Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 183–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:47:29

УДК 512.546+517.987

А. И. Штерн

Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп

В 1933 г. Ван дер Варден доказал, что любое конечномерное локально ограниченное представление полупростой компактной группы Ли автоматически непрерывно. Эта теорема вызвала к жизни обширную литературу, связавшую утверждение теоремы (и теоремы, обратной этой теореме Ван дер Вардена) со свойствами боровских компактификаций топологических групп и позволившую ввести и изучить классы так называемых групп и алгебр Ван дер Вардена. В настоящей статье с точки зрения теоремы Ван дер Вардена изучены свойства (не обязательно непрерывных) локально относительно компактных гомоморфизмов некоторых топологических групп (в частности, связных локально компактных групп) и получена классификация таких гомоморфизмов с точки зрения их свойств непрерывности или разрывности (особенно простая в случае групп Ли, поскольку оказывается, что любое локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли непрерывно на коммутанте этой группы). Основные результаты получены с помощью изучения новых объектов – группы разрывов и группы финальных разрывов локально ограниченного гомоморфизма – и нового понятия финально непрерывного гомоморфизма одной локально компактной группы в другую.

Понятие локальной ограниченности гомоморфизма естественно связано с понятием колебания представления в точке (в единице группы), введенного автором в 2002 г. Согласно гипотезе, высказанной А. С. Мищенко, конечномерное представление “хорошей” топологической группы может иметь только три значения (разумно определенного) колебания в точке, а именно 0, 2 и ∞ . Справедливость этого утверждения доказана в статье для всех связных локально компактных групп.

Библиография: 58 наименований.

§ 1. Введение. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Упомянутая в заголовке теорема Ван дер Вардена утверждает, что любое конечномерное локально ограниченное представление любой полупростой компактной группы Ли автоматически непрерывно [1]. Это свойство не имеет места для бесконечномерных представлений произвольных не дискретных топологических групп даже в узком классе унитарных представлений. Действительно,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00923) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-619.2003.1).

любая бесконечная топологическая группа G имеет унитарное представление, являющееся регулярным представлением группы G , рассматриваемой в дискретной топологии, и это представление непрерывно тогда и только тогда, когда сама группа дискретна. С другой стороны, автоматическая непрерывность локально ограниченных конечномерных представлений не имеет места даже в классе конечномерных унитарных представлений полупростых компактных топологических групп, не являющихся группами Ли. Действительно, если G – прямое произведение счетного числа экземпляров некоторой полупростой компактной группы Ли K , $G = K^{\mathbb{N}}$ (скажем, при $K = \mathrm{SU}(2)$), и если группа K линейна, т. е. имеет точное тавтологическое конечномерное унитарное представление, то любой матричный элемент f_{ij} любого элемента группы $f = \{f_{ij}\} \in G$ определяет (ограниченную) функцию $f_{ij}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $B(\mathbb{N})$ ограниченных комплекснозначных функций, не определяемый отображением взятия значения функции в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем конечномерное унитарное матричное представление $f = \{f_{ij}\} \rightarrow \{\chi(f_{ij})\}$ группы G , и это представление очевидным образом разрывно (подробности приведены ниже в примере 2). По этой причине кажется естественным изучать свойство автоматической непрерывности (без каких-либо дополнительных условий) только в классе локально ограниченных конечномерных представлений групп Ли и в несколько более общем классе локально ограниченных гомоморфизмов групп Ли, а условия непрерывности представлений и гомоморфизмов более общих локально компактных групп должны включать некоторые дополнительные условия.

Напомним, что в той же статье [1] Ван дер Варден доказал, что любое конечномерное *унитарное* представление произвольной полупростой компактной группы Ли автоматически непрерывно (именно в этой форме результат Ван дер Вардена чаще всего цитируется), а затем переформулировал утверждение в приведенном выше виде. Именно в этой “унитарной” форме теорема Ван дер Вардена произвела сильное впечатление на складывавшуюся в ту пору теорию конечномерных представлений полупростых групп Ли и вызвала к жизни обширную литературу, в том числе содержащую “обратную” теорему (о полупростоте компактных групп Ли, любые конечномерные локально ограниченные представления которых автоматически непрерывны [2]; напомним, что существует много, а именно $2^{2^{\aleph_0}}$, разрывных унитарных характеров на числовой прямой $\mathbb{R}$ и одномерном торе $\mathbb{T}$ (в связи с существованием базиса Гамеля; см., например, [3, (25.6)]), и поэтому характеры, представления и гомоморфизмы коммутативных и разрешимых групп Ли не обязаны быть непрерывными) и установившую связи между теоремой Ван дер Вардена и свойствами боровских компактификаций топологических групп [4]–[7], что позволило ввести и изучить классы так называемых групп и алгебр Ван дер Вардена (этот термин имеет несколько значений, см. [5], [8]–[10]; например, он может означать автоматическую непрерывность морфизмов в компактные объекты или автоматическую непрерывность всех автоморфизмов). И сейчас, спустя более чем 70 лет после публикации статьи [1], теорема Ван дер Вардена входит в моно-

графии [11] и обзоры [12] в различных формах, она многократно передоказывалась; в частности, её доказательство было существенно упрощено в важном частном случае группы $SO(3)$ [13]. В круге результатов о компактных группах теорема Ван дер Вардена до сих пор выглядит наилучшей возможной.

Теорема Ван дер Вардена – очень тонкий результат. Он заставляет обратить особое внимание на условие локальной ограниченности гомоморфизмов и конечномерных представлений (в более общих ситуациях – локальной эквивалентности). Начиная с 1933 г., насколько известно автору, это условие появлялось в той или иной, явной или скрытой форме почти во всех работах, посвященных условиям непрерывности представлений, например в знаменитой теореме о сильной непрерывности слабо непрерывных представлений локально компактных групп [14], в распространении этой теоремы на случай бочечных пространств [15], в теореме Л. Брауна о непрерывности представлений с непрерывным подпредставлением и непрерывным представлением в соответствующем факторпространстве [16] и в серии работ автора о финитных условиях непрерывности представлений топологических групп и их приложениях [17]–[25]. Кроме того, ещё сам Ван дер Варден показал [1], что условие локальной ограниченности нельзя просто опустить, по крайней мере для представлений полной линейной группы.

Действительно, в [1] Ван дер Варден предложил (для группы $GL(n, \mathbb{C})$) следующий способ построения примеров разрывных представлений полной линейной группы над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (на самом деле этот способ может быть использован для любого конечномерного представления с недискретным образом (в комплексном векторном пространстве) связной локально компактной группы): если θ – разрывный автоморфизм¹ поля $\mathbb{C}$, то поэлементное применение этого автоморфизма к каждому матричному элементу любой из групп $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ или $U(n)$ определяет разрывное конечномерное представление соответствующей группы². Нетрудно заметить, что если разрывный автоморфизм специальной линейной группы определен поэлементным применением разрывного автоморфизма поля $\mathbb{C}$, то ограничение этого автоморфизма на любую максимальную компактную подгруппу не может сохранять такую подгруппу. Действительно, в противном случае образ ограниченного интервала или диска в соответствующем поле (множество значений матричного элемента компактной матричной группы) было бы ограничено (ср. с [31, теорема 2, с. 360]), в то время как разрывный автоморфизм поля $\mathbb{C}$ не может быть ограничен как линейный оператор. Так что и с точки зрения условия локальной ограниченности теорема Ван дер Вардена является наилучшей возможной.

¹Существует $2^{2^{\aleph_0}}$ разрывных автоморфизмов поля $\mathbb{C}$. Об автоморфизмах со специальными свойствами см. [26]. Отметим следующий общий факт. Пусть K – поле, v – его нормирование, определяющее топологию со счетной базой окрестностей; тогда, как показано в [27], если K полно в этой топологии, то все автоморфизмы поля K непрерывны в рассматриваемой топологии тогда и только тогда, когда K не алгебраически замкнуто.

²См. также [28], [29]. Вопрос о существовании разрывных автоморфизмов собственной группы Галилея рассматривался в [30].

Один из естественных вопросов, развивающих тему автоматической непрерывности конечномерных представлений топологических групп, связан с вопросом устойчивости теоремы Ван дер Вардена. Оказывается, ответ на вопрос, который Д. Каждан приписал в своей работе [32] Мильману, утвердителен, а именно любое (не обязательно непрерывное) отображение одной ортогональной группы в другую с равномерно малой разностью между образом произведения и произведением образов равномерно близко к обычному (и тем самым к непрерывному) гомоморфизму одной группы в другую [33] (для непрерывных отображений задача была положительно решена ещё К. Грове, Х. Кархером и Е. А. Ру в 1974 г. [34]).

В настоящей статье мы исследуем другой естественный вопрос, связанный с теоремой Ван дер Вардена. Он относится к условиям непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений топологических групп (в частности, локально компактных групп), которые не являются компактными группами Ли, и возникает, например, при изучении условий непрерывности (вообще говоря, бесконечномерных) представлений, аппроксимирующих данное слабо непрерывное квазипредставление аменабельной топологической группы [35]. В связи с этим представляет интерес изучение условий непрерывности на основе оценки величины (сильного или слабого) колебания представления в точке, начатое в [17] и [18], где постановка задачи мотивируется и подробно обсуждается (см. также [20]–[24]). В 2004 г. (при обсуждении одного из докладов автора на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ) А. С. Мищенко высказал неожиданную гипотезу, что для “хороших” топологических групп и их конечномерных представлений ρ единственными возможными значениями колебания в единице группы являются величины 0, 2 и ∞ (при правильном подборе нормы в пространстве представления).

Автору неизвестны попытки изучить условия автоматической непрерывности конечномерных представлений групп более общего вида (возможно, потому, что подход самого Ван дер Вардена и его последователей, передоказывавших теорему о непрерывности, не мог быть непосредственно применён уже к некомпактным полупростым группам Ли), и поэтому поразительно, что именно условие локальной ограниченности, которое в явном виде было введено Ван дер Варденом, является критерием непрерывности конечномерных представлений для широкого класса групп Ли. Грубо говоря, лозунг “ограниченный морфизм непрерывен”, продуктивный в классе линейных операторов в нормированных пространствах, но неприменимый к коммутативным локально компактными группам, оказывается также продуктивным, в частности, для гомоморфизмов совершенных связных групп Ли.

Автору удалось доказать аналог теоремы Ван дер Вардена для всех некомпактных полупростых групп Ли [36], а затем распространить это утверждение на некоторые группы Ли, не являющиеся полупростыми [37]. Исчерпывающий результат в классе групп Ли был получен в [38]. Перед тем как формулировать утверждение, напомним два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – топологическая группа, и пусть π – представление (не обязательно непрерывное) группы G в нормированном пространстве E . Представление π называется *локально равномерно ограниченным* (или просто *локально ограниченным*), если существуют окрестность V единичного элемента e в G и такая постоянная C , что $\|\pi(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма в E .

Заметим, что класс локально равномерно ограниченных представлений топологической группы в данном конечномерном пространстве не зависит от выбора нормы в пространстве, поскольку пространства, получаемые введением различных норм в данном конечномерном векторном пространстве, изоморфны. Заметим также, что непрерывность представления группы Ли зависит только от поведения ограничения представления на связную компоненту единичного элемента. По этой причине при изучении вопросов непрерывности конечномерных представлений групп Ли можно ограничиться рассмотрением связных групп Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим *коммутантом*, т. е. с подгруппой, порождённой всевозможными коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$.

