.2, 4.3.

Укажем серию примеров неприводимых многочленов f в Λ . Пусть

$$f = 1 + X_{r+1} \dots X_n (1 - X_n^d), \quad n \geq 2, \quad d \geq 1.$$

Этот многочлен неприводим по X_n в Λ . Действительно, пусть $f = gh$, где $g, h \in \Lambda$. Степень f по X_1 равна 1. Пусть степень g по X_{r+1} равна нулю. Тогда $h = u + X_{r+1}v$, где u, v лежат в подкольце, порожденном

$$D, X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+2}, \dots, X_n.$$

Отсюда $yu = 1$, т.е. $d \in D^*$. Аналогично рассматривается случай, когда степень h по X_1 равна нулю.

§ 5. Тела частных

В этом параграфе рассматриваются тела частных произвольных квантовых многочленов. Для любого элемента $f \in C \setminus 0$, где C из (7), через $\bar{f}$ обозначим младший член f относительно лексикографического порядка на одночленах от $X_1, \dots, X_n$. Пусть $\bar{f} = \kappa(f)X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$, где $\kappa(f) \in D^*$ и $m_i \geq 0$. Положим $\pi(f) = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Аналогично через $\hat{f} = \tau(f)X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$ обозначается старший член f , $\rho(f) = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$. Как отмечено в [1], если $f, g \in C \setminus 0$, то

$$\pi(fg) = \pi(f) + \pi(g), \quad \rho(fg) = \rho(f) + \rho(g)$$

и по модулю N

$$\kappa(fg) = \kappa(f)\kappa(g)\mu(\pi(f), \pi(g)), \quad \tau(fg) = \tau(f)\tau(g)\mu(\rho(f), \rho(g)), \quad (15)$$

где для $z = (z_1, \dots, z_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\mu(z, t) \in \prod_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}^{-z_j t_i} N \in D^*/N.$$

Тогда отображение $\mu: \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^n \rightarrow D^*/N$ билинейно. Рассмотрим на множестве $G = D^*/N \times \mathbb{Z}^n$ операцию

$$(a, z)(b, t) = (ab\mu(z, t), z + t).$$

Несложная проверка показывает, что G относительно этой операции является группой и отображения $\zeta, \psi: (C \setminus 0) \rightarrow G$, $\zeta(f) = (\kappa(f), \pi(f))$, $\psi(f) = (\tau(f), \rho(f))$ являются гомоморфизмами полугрупп.

Пусть $z \in F$, где F из (5), и $z = fg^{-1} = hv^{-1}$, где $f, g, h, v \in C \setminus 0$. В силу условия Оре найдутся такие $t, s \in C$, что $gt = vs$, $ft = hs$. Отсюда

$$\zeta(f)\zeta(t) = \zeta(h)\zeta(s), \quad \zeta(g)\zeta(t) = \zeta(v)\zeta(s),$$

и поэтому

$$\zeta(f)\zeta(g)^{-1} = \zeta(h)\zeta(v)^{-1}.$$

Таким образом, ζ (и аналогично ψ) однозначно продолжаются до отображений

$$\zeta, \psi: F \rightarrow G.$$

Если $f, g, h, v \in C \setminus 0$ и

$$gt = hs, \quad t, s \in C \setminus 0, \quad (16)$$

то $fg^{-1}hv^{-1} = ft(vs)^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \zeta(fg^{-1}hv^{-1}) &= \zeta(f)\zeta(t)\zeta(v)^{-1}\zeta(s)^{-1} = \zeta(f)\zeta(h)\zeta(s)\zeta(g)^{-1}\zeta(v)^{-1}\zeta(s)^{-1} \\ &= \zeta(f)\zeta(g)^{-1}\zeta(h)\zeta(s)^{-1} = \zeta(fg^{-1})\zeta(hv^{-1}). \end{aligned}$$

Итак, ζ является гомоморфизмом групп. Аналогичное утверждение верно и для ψ .

Теорема 5.1. $[F^*, D^*] \cap D^* = N$. Кроме того, $[F^*, F^*] \cap D^*$ — подгруппа в D^* , порожденная N и всеми q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in D^*$ и $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$z^{-1}\alpha_i(z) = z^{-1}X_i z X_i^{-1} \in [F^*, D^*] \cap D^*.$$

Отсюда $N \subseteq [F^*, D^*] \cap D^*$. Кроме того, если $1 \leq i, j \leq n$, то

$$q_{ij} = X_j^{-1}X_i^{-1}X_jX_i \in [F^*, F^*] \cap D^*.$$

Обратно, если

$$z = \prod [f_i, g_i] \in D^*, \quad f_i, g_i \in F^*,$$

то $\zeta(z) = (zN, 0)$. С другой стороны,

$$\zeta(z) = \prod (\{\mu(\pi(f_i), \pi(g_i))\mu(\pi(f_i g_i), \pi(f_i^{-1}g_i^{-1}))\mu(\pi(f_i)^{-1}, \pi(g_i)^{-1})\}, 0),$$

т.е. z лежит в подгруппе, порожденной всеми q_{ij} и N . Более того, если $f_i \in D^*$, то $\zeta(z) = (N, 0)$, и поэтому $z \in N$.

Следствие 5.2. Λ является кольцом общих квантовых многочленов тогда и только тогда, когда мультипликативная абелева группа

$$([F^*, F^*] \cap D^*) / ([F^*, D^*] \cap D^*)$$

имеет максимально возможный ранг, который равен $n(n-1)/2$.

Отметим, что группа $D^* \times \mathbb{Z}^r$ связана с вычислением группы $K_1(\Lambda)$ [18, с. 122].

Предложение 5.3. Пусть C – кольцо квантовых многочленов из (7), и предположим, что

$$\widehat{C} = \widehat{D}_{\widehat{Q}, \widehat{\alpha}}[Y_1, \dots, Y_m]$$

– другое кольцо квантовых многочленов, где $\widehat{D}$ – тело с набором автоморфизмов $\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_m)$ в $\widehat{D}$. Предположим, что задано вложение колец $\phi: \widehat{C} \rightarrow F$, где F из (5), причем $\phi(\widehat{C})\phi(\widehat{C} \setminus 0)^{-1} = F$, $\phi(\widehat{D}) \subseteq D$ и при $i = 1, \dots, m$

$$\phi(Y_i) = \lambda_i X_1^{d_{i1}} \dots X_n^{d_{in}}, \quad \lambda_i \in D^*, \quad d_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Положим

$$\Delta = (d_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{Z}). \quad (18)$$

Тогда линейное отображение $\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ сюръективно и, в частности, $m \geq n$. Если $m = n$, то $\Delta \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ и $\phi(\widehat{D}) = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существуют такие $f, g \in \widehat{C} \setminus 0$, что для $1 \leq i \leq n$ выполнено равенство $X_i = \phi(g)\phi(f)^{-1}$, т.е. $X_i\phi(f) = \phi(g)$. Пусть

$$f = \sum a_{i_1, \dots, i_m} Y_1^{i_1} \dots Y_m^{i_m}, \quad g = \sum b_{j_1, \dots, j_m} Y_1^{j_1} \dots Y_m^{j_m}. \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \sum \phi(a_{i_1, \dots, i_m}) \gamma_{i_1, \dots, i_m} \prod_{s=1}^m \left(\prod_{j=1}^n X_j^{d_{sj}} \right)^{i_s}, \\ \phi(g) &= \sum \phi(b_{j_1, \dots, j_m}) \gamma_{j_1, \dots, j_m} \prod_{s=1}^m \left(\prod_{l=1}^n X_l^{d_{sl}} \right)^{j_s}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\gamma_{j_1, \dots, j_m} \in D^*$, причем

$$\gamma_{i_1, \dots, i_m} \equiv \prod_{s=1}^m \lambda_s^{i_s} \pmod{N}.$$

Таким образом, для любого $i = 1, \dots, n$ найдутся такие

$$(i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}^m,$$

что в $\mathbb{Z}^n$

$$(i_1, \dots, i_m)\Delta + (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) = (j_1, \dots, j_m)\Delta,$$

где Δ из (18). Следовательно,

$$(-i_1 + j_1, \dots, -i_m + j_m)\Delta = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Таким образом, Δ задает сюръективное линейное отображение $\Delta: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$, и поэтому $m \geq n$.

Пусть $\lambda \in D^*$ и $m = n$. По условию найдутся такие $f, g \in \widehat{C}$, что $\lambda = \phi(gf^{-1})$, т.е. $\lambda\phi(f) = \phi(g)$. Предположим, что f, g из (19). В силу (20) для любого набора $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ получаем, что

$$\sum \lambda\phi(a_{i_1, \dots, i_n})\gamma_{i_1, \dots, i_n} = \sum \phi(b_{j_1, \dots, j_n})\gamma_{j_1, \dots, j_n}, \quad (21)$$

где суммы берутся по всем таким наборам $(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, что

$$\sum_{s=1}^n i_s d_{sj} = \sum_{s=1}^n j_s d_{sj} = l_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как матрица Δ принадлежит $GL(n, \mathbb{Z})$, то в (21) с каждой стороны имеется только одно слагаемое, причем $i_s = j_s$ для всех $s = 1, \dots, n$. Поэтому в (21) получаем

$$\lambda\phi(a_{i_1, \dots, i_n}) = \phi(b_{j_1, \dots, j_n}),$$

откуда $\lambda \in \phi(\widehat{D})$.