Основной результат статьи [38] состоит в установлении критерия справедливости аналога теоремы Ван дер Вардена в классе всех связных групп Ли в терминах локальной ограниченности. А именно, оказалось, что любое локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли непрерывно тогда и только тогда, когда эта группа совершенна. Оказалось также, что любое локально ограниченное конечномерное представление данной связной группы Ли автоматически непрерывно на коммутанте этой группы (в топологии, индуцированной исходной топологией группы).

В настоящей работе мы распространяем условия автоматической непрерывности представлений групп Ли на случай представлений и гомоморфизмов более общих топологических групп и, в частности, связных локально компактных групп. Как мы видели выше, непосредственного распространения быть не может, даже в случае локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп, и мы вводим числовые и геометрические характеристики представлений и гомоморфизмов локально компактных групп, позволяющие получить простые необходимые и достаточные условия непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп, частично распространить утверждения об автоматической непрерывности на случай локально относительно компактных представлений и гомоморфизмов более общих топологических групп, дать классификацию разрывных представлений проективно-лиевых групп и, в частности, почти связных локально компактных групп, а также доказать справедливость гипотезы Мищенко для всех связных локально компактных групп.

Перейдем к изложению содержания статьи. В § 2, носящем вспомогательный характер, вводится группа разрывов относительно компактного гомоморфизма

топологических групп, изучаются её простейшие свойства и некоторые предварительные условия непрерывности гомоморфизмов топологических групп (в частности, напоминаются результаты об автоматической непрерывности представлений с непрерывными подпредставлениями и непрерывными представлениями в подфакторпространствах). В § 3 излагается вариант теоремы Ли об одномерности (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов разрешимых локально компактных групп, допускающих конечный композиционный ряд с безгранично делимыми факторами, и приводятся некоторые следствия этого аналога теоремы Ли, включающие условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Аналоги теоремы Ван дер Вардена о непрерывности (для полупростых групп Ли и для коммутанта связной группы Ли) доказываются в § 4. В § 5 изучаются свойства группы разрывов и группы финальных разрывов локально ограниченного гомоморфизма локально компактных групп, устанавливается связность группы разрывов локально ограниченных гомоморфизмов и конечномерных представлений связных локально компактных групп, доказывается аналог теоремы Ван дер Вардена для финально непрерывных локально ограниченных конечномерных представлений совершенной локально компактной группы и приводится классификация разрывных конечномерных представлений связных локально компактных групп. Непрерывность представлений локально компактных групп в терминах колебаний в точке обсуждается в § 6, где также доказывается гипотеза Мищенко для связных локально компактных групп. В § 7 указываются приложения к теории квазипредставлений и высказываются некоторые замечания.

Для ссылок по теории представлений групп мы используем книгу [39], по теории групп Ли – [40], по теории топологических векторных пространств – [41], а по гармоническому анализу и теории топологических групп – [3] (и иногда [42]).

Предварительные результаты, связанные с основным результатом статьи, докладывались на конференции по геометрии на острове Узедом в 1999 г., на семинаре А&А в GMD (Санкт Августин) в 2000 г. и на конференции математического общества JMS в г. Майсор (Индия) в 2003 г. Часть результатов автора, приведенных в настоящей статье и относящихся к представлениям групп Ли, была анонсирована в [17], [18], [20]–[24] и изложена в ряде докладов на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ. Автор признателен руководителям и участникам семинара за доброжелательное внимание.

§ 2. Предварительные сведения об условиях непрерывности гомоморфизмов топологических групп

2.1. Группа разрывов относительно компактного гомоморфизма топологических групп. Сначала напомним определения относительной компактности и локальной ограниченности гомоморфизмов топологических групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – топологическая группа, π – её (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в топологическую группу H . Мы будем говорить,

что π локально относительно компактен, или просто относительно компактен, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H . Мы будем говорить, что π локально вполне ограничен, или просто локально ограничен, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H , т. е. для любой окрестности W единичного элемента e_H в H существует конечное число сдвигов окрестности W , объединение которых покрывает множество $\pi(V)$.

Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – фильтр окрестностей единицы в топологической группе G . Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в топологическую группу H введем обозначение

$$DG(\pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}.$$

Здесь и далее черта обозначает замыкание в соответствующей топологии (в данном случае – в топологии группы H).

Если π – конечномерное представление топологической группы, то определения 1 и 3, очевидно, согласованы. Более общим образом, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм в группу H автоматически является локально относительно компактным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – топологическая группа, а π – относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ – фильтр окрестностей единицы в G . Множество $DG(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактным нормальным делителем в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H . Кроме того, базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $DG(\pi)$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $DG(\pi) = \{e_H\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фильтр $\mathfrak{U}$ содержит базис симметричных окрестностей V единичного элемента ($V = V^{-1}$), и любая симметричная окрестность V содержит такую симметричную окрестность W , что $WW \subset V$. По предположению существует такая окрестность $U \in \mathfrak{U}$, что замыкание $\overline{\pi(U)}$ компактно. Отсюда следует, что введенное в теореме множество $DG(\pi)$ компактно и содержит обратные к своим элементам и произведения своих элементов, и поэтому является компактной подгруппой группы H . Так как множество gVg^{-1} , $g \in G$, является симметричной окрестностью единицы вместе с V , то пересечение $DG(\pi)$ всех множеств $\overline{\pi(U)}$, $U \in \mathfrak{U}$, инвариантно относительно сопряжения с любым элементом вида $\pi(g)$, $g \in G$, так что $DG(\pi)$ является нормальным делителем в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H .

Поскольку базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ содержит компактный элемент и пересечение всех элементов фильтра равно $DG(\pi)$, то фильтр сходится к $DG(\pi)$.

Из определения непрерывности следует, что $DG(\pi) = \{e_H\}$, если π непрерывен. Обратно, если $DG(\pi) = \{e_H\}$, то базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $\{e_H\}$, и поэтому гомоморфизм π непрерывен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть G – топологическая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Компактный нормальный делитель $DG(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π .

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу и, тем самым, для любого конечномерного представления топологической группы (в этом частном случае понятие группы разрывов было введено ранее, в работе [38]).

Введём важное для дальнейшего определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть G – группа, X – подмножество в G . Множество X называется *безгранично делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально безгранично делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т. е. множество p -х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G , содержит некоторую окрестность единицы в G .

Очевидно, любая группа Ли локально безгранично делима. Следующее фольклорное утверждение показывает, что в любой топологической группе замыкания безгранично делимых относительно компактных подгрупп безгранично делимы.

ЛЕММА 1. Пусть G – топологическая группа, а X – подмножество группы G с компактным замыканием в G . Если X безгранично делимо, то и его замыкание в G безгранично делимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\overline{X}$ – замыкание множества X в G и если $x \in \overline{X}$, то для любого $p \in \mathbb{N}$ существует сеть элементов вида y^p , $y \in X$, сходящаяся к x . Так как замыкание множества X компактно, то сеть элементов y имеет сходящуюся подсеть. Если z – предел этой подсети, то $z^p = x$ ввиду непрерывности операции возведения в степень.

Следующее утверждение является локальным вариантом предыдущего.

ЛЕММА 2. Пусть G – локально безгранично делимая группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если гомоморфизм π непрерывен, то $DG(\pi) = \{e_H\}$, и поэтому остается рассмотреть случай разрывного гомоморфизма π .

Поскольку π локально относительно компактен по условию, то группа разрывов $DG(\pi)$ компактна по теореме 1. Пусть $V_0 \subset G$ – окрестность единицы в G , замыкание образа которой (множество $\overline{\pi(V_0)}$) компактно в H . По условию локальной безграничной делимости группы G любой элемент U фильтра $\mathcal{U}$ образован такими окрестностями единицы в G , которые для любого натурального p содержат окрестность $V = V_U \subset U$, любой элемент которой есть p -я

степень некоторого элемента окрестности U . Эти окрестности V образуют базис фильтра $\mathfrak{U}$. Следовательно, для любого элемента $d \in \text{DG}(\pi)$ существует сеть $\{q_{V_U}\}$, $q_{V_U} \in \overline{\pi(V_U)}$, $V_U \subset U \in \mathfrak{U}$, сходящаяся к d . Можно считать, что $q_{V_U} \in \pi(V_U)$. По построению окрестности V_U существует такой элемент $\delta_{p,U} \in U$, что $\delta_{p,U}^p = q_{V_U}$. Тогда сеть $\pi(\delta_{p,U}) = (\pi(\delta_{p,U}))^p = \pi(q_{V_U})$, $U \in \mathfrak{U}$, сходится к d , причём все элементы $\pi(\delta_{p,U})$ лежат в компактном множестве $\overline{\pi(V_U)}$. Поэтому сеть $\{\pi(\delta_{p,U})\}$, $U \in \mathfrak{U}$, имеет предельные точки. С другой стороны, все предельные точки такой сети должны принадлежать $\text{DG}(\pi)$. В силу непрерывности операции возведения в степень эти предельные точки являются корнями степени p из элемента d . Следовательно, группа $\text{DG}(\pi)$ безгранично делима, поэтому она связна [11, теорема 9.35].

Нам понадобится следующее факторизационное свойство групп разрывов.

ЛЕММА 3. Пусть G – связная локально компактная группа, N – её замкнутый нормальный делитель, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H (например, локально ограниченный гомоморфизм в локально компактную группу). Пусть M – группа разрывов ограничения $\text{DG}(\pi|_N)$. Тогда M – замкнутый нормальный делитель в компактной группе разрывов $\text{DG}(\pi)$ и факторгруппа $\text{DG}(\pi)/M$ изоморфна группе разрывов $\text{DG}(\psi)$ гомоморфизма ψ группы G , получаемого композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма $\overline{\pi(G)} \rightarrow \overline{\pi(G)}/M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по условию, то группа разрывов $\text{DG}(\pi)$ компактна по теореме 1. Поскольку N – замкнутый нормальный делитель в G (и поэтому семейство окрестностей единицы в группе N инвариантно относительно автоморфизмов, определяемых ограничением на N внутренних автоморфизмов группы G), то из определения группы $\text{DG}(\pi|_N)$ как пересечения $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}_N} \overline{\pi(U)}$ следует, что компактная подгруппа $\text{DG}(\pi|_N)$ группы $\overline{\pi(G)}$ является $\pi(G)$ -инвариантной, а потому и $\overline{\pi(G)}$ -инвариантной, т. е. компактным нормальным делителем в $\overline{\pi(G)}$.

Рассмотрим гомоморфизм ψ группы G в $\overline{\pi(G)}/M$, получаемый композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма

$$\theta: \overline{\pi(G)} \rightarrow \overline{\pi(G)}/M.$$

Гомоморфизм ψ локально относительно компактен, так как образы компактных множеств при непрерывном отображении компактны. Поскольку замыкание π -образа любой окрестности единицы в группе G содержит и нормальный делитель $\text{DG}(\pi)$ в $\overline{\pi(G)}$ и, тем более, нормальный делитель M , то замыкание ψ -образа любой окрестности единицы в группе G содержит факторгруппу $\text{DG}(\pi)/M$,

$$\text{DG}(\psi) \supseteq \text{DG}(\pi)/M,$$

а из компактности группы $\overline{\pi(G)}$ следует, что π -образ сети $g_U \in U$, $U \in \mathfrak{U}$, ψ -образ которой сходится к данному элементу x группы $\text{DG}(\pi)/M$, имеет предельную точку y в $\overline{\pi(G)}$ и $\theta(y) = x$ ввиду непрерывности отображения θ , так

что

$$\mathrm{DG}(\psi) \subseteq \mathrm{DG}(\pi)/M,$$

что завершает доказательство леммы.

Воспользуемся леммой 3 для доказательства следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – коммутативная связная локально компактная группа, разрешимая связная локально компактная группа или компактная связная группа, а π – локально ограниченный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – связная локально компактная коммутативная группа, то G является прямым произведением векторной группы и связной компактной абелевой группы (см., например, [11, теорема 7.57, (iii)]). Но векторная группа локально безгранично делима как группа Ли, а связная компактная абелева группа делима [11, следствие 8.5], и её локальная безграничная делимость следует из теоремы об открытом отображении, применённом к гомоморфизму, определяемому возведением в данную натуральную степень (см., например, [3, теорема 5.29]). Таким образом, любая коммутативная связная локально компактная группа локально безгранично делима, и остаётся применить лемму 2.

Если G – связная локально компактная разрешимая группа, то группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является одновременно компактной и связной разрешимой, что сразу следует по индукции из леммы 3, применённой к последовательным факторам композиционного ряда.

Если G – связная компактная группа, то топология в группе G содержит фундаментальную систему окрестностей единицы e , инвариантных относительно внутренних автоморфизмов [11, следствие 1.12], и, кроме того, в группе G существуют максимальные связные компактные коммутативные подгруппы $T \subset G$, и все они сопряжены в G . Пересечение данной окрестности O элемента e , инвариантной относительно внутренних автоморфизмов, с подгруппой T есть окрестность U элемента e в T . Тем самым, в группе G существует фундаментальная система окрестностей единицы, имеющих вид множеств $\bigcup_{g \in G} gUg^{-1}$, где U пробегает семейство окрестностей единицы в T . На такой окрестности в группе G операция возведения в натуральную степень сводится к возведению в степень только на окрестности U единицы в коммутативной связной компактной группе T . Поскольку, как мы видели выше, группа T локально безгранично делима, то и вся группа G локально безгранично делима. Остаётся применить лемму 2.

Следующее свойство связывает группы разрывов гомоморфизма и определяемого им гомоморфизма коммутанта.

ЛЕММА 4. Пусть G – топологическая группа, G' – коммутант группы G (в алгебраическом смысле и в топологии, индуцированной топологией группы), и пусть π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H . Тогда коммутант группы разрывов

гомоморфизма π является подгруппой группы разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G :

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

Если отображение $[\cdot, \cdot]: G \times G \rightarrow G' \subset G$, определённое формулой $\{p, q\} \mapsto [p, q](= pqr^{-1}q^{-1})$, $p, q \in G$, открыто в единице группы $G \times G$ (как отображение $G \times G \rightarrow G'$ в топологиях, индуцированных исходной топологией группы G , на всех достаточно малых окрестностях единицы в $G \times G$), то коммутант группы разрывов гомоморфизма π совпадает с группой разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ представления π на коммутант G' группы G :

$$\mathrm{DG}(\pi)' = \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c – элемент коммутанта группы $\mathrm{DG}(\pi)$. Тогда c есть произведение конечного числа элементов вида

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}, \quad a, b \in \mathrm{DG}(\pi).$$

Любой элемент $[a, b]$, $a, b \in \mathrm{DG}(\pi)$, является пределом сети элементов вида

$$[\pi(g_U), \pi(h_U)] = \pi([g_U, h_U]), \quad g_U, h_U \in U \in \mathfrak{U},$$

которые принадлежат π -образу коммутанта G' группы G (где $\pi(g_U)$ сходится по базису фильтра $\mathfrak{U}$ к a , а $\pi(g'_U)$ – к b). Для любого $V \in \mathfrak{U}$ существует такая окрестность $U_V \in \mathfrak{U}$, что

$$\{[g, h] \mid g, h \in U_V\} \subset V \cap G',$$

так что семейство пересечений $V \cap G'$ пробегает базис окрестностей единицы в G' в индуцированной топологии. Поэтому сеть $[g_{U_V}, h_{U_V}]$ удовлетворяет условию $[g_{U_V}, h_{U_V}] \in V$ для любого $V \in \mathfrak{U}$ и любая предельная точка сети $\pi([g_{U_V}, h_{U_V}])$ принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. В частности, элемент $[a, b]$ тоже принадлежит группе $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. Таким образом, любой элемент вида $[a, b]$, $a, b \in \mathrm{DG}(\pi)$, принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ ограничения гомоморфизма π на G' , и поэтому $c \in \mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ (как произведение конечного числа элементов группы $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$), так что

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

В свою очередь, замыкание $\overline{\pi(V_0)}$ компактно в H для некоторой окрестности единицы V_0 в G , и из условия открытости следует, что для любой достаточно малой окрестности единицы W в G существует такая окрестность единицы V в G , что множество $\overline{\pi(V \cap G')}$ содержится в замыкании множества элементов вида $\pi([a, b])$, $a, b \in W$. Таким образом, множество $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ является подмножеством замыкания $\overline{\{\pi([a, b]) = [\pi(a), \pi(b)] \mid a, b \in W\}}$ для любой достаточно малой окрестности единицы W в G . Для любой точки прикосновения этого замыкания существуют соответствующие сети элементов a и b , обеспечивающие

сходимость коммутатора $[a, b]$ к выбранной точке. Так как множество $\overline{\pi(V_0)}$ компактно, то можно выделить сходящиеся подсети элементов a и b . Отсюда и следует обратное включение

$$\mathrm{DG}(\pi)' \supset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частности, условие открытости в лемме 4 выполняется автоматически, если G – односвязная группа Ли. Действительно, в этом случае коммутант G' группы G замкнут (см. [23, теорема 3.18.8]), и из теоремы о неявной функции следует, что поскольку дифференциал аналитического отображения $G \times G \rightarrow G'$, определённого формулой $\{p, q\} \mapsto [p, q]$, $p, q \in G$, сюръективен в единице группы, то образ окрестности в $G \times G$ точки $(e, e) \in G \times G$ при этом отображении содержит некоторую окрестность точки $e \in G'$ в G' .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – разрешимая связная локально компактная группа, а π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H . Если G – разрешимая связная односвязная группа Ли и π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H , то гомоморфизм π непрерывен на коммутанте G' группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 1 группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой в H . Кроме того, поскольку группа G разрешима, то и группы $\pi(G)$ и $\overline{\pi(G)}$ разрешимы, и группа $\mathrm{DG}(\pi)$ разрешима как подгруппа разрешимой группы. Но связная компактная разрешимая группа коммутативна (ср. с [11, теорема 9.24]). По замечанию 1 это означает, что $\mathrm{DG}(\pi|_{G'}) = \mathrm{DG}(\pi)' = \{e\}$, так что ограничение $\pi|_{G'}$ непрерывно (по теореме 1).

Следующее утверждение позволяет описывать структуру группы разрывов конечно разложимых топологических групп.

ЛЕММА 5. Пусть G – топологическая группа, $A_1, \dots, A_n$ – замкнутые подгруппы в G и $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Предположим, что отображение $A \rightarrow G$, определенное правилом $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \in G$ для любого $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, $a_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$, открыто в единице группы A . Пусть π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда любой элемент d группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ можно представить в виде $d = d_1 d_2 \dots d_n$, где $d_i \in \mathrm{DG}(\pi|_{A_i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению любая достаточно малая окрестность единицы в G содержится в множестве элементов вида $\{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in U_i, i = 1, \dots, n\}$, где U_i – окрестность единицы в A_i . Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению, то его ограничение на каждую подгруппу A_i тоже локально относительно компактно. Если сеть элементов $\pi(a_1 a_2 \dots a_n) = \pi(a_1) \pi(a_2) \dots \pi(a_n)$, где $a_1 a_2 \dots a_n \in U \subset G$, сходится к некоторой точке группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ по фильтру $\mathcal{U}$, то любая сеть $\pi(a_i)$, $a_i \in U \cap A_i$, $i = 1, \dots, n$, имеет предельные точки в компактном множестве $\mathrm{DG}(\pi|_{A_i})$. Переходя к подсети, мы можем считать, что все сети $\pi(a_i)$,

$a_i \in U \cap A_i$, $i = 1, \dots, n$, сходятся к некоторым точкам $d_i \in \text{DG}(\pi|_{A_i})$. Тогда требуемое соотношение следует из непрерывности умножения в G .

2.2. Условия непрерывности некоторых гомоморфизмов топологических групп. Начнём с теоретико-группового доказательства некоторого обобщения известных условий непрерывности приводимых представлений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G и H – топологические группы, и пусть f – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H . Пусть M и N – такие замкнутые нормальные делители в H , что пересечение $M \cap N$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и пусть φ и ψ – канонические гомоморфизмы группы H на факторгруппы H/M и H/N соответственно. Если композиции $\varphi \circ f$ и $\psi \circ f$ непрерывны, то и гомоморфизм f непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 группа разрывов $\text{DG}(f) \subset H$ гомоморфизма f компактна, причём группы

$$\varphi(\text{DG}(f)) \subset (\varphi \circ f)(G), \quad \psi(\text{DG}(f)) \subset (\psi \circ f)(G)$$

единичны, поскольку группы $(\varphi \circ f)(G)$ и $(\psi \circ f)(G)$ единичны согласно теореме 1. Таким образом, группа разрывов $\text{DG}(f)$ гомоморфизма f является компактной подгруппой пересечения $M \cap N$, которое не содержит нетривиальных компактных подгрупп по условию. Итак, $\text{DG}(f) = \{e_H\}$, что равносильно непрерывности гомоморфизма f согласно теореме 1.

Отсюда немедленно получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – топологическая группа, E – топологическое векторное пространство, $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, – замкнутые собственные векторные подпространства в E ,

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = E,$$

ρ – такое локально относительно компактное (в сильной операторной топологии, т.е. в топологии, определяемой в пространстве $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E условием, что ее база окрестностей нуля состоит из множеств вида $\{T \mid t \in L(E), T(S) \subset V\}$, где S пробегает семейство конечных множеств в E , а V – базис окрестностей нуля в E) представление топологической группы G непрерывными линейными операторами в E , что

$$\rho(g)F_k \subset F_k \quad \text{для любых } g \in G, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

и представление, определяемое представлением ρ в F_1 и в каждом факторпространстве

$$F_{k+1}/F_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в F_1 или F_{k+1}/F_k соответственно. Тогда представление ρ группы G в E непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что образ группы G в $L(E)$ есть топологическая группа. Для этого достаточно установить непрерывность умножения в этом образе по совокупности переменных (в сильной операторной топологии). Так как замыкания образов окрестностей единицы в G компактны в сильной операторной топологии по предположению, а все орбиты таких множеств операторов в E сильно компактны, то сети, сходящиеся в $L(E)$ в сильной операторной топологии (т. е. на каждом векторе), сходятся равномерно на этих орбитах ([41, III.3.1 и III.4.5]), что обычным образом доказывает непрерывность умножения на компакте, являющемся замыканием образа окрестности единицы. Отсюда сразу следует непрерывность умножения на всей группе $\pi(G)$ в сильной операторной топологии.