Предложение 5.4. Пусть $z, w \in F^*$, причем $z + w \neq 0$. Тогда $\pi(z + w) \geq \min(\pi(z), \pi(w))$, причем равенство имеет место, если $\pi(z) \neq \pi(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = fg^{-1}$, $w = hv^{-1}$ и t, s из (16). Тогда

$$\begin{aligned} \pi(z + w) &= \pi(fg^{-1} + hv^{-1}) = \pi(ft + hs) - \pi(vs) \\ &\geq \min(\pi(f) + \pi(t), \pi(h) + \pi(s)) - \pi(vs) \\ &= \min(\pi(f) - \pi(g), \pi(h) - \pi(v)) = \min(\pi(z), \pi(w)). \end{aligned}$$

Если, например, $\pi(z) > \pi(w)$, то $\pi(ft) > \pi(hs)$, и поэтому $\pi(ft + hs) = \pi(ft)$, т.е. $\pi(z + w) = \pi(z)$.

Предложение 5.5. Пусть $z \in F^*$ и $\pi(z) = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Тогда существует такой элемент $\lambda \in D^*$, что либо $z = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$, либо

$$\pi(z - \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}) > \pi(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = uv^{-1}$, где $\bar{u}\bar{v}^{-1} = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$. Тогда $\bar{u} = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \bar{v}$ и $u = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \bar{v} + u'$, где $u' > \bar{u}$, и $v = \bar{v} + v'$, где $v' > \bar{v}$. Отсюда

$$\begin{aligned} z &= uv^{-1} = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \\ &\quad + [(\lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \bar{v} + u')(\bar{v} + v')^{-1} - \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}] \\ &= \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} + (u' - \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} v')v^{-1}. \end{aligned}$$

Если $w = u' - \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} v' \neq 0$, то по предложению 5.4

$$\begin{aligned} \pi(wv^{-1}) &= \pi(w) - \pi(v) \geq \min(\pi(u'), \pi(z) + \pi(v')) - \pi(v) \\ &= \min(\pi(u') - \pi(v), \pi(z) + \pi(v') - \pi(v)) \\ &> \min(\pi(u) - \pi(v), \pi(z) + \pi(v) - \pi(v)) = \pi(z). \end{aligned}$$

Теорема 5.6. Пусть C – кольцо общих квантовых многочленов из (7), $f \in F$, причем для некоторого ненулевого целого числа d и некоторых $\lambda, \lambda' \in D^*$, где $\lambda\lambda' \in N$, выполнено равенство

$$X_1^d f = \lambda f \lambda' X_1^d. \quad (22)$$

Тогда f лежит в подтеле $D(X_1; \alpha_1)$, порожденном D и X_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (22) эквивалентно тому, что

$$\alpha_1^d(f) = \lambda f \lambda'. \quad (23)$$

Пусть $\pi(f) = (m_1, \dots, m_n)$. Тогда в D^*/N получаем

$$\kappa(\alpha_1^d(f)) = \kappa(f) q_{12}^{dm_2} \dots q_{1n}^{dm_n}.$$

Из (23) вытекает, что в D^*/N

$$\kappa(f) q_{12}^{dm_2} \dots q_{1n}^{dm_n} = \kappa(f),$$

и поэтому $m_2 = \dots = m_n = 0$, так как C – кольцо общих квантовых многочленов.

В силу предложения 5.4 имеем $f = X_1^q \lambda_q + z$, где $\lambda_q \in D^*$, $q \in \mathbb{Z}$ и $\pi(z) > \pi(f)$. Продолжая этот процесс, получаем представление f в виде ряда:

$$f = \sum_{i \geq q} X_1^i \lambda_i \in D[[X_1; \alpha_1]], \quad \lambda_i \in D.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$f = 1 + \sum_{i \geq 1} \lambda_i X_1^i = u^{-1} v,$$

где $u, v \in C$, причем

$$u = 1 + \sum_{i=1}^m X_1^i b_i, \quad v = 1 + \sum_{j=1}^m X_1^j a_j,$$

где b_i, a_j лежат в подкольце, порожденном $D, X_2, \dots, X_n$. Таким образом, $v = uf$ и для любого $l \geq m+1$

$$0 = \lambda_l + \alpha_1^{1-l}(b_1)\lambda_{l-1} + \dots + \alpha_1^{m-l}(b_m)\lambda_{l-m}. \quad (24)$$

Пусть $b_i = \mu_i + b'_i$, где $\mu_i \in D$ и b'_i – сумма одночленов вида

$$\beta X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}, \quad \beta \in D^*, \quad (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}.$$

Из (24) следует, что

$$0 = \lambda_l + \alpha_1^{1-l}(\mu_1)\lambda_{l-1} + \dots + \alpha_1^{m-l}(\mu_m)\lambda_{l-m},$$

и поэтому

$$g = \left(1 + \sum_{i=1}^m X_1^i \mu_i\right)^{-1} \quad g \in D(X_1; \alpha_1).$$

Теорема 5.7. Пусть C – кольцо общих квантовых многочленов из (7), $f \in F$, причем для некоторого ненулевого целого числа d и некоторых $\lambda, \lambda' \in D^*$ выполнено равенство

$$X_1^d f = \lambda f \lambda' X_1^d. \quad (25)$$

Если $\pi(f) = (m_1, \dots, m_n)$, то по модулю N

$$\lambda \lambda' = q_{12}^{dm_1} \dots q_{1n}^{dm_n}. \quad (26)$$

Кроме того, f лежит в $D(X_1; \alpha_1) X_2^{m_2} \dots X_n^{m_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (25) эквивалентно условию (23). Как и в предыдущей теореме,

$$\kappa(\alpha_1^d(f)) = \kappa(f) q_{12}^{dm_1} \dots q_{1n}^{dm_n},$$

откуда вытекает (25). Кроме того, если $f' = f X_2^{-m_2} \dots X_n^{-m_n}$, то

$$X_1^d f' = \beta f' \beta' X_1^d, \quad \beta \beta' \in N.$$

Остается воспользоваться предыдущей теоремой.

Следствие 5.8. Пусть C – кольцо общих квантовых многочленов из (7) и $\widehat{C}$ из предложения 5.3. Предположим, что задано вложение колец $\phi: \widehat{C} \rightarrow F$, причем $\phi(\widehat{D}) \subseteq D$ и $\phi(Y_1) = \lambda_1 X_1$, $\lambda_1 \in D$. Тогда при $i \geq 2$

$$\phi(Y_i) = a_i X_2^{m_{i2}} \dots X_n^{m_{in}}, \quad a_i \in D(X_1; \alpha_1), \quad m_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \geq 2$. Тогда $Y_1 Y_i = \widehat{q_{1i}} Y_i Y_1$, откуда

$$\lambda_1 X_1 \phi(Y_i) = \phi(\widehat{q_{1i}}) \phi(Y_i) \lambda_1 X_1,$$

и поэтому

$$X_1 \alpha_1^{-1}(\lambda_1) \phi(Y_2) = \phi(\widehat{q_{12}}) \alpha^{-1}(\lambda_1^{-1}) \alpha_1^{-1}(\lambda_1) \phi(Y_2) \lambda_1 X_1.$$

Остается воспользоваться предыдущей теоремой с

$$d = 1, \quad f = \alpha_1^{-1}(\lambda_1) \phi(Y_i), \quad \lambda = \phi(\widehat{q_{1i}}) \alpha^{-1}(\lambda_1^{-1}), \quad \lambda' = \lambda_1.$$

§ 6. Морита-эквивалентность

Основная цель этого параграфа состоит в доказательстве теоремы о том, что если кольца общих квантовых многочленов Морита-эквивалентны, то они изоморфны. Кроме того, вычисляется группа Пикара кольца общих многочленов. Доказательство основано на изучении тел частных квантовых полиномов и колец эндоморфизмов проективных идеалов.

В начале параграфа рассматриваются свойства тел частных F (см. (5)) кольца A из (7). Пусть K – подкольцо в F , причем существует такой ненулевой элемент $w \in \Lambda \setminus 0$, что $wK \subseteq \Lambda$. По условию $K \subseteq w^{-1}\Lambda$. Пусть L – множество всех таких $a \in \Lambda$, что $w^{-1}a \in K$, т.е. $L = \Lambda \cap wK$. Так как K является кольцом, то из условия $a, b \in L$ вытекает, что $aw^{-1}b \in L$, причем $w \in L$. Зафиксируем $b \in L \setminus 0$. По условию Оре найдутся такие элементы $u, v \in \Lambda \setminus 0$, что

$$bu = wv. \quad (27)$$

Таким образом, для любого $a \in L \setminus 0$ найдется такое $c \in L \setminus 0$, что

$$av = cu. \quad (28)$$

Пусть E – множество всех таких $(z_1, z_2) \in \Lambda \oplus \Lambda$, что $z_1v = z_2u$. По (27), (28) получаем $(a, c), (w, b) \in E$. Так как $b, w \neq 0$ и Λ – область, то обе проекции E в Λ являются вложениями. Таким образом, E изоморфно левому идеалу в Λ .

Пусть $(a, c) \in E$. В силу (27), (28) получаем $c^{-1}a = uv^{-1} = b^{-1}w$, т.е. $c = aw^{-1}b$.

Теорема 6.1. *Если $n = 1$, то $w = d'w'$ в Λ , причем $w'K(w')^{-1} \subseteq \Lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем элемент $b \in E \setminus w\Lambda$. Так как Λ – кольцо главных левых идеалов, то $E = \Lambda(p, q)$. Из определения E вытекает, что наибольший левый общий делитель p и q равен 1. Отсюда

$$(w, b) = d(p, q), \quad (a, c) = f(p, q), \quad (29)$$

где $d, f \in \Lambda$. При этом d является наибольшим левым общим делителем w и b . Так как $b \notin \Lambda w$, то степень d меньше степени w и степень p больше нуля. Так как K – область, то из (27) вытекает, что $a = fp$ для некоторого $a \in L$. Следовательно, произвольный ненулевой элемент из K имеет вид $w^{-1}a = p^{-1}d^{-1}fp$, где $d, p \in E \setminus 0$ фиксированы. Поэтому, переходя к подкольцу pKp^{-1} , можно уменьшить степень w . Таким образом, мы можем заменить w на d . Совершая этот переход, мы окончательно получаем, что $w = d'w'$, где $d', w' \in \Lambda$, причем $L = d'\Lambda w'$. Таким образом, если $a = d'a'w' \in L$, то

$$w^{-1}a = (w')^{-1}(d')^{-1}d'a'w' = (w')^{-1}a'w'.$$

Следовательно, $w'K(w')^{-1}$ является подкольцом в Λ .

Рассмотрим теперь общий случай, когда $n \geq 1$.

Предложение 6.2. *Если $z \in K \setminus 0$ и $\pi(z) = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, то $m_{r+1}, \dots, m_n \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \geq r + 1$ и Λ_i — подкольцо в Λ , порожденное

$$D, X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n.$$

Тогда $S_i = \Lambda_i \setminus 0$ удовлетворяет условию Оре. По теореме 6.1 существует такое

$$w' \in S_i^{-1}\Lambda = S_i^{-1}\Lambda_i[X_i; \alpha_i], \quad w' \neq 0,$$

что $w'K(w')^{-1} \subseteq S_i^{-1}\Lambda$. Если $z \in K \setminus 0$, то $\pi(z) = \pi(w'z(w')^{-1})$, откуда $m_i \geq 0$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $r \geq 1$. Как и в предложении 2.3, совершая замену переменных вида

$$X_i \rightarrow \begin{cases} X_i X_1^{-p^i}, & \text{если } i \geq 2, \\ X_1, & \text{если } i = 1, \end{cases}$$

для достаточно большого натурального числа p , можно считать, что в w старший и младший коэффициенты по X_1 являются одночленами.

Пусть Λ_1 — подкольцо в Λ , порожденное

$$D, X_2^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n.$$

Положим $S_1 = \Lambda_1 \setminus 0$. В этом случае

$$S_1^{-1}\Lambda = S_1^{-1}\Lambda_1[X_1^{\pm 1}; \alpha_1].$$

Теорема 6.3. Пусть K — подкольцо в теле F из (5), причем $wK \subseteq \Lambda$ для некоторого элемента $w \in \Lambda \setminus 0$, у которого старший и младший члены относительно X_1 являются одночленами. Пусть K^* — группа обратимых элементов в K . Тогда существует такой элемент $w' \in S_1^{-1}\Lambda \setminus 0$, что младший и старший коэффициенты w' относительно X_1 являются одночленами из C , причем если $x \in K^*$, то

$$w'x(w')^{-1} = cX_1^{m_1} \dots X_r^{m_r}, \quad c \in D^*, \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

В частности,

$$w'x(w')^{-1} \in D \iff \pi(x) = 0 \iff \rho(x) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.1 в $S_1^{-1}\Lambda$ имеется такое разложение $w = d'w'$, что

$$w'K(w')^{-1} \subseteq S_1^{-1}\Lambda.$$

Без ограничения общности можно считать, что младший коэффициент d' относительно X_1 равен 1, а младший член w' совпадает с младшим членом w и является одночленом. Так как каждый элемент из K^* обратим, то для любого $x \in K^*$ элемент $y = w'x(w')^{-1}$ обратим в $S_1^{-1}\Lambda$. Таким образом,

$$y = X_1^m \lambda, \quad \lambda \in S_1^{-1}\Lambda_1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Но $wx = w(w')^{-1}xw' = d'xw' \in \Lambda$. Пусть

$$\begin{aligned} d' &= X_1^q + \sum_{i>q} X_1^i a_i, & a_i &\in S_1^{-1}\Lambda_1, \\ w' &= X_1^t b + \sum_{i>t} X_1^i b_i, & b_i &\in S_1^{-1}\Lambda_1, \end{aligned}$$

где $b \in \Lambda$ — одночлен от $X_2, \dots, X_n$. Тогда младший коэффициент wx относительно X_1 лежит в Λ и равен $\alpha_1^t(\lambda)b$. Таким образом, $\lambda = hb_1^{-1}$, где $b_1 = \alpha_1^{-t}(b) \in \Lambda_1$ является одночленом от $X_2^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n$ и $h \in \Lambda$. По предложению 6.2 получаем, что

$$\pi(\lambda) = \pi(h) - \pi(b_1) = (0, m_2, \dots, m_n),$$

где $m_{r+1}, \dots, m_n \geq 0$. Таким образом, $\lambda \in A$ является суммой одночленов

$$\theta X_2^{d_2} \dots X_n^{d_n}, \quad \theta \in D^*, \quad d_i \in \mathbb{Z},$$

причем $d_{r+1}, \dots, d_n \geq 0$. Следовательно, $\lambda \in \Lambda \cap S_1^{-1}\Lambda_1$. Проводя аналогичные рассуждения для x^{-1} , получаем, что $\lambda \in \Lambda \cap S_1^{-1}\Lambda_1$. Итак, λ — обратимый элемент из $\Lambda \cap S_1^{-1}\Lambda_1$, т.е. λ является одночленом от $X_2^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}$.

Следствие 6.4. Пусть $\widehat{D}$ — подтело в K . Тогда $\widehat{D} \subseteq (w')^{-1}Dw'$.

Теорема 6.5. Пусть A — произвольное кольцо лорановских квантовых многочленов из (7), $\widehat{D}$ — тело с набором автоморфизмов

$$\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_m),$$

где $\widehat{Q} = (\widehat{q}_{ij}) \in \text{Mat}(m, \widehat{D})$ и $\widehat{A} = \widehat{D}_{\widehat{Q}, \widehat{\alpha}}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_m^{\pm 1}]$.

Предположим, что задано вложение колец $\phi: \widehat{A} \rightarrow F$, причем существует такой ненулевой элемент $w \in A \cap \phi(\widehat{A})$, что $Aw\phi(\widehat{A}) \subseteq A \cap \phi(\widehat{A})$, и $\phi(\widehat{A})\phi(\widehat{A} \setminus 0)^{-1} = F$. Тогда $m = n$ и существует такой элемент $w' \in F$, что после некоторой замены переменных $Y_1, \dots, Y_n$ и $X_1, \dots, X_n$

$$w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} = D, \quad w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = X_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

В частности, отображение $\psi(z) = w'\phi(z)(w')^{-1}$ задает изоморфизм $\psi: \widehat{A} \rightarrow A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что A и $\widehat{A}$ равноправны, ибо от ϕ можно перейти к ϕ^{-1} . Поэтому можно считать, что $n \geq m$. В силу теоремы 6.3 существует такой элемент w' , что $\psi(\widehat{D}) = w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} \subseteq D$ и каждое $\psi(Y_i) = w'\phi(Y_i)(w')^{-1}$, $i \geq 1$, является одночленом от $X_1, \dots, X_n$. В силу предложения 5.3 получаем $m = n$ и $\psi(\widehat{D}) = D$. Кроме того, так как соответствующая матрица Δ из (18) лежит в $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$, то, совершая замену переменных $Y_1, \dots, Y_n$ и $X_1, \dots, X_n$, можно считать, что Δ — единичная матрица. Так как $\psi(\widehat{D}) = D$, то, делая линейную замену $Y_1, \dots, Y_n$, можно добиться, чтобы

$$w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = X_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Подкольцо $\phi(\widehat{A})$ в теле F является правым порядком и правым дробным идеалом в смысле [14, п. 3.1.2, с. 62; п. 3.1.11, с. 65].