Итак, рассматриваемое представление можно считать гомоморфизмом топологических групп. Из индуктивных соображений следует, что достаточно рассмотреть случай $n = 2$. В этом случае множества

$$M = \{T \in \rho(G) \mid T|_{F_1} = 1_{F_1}\}, \quad N = \{T \in \rho(G) \mid \tilde{T} = 1_{E/F_1}\},$$

где оператор $\tilde{T}$ определяется равенством

$$\tilde{T}(\xi + F_1) = T\xi + F_1 \in E/F_1,$$

являются замкнутыми нормальными делителями в $\rho(G)$, а компактная группа разрывов $DG(\rho) \subset L(E)$ представления ρ имеет лишь тривиальное пересечение с $M \cap N$, поскольку последовательность степеней любого неединичного оператора T , принадлежащего пересечению $M \cap N \cap DG(\rho)$, не ограничена (действительно, при $T\xi = \xi + \eta$, $\xi \in E$, $\xi \notin F_1$, $\eta \in F_1$, $\eta \neq 0$, имеем $T^n\xi = \xi + n\eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$) и поэтому не может принадлежать относительно компактному множеству в E . Остаётся применить теорему 2.

Этот результат является новым и для локально выпуклых пространств; аналогичный результат в слабой операторной топологии можно также получить с помощью аналога теоремы Л. Брауна [11] (о слабой непрерывности представлений с сильно непрерывным подпредставлением и сильно непрерывным представлением в соответствующем факторпространстве), полученного автором в [25] и утверждающего слабую непрерывность представлений со слабо непрерывным подпредставлением и слабо непрерывным представлением в факторпространстве.

Отметим ещё одно очевидное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если все неприводимые подфакторы данного локально ограниченного конечномерного представления топологической группы непрерывны, то и всё представление непрерывно. Если все неприводимые локально ограниченные конечномерные представления топологической группы непрерывны, то и все локально ограниченные конечномерные представления этой группы непрерывны.*

Это следствие, вместе с аналогом теоремы Ли об одномерности не обязательно непрерывных неприводимых конечномерных представлений разрешимой группы Ли с делимыми коммутативными факторами, было использовано

в [38] для доказательства автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связной группы Ли на коммутанте группы. Мы кратко изложим эти факты, а затем укажем другой подход к решению задачи, позволяющий существенно обобщить результаты.

§ 3. Вариант теоремы Ли для не обязательно непрерывных гомоморфизмов разрешимых групп Ли

3.1. Вариант теоремы Ли для конечномерных неприводимых представлений разрешимых групп Ли. Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 6. Пусть G – группа, N – нормальный делитель в G , π – неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве E , и пусть существует одномерное инвариантное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения σ представления π на N . Если существует безгранично делимое подмножество $X \subset G/N$, порождающее G/N , то все операторы представления σ кратны единичному оператору в пространстве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению представление σ имеет одномерное подпредставление и, тем самым, общий собственный вектор $\xi \in E$, так что, в частности,

$$\sigma(n)\xi = \lambda(n)\xi \quad \text{для всех } n \in N,$$

где $\lambda(n) \in \mathbb{C}^*$, $n \in N$ (здесь $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Тогда

$$\sigma(n)\pi(g)\xi = \pi(g)\sigma(g^{-1}ng)\xi = \lambda(g^{-1}ng)\pi(g)\xi, \quad n \in N, \quad g \in G, \quad (1)$$

и поэтому все векторы вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, – общие собственные векторы для представления σ . Все такие векторы порождают некоторое конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку всех векторов вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, в подпространстве E), и по построению подпространство F имеет базис из собственных векторов представления σ . Разумеется, любое множество линейно независимых векторов вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, конечно. Из формулы (1) следует, что ненулевое подпространство F инвариантно относительно представления π группы G . По предположению представление π неприводимо, так что $F = E$. Таким образом, множество различных функций вида λ_g , $g \in G$, конечно, где

$$\lambda_g(n) = \lambda(g^{-1}ng), \quad g \in G, \quad n \in N.$$

Поскольку λ_g , $g \in G$, – комплекснозначные характеры группы N , то они инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы N . Поэтому $\lambda_n = \lambda$, $n \in N$. Тем самым группа G/N транзитивно действует на (непустом) конечном множестве $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ подстановками этого конечного множества, и если число элементов в этом конечном множестве равно m , то образ группы G/N является подгруппой симметрической группы S_m , так что порядок этой подгруппы является делителем числа $m!$. По условию для любого $x \in X$

существует такой элемент $y \in X$, что $y^{m!} = x$. Следовательно, подстановка, отвечающая элементу x , есть $m!$ -я степень подстановки, отвечающей элементу y , и поэтому является единичной подстановкой. Так как X по условию порождает группу G/N , то все подстановки, определяющие транзитивное действие группы G/N на $\{\lambda_g \mid g \in G\}$, единичны, так что множество $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ одноэлементно, $\lambda_g = \lambda$ для всех $g \in G$, и, тем самым, все операторы представления σ являются скалярными кратными единичного оператора на E (операторами умножения на число, $\sigma(n) = \lambda(n)1_E$, $n \in N$).

Применим лемму 6 для доказательства аналога теоремы Ли для конечномерных представлений некоторых групп, разрешимых в теоретико-групповом смысле. (Другое применение леммы 6 приведено ниже в доказательстве теоремы 6.)

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – разрешимая группа, и пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G безгранично делим. Пусть π – представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему индукцией по длине композиционного ряда группы G . Если эта длина равна 1, то группа G коммутативна и утверждение справедливо даже без дополнительного предположения безграничной делимости, что устанавливает базу индукции. Рассмотрим индуктивный шаг. Пусть утверждение справедливо, если длина композиционного ряда разрешимой топологической группы, каждый фактор которого безгранично делим, не выше n , и пусть дана разрешимая топологическая группа G , длина композиционного ряда которой равна $n + 1$, и каждый фактор которого безгранично делим. Пусть π – неприводимое представление группы G в конечномерном линейном пространстве E . Рассмотрим подгруппу G_1 , являющуюся следующим за группой G элементом композиционного ряда. Так как группа G/G_1 коммутативна, то группа G_1 содержит все коммутаторы $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. По построению группа G_1 разрешима, длина композиционного ряда группы G_1 не выше n и каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G_1 безгранично делим. Пусть ρ – ограничение представления π на подгруппу G_1 . По предположению индукции представление ρ имеет одномерное подпредставление. По лемме 6 представление ρ есть представление скалярными операторами. Так как коммутант группы G содержится в G_1 , то оператор $\rho(ghg^{-1}h^{-1})$, $g, h \in G$, есть скалярное кратное единичного оператора на E (оператор умножения на число $\lambda(ghg^{-1}h^{-1})$). Однако

$$\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1})\pi(h^{-1}) \quad \text{для любых } g, h \in G,$$

и поэтому $\det \rho(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$, или

$$(\lambda(ghg^{-1}h^{-1}))^{\dim E} = 1, \quad g, h \in G.$$

Таким образом, множество значений функции λ конечно на всей группе G_1 . Но функция λ единична на G_2 , и λ -образ группы G_1 можно рассматривать

как образ безгранично делимой группы G_1/G_2 при гомоморфизме, определяемом переходом к факторгруппе по G_2 . Поскольку образ безгранично делимой группы при любом гомоморфизме безгранично делим, а конечная группа безгранично делима тогда и только тогда, когда она единична, то λ -образ группы G_1 единичен. Итак,

$$\lambda(ghg^{-1}h^{-1}) \equiv 1 \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Следовательно, ограничение представления ρ на коммутант группы G кратно единичному, и можно считать, что π – представление коммутативной факторгруппы группы G по её коммутанту. При этом по условию данное представление π неприводимо и, следовательно, одномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорему 3 можно доказать и с помощью теоремы Ли. Приведём схему соответствующего доказательства. Образ любого представления разрешимой группы есть разрешимая подгруппа полной линейной группы в пространстве представления, которую можно рассматривать как конечномерную полную линейную группу. Следовательно, замыкание образа – тоже разрешимая группа. С другой стороны, замкнутая подгруппа матричной группы является группой Ли (возможно, несвязной). Остаётся применить индукцию по длине композиционного ряда (что приводит к рассуждению почти того же размера), чтобы доказать, что рассматриваемое замыкание является связной группой Ли. Этот факт одновременно нетривиален и существен, особенно потому, что условие безграничной делимости факторов существенно для справедливости теоремы 3. (Действительно, симметрическая группа S_3 разрешима и имеет неприводимые двумерные представления.)

Отметим важное для дальнейшего

СЛЕДСТВИЕ 5. 1) *Любое (не обязательно непрерывное) неприводимое конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы одномерно.*

2) *Любое (не обязательно непрерывное) конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы имеет базис, в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая коммутативная связная локально компактная группа безгранично делима, как мы видели в следствии 1, а последовательные коммутанты связной топологической группы связны, как и факторгруппы по ним, и поэтому любая связная разрешимая локально компактная группа удовлетворяет всем условиям теоремы 3, что доказывает утверждение 1), а 2) следует из 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Напомним, что связная разрешимая группа Ли сама по себе не обязательно безгранично делима. Примером может служить универсальная накрывающая группы движений плоскости с естественными параметрами $\varphi, x, y \in \mathbb{R}$, где φ накрывает поворот. Кубический корень из элемента $(2\pi, x, y)$ при $x^2 + y^2 > 0$ не существует.

3.2. Некоторые следствия. Начнём с одного непосредственного приложения доказанного выше варианта теоремы Ли.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G – связная разрешимая локально компактная группа. Любое (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно на коммутанте G' группы G в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Согласно следствию 5 существует базис в пространстве представления, в котором все матрицы операторов представления π являются верхними треугольными. Следовательно, в этом базисе все элементы коммутанта G' записываются унитарными матрицами. Таким образом, все диагональные представления оказываются единичными представлениями группы G' , и поэтому они тривиальным образом непрерывны в любой групповой топологии на группе G' . Так как представление π группы G локально ограничено по предположению, то ограничение представления π на G' непрерывно согласно следствию 3.

Следующее утверждение носит предварительный характер и будет в дальнейшем существенно усилено.

СЛЕДСТВИЕ 7. Любой гомоморфизм некоммутативной связной разрешимой локально компактной группы в локально компактную группу имеет нетривиальное множество непрерывности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, данный гомоморфизм непрерывен на неединичном коммутанте группы.

3.3. Условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Начнём со следующей редукции.

ЛЕММА 7. Пусть G – связная простая группа Ли, а π – конечномерное представление группы G . Пусть H – нетривиальная однопараметрическая подгруппа в G .

1) Если ограничение представления π на H локально ограничено, то и всё представление π локально ограничено.