Теорема 6.7. Пусть Λ – кольцо общих квантовых многочленов с $r \geq 1$, $\widehat{D}$ – тело с набором автоморфизмов $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m)$, $\widehat{Q} = (\hat{q}_{ij}) \in \text{Mat}(m, \widehat{D})$ и

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{D}_{\widehat{Q}, \hat{\alpha}}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_s^{\pm 1}, Y_{s+1}, \dots, Y_m]$$

– другое кольцо общих квантовых многочленов, $s \geq 1$. Предположим, что задано вложение колец $\phi: \widehat{\Lambda} \rightarrow F$, причем

$$\phi(\widehat{A})\phi(\widehat{A} \setminus 0)^{-1} = F, \quad (30)$$

и существует такой элемент $w \in \Lambda \setminus 0$, что $w\phi(\widehat{\Lambda}) \subseteq \Lambda$. Предположим, что целочисленные векторы

$$\pi(\phi(Y_1)), \dots, \pi(\phi(Y_s)) \in \mathbb{Z}^n$$

независимы. Тогда $s \leq r$, $n \leq m$ и существует такой элемент $w' \in F$, что

$$w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} \subseteq D, \quad w'\phi(\widehat{\Lambda})(w')^{-1} \subseteq \Lambda,$$

причем после некоторой замены переменных $Y_1, \dots, Y_s$ и $X_1, \dots, X_r$ получаем, что при $n \geq 2$ и $i = 1, \dots, s$

$$w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = \lambda_i X_i, \quad \lambda_i \in D^*.$$

Если же либо $s \geq 2$, либо $s = 1$, $m > 2$, то $w'\phi(Y_i)(w')^{-1}$ при $i \geq s + 1$ является одночленом от $X_{s+1}^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n$. Если же $s = 1$, $m = 2$, то при $n = 2$

$$w'\phi(Y_1)(w')^{-1} = X_1, \quad w'\phi(Y_2)(w')^{-1} = aX_2, \quad w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} = D,$$

где $a \in D[X_1^{\pm 1}; \alpha_1]$. Если же $s = r = n = 1$, $m = 2$, то

$$\begin{aligned} w'\phi(Y_1)(w')^{-1} &= \lambda_1 X_1^d, \quad \lambda \in D^*, \quad d \in \mathbb{Z}, \\ w'\phi(Y_2)(w')^{-1} &\in w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} \cap D[X_1^{\pm 1}; \alpha_1], \\ w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} &\subsetneq D. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.5 существует такой элемент $w' \in S^{-1}\Lambda$, что

$$w'\phi(\widehat{\Lambda}^*)(w')^{-1} \subseteq \Lambda^*, \quad w'\phi(\widehat{\Lambda})(w')^{-1} \subseteq S^{-1}\Lambda. \quad (31)$$

В частности,

$$w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} \subseteq D.$$

Для любого $z \in \widehat{\Lambda}$ положим $\psi(z) = w'\phi(z)(w')^{-1}$. Совершая замены переменных, можно считать, что при $i = 1, \dots, s$

$$\psi(Y_i) = \lambda_i X_i^{d_i}, \quad \lambda_i \in D^*, \quad d_i \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

По условию $d_i \neq 0$. Поэтому $s \leq r$. В силу следствия 5.8 и (31) для $i \geq s+1$ получаем

$$\psi(Y_i) = a_i X_2^{m_{i2}} \dots X_n^{m_{in}} \in S^{-1}\Lambda, \quad a_i \in D(X_1; \alpha_1). \quad (33)$$

Тогда $a_i \in D[X^{\pm 1}; \alpha_1]$. Покажем, что если либо $s \geq 2$, либо $s = 1, m > 2$, то $a_i(X_1)$ является одночленом от X_1 . Если $s \geq 2$, то, переставляя X_1 и X_2 местами, по тем же соображениям для любого $i \geq s+1$ получаем

$$\psi(Y_i) = a'_i X_1^{m'_{i1}} X_3^{m'_{i3}} \dots X_n^{m'_{in}}, \quad a'_i \in D[X_2^{\pm 1}; \alpha_2].$$

Отсюда для всех $i \geq s+1$

$$\psi(Y_i) = \mu_i X_1^{l_{i1}} X_2^{l_{i2}} \dots X_n^{l_{in}}, \quad l_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \mu_i \in D^*,$$

и в этом случае утверждение доказано.

Пусть $s = 1$. Воспользуемся предложением 5.3, где вместо $\widehat{D}$ возьмем $\widehat{D}(Y_1; \widehat{\alpha}_1)$. Из (33) в силу предложения 5.3 получаем, что матрица

$$\Delta' = (m_{ij}) \in \text{Mat}((m-1) \times (n-1), \mathbb{N} \cup 0)$$

задает эпиморфизм $\Delta': \mathbb{Z}^{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-1}$. Отсюда вытекает, что столбцы Δ' линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Кроме того, $m \geq n$.

Пусть $s = 1, n \geq 3$. Тогда

$$\psi(Y_2)\psi(Y_3) = \psi(\widehat{q}_{12})\psi(Y_3)\psi(Y_2).$$

В силу (33)

$$a_2 X_2^{m_{22}} \dots X_n^{m_{2n}} a_3 X_2^{m_{32}} \dots X_n^{m_{3n}} = \psi(\widehat{q}_{12}) a_3 X_2^{m_{32}} \dots X_n^{m_{3n}} a_2 X_2^{m_{22}} \dots X_n^{m_{2n}}.$$

Пусть

$$\pi(a_i) = (n_i, 0, \dots, 0), \quad \rho(a_i) = (d_i, 0, \dots, 0).$$

Тогда $d_i \geq n_i$. Положим

$$x = (n_2, m_{22}, \dots, m_{2n}), \quad y = (n_3, m_{32}, \dots, m_{3n}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда в группе G

$$\kappa(a_2)\kappa(a_3)\mu(x, y) = \psi(\widehat{q}_{12})\kappa(a_2)\kappa(a_3)\mu(y, x),$$

откуда

$$\psi(\widehat{q}_{12}) = \mu(x, y)\mu(y, x)^{-1}.$$

Аналогично, рассматривая старший член, получаем, что

$$\mu(x, y)\mu(y, x)^{-1} = \mu(d, d')\mu(d', d)^{-1},$$

где

$$d = (d_2, m_{22}, \dots, m_{2n}), \quad d' = (d_3, m_{32}, \dots, m_{3n}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Так как Λ – кольцо общих многочленов, то, сравнивая показатели при q_{1j} , $1 < j \leq n$, получаем

$$-n_3 m_{2j} + n_2 m_{3j} = -d_3 m_{2j} + d_2 m_{3j}.$$

Отсюда при $j = 2, \dots, n$

$$(d_3 - n_3)m_{2j} = (d_2 - n_2)m_{3j} \geq 0. \quad (34)$$

По доказанному выше все столбцы матрицы $\Delta' = (m_{ij})$, где $i, j \geq 2$, независимы. Поэтому из (34) получаем $d_3 = n_3$, $d_2 = n_2$, т.е. $\psi(Y_2), \dots, \psi(Y_m)$ являются одночленами от $X_1, \dots, X_n$. Итак, если либо $s \geq 2$, либо $s = 1$, $m \geq 3$, то соответствующая матрица Δ из предложения 5.3 имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{diag}(d_1, \dots, d_s) & 0 \\ \hline \star & \Delta'' \end{array} \right),$$

и эта матрица задает эпиморфизм $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Следовательно,

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_s) \in \text{GL}(s, \mathbb{Z}),$$

т.е. можно считать, что $d_1 = \dots = d_s = 1$.

Пусть, наконец, $s = 1$, $m = 2$. По доказанному выше $n \leq 2$. Пусть $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(\widehat{D}) \subseteq D, \quad \psi(Y_1) &= \lambda_1 X_1^{d_1}, \quad \psi(Y_2) = a X_2^{d_2}, \\ d_i &\in \mathbb{Z}, \quad d_2 \geq 2, \quad \lambda_1 \in D^*, \quad a \in D[X_1; \alpha_1]. \end{aligned} \quad (35)$$

Воспользуемся предложением 5.3, где вместо D и $\widehat{D}$ возьмем соответственно $D(X_1; \alpha_1)$ и $\widehat{D}(Y_1; \widehat{\alpha}_1)$. Тогда $\psi(\widehat{D}(Y_1; \widehat{\alpha}_1)) = D(X_1; \alpha_1)$ и $d_2 = 1$, поскольку соответствующая матрица $\Delta = (d_2) \in \text{GL}(1, \mathbb{Z})$.

В силу условия (30) существуют такие $f, g \in \widehat{C} \setminus 0$, что $X_1 \psi(f) = \psi(g)$. Без ограничения общности в силу (35) можно считать, что

$$f = \delta Y_1^{l_1} Y_2^{l_2}, \quad g = \gamma Y_1^{s_1} Y_2^{s_2}, \quad \delta, \gamma \in \widehat{D}^*. \quad (36)$$

Тогда

$$X_1 \psi(\delta)(\lambda_1 X_1^{d_1})^{l_1} (a X_2)^{l_2} = \psi(\gamma)(\lambda_1 X_1^{d_1})^{s_1} (a X_2)^{s_2}.$$

Следовательно, $l_2 = s_2$ и $1 + d_1 l_1 = d_1 s_1$, откуда $d_1 = s_1 - l_1 = \pm 1$. Переходя от X_1 к X_1^{-1} , можно считать, что $d_1 = 1$.

Если $\lambda \in D$, то существуют такие $f, g \in \widehat{C} \setminus 0$, что

$$\lambda\psi(f) = \psi(g). \quad (37)$$

В силу (35) можно считать, что f, g из (36). Тогда

$$\lambda\psi(\delta)(\lambda_1 X_1)^{l_1} (aX_2)^{l_2} = \psi(\gamma)(\lambda_1 X_1)^{s_1} (aX_2)^{s_2},$$

откуда $l_1 = s_1$, $l_2 = s_2$, и поэтому $\lambda\psi(\gamma\delta^{-1}) \in \psi(\widehat{D})$. Таким образом, $\psi(\widehat{D}) = D$, и можно считать, что

$$\psi(Y_1) = X_1, \quad \psi(Y_2) = aX_2, \quad a \in D[X_1^{\pm 1}; \alpha_1].$$

Предположим, наконец, что $s = r = n = 1$, $m = 2$. Тогда

$$\psi(Y_1) = \lambda_1 X_1^{d_1}, \quad d_1 \in \mathbb{Z} \setminus 0, \quad \psi(Y_2) = a \in D[X_1^{\pm 1}; \alpha_1].$$

При этом

$$\psi(Y_1)\psi(Y_2) = \psi(\widehat{q}_{12})\psi(Y_2)\psi(Y_1),$$

откуда $\lambda_1 X_1^{d_1} a = \psi(\widehat{q}_{12}) a \lambda_1 X_1^{d_1}$. Если $\bar{a} = \delta X_1^{d_2}$, то

$$\lambda \alpha_1^{d_1}(\delta) = \psi(\widehat{q}_{12}) \delta \alpha_1^{d_2}(\lambda),$$

т.е. $\psi(\widehat{q}_{12}) \in N$, что невозможно, если $\psi(\widehat{D}) = D$.

Предложение 6.8. Пусть $\Lambda, \widehat{\Lambda}$ — кольца общих квантовых многочленов из теоремы 6.7, причем $s, r \geq 1$. Предположим, что задано вложение колец $\phi: \widehat{\Lambda} \rightarrow F$, причем выполнено (30), и существует такой ненулевой элемент $w \in \Lambda \cap \phi(\widehat{\Lambda})$, что

$$\Lambda w \phi(\widehat{\Lambda}) \subseteq \Lambda \cap \phi(\widehat{\Lambda}). \quad (38)$$

Тогда элементы $\pi(\phi(Y_1)), \dots, \pi(\phi(Y_s)) \in \mathbb{Z}^n$ независимы и найдется такой элемент $w' \in F^*$, что $w' \phi(\widehat{D})(w')^{-1} = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.3 и следствию 6.4 существует такой элемент $w' \in F^*$, что $w' \phi(\widehat{D})(w')^{-1} \subseteq D$ и $w' \phi(Y_i)(w')^{-1}$ при $i = 1, \dots, s$ является одночленом от $X_1, \dots, X_r$. Но $\phi^{-1}: \Lambda \rightarrow F$ и $\phi^{-1}(\Lambda) \phi^{-1}(w) \subseteq \widehat{\Lambda}$. Поэтому, применяя теорему 6.3 и следствие 6.4, получаем

$$w'' \phi^{-1}(D)(w'')^{-1} \subseteq \widehat{D} \quad (39)$$

для некоторого $w'' \in F^*$.

Пусть $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{Z}$ и

$$0 = l_1 \pi(\phi(Y_1)) + \dots + l_s \pi(\phi(Y_s)) = \pi(\phi(Y_1^{l_1}) \dots \phi(Y_s^{l_s})).$$

По теореме 6.3 найдется такой элемент $w' \in F$, что

$$w'\phi(Y_1^{l_1} \dots Y_s^{l_s})(w')^{-1} = \lambda X_1^{d_1} \dots X_r^{d_r}, \quad \lambda \in D^*, \quad d_i \in \mathbb{Z}.$$

Применяя π , получаем в $\mathbb{Z}^n$, что $(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0) = 0$, т.е. $d_1 = \dots = d_r = 0$. Отсюда

$$\phi(Y_1^{l_1} \dots Y_s^{l_s}) = (w')^{-1} \lambda w', \quad \lambda \in D^*.$$

Следовательно, по (39)

$$Y_1^{l_1} \dots Y_s^{l_s} = u^{-1} \lambda' u, \quad u \in F^*, \quad \lambda' \in \widehat{D}. \quad (40)$$

Пусть $\hat{\pi}$ определено в $\widehat{\Lambda}$ аналогично π . Тогда из (40) в $\mathbb{Z}^m$ получаем

$$(l_1, \dots, l_s, 0, \dots, 0) = \hat{\pi}(\lambda') = 0,$$

т.е. $l_1 = \dots = l_s = 0$.

Теорема 6.9. Пусть $\Lambda, \widehat{\Lambda}, r, s \geq 1, n \geq m$, ϕ из теоремы 6.7, причем Λ и $\widehat{\Lambda}$ – кольца общих квантовых многочленов. Предположим, что существует такой элемент

$$w \in \Lambda \cap \phi(\widehat{\Lambda}), \quad w \neq 0,$$

что выполнено условие (38). Тогда $s = r, n = m$ и существует такой элемент $w' \in S^{-1}\Lambda$, что после некоторой замены переменных $Y_1, \dots, Y_s$ и $X_1, \dots, X_r$ выполнены равенства

$$w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} = D, \quad w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = X_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (41)$$

В частности, отображение $z \mapsto w'\phi(z)(w')^{-1}$ задает изоморфизм колец Λ и $\widehat{\Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6.7 и предложению 6.8 получаем, что $m = n$. Следовательно, по теореме 6.7 существует такой элемент $w' \in S^{-1}\Lambda$, что после некоторой замены переменных

$$w'\phi(\widehat{D})(w')^{-1} \subseteq D, \quad w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = \lambda_i X_i, \quad \lambda_i \in D^*, \quad 1 \leq i \leq r,$$

и каждое $w'\phi(Y_i)(w')^{-1}$ является одночленом от $X_1, \dots, X_n$. Как отмечено в предложении 6.8, кольца Λ и $\widehat{\Lambda}$ равноправны, и поэтому $r = s$. Кроме того, по предложению 5.3 получаем первое равенство в (41).

Если $i \geq s + 1$ и

$$w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = \lambda_i X_1^{m_{i1}} \dots X_n^{m_{in}},$$

то, заменяя Y_i на $Y'_i = Y_r^{-m_{ir}} \dots Y_1^{-m_{i1}} Y_i$, получаем

$$w'\phi(Y'_i)(w')^{-1} = \lambda_i X_{r+1}^{m_{i,r+1}} \dots X_n^{m_{in}}, \quad m_{ij} \geq 0.$$

Как и в предложении 5.3, матрица Δ имеет вид

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & \Delta' \end{array} \right), \quad \Delta' = (m_{ij})_{i,j > r} \in \text{GL}(n - r, \mathbb{Z}),$$

где E_r — единичная матрица размера r . Аналогично найдется такое $w'' \in F^*$, что для $i = 1, \dots, n$

$$(w'')^{-1}\phi^{-1}(X_i)w'' = \theta_i Y_1^{s_{i1}} \dots Y_n^{s_{in}}, \quad \theta_i \in \widehat{D},$$

причем

$$S = (s_{ij}) = \Delta^{-1} \in \text{GL}(n, \mathbb{Z}).$$

Следовательно,

$$S = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & S' \end{array} \right), \quad S' = (s_{ij})_{i,j > r} = (\Delta')^{-1} \in \text{GL}(n-r, \mathbb{Z}),$$

причем $s_{ij} \geq 0$. Таким образом, матрицы S' , Δ' неотрицательны. Поэтому матрица Δ' является перестановочной. Перенумеровывая $Y_{r+1}, \dots, Y_n$, можно считать, что

$$w'\phi(Y_i)(w')^{-1} = X_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Перейдем теперь к рассмотрению колец эндоморфизмов левых идеалов в Λ . Нам потребуется

Предложение 6.10. Пусть I — ненулевой левый идеал в Λ и $K = \text{End}_\Lambda I$. Тогда имеется вложение $\phi: K \rightarrow F$, причем правое тело частных K совпадает с F . В частности, K не имеет делителей нуля. Если $w \in I \cap C$, то $\Lambda w\phi(K) \subseteq \Lambda \cap \phi(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in I \cap C$. Тогда $\Lambda w \subseteq I$. Если $a \in I \setminus 0$, то найдутся такие $u, v \in C \setminus 0$, что $ua = vw$. Если $\gamma \in K \setminus 0$, то $u\gamma(a) = v\gamma(w)$. Отсюда

$$\gamma(a) = u^{-1}v\gamma(w) = aw^{-1}\gamma(w).$$

Таким образом, если $\phi(\gamma) = w^{-1}\gamma(w) \in F$, то $\gamma(a) = a\phi(\gamma)$ для любого $a \in I$. Нетрудно видеть, что сопоставление ϕ является вложением K в F . При этом $w\phi(K) \subseteq \Lambda$, $w \in \phi(K)$. Если $u, v \in C \setminus 0$, то

$$vu^{-1} = (vw)(uw)^{-1} \in K \cdot (K \setminus 0)^{-1}.$$

Теорема 6.11. Пусть $A, \widehat{A}$ — кольца лорановских многочленов из теоремы 6.5. Предположим, что существует такой левый идеал I в A , что $\text{End}_A I \simeq \widehat{A}$. Тогда $A \simeq \widehat{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6.3 и предложения 6.10 получаем, что выполнены все условия теоремы 6.5. Остается воспользоваться утверждением теоремы 6.5.