2) Если ограничение представления π на H непрерывно, то и всё представление π непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку присоединённое представление группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G неприводимо по определению простой группы Ли, то орбита ненулевого вектора, касательного к H , тотальна в $\mathfrak{g}$, так что можно найти конечное число однопараметрических подгрупп $H_1 = H, H_2, \dots, H_n$, $n = \dim G$, каждая из которых сопряжена с H , ненулевые касательные векторы которых в единице группы образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, касательное пространство к множеству произведений $h_1 h_2 \dots h_n$ элементов h_i , где каждый сомножитель h_i принадлежит некоторой окрестности единицы

в $V_i \subset H_i$, совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, так что само множество произведений содержит окрестность единицы в G . Выбирая окрестности V_i в H_i сопряжёнными такой окрестности V , что семейство $\pi|_V$ ограничено, мы видим, что представление π локально ограничено. Это доказывает утверждение 1). Доказательство утверждения 2) аналогично.

В важнейшем частном случае конечномерных представлений вещественной унимодулярной группы матриц второго порядка $SL(2, \mathbb{R})$ полученные выше результаты приводят к следующим условиям непрерывности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – универсальная накрывающая группы $SL(2, \mathbb{R})$, и пусть $G = KAN$ – разложение Ивасава группы G , где K накрывает группу вращений плоскости и изоморфна группе $\mathbb{R}$, A – подгруппа, накрывающая группу диагональных вещественных унимодулярных матриц с положительными элементами (группа A изоморфна этой матричной группе), а N – подгруппа, накрывающая группу унипотентных вещественных верхних треугольных матриц (группа N изоморфна этой матричной группе). Пусть ρ – конечномерное представление некоторой группы Ли, локально изоморфной группе G (ρ не предполагается непрерывным). Если ограничение представления ρ на подгруппу, соответствующую N , локально ограничено, то ρ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ρ как представление группы G . Так как ограничение представления ρ на N локально ограничено, то из леммы 7 следует, что всё представление ρ локально ограничено. Поскольку группы A и N изоморфны безгранично делимой группе $\mathbb{R}$ и коммутант группы AN совпадает с N , то группа $H = AN$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Следовательно, существует базис, в котором операторы представления ρ записываются верхними треугольными матрицами, и поэтому имеют вид, требуемый в следствии 6. Так как группа N совпадает с коммутантом группы AN , то диагональные представления единичны, так что ограничение представления ρ на N непрерывно. Следовательно, всё представление ρ непрерывно по лемме 7. Поскольку накрытия являются локальными гомеоморфизмами, то рассматриваемое представление непрерывно и на факторгруппе группы G по ядру представления, что завершает доказательство теоремы.

§ 4. Аналоги теоремы Ван дер Вардена о непрерывности

4.1. Теорема Ван дер Вардена о непрерывности для полупростых групп Ли. Приведём ключевую часть доказательства аналога теоремы Ван дер Вардена для связных полупростых групп Ли.

ТЕОРЕМА 5 [36]. Пусть G – связная полупростая группа Ли. Пусть ρ – конечномерное представление группы G (которое не предполагается непрерывным). Следующие условия равносильны:

- 1) представление ρ непрерывно;
- 2) представление ρ локально ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $1) \Rightarrow 2)$. Докажем импликацию $2) \Rightarrow 1)$. Так как любая полупростая группа Ли является факторгруппой прямого произведения конечного числа простых групп Ли, достаточно рассмотреть случай, когда группа Ли G проста. Если G компактна, то утверждение следует из теоремы Ван дер Вардена. Пусть G не компактна. Пусть $G = KAN$ – разложение Ивасава группы G , где K накрывает максимальную компактную подгруппу присоединённой группы, группа A накрывает соответствующую абелеву подгруппу, а N – соответствующую нильпотентную подгруппу разложения Ивасава присоединённой группы.

Воспользуемся корневой системой простой группы Ли G относительно A и выберем систему положительных корней для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Для любого положительного корня α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно построить стандартную трехмерную “корневую” подалгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Так как композиция соответствующего отображения универсальной накрывающей группы Σ группы $SL(2, \mathbb{R})$ в группу G и данного локально ограниченного представления ρ группы Ли G непрерывна на нильпотентной части группы Σ (как было доказано в теореме 4), то ограничение представления ρ на однопараметрическую подгруппу в N непрерывно, и из леммы 7 следует, что всё представление ρ непрерывно, что завершает доказательство импликации $2) \Rightarrow 1)$.

4.2. Теорема Ван дер Вардена для коммутанта связной группы Ли.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – связная группа Ли, G' – коммутант группы G и π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на G' является непрерывным представлением группы G' в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3 достаточно доказать, что неприводимые подфакторы представления π непрерывны. Поэтому мы вправе дополнительно предположить, что π – неприводимое представление. Изучим сначала представление π , рассматривая его как представление π_H универсальной накрывающей H группы G и пользуясь соответствующим разложением Леви–Мальцева. Рассмотрим ограничение представления π_H на радикал R_H группы H . По теореме 3 существует базис в пространстве E представления π_H (и тем самым в пространстве представления π), в котором ограничение представления π_H на радикал R_H записывается верхними треугольными матрицами. Следовательно, существует общий собственный вектор $\xi \in E$, $\xi \neq 0$, всех операторов $\pi_H(r)$, $r \in R_H$. Поэтому $\pi_H(r)\xi = \lambda(r)\xi$ для любого $r \in R_H$, где $\lambda(r) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любого $r \in R_H$. Таким образом, существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения π_H представления π на R_H . Так как H/R_H – связная группа Ли, то она порождена любой окрестностью единицы и существует безгранично делимая окрестность единицы (например, гомеоморфная звёздной окрестности единицы с помощью

экспоненциального отображения). Согласно лемме 6 отсюда следует, что все операторы представления π_H кратны единичному оператору в пространстве E . При этом по условию данное представление π неприводимо.

Таким образом,

$$\lambda(r)\pi_H(g)\xi = \lambda(g^{-1}rg)\pi_H(g)\xi = \pi_H(r)\pi_H(g)\xi, \quad g \in H, \quad r \in R_H,$$

откуда следует, что $\pi_H(r)$ действует как оператор $\lambda(r)1_F$ на неприводимом подпространстве F , порождённом вектором ξ , и F совпадает с E , поскольку представление π_H неприводимо по предположению. Итак, $\pi_H(r) = \lambda(r)1_E$ для любого $r \in R$. В частности, ограничение π_H на любую полупростую подгруппу Леви в H является неприводимым представлением этой подгруппы, и характер λ централен, т. е. соотношение $\lambda(r) = \lambda(g^{-1}rg)$ выполняется для всех $g \in H$ и $r \in R_H$. Таким образом, функция λ тождественно равна единице на $[H, R_H] \supset R'_H = [R_H, R_H]$.

С другой стороны, радикальная часть любого коммутатора в H (компонента полупрямого разложения, лежащая в радикале) принадлежит ядру центрального характера λ . Действительно, если S – подгруппа Леви и если $g = sr$ и $g_1 = s_1r_1$, где $s, s_1 \in S$ и $r, r_1 \in R$, то

$$\begin{aligned} gg_1g^{-1}g_1^{-1} &= sr s_1 r_1 r^{-1} s^{-1} r_1^{-1} s_1^{-1} \\ &= ss_1 s^{-1} s_1^{-1} ((s_1(s_1s)^{-1})^{-1} r (s_1(s_1s)^{-1})) (s_1 s r_1 r^{-1} (s_1s)^{-1}) (s_1 r_1^{-1} s_1^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $gg_1g^{-1}g_1^{-1} = s_0r_0$, где $\lambda(r_0) = 1$, и ограничение представления π_H на коммутант группы H действует как соответствующее представление полупростой факторгруппы Ли H/R_H (это представление тривиально на образе ядра естественного накрытия $H \rightarrow G$). Поэтому ограничение неприводимого представления π на коммутант G' группы G , рассматриваемое как представление исходной группы G , можно считать представлением факторгруппы группы G , определяемым неприводимым локально ограниченным представлением факторгруппы группы Ли G по её радикалу (который является замкнутым нормальным делителем в G), т. е. как неприводимое локально ограниченное представление связной полупростой группы Ли, которое непрерывно в фактортопологии по теореме 5. Итак, представление π совпадает на коммутанте G' группы G с представлением, поднятым с непрерывного представления факторгруппы G/R , и поэтому ограничение π на G' непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

Отметим важное для дальнейшего следствие.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть G и H – группы Ли, а π – локально ограниченный гомоморфизм группы G в H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H и ограничение $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G непрерывно, если топология коммутанта G' индуцирована топологией группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальную накрывающую группу $\tilde{G}$ группы G и композицию $\pi \circ \chi$ накрывающего гомоморфизма $\chi: \tilde{G} \rightarrow G$ и данного гомоморфизма π . Применим теорему Леви–Мальцева и представим группу $\tilde{G}$ в виде полупрямого произведения: $\tilde{G} = S_{\tilde{G}} \cdot R_{\tilde{G}}$, где $S_{\tilde{G}}$ – подгруппа Леви в $\tilde{G}$, а $R_{\tilde{G}}$ – радикал группы G (максимальный связный разрешимый нормальный делитель в $\tilde{G}$; см., например, [11, предложение 3.7]). Обозначим через σ ограничение гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на подгруппу Леви $S_{\tilde{G}}$. Замыкание $\overline{\sigma(S_{\tilde{G}})}$ образа $\sigma(S_{\tilde{G}})$ этой подгруппы содержит компактный связный нормальный делитель $\text{DG}(\pi)$, и факторгруппа $\overline{\sigma(S)}/\text{DG}(\pi)$ является замыканием образа непрерывного гомоморфизма группы S по лемме 2. Пусть R_H – радикал группы H . Если образ $\sigma(S_{\tilde{G}})$ имеет нетривиальное пересечение P с R_H , то σ -образ группы P является разрешимым нормальным делителем в полупростой группе Ли S_G . Следовательно, это пересечение должно быть дискретным, и композиция отображения σ и канонического гомоморфизма $H \rightarrow H/R_H$ переводит S в подгруппу полупростой группы Ли H/R_H . Значит, факторгруппа $\overline{\sigma(S)}/\text{DG}(\pi)$ полупроста, и группа $\overline{\sigma(S)}$ является расширением полупростой группы с помощью компактной связной группы. Следовательно, группа $\overline{\sigma(S)}$ редуктивна и имеет конечномерное непрерывное линейное представление с дискретным ядром. По теореме 3 композиция этого представления с гомоморфизмом σ непрерывна, и поэтому сам гомоморфизм σ непрерывен.

Напомним, что группа разрывов $\text{DG}(\rho)$ ограничения ρ гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на $R_{\tilde{G}}$ коммутативна. По лемме 4 группа разрывов $\text{DG}(\pi \circ \chi)$ совпадает с группой $\text{DG}(\rho)$ и, следовательно, также коммутативна. По замечанию 1 отсюда следует, что группа разрывов $\text{DG}(\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'})$ ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на коммутант $\tilde{G}'$ группы $\tilde{G}$ тривиальна и, следовательно, ограничение $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ отображения $\pi \circ \chi$ на $\tilde{G}'$ непрерывно по теореме 3. Заметим, что непрерывность ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ эквивалентна непрерывности ограничения $\pi|_{G'}$, а группа разрывов $\text{DG}(\pi)$ совпадает с группой $\text{DG}(\pi \circ \chi)$.

Следующее утверждение использует структуру компактных групп.