Теорема 6.12. Пусть I — проективный левый идеал в кольце общих квантовых многочленов Λ , где $r \geq 1$. Если $\text{End}_\Lambda I \simeq \widehat{\Lambda}$, где $\widehat{\Lambda}$ — кольцо общих квантовых многочленов с $s \geq 1$ из теоремы 6.7, то I — главный левый идеал в Λ . Кроме того, $\Lambda \simeq \widehat{\Lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in I \setminus 0$. Как показано в предложении 6.10, существует такое вложение $\phi: \hat{\Lambda} \rightarrow F$, что выполнены условия (38), (30). Так как $\Lambda, \hat{\Lambda}$ равноправны, то можно считать, что $n \geq m$. По теореме 6.9 найдется такой элемент $w' \in F^*$, что отображение ψ , где $\psi(z) = w'\phi(z)(w')^{-1}$, является изоморфизмом колец, причем выполнены условия (41). Если $x \in I$, $z \in \Lambda$ и $z = \psi(y)$, то

$$x(w')^{-1}z = x(w')^{-1}w'\phi(y)(w')^{-1} = x\phi(y)(w')^{-1} \in I(w')^{-1}.$$

Таким образом, $I(w')^{-1}$ является $(\Lambda - \Lambda)$ -бимодулем и $I(w')^{-1} \cap \Lambda$ является ненулевым идеалом в Λ . Так как кольцо A просто, то $I(w')^{-1} \supseteq \Lambda X_{r+1}^d \dots X_n^d$ для некоторого $d \geq 0$. Следовательно, $X_{r+1}^d \dots X_n^d w' \in I$. Пусть J — множество всех таких $u \in \Lambda$, что $I(w')^{-1}u \subseteq \Lambda$.

Лемма 6.13. *J является ненулевым идеалом в Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in I$ и $a, b \in \Lambda$. Тогда $I(w')^{-1}aub \subseteq I(w')^{-1}ub \subseteq \Lambda b \subseteq \Lambda$. Так как кольцо $A = \Lambda X_{r+1} \dots X_n$ просто, то J содержит $X_{r+1}^l \dots X_n^l$ для некоторого $l \geq 0$. Положим

$$L = I(w')^{-1}X_{r+1}^l \dots X_n^l \subseteq \Lambda.$$

Тогда L является левым идеалом, изоморфным I . Кроме того, для любого $a \in \Lambda$

$$\begin{aligned} La &= I(w')^{-1}X_{r+1}^l \dots X_n^l a (X_{r+1}^l \dots X_n^l)^{-1} (X_{r+1}^l \dots X_n^l) \\ &\subseteq I(w')^{-1}X_{r+1}^l \dots X_n^l = L, \end{aligned}$$

поскольку $I(w')^{-1}$ является правым Λ -модулем и

$$X_{r+1}^l \dots X_n^l a (X_{r+1}^l \dots X_n^l)^{-1} \in \Lambda.$$

Итак, можно считать, что $I = L$ — идеал в Λ . При этом $X_{r+1}^q \dots X_n^q \in I$ для некоторого $q \geq 0$, ибо кольцо $A = \Lambda X_{r+1} \dots X_n$ просто.

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 6.14. *Пусть Λ — кольцо общих квантовых многочленов, $n > r$ и I — ненулевой проективный левый идеал в Λ , причем $\text{End}_{\Lambda} I = \Lambda$. Тогда $\text{End}_{\Lambda/X_n \Lambda}(I/X_n I) = \Lambda/X_n \Lambda$, т.е. $IX_n \subseteq X_n I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $I/X_n I$ является проективным модулем над кольцом $\Lambda/X_n \Lambda$. Кроме того, в силу проективности I естественный эпиморфизм модулей $I \rightarrow I/X_n I$ индуцирует эпиморфизм колец эндоморфизмов

$$\nu: \Lambda = \text{End}_{\Lambda} I \rightarrow \text{End}_{\Lambda/X_n \Lambda}(I/X_n I).$$

Так как $I/X_n I$ изоморфно левому идеалу в $\Lambda/X_n \Lambda$ [1], то $\text{End}_{\Lambda/X_n \Lambda}(I/X_n I)$ является областью. Следовательно, $\ker \nu$ является первичным идеалом в Λ , и поэтому он содержит некоторое $X_j, j > r$. Следовательно, ν индуцирует эпиморфизм D -алгебр

$$\Lambda/X_j \Lambda \simeq \Lambda/\ker \nu \rightarrow \Lambda/X_n \Lambda.$$

Так как Λ – кольцо общих многочленов, то q_{1j} не лежит в подгруппе D^* , порожденной N и всеми q_{rs} , где $1 \leq r < s \leq n$ и $r, s \neq j$. В силу [10, теорема 1.1] получаем $j = n$.

Завершим доказательство теоремы индукцией по $n - r$. Если $n = r$, то $I = \Lambda = A$, так как кольцо A просто и I – ненулевой идеал в Λ .

Пусть для числа не лорановских переменных, меньших $n - r$, утверждение верно. Взяв вместо X_n в лемме 6.14 переменные $X_{r+1}, \dots, X_n$, получаем, что для $i > r$

$$IX_i \subseteq X_i I. \quad (42)$$

Заметим, что включение (42) выполнено и для $i = 1, \dots, r$, поскольку I – двусторонний идеал в Λ . В частности, I инвариантно относительно $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$.

Лемма 6.15. *Идеал I порождается одночленами от $X_{r+1}, \dots, X_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f = \sum a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in I \setminus 0, \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in D,$$

и $X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}$ – старший одночлен относительно лексикографического порядка. Применяя α_j^{-1} , $1 \leq j \leq n$, получаем

$$\alpha_j^{-1}(f) = \sum b_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in I \setminus 0,$$

где

$$b_{i_1, \dots, i_n} = \alpha_j^{-1}(a_{i_1, \dots, i_n}) \lambda \cdot \left(\prod_{1 \leq s \leq n} q_{js}^{-i_s} \right) \in D, \quad \lambda \in N.$$

Тогда I содержит элемент

$$\begin{aligned} & b_{l_1, \dots, l_n} a_{l_1, \dots, l_n}^{-1} f - \alpha_j^{-1}(f) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) < (l_1, \dots, l_n)} [b_{l_1, \dots, l_n} a_{l_1, \dots, l_n}^{-1} a_{i_1, \dots, i_n} - b_{i_1, \dots, i_n}] X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Пусть $a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0$, но

$$b_{l_1, \dots, l_n} a_{l_1, \dots, l_n}^{-1} a_{i_1, \dots, i_n} = b_{i_1, \dots, i_n}.$$

Тогда в D^*/N получаем

$$\prod_{1 \leq s \leq n} q_{js}^{-l_s} = \prod_{1 \leq s \leq n} q_{js}^{-i_s}.$$

Отсюда

$$(l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_n) = (i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n).$$

Взяв $j = 1$ и $j = n \geq 2$, получаем $(l_1, \dots, l_n) = (i_1, \dots, i_n)$, что невозможно. Итак, если f не является одночленом, то в I содержится элемент, являющийся суммой меньшего числа одночленов, входящих в f . Индукционные соображения по числу одночленов показывают, что все одночлены, входящие в f , лежат в I .

Без ограничения общности можно считать, что I не лежит ни в каком $X_j \Lambda$, $j > r$. В частности, I содержит элемент $X_{r+1}^{l_{r+1}} \dots X_{n-1}^{l_{n-1}}$. По индукции модуль $I/X_n I$ порождается одним элементом. Следовательно, найдется такой элемент $e \in I$, что $I = \Lambda e + X_n I$. В частности,

$$X_{r+1}^{l_{r+1}} \dots X_{n-1}^{l_{n-1}} = ae + X_n g, \quad a \in \Lambda, \quad g \in I. \quad (43)$$

Можно считать, что a лежит в подкольце, порожденном

$$D, X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_{n-1}.$$

В этом случае (43) влечет $X_{r+1}^{l_{r+1}} \dots X_{n-1}^{l_{n-1}} = ae$, т.е. e по модулю X_n является одночленом от $X_{r+1}, \dots, X_{n-1}$. По лемме 6.15 элемент e является одночленом от $X_{r+1}, \dots, X_{n-1}$.

Пусть $u = X_n v \in I$, где $v \in \Lambda$ — одночлен. Если $v \notin I$, то $X_n v = be + X_n h$, $b \in \Lambda$, $h \in I$. Так как e — одночлен, то по доказанному выше $b = X_n c$, $c \in \Lambda$. Отсюда $v = ce + h \in I$, и поэтому $X_n \Lambda \cap I = X_n I$. Но тогда $I = \Lambda e$.

Теорема 6.16. Пусть $\Lambda, \hat{\Lambda}$ — кольца общих квантовых многочленов из теоремы 6.7, где $r, s \geq 1$, $n \geq 2$. Если Λ и $\hat{\Lambda}$ Морита-эквивалентны, то $\Lambda \simeq \hat{\Lambda}$. Кроме того, $\text{Pic}(\Lambda)$ тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию существует такой проективный Λ -модуль I , что $\text{End}_{\Lambda} I \simeq \hat{\Lambda}$. Если ранг q модуля I больше 1, то $I \simeq \Lambda^q$, $q \geq 2$ [1]. В этом случае $\text{End} I \simeq \text{Mat}(q, \Lambda)$, что невозможно, ибо $\text{End}_{\Lambda} I \simeq \hat{\Lambda}$. Итак, ранг I равен 1, т.е. I изоморфно левому идеалу в Λ [1], [9]. Остается воспользоваться предыдущей теоремой.

Перейдем теперь к рассмотрению Морита-эквивалентности кольца общих квантовых многочленов C из (7) и кольца $\hat{\Lambda}$ из теоремы 6.7.

Теорема 6.17. Если C и $\hat{\Lambda}$ Морита-эквивалентны, то $s = 0$, $n = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как C и $\hat{\Lambda}$ — кольца общих квантовых многочленов, то кольца $A = C_{X_1 \dots X_n}$ и $\hat{A} = \hat{\Lambda}_{X_1 \dots X_n}$ просты [1]. Более того, как и в теореме 6.16, существует такой проективный левый идеал I в C , что $\text{End}_C I \simeq \hat{\Lambda}$. По [1] имеется изоморфизм C -модулей $I \oplus I \simeq C \oplus C$. Следовательно,

$$\text{Mat}(2, \hat{\Lambda}) \simeq \text{End}(I \oplus I) \simeq \text{End}(C \oplus C) \simeq \text{Mat}(2, C). \quad (44)$$

Каждый идеал кольца матриц индуцирован некоторым идеалом кольца коэффициентов. В силу простоты A и $\hat{A}$ единственными минимальными первичными идеалами в кольце матриц $\text{Mat}(2, \hat{\Lambda})$ являются идеалы, порождаемые любой из матриц $Y_{s+1}E, \dots, Y_m E$, где E — единичная матрица. Аналогично, единственными минимальными первичными идеалами в $\text{Mat}(2, C)$ являются идеалы, порождаемые любой из матриц $X_1 E, \dots, X_n E$. Поэтому $m - s = n$. Следовательно, если $s = 0$, то теорема доказана.

Пусть $s \geq 1$. Тогда единственным максимальным первичным идеалом в $\text{Mat}(2, \hat{\Lambda})$ является идеал, порождаемый всеми матрицами $Y_{s+1}E, \dots, Y_m E$. С другой стороны, этот идеал порождается всеми матрицами $X_1 E, \dots, X_n E$. Факторизуя по этому

идеалу, можно считать, что $m = s$, $n = 0$. Как известно, единственными нетривиальными левыми идеалами в $\text{Mat}(2, D)$ являются левые идеалы вида

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (c \ d),$$

где $a, b \in D$ – произвольные элементы, $c, d \in D$ – фиксированная ненулевая пара. Таким образом, любая убывающая цепь левых идеалов в $\text{Mat}(2, D)$ имеет длину не более трех.

С другой стороны, в

$$\text{Mat}(s, \widehat{D}_{Q'\alpha'}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_s^{\pm 1}]), \quad s \geq 1,$$

имеется счетная убывающая цепь левых идеалов

$$\begin{aligned} \dots \supset \text{Mat}(2, \widehat{D}_{Q'\alpha'}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_s^{\pm 1}]) (1 + Y_1)^d E \\ \supset \text{Mat}(2, \widehat{D}_{Q'\alpha'}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_s^{\pm 1}]) (1 + Y_1)^{d+1} E \supset \dots, \end{aligned}$$

где d пробегает все натуральные числа. Отсюда $s = 0$.

Теорема 6.18. Пусть C – кольцо общих квантовых многочленов из (7), I – проективный левый идеал в C . Предположим, что $\text{End}_C I$ изоморфен кольцу общих квантовых многочленов $\widehat{C}$ из предложения 5.3, причем $n = m$. Тогда I – главный левый идеал и $\widehat{C} \simeq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ очевиден. Поэтому можно считать, что $n > 1$ и для $n - 1$ теорема верна. По [1] имеем $I \oplus I = Ce_1 \oplus Ce_2$, где

$$e_1 = (p, q), \quad e_2 = (r, s) \in I \oplus I.$$

Если $\gamma \in \text{End}_C I$, то $\gamma(x) = x\phi(\gamma) \in I$, где $\phi(\gamma) \in F$. Пусть $(x, y) \in C \oplus C$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_\gamma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

где $A_\gamma \in \text{Mat}(2, C)$. Если $(u, v) \in I \oplus I$, то

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} A'_\gamma, \quad A'_\gamma \in \text{Mat}(2, \phi(\widehat{C})).$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} A'_\gamma.$$

Отсюда

$$A'_\gamma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} A_\gamma \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Как и в теореме 6.12, можно считать, что $I/X_n I$ является свободным $\widehat{C}/Y_n \widehat{C}$ -модулем. Таким образом, существует такой элемент $e'_1 \in I$, что $I = Ce'_1 + X_n I$. Так как естественный гомоморфизм $\mathrm{GL}(2, C) \rightarrow \mathrm{GL}(2, C/X_n X)$ сюръективен, то можно считать, что

$$(e'_1, 0) \equiv e_1 \pmod{X_n(I \oplus I)}, \quad (0, e'_1) \equiv e_2 \pmod{X_n(I \oplus I)}.$$

Но тогда

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \equiv E \pmod{X_n}.$$

Кроме того, при $i = 1, \dots, n-1$

$$A'_{Y_i} \equiv \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix} \pmod{X_n}$$

и для $i = 1, \dots, n$

$$X_i(0, v)A'_{Y_i} = X_i(0, v'_i), \quad X_i(u, 0)A'_{Y_i} = X_i(u'_i, 0).$$

Более того, если $\lambda \in D$, то

$$A'_\lambda \equiv \begin{pmatrix} \phi(\lambda) & 0 \\ 0 & \phi(\lambda) \end{pmatrix} \pmod{X_n}.$$

Итак,

$$A'_\lambda = (E + X_n \Gamma')^{-1} A_\gamma (E + X_n \Gamma').$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A'_{Y_i} &= (E + X_n \Gamma'')(\mathrm{diag}(X_i, X_i) + \Delta')(E + X_n \Gamma') \\ &= X_i(u, 0) \left[\begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix} + X_n \Delta'_i \right] = (X_i u X_i, 0) + X_i(u, 0) X_n \Delta' \\ &= (X_i u X_i, 0) + (X_i u, 0) \begin{pmatrix} X_n z_1 & X_n z_2 \\ X_n z_3 & X_n z_4 \end{pmatrix} \\ &= (X_i u X_i, 0) + (X_i u X_n z_1, X_i u x_n z_2). \end{aligned}$$

Следовательно, при $1 \leq i \leq n-1$

$$A'_{Y_i} = \begin{pmatrix} X_i + X_n z_{i1} & 0 \\ 0 & X_i + X_n z_{i2} \end{pmatrix}; \quad A'_{Y_n} = \begin{pmatrix} X_n z_{n1} & 0 \\ 0 & X_n z_{n2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, учитывая (45), получаем

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i + X_n z_{i1} & 0 \\ 0 & X_i + X_n z_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} p(X_i + X_n z_{i1}) & q(X_i + X_n z_{i2}) \\ r(X_i + X_n z_{i1}) & s(X_i + X_n z_{i2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i p & X_i q \\ X_i r & X_i s \end{pmatrix}.$$

Но $r = X_n^d r'$, $d \geq 1$. Поэтому $X_n^d r'(X_i + X_n z_{i1}) = X_i X_n^d r'$. Отсюда $r'(X_i + X_n z_{i1}) = q_{ni}^{-d} X_i r'$. Таким образом, в $C/X_n C$ получаем $r' X_i = q_{ni}^{-d} X_i r'$. По теореме 5.7 это возможно лишь при $r' \in X_n C$, т.е. $r = X_n^{d+1} r'$. Следовательно, $r \in \bigcap_{d \geq 1} X_n^d C = 0$. Аналогично получаем, что $s = 0$, т.е.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \equiv E \pmod{X_n}.$$

В этом случае $e_1, e_2 \in I$ и $Ce_1, Ce_2 \subseteq I$. Но $I \oplus I = Ce_1 \oplus Ce_2$. Поэтому $I = Ce_1$ и $\widehat{C} = C$.