ТЕОРЕМА 7. *Любой гомоморфизм некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу имеет нетривиальное множество относительной непрерывности, а именно его ограничение на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [11, теорема 9.24] следует, что $G = Z_0(G)G'$, где $Z_0(G)$ – центр группы G , а G' – коммутант группы G , а из [11, теорема 9.6] следует, что G' – полупростая компактная группа, т. е. её коммутант совпадает с ней. Кроме того, из [11, теорема 9.19] следует, что G' – факторгруппа прямого произведения односвязных простых компактных групп Ли. Поэтому ограничение любого гомоморфизма некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно по теореме Ван дер Вардена [1].

§ 5. Свойства группы разрывов и группы финальных разрывов гомоморфизмов локально компактных групп

5.1. Связность группы разрывов конечномерных локально ограниченных представлений связных локально компактных групп. Нам нужна следующая информация о структуре конечномерных связных компактных групп Ли.

ЛЕММА 8. Пусть L – связная локально компактная группа, C – вполне несвязный компактный нормальный делитель в L и факторгруппа L/C есть группа Ли. Существует связная замкнутая разрешимая подгруппа группы L , пересечение которой с центром группы L является замкнутой подгруппой конечного индекса в центре группы L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что группа C центральна в L , а L – конечномерная группа. Рассмотрим радикал R (наибольший связный разрешимый нормальный делитель) группы L (см. [42, теорема 3.7]). Тогда либо $L = R$, либо факторгруппа $\Sigma = L/R$ есть связная полупростая локально компактная группа конечной размерности [43, теорема 7.6]. Пусть $\pi: L \rightarrow \Sigma$ – каноническое отображение. Рассмотрим образ $\pi(Z(L))$ центра $Z(L)$ группы L в группе Σ . Так как π – эпиморфизм, то $\pi(Z(L))$ содержится в центре $Z(\Sigma)$ группы Σ . В этом случае $Z(L) \supset C$, и поэтому факторгруппа $\Sigma/Z(\Sigma)$ (по центру $Z(\Sigma)$ группы Σ) есть связная полупростая группа Ли без центра (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли).

Если группа Σ – группа Ли, то её центр конечен. Следовательно, существует замкнутая подгруппа Q конечного индекса в $Z(L)$ (Q – полный прообраз единицы в $Z(\Sigma)$), лежащая в R .

Пусть группа Σ не является группой Ли. Напомним [43, теорема 8.3], что в этом случае существует последовательность

$$\pi_n: L_{n+1} \rightarrow L_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

нетривиальных конечнократных накрытий связных групп Ли, где $L_0 = \Sigma/Z(\Sigma)$ (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли) и Σ – проективный предел семейства $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где каждая группа L_n есть гомоморфный образ универсальной накрывающей группы L_0 , которая изоморфна прямому произведению универсальных накрывающих простых сомножителей группы L_0 . Напомним, что для простого сомножителя в $\Sigma/Z(\Sigma)$ последовательность $\{\pi_n\}$ может существовать тогда и только тогда, когда этот сомножитель является эрмитово симметрической полупростой вещественной группой Ли. В этом случае центр любой группы L_n содержится в центральном торе максимальной компактной подгруппы группы L_n . Поскольку неэрмитовы прямые сомножители в $\Sigma/Z(\Sigma)$ имеют универсальные накрывающие группы с конечным центром, то центр $Z(\Sigma)$ группы Σ содержит подгруппу Z' конечного индекса (ядро факторизации группы Σ по прообразу в Σ прямого произведения всех неэрмитовых прямых сомножителей в $\Sigma/Z(\Sigma)$), лежащую в проективном пределе прямого произведения одномерных центральных торов максимальных компактных

подгрупп эрмитовых сомножителей [43, п. 8.5 и теорема 8.6]. Тогда группа Z' лежит в проективном пределе T' этих прямых произведений. Группа T' связна и коммутативна как проективный предел торов. Её полный прообраз R_1 в L разрешим как расширение связной коммутативной группы T' с помощью связной разрешимой группы R , и группа R_1 содержит центральную подгруппу Q конечного индекса в $Z(L)$.

Итак, в любом случае центр $Z(L)$ группы L содержит замкнутую подгруппу Q конечного индекса, принадлежащую замкнутой связной разрешимой подгруппе R_1 группы L .

Вернёмся к свойствам группы разрывов локально ограниченных гомоморфизмов связных локально компактных групп. Установим следующий общий факт, являющийся одним из основных утверждений настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть G – связная локально компактная группа, а π – локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G в связную локально компактную группу H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной группой (компактной подгруппой группы H).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G в связную локально компактную группу H . Пусть K – некоторый компактный нормальный делитель в H , факторгруппа по которому является группой Ли. Композиция $\psi = \theta_K \circ \pi$, где θ_K – каноническое отображение группы H на факторгруппу H/K , является локально ограниченным гомоморфизмом связной локально компактной группы G в связную группу Ли H/K . Докажем, что группа разрывов гомоморфизма $\psi = \theta_K \circ \pi$ связна.

Пусть Q – такой компактный нормальный делитель в группе G , что факторгруппа G/Q является группой Ли. Пусть Q_0 – компонента единицы в группе Q . Факторгруппа G/Q_0 есть конечномерная локально компактная группа. По следствию 1 группа разрывов $M_1 = DG(\psi|_{Q_0})$ ограничения гомоморфизма ψ на подгруппу Q_0 есть связный компактный нормальный делитель в группе Ли, получаемой замыканием образа гомоморфизма ψ в связной группе Ли H/K . Композиция $\rho = \chi_{M_1} \circ \psi$ гомоморфизма ψ и канонического гомоморфизма χ_{M_1} группы $\overline{\psi(G)}$ на факторгруппу $\overline{\psi(G)}/M_1$ является локально ограниченным (и потому локально относительно компактным) гомоморфизмом связной локально компактной группы G в факторгруппу Ли $\overline{\psi(G)}/M_1$. Согласно лемме 3 и [3, теорема 7.14] из связности группы M_1 следует, что достаточно проверить, что группа $DG(\rho)$ связна. По построению ограничение $\rho|_{Q_0}$ удовлетворяет условию $DG(\rho|_{Q_0}) = \{e_{H/K}\}$ и, тем самым, непрерывно по теореме 1. Поскольку группа Ли H/K не содержит малых подгрупп, то существует такой компактный нормальный делитель N в группе Q_0 , что факторгруппа Q_0/N есть группа Ли и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N тривиально, и поэтому факторгруппа Q_0/N_0 (где N_0 – связная компонента N) есть конечномерная связная локально компактная группа и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N_0 тривиально. Следовательно, факторгруппа G/N_0 является конечномерной связной

локально компактной группой [43, теорема 1.5], и гомоморфизм ρ корректно определяет гомоморфизм группы G/N_0 в группу Ли $\overline{\psi(G)}/M_1$, который мы обозначим через σ и группа разрывов которого совпадает с группой разрывов отображения ρ . Тем самым, достаточно доказать, что группа разрывов $DG(\sigma)$ любого гомоморфизма конечномерной связной локально компактной группы в связную группу Ли связна.

Напомним, что для любого компактного нормального делителя N_1 в локально компактной группе G_1 любая однопараметрическая группа в G_1/N_1 допускает подъём до однопараметрической группы в G_1 , которую каноническое отображение группы G_1 в G_1/N_1 проецирует в данную однопараметрическую группу [44, теорема 4.15.1]. Тем самым, все однопараметрические подгруппы в группе $G_1/N_1 = (G/N_0)/(N/N_0) = G/N$, соответствующие векторам из некоторого базиса в алгебре Ли группы Ли $G_1/N_1 = G/N$, можно поднять до однопараметрических подгрупп в группе $G_1 = G/N_0$. Если Z – центр (вполне несвязный) группы G/N_0 , то множество произведений окрестностей единицы во всех базисных однопараметрических подгруппах на всевозможные элементы центра Z есть окрестность единицы в G/N_0 (полный прообраз окрестности единицы в группе Ли G/N). Так как группа Z есть объединение конечно-го числа открыто-замкнутых подмножеств в Z , то множество произведений окрестностей единицы во всех базисных однопараметрических подгруппах на открыто-замкнутые подмножества в Z есть окрестность единицы в G/N_0 .

Согласно лемме 8, условия которой выполнены для связной локально компактной группы $L = G/N_0$ и вполне несвязного нормального делителя $C = N/N_0$ в L , поскольку факторгруппа $L/C = G/N$ есть группа Ли, существует связная замкнутая разрешимая подгруппа M группы L , содержащая замкнутую подгруппу, являющуюся подгруппой конечного индекса в центре Z группы L . Следовательно, любое множество $V = U_1 U_2 \dots U_n U_M$ произведений (сколь угодно малых) окрестностей единицы U_i , $i = 1, \dots, n$, во всех поднятых базисных однопараметрических подгруппах $T_1, \dots, T_n$ в G/N_0 на (сколь угодно малые) окрестности единицы U_M в M содержит некоторую окрестность единицы в G/N_0 .

Для таких окрестностей, образующих базис фильтра окрестностей единицы в G/N_0 , множества вида

$$\overline{(\sigma(V))} = \overline{\sigma(U_1)} \overline{\sigma(U_2)} \dots \overline{\sigma(U_n)} \overline{\sigma(U_M)}$$

сходятся, с одной стороны, к группе разрывов $DG(\sigma)$, а с другой – к произведению групп разрывов

$$DG(\sigma|_{T_1}) DG(\sigma|_{T_2}) \dots DG(\sigma|_{T_n}) DG(\sigma|_M),$$

где каждый из сомножителей $DG(\sigma|_{T_i})$, $i = 1, \dots, n$, как и последний сомножитель $DG(\sigma|_M)$, связан по следствию 1.

Таким образом, и группа $DG(\sigma) = DG(\rho)$, и, тем самым, группа $DG(\psi)$, где $\psi = \theta_K \circ \pi$, являются компактными связными группами для любого компактного нормального делителя K в группе-образе H , факторгруппа по которому

является группой Ли. Если компактная группа разрывов $DG(\pi)$ не является связной, то существует такая окрестность единицы в группе H , что её пересечение с $DG(\pi)$ есть открыто-замкнутая компонента единицы в группе $DG(\pi)$, и эта окрестность также содержит компактный нормальный делитель K в H , факторгруппа по которому является группой Ли [44, гл. IV]. Тогда разные связные компоненты группы $DG(\pi)$ не могут объединиться в одну компоненту при факторизации по K и, тем самым, группа $DG(\psi)$ оказывается несвязной, что невозможно по доказанному выше. Таким образом, группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной группой, что завершает доказательство теоремы.

Группа разрывов конечномерного локально ограниченного представления почти связной локально компактной группы, в частности компактной вполне несвязной группы, может быть несвязной. Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $K = \prod_{j=1}^{\infty} G_j$, где каждая компактная группа G_j , $j = 1, 2, \dots$, является копией некоторой группы корней из единицы, например

$$G_j = G = \{\exp(2\pi i k/n) \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Любой элемент f группы K определяет (ограниченную) последовательность, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = B(\mathbb{N})$ ограниченных комплексных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем одномерный характер группы K , а именно $\pi: f \rightarrow \chi(f)$, $f \in K$. Представление π , очевидно, разрывно, множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа G_n n -х корней из единицы, и, тем самым, $DG(\pi) = G_n$. Эта компактная группа конечна и не является связной.

С другой стороны, для групп Ли можно получить существенно более точный результат.

СЛЕДСТВИЕ 9. *Группа разрывов любого локально ограниченного конечномерного представления одной группы Ли в другую есть конечномерный тор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H . Как и выше, мы можем дополнительно предположить, что группа G односвязна. Как известно (см. лемму 2), группа $DG(\pi)$ является компактной связной линейной группой. Поэтому остаётся доказать, что группа $DG(\pi)$ абелева, или доказать равносильное утверждение о тривиальности коммутанта группы $DG(\pi)$. Однако

$$\{e_H\} \subset DG(\pi)' = DG(\pi|_{G'})$$

по лемме 4, в то время как ограничение $\pi|_{G'}$ непрерывно по теореме 6, так что $DG(\pi|_{G'}) = \{e_H\}$ по теореме 1. Отсюда следует, что $DG(\pi)' = \{e_H\}$, это и доказывает абелевость группы $DG(\pi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Конечномерное локально ограниченное представление группы Ли называется *m -разрывным*, если группа разрывов этого представления является m -мерным тором.

Очевидно, конечномерное локально ограниченное представление группы Ли 0-разрывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любая нетривиальная связная абелева группа Ли u , следовательно, любая нетривиальная несовершенная связная группа Ли имеют локально ограниченное (и даже унитарное) конечномерное t -разрывное представление для любого натурального t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к универсальной накрывающей группе и к факторгруппе по коммутанту, видим, что достаточно доказать утверждение в одномерном случае и даже ограничиться группой $\mathbb{R}$. В этом случае мы можем воспользоваться базисом Гамеля в $\mathbb{R}$ и построить m -мерное унитарное представление ρ группы $\mathbb{R}$, переводящее произвольное вещественное число x в вектор вида $(\exp(i\pi f_1(x)), \dots, \exp(i\pi f_m(x)))$, где $f_1, \dots, f_m$ — m первых координатных функционалов в выбранном базисе Гамеля. Группа разрывов $DG(\rho)$ является замкнутым тором в замыкании T образа $\rho(\mathbb{R})$, который, в свою очередь, является компактным подмножеством диагонального тора $T(m)$ в унитарной группе $U(m)$, где $T(m)$ изоморфен тору $\mathbb{T}^m$. Если замкнутая группа $DG(\rho)$ является собственной подгруппой в $T(m)$, то существует нетривиальный непрерывный характер ψ группы $T(m)$, ограничение которого на $DG(\rho)$ тождественно равно 1. Следовательно, из общего вида непрерывных характеров m -мерного тора и из определения группы разрывов следует, что композиция $\psi \circ \rho$ является непрерывным характером группы $\mathbb{R}$ и имеет вид

$$x \mapsto \exp(i\pi(n_1 f_1(x) + \dots + n_m f_m(x))), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $n_1, \dots, n_m$ — целые числа, не все равные нулю. Так как функции $f_1, \dots, f_m$ рационально независимы по построению и принимают только рациональные значения, то, с одной стороны, непрерывный характер $\psi \circ \rho$ нетривиален, а с другой — этот характер принимает значения в группе корней из единицы. Противоречие. Таким образом, группа $DG(\rho)$ совпадает с m -тором $\mathbb{T}^m$, что и требовалось доказать.

Отметим следующее очевидное следствие из теоремы 6 и следствия 9.

СЛЕДСТВИЕ 10. *Связная односвязная группа Ли G с радикалом R совершенна тогда и только тогда, когда факторгруппа Ли G/R' , где $R' = [R, R]$ (и, тем самым, радикал R/R' группы Ли G/R' коммутативен), совершенна.*

Напомним, что нормальный делитель R' замкнут в G по [40, теорема 3.18.2].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следует отличать используемое выше условие “алгебраического” совершенства группы Ли G от условия “топологического” совершенства группы Ли G (означающего, что замыкание коммутанта группы G совпадает с G). Напомним пример топологически совершенной группы Ли, которая не является совершенной и потому имеет разрывные гомоморфизмы с абелевыми образами. Рассмотрим факторгруппу H прямого произведения универсальной накрывающей группы G группы $SL(2, \mathbb{R})$ и одномерного тора $\mathbb{T}$ по дискретной

подгруппе, порождённой элементом вида $\{z, \alpha\} \in G \times \mathbb{T}$, где z – порождающий элемент центра группы G , а α – иррациональное вращение (см. [40, гл. 3, упражнение 47] и, более подробно, [45, пример 2.1]). Коммутант полученной группы Ли H плотен в H .

С другой стороны, аналог утверждения следствия 9 может не выполняться для компактных групп, которые не являются группами Ли. Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 2. Пусть $K = \prod_{k=1}^{\infty} G_k$, где каждая компактная группа Ли G_k является копией некоторой простой компактной группы Ли, записанной в матричной форме, например $G_k = \mathrm{SU}(2)$, $k = 1, 2, \dots$. Как уже было сказано выше, любой матричный элемент f_{ij} , $i, j = 1, 2$, любого элемента $f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2$ группы K определяет (ограниченную) функцию на натуральном ряде, $f_{ij}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = B(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем конечномерное унитарное матричное представление $\pi: f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2 \rightarrow \{\chi(f_{ij})\}_{i,j=1}^2$, $f \in K$, группы K . Представление π , очевидно, разрывно, поскольку множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа $\mathrm{SU}(2)$, так что группа $\mathrm{DG}(\pi)$ совпадает с группой $\mathrm{SU}(2)$. Тем самым, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ некоммутативна.

5.2. Группа финальных разрывов некоторых гомоморфизмов локально компактных групп. Следующее определение специфично для топологических групп, имеющих открытую проективно-лиеву подгруппу. Необходимую информацию о проективно-лиевых группах можно найти в [46].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть G – топологическая группа, допускающая проективно-лиеву подгруппу, и пусть π – (не обязательно непрерывный) локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ – семейство всех таких компактных подгрупп N в G , что каждая группа $N \in \mathfrak{N}$ является нормальным делителем в некоторой проективно-лиевой подгруппе O_N в G , для которого факторгруппа O_N/N есть группа Ли.

ЛЕММА 9. Семейство $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ образует фильтр на группе G , и $\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e_G\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если O_1 и O_2 – открытые проективно-лиевы подгруппы в G , а N_1 и N_2 – такие компактные нормальные делители в O_1 и O_2 соответственно, что O_1/N_1 и O_2/N_2 являются группами Ли, то $O = O_1 \cap O_2$ – открытая подгруппа в G и $N = N_1 \cap N_2$ – компактный нормальный делитель в O . Более того, O – открытая подгруппа в O_1 , и поэтому ON_1/N_1 – группа Ли (открытая подгруппа группы Ли O_1/N_1), причём группа O/N является

расширением группы Ли ON_1/N_1 с помощью компактного нормального делителя $N_1/(N_1 \cap N_2) = N_1N_2/N_2$, которая также является группой Ли (компактной подгруппой группы Ли O_2/N_2). Условие $\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e_G\}$ выполняется по определению проективно-лиевых групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Введём обозначение

$$\text{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}.$$

Гомоморфизм π называется *финально непрерывным*, если $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$.

Очевидно, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм локально относительно компактен.

ТЕОРЕМА 9. Пусть G – топологическая группа, содержащая проективно-лиеву подгруппу, и пусть π – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Множество $\text{FDG}(\pi)$ содержится в группе разрывов $\text{DG}(\pi)$ и является компактным нормальным делителем в группе $\overline{\pi(G)}$. Фильтр $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ сходится к $\text{FDG}(\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\pi(N)$ является нормальным делителем в образе $\pi(O_N) \subset \pi(G)$ соответствующей проективно-лиевой подгруппы O_N в G . Следовательно, для любого $g \in G$ множество $\pi(g)\pi(N)\pi(g^{-1})$ является нормальным делителем в образе $\pi(g)\pi(O_N)\pi(g^{-1}) \subset \pi(G)$ открытой проективно-лиевой подгруппы gO_Ng^{-1} в G . Поэтому множество

$$\text{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$$

является пересечением замкнутых подгрупп и инвариантно относительно сопряжений с элементами группы $\pi(G)$, а потому и с элементами группы $\overline{\pi(G)}$. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению и образ любого нормального делителя, лежащего в окрестности, образ которой имеет компактное замыкание, относительно компактен, то множество $\text{FDG}(\pi)$ является компактным нормальным делителем в $\overline{\pi(G)}$. Поскольку для любой открытой проективно-лиевой подгруппы O в G любая окрестность единицы в G содержит такой компактный нормальный делитель N в O , что факторгруппа O/N является группой Ли, то имеет место включение $\text{FDG}(\pi) \subset \text{DG}(\pi)$. Наконец, так как базис фильтра $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ содержит компактный элемент и пересечение всех элементов базиса есть $\text{FDG}(\pi)$, то фильтр сходится к $\text{FDG}(\pi)$.

Группа финальных разрывов локально относительно компактного гомоморфизма и даже конечномерного локально ограниченного представления почти связной локально компактной группы и, в частности, компактной вполне несвязной группы может быть несвязной и некоммукативной.

ПРИМЕР 3. Напомним разобранные выше примеры 1 и 2. Если в качестве сомножителей взять фиксированную конечную некоммутативную матричную

группу, то повторение рассуждения в этих примерах показывает, что группа разрывов $DG(\pi)$ представления π , определяемого свободным ультрафильтром на натуральном ряде, совпадает с выбранным сомножителем, т. е. некоммутативна и несвязна. Очевидно, что и группа $FDG(\pi)$ совпадает с выбранным сомножителем, поскольку каждая окрестность в произведении содержит нормальный делитель, получаемый удалением из произведения конечного числа сомножителей, что не влияет на множество значений отображения π .

Перед формулировкой аналога теоремы Ван дер Вардена для гомоморфизмов локально компактных групп и классификацией их гомоморфизмов по свойствам разрывности мы приведём общую характеристику финально непрерывных гомоморфизмов топологической группы, допускающей открытую проективно-лиеву подгруппу, в проективно-лиеву группу.

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – топологическая группа, допускающая открытую проективно-лиеву подгруппу, а H – проективно-лиева группа. Пусть $\pi: G \rightarrow H$ – локально относительно компактный гомоморфизм. Следующие условия эквивалентны:

- 1) гомоморфизм π финально непрерывен ($FDG(\pi) = \{e_H\}$);
- 2) для любого такого компактного нормального делителя K в H , что факторгруппа H/K есть группа Ли, и для любой открытой проективно-лиевой подгруппы $U \subset G$ существует такой компактный нормальный делитель N в U , что факторгруппа U/N является группой Ли и $\pi(N) \subset K$; таким образом, гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,U,N}$, отображающий группу Ли U/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,U,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$.