§ 7. Проблема Зарисского

Пусть k — поле и $k[X_1, \dots, X_n]$ — кольцо многочленов. Предположим, что существует такое подкольцо K в $k[X_1, \dots, X_n]$, что $k[X_1, \dots, X_n]$ изоморфно кольцу многочленов от одной переменной с коэффициентами в K . Гипотеза Зарисского утверждает, что K изоморфно $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$. В общем случае эта проблема не решена. В этом параграфе излагается решение аналога этой проблемы для общих квантовых многочленов. Всюду в этом параграфе Λ обозначает кольцо общих квантовых многочленов.

Теорема 7.1 (проблема Зарисского для многочленов). *Пусть B — подкольцо в Λ , содержащее D , $Y \in \Lambda$, причем существует такой автоморфизм β в B , что $Yb = \beta(b)Y$ для всех $b \in B$. Если $\Lambda = B[Y, \beta]$, то $Y = \lambda_i X_i$ для некоторого $i > r$, где $\lambda_i \in \Lambda^*$ — одночлен от $X_1, \dots, X_r$ и B совпадает с подкольцом, порожденным $D, X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}$, а также со всеми X_j , $j > r$, $j \neq i$.*

Доказательство. Заметим, что $Y\Lambda$ является минимальным ненулевым вполне простым идеалом в Λ . Следовательно, $Y\Lambda$ совпадает с идеалом, порождаемым одной из переменных X_i , $i > r$. Пусть для простоты $Y\Lambda = X_n \Lambda$. В этом случае $Y = \lambda X_n$, где λ — обратимый элемент из Λ , т.е. λ — одночлен от $X_1, \dots, X_r$. Таким образом,

$$B \simeq \Lambda/Y\Lambda \simeq \Lambda' = D_{*,*}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_{n-1}].$$

Пусть $\phi: \Lambda' \rightarrow B \subseteq \Lambda$ — соответствующее вложение. Тогда

$$\phi(z) = z + X_n \psi(z), \quad \psi(z) \in \Lambda.$$

В частности, $\phi(D)$ является подтелом в Λ . Но D содержит все подтела в Λ . Поэтому $\phi(D) = D$.

Пусть $j = 1, \dots, n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} Y X_j Y^{-1} &= \lambda X_n Y_j X_n^{-1} \lambda^{-1} = \lambda q_{nj} X_j \lambda^{-1} \\ &= \lambda q_{nj} \phi(X_j) \lambda^{-1} - \lambda q_{nj} X_n \psi(X_j) \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} Y X_j Y^{-1} &= \beta(\phi(X_j)) - \lambda X_n X_n \psi(X_j) X_n^{-1} \lambda^{-1} \\ &= \beta(\phi(X_j)) - \lambda X_n \alpha_n(\psi(X_j)) \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\beta(\phi(X_j)) = \lambda q_{nj} \phi(X_j) \lambda^{-1}, \quad \alpha^{-1}(q_{nj}) \psi(X_j) = \alpha_n(\psi(X_j)).$$

Заметим, что

$$\pi(\beta(\phi)) = \pi(\phi(X_j)) = (l_1, \dots, l_n),$$

поскольку β является сопряжением с помощью Y . Таким образом, в D^*/N

$$\kappa(\beta(\phi(X_j))) = q_{n1}^{l_1} \dots q_{n,n-1}^{l_{n-1}} \kappa(\phi(X_j)) = q_{nj} \kappa(\phi(X_j)).$$

Отсюда $l_j = 1$ и $l_i = 0$ при $i \neq j$. Применяя аналогичные рассуждения для ρ , получаем, что $\phi(X_j) = \lambda_j X_j$, $\lambda_j \in D^*$. Отсюда вытекает утверждение относительно порождения B .

Теорема 7.2 (проблема Зарисского для лорановских многочленов). *Пусть B — подкольцо в Λ , содержащее D , Y — обратимый элемент из Λ , причем существует такой автоморфизм β в B , что*

$$Yb = \beta(b)Y \quad \text{для всех } b \in B.$$

Предположим, что

$$\Lambda = B[Y^{\pm 1}, \beta].$$

Тогда Y является одночленом от $X_1, \dots, X_r$, причем после некоторой замены этих переменных можно считать, что $Y = X_1$. В этом случае B совпадает с подкольцом, порожденным

$$D, X_2^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}, X_{r+1}, \dots, X_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимый элемент Y в Λ является одночленом от $X_1, \dots, X_r$. Мультипликативная группа Λ^* разлагается в полупрямое произведение:

$$\Lambda^* = D^* \rtimes \langle X_1, \dots, X_r \rangle = B^* \rtimes \langle Y \rangle,$$

где

$$\langle X_1, \dots, X_r \rangle \simeq \langle X_1 \rangle \times \dots \times \langle X_r \rangle. \quad (46)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначает свободную абелеву группу с указанной базой. По условию $D^* \subseteq B^*$. Следовательно,

$$\langle X_1, \dots, X_r \rangle \simeq (B^*/D^*) \times \langle Y \rangle.$$

Таким образом, совершая замену переменных в (46), можно считать, что $Y = X_1$ и $X_2, \dots, X_r \in B^*$.

Пусть $i > 1$. Тогда

$$X_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j X_1^j, \quad b_j \in B. \quad (47)$$

Отсюда

$$q_{1i} X_i = Y X_i Y^{-1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_1(b_j) X_1^j.$$

Следовательно, $q_{1i} b_j = \alpha_1(b_j)$ для любого $j \in \mathbb{Z}$. По теореме 5.7 и (23) получаем, что $b_j \in D(X_1; \alpha_1) X_i \cap B = D X_i$.

§ 8. Открытые проблемы

В заключение работы сформулируем ряд вопросов, решение которых представляется заслуживающим внимания.

ПРОБЛЕМА 8.1. Пусть F — тело частных общих квантовых многочленов с коэффициентами в теле D , $n \geq 2$. Описать все такие пары элементов $f, g \in F^*$, что $fg = \lambda g \lambda' f \lambda''$ для некоторых $\lambda, \lambda', \lambda'' \in D^*$.

ПРОБЛЕМА 8.2. Пусть C — кольцо общих квантовых многочленов с телом частных F . Описать вложения $\phi: \Lambda \rightarrow F$. Верно ли, что при $n \geq 3$ существуют такие элементы

$$w \in F^*, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in D^*, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

что

$$w \phi(X_i) w^{-1} = \lambda_i X_i^{\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, n.$$

ПРОБЛЕМА 8.3. Описать группу автоморфизмов F над D .

Ответы на эти вопросы могут быть разными при $n = 2$ и при $n \geq 3$.

ПРОБЛЕМА 8.4. Описать правые порядки Q , являющиеся правыми дробными идеалами в теле F . Будет ли Q сопряжено в F с подалгеброй из A ? Описать правые порядки в F , содержащие D и конечно порожденные над D . Будут ли они также сопряжены в F с A ?

Список литературы

1. Артамонов В. А. Проективные модули над квантовыми алгебрами полиномов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 3–12.
2. Manin Yu. I. Topics in non-commutative geometry. Princeton Univ. Press, 1991.

3. Демидов Е. Е. Квантовые группы. М.: Факториал, 1998.
4. *Maltsiniotis G.* Groupes quantiques et structures dirrérentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1990. V. 311. P. 831–834.
5. *Alev J., Dumas F.* Sur corps des fractions de certaines algébres quantique // J. Algebra. 1994. V. 170. P. 229–265.
6. *Панов А. Н.* Тело скрученных рациональных функций и тело рациональных функций на $GL_q(n, K)$ // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 1. С. 153–169.
7. *McConnell J. C., Pettit J. J.* Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. 1988. V. 38. № 1. P. 47–55.
8. *Артамонов В. А.* Квантовая проблема Серра // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 3–77.
9. *Артамонов В. А.* Модули над квантовыми алгебрами полиномов // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 497–503.
10. *Артамонов В. А.* Периодические модули над общими квантовыми лорановскими полиномами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 10–17.
11. *Бовди А. А.* Групповые кольца. Киев: УМК, 1988.
12. *Artamonov V. A.* Projective modules over crossed products // J. Algebra. 1995. V. 173. P. 696–714.
13. *Артамонов В. А.* Автоморфизмы разложимых проективных модулей // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 1. С. 63–69.
14. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. Chichester – N. Y.: John Wiley, 1987.
15. *Stafford J. T.* Endomorphisms of right ideals of the Weyl algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 299. № 2. P. 623–639.
16. *Smith P. S.* An example of a ring Morita equivalent to the Weyl algebra A_1 // J. Algebra. 1981. V. 73. № 2. P. 352–355.
17. *Mikhalev A. V.* Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules // First international Tainan-Moscow algebra Workshop. Berlin – N. Y.: Walter de Gruyter, 1996. P. 69–122.
18. *Quillen D.* Higher algebraic K -theory // Lecture Notes Math. 1973. № 341. P. 87–147.

Поступило в редакцию
18.II.1997