Как показывает пример 3, условие $FDG(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости этого утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G и H – группы, свойства которых указаны в формулировке теоремы, и пусть $\pi: G \rightarrow H$ – локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H . Предположим, что $FDG(\pi) = \{e_H\}$. Пусть U – почти связная открытая подгруппа в G . Обозначим ограничение гомоморфизма π на U через π_U . Пусть K – компактный нормальный делитель в H , для которого факторгруппа $L_K = H/K$ есть группа Ли. Тогда существует окрестность единицы W в L_K , не содержащая неединичных подгрупп. Следовательно, полный прообраз V окрестности W в H не содержит подгрупп, не содержащихся в K . В частности, из условия $FDG(\pi) = \{e_H\}$ следует, что пересечение замыканий образов компактных нормальных делителей в U есть e , и так как фильтр $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ сходится к $FDG(\pi)$ (по теореме 9), то найдётся такой элемент N фильтра, что его образ содержится в окрестности V , а поэтому и в нормальном делителе K . Итак, N – искомый компактный нормальный делитель в группе U , поскольку (по определению фильтра $\mathfrak{N}$) факторгруппа U/N является группой Ли, а из включения $\pi(N) \subset K$ следует, что π -образ в группе H каждого смежного класса по N (рассматриваемого как подмножество в U)

содержится в однозначно определенном смежном классе по нормальному делителю K в H , так что гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,U,N}$, отображающий группу Ли U/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,U,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$, что и требовалось доказать. Импликация 2) $\implies$ 1) очевидна.

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог теоремы Ван дер Вардена о непрерывности финально непрерывных локально ограниченных гомоморфизмов почти связных локально компактных групп на коммутанте компоненты единицы.

ТЕОРЕМА 11. Пусть G – почти связная локально компактная группа, H – связная локально компактная группа, а $\pi: G \rightarrow H$ – локально ограниченный гомоморфизм. Если гомоморфизм π финально непрерывен ($\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$), то он непрерывен на коммутанте G'_0 компоненты единицы G_0 .

Как показывает пример 2, условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 10 для любого такого компактного нормального делителя K в H , что факторгруппа H/K является группой Ли (с конечным числом связных компонент), существует компактный нормальный делитель N в G такой, что факторгруппа G/N – (связная) группа Ли и $\pi(N) \subset K$. Таким образом, гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,N}$ (возможно, несвязной) группы Ли в другую (связную) группу Ли, $\pi_{K,N}: G/N \rightarrow H/K$, по формуле $\pi_{K,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$. Гомоморфизм $\pi_{K,N}$ непрерывен на коммутанте компоненты единицы $(G/N)_0$ группы G/N по следствию 8. Однако образ компоненты единицы G_0 в G/N плотен в $(G/N)_0$ согласно [8, теорема 7.12], и поэтому совпадает с $(G/N)_0$, так как N компактен. Поскольку коммутант группы G_0 непрерывно отображается на коммутант группы $(G/N)_0 = G_0/(G_0 \cap N)$ при каноническом гомоморфизме $\nu: G \rightarrow G/N$, то исходный гомоморфизм π определяет непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G_0 во всевозможные факторгруппы Ли H/K , где K – компактный нормальный делитель в H . Из построения ясно, что это семейство непрерывных гомоморфизмов коммутирует с каноническим гомоморфизмом факторгруппы Ли (гомоморфизмов групп Ли вида $H/K_1 \rightarrow H/K_2$ для всех $K_1 \subset K_2$, где K_1 и K_2 – компактные нормальные делители в H) и, тем самым, корректно определён непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G в H . Этот гомоморфизм совпадает по построению с ограничением исходного гомоморфизма на коммутант.

Отметим очевидное следствие теоремы 11.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть G – почти связная локально компактная группа, а H – связная локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:

(а) любой финально непрерывный локально ограниченный гомоморфизм $\pi: G \rightarrow H$ непрерывен на G'_0 ;

(b) группа G_0 совпадает с коммутантом G'_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 11 из (b) следует (a). С другой стороны, если группа G_0 не совпадает с G'_0 , то факторгруппа G_0/G'_0 является нетривиальной коммутативной группой. Если бы группы вида

$$(G/N)_0/(G/N)'_0 = (G_0/(N \cap G'_0))/(G'_0/(N \cap G'_0)) = (G/(N \cap G'_0))_0/(G'_0/(N \cap G'_0))$$

были тривиальны для всех таких компактных нормальных делителей N в G , что факторгруппа G/N является группой Ли, то по определению проективного предела группа G_0/G'_0 также была бы тривиальна, что противоречит предположению. Таким образом, существует такая нетривиальная группа Ли вида G/N , что коммутативная группа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ нетривиальна. Пусть группа $(G/N)'_0$ незамкнута в $(G/N)_0$. Тогда группа $(G/N)_0$ имеет разрывный характер (действительно, если бы все характеры группы были непрерывными, то, поскольку (все, не обязательно непрерывные) характеры коммутативной группы $(G/N)_0/(G/N)'_0$ (которую можно рассматривать и как дискретную группу) разделяют точки группы $(G/N)_0/(G/N)'_0$, их композиции с каноническим отображением $(G/N)_0 \rightarrow (G/N)_0/(G/N)'_0$ также были бы непрерывны и, следовательно, пересечение их ядер (т. е. подгруппа $(G/N)'_0$) было бы замкнутой подгруппой в $(G/N)_0$). Так как факторгруппа $(G/N)/(G/N)_0$ конечна, то конечномерное представление группы G/N , индуцированное этим разрывным характером, является разрывным конечномерным унитарным представлением группы G/N , а потому и группы G . Если, напротив, группа $(G/N)'_0$ замкнута в $(G/N)_0$, то факторгруппа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ является нетривиальной связной коммутативной локально компактной группой. Очевидно, связная топологическая группа не может содержать такую собственную замкнутую подгруппу, что коммутативная локально компактная факторгруппа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ дискретна. Остаётся заметить, что каждая недискретная локально компактная группа допускает $2^{2^{\aleph_0}}$ разрывных характеров [47].

Общая часть следующего утверждения очевидна, но на её основе во второй части утверждения мы приводим содержательную классификацию не обязательно непрерывных гомоморфизмов почти связных локально компактных групп в связные локально компактные группы по “уровню” разрывности этих гомоморфизмов.

ТЕОРЕМА 12. I. Пусть G – топологическая группа, содержащая открытую проективно-лиеву подгруппу, H – топологическая группа, а $\pi: G \rightarrow H$ – гомоморфизм. Этот гомоморфизм принадлежит одному и только одному из следующих классов:

(А) гомоморфизм π не локально ограничен;

(В) гомоморфизм π локально ограничен и не финально непрерывен ($\text{DG}(\pi) \supset \text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$);

(Г) гомоморфизм π локально ограничен и финально непрерывен ($\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$), однако $\text{DG}(\pi) \neq \{e_H\}$;

(Δ) гомоморфизм π непрерывен.

II. Пусть G – почти связная локально компактная группа, H – связная локально компактная группа, а $\pi: G \rightarrow H$ – гомоморфизм. Тогда перечисленные выше классы (A)–(Δ) обладают следующими свойствами. Существуют не локально ограниченные гомоморфизмы π (даже среди гомоморфизмов связных локально компактных групп в группы Ли), принадлежащие типу (A), для которых группа $\text{FDG}(\pi)$ либо (тип (A_1)) не определена (это значит, что ограничение гомоморфизма π на любой компактный нормальный делитель, входящий в фильтр $\mathfrak{U}$, не является локально ограниченным), либо (тип (A_2)) определена и нетривиальна (в этом случае, как и в следующем случае (A_3) , ограничение гомоморфизма π на любой компактный нормальный делитель, входящий в фильтр $\mathfrak{U}$, является локально ограниченным гомоморфизмом), либо (тип (A_3)) определена и тривиальна. Гомоморфизм π принадлежит классу (B), если ограничение гомоморфизма π на любой нормальный делитель $N \in \mathfrak{N}$ в G разрывно и имеет относительно компактный образ в H . Если группа G связна, то гомоморфизм π принадлежит классу (Г), если гомоморфизм π является проективным пределом (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения 2) теоремы 10); однако некоторые из этих аппроксимирующих гомоморфизмов разрывны. Случай (Г) может быть реализован, только если группа G_0 не является совершенной, и в этом случае группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны.

Пример 2 показывает, что условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения (Г).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{FDG}(\pi) \subset \text{DG}(\pi)$ и если π локально относительно компактен, то любой локально относительно компактный гомоморфизм (иначе говоря, любой гомоморфизм, не принадлежащий классу (A)) либо непрерывен (т.е. принадлежит классу (Δ)), либо разрывен. В последнем случае выполняется либо условие $\text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ (т.е. гомоморфизм принадлежит классу (B)), либо $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ (т.е. гомоморфизм принадлежит классу (Г)). Это завершает доказательство утверждения I.

Остаётся проверить справедливость утверждения II.

Композиция гомоморфизма, построенного в примере 2, с разрывным автоморфизмом комплексного поля является примером конечномерного не локально ограниченного представления связной компактной группы, принадлежащего классу (A_1) , поскольку ограничение этого представления на любую окрестность не является локально ограниченным. Представление двумерного тора, являющееся произведением не локально ограниченного характера первого сомножителя и ограниченного разрывного характера второго сомножителя, даёт пример одномерного представления типа (A_2) , а ограничение этого характера на первый сомножитель является примером одномерного представления типа (A_3) .

В случае (B) рассмотрим ограничение $\pi|_N$ гомоморфизма π на любой нормальный делитель $N \in \mathfrak{N}$ в группе G . Если бы это ограничение было непрерывно, то выполнялось бы соотношение $\text{DG}(\pi_N) = \{e\}$, а тогда из соотношения

$\text{FDG}(\pi) = \text{FDG}(\pi|_N) \subset \text{DG}(\pi_N)$ следовало бы, что $\text{FDG}(\pi) = \{e\}$, в то время как $\text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ по предположению (В). Таким образом, представление $\pi|_N$ разрывно для любого $N \in \mathfrak{N}$. Наконец, ограничение $\pi|_N$ представления π на N имеет относительно компактный образ в H , поскольку π локально ограничено, а N компактен.

Если группа G связна, то по теореме 10 гомоморфизм π в случае (Г) является проективным пределом гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения 2) теоремы 10); при этом некоторые аппроксимирующие гомоморфизмы должны быть разрывны, поскольку проективный предел непрерывных гомоморфизмов групп Ли является непрерывным гомоморфизмом соответствующего проективного предела групп Ли. Группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны по следствию 8. Согласно тому же следствию 8 это возможно, только если группа G не является совершенной, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ситуация (В), в которой гомоморфизм π локально ограничен и не финально непрерывен, может быть несколько прояснена в случае, если G – связная локально компактная группа. Напомним прежде всего, что *группа разрывов связна*. Кроме того, если $N \in \mathfrak{N}$, то факторгруппа N/N_0 группы N по компоненте единицы N_0 в N является вполне несвязным нормальным делителем в связной локально компактной группе G/N_0 и, следовательно, группа N/N_0 коммутативна. Согласно [11, теорема 9.41] существует такая компактная вполне несвязная подгруппа D в N , что $N = N_0D$ и $D \cap N_0 \subseteq Z_{N_0}$, где $D/(D \cap N_0)$ – коммутативная подгруппа в N/N_0 . Группа D компактна и разрешима. Ограничение гомоморфизма π на N может быть разрывным, если разрешимая группа D или центр группы N_0 недискретны (а именно, ограничения на эти подгруппы могут быть разрывными). Другой причиной разрывности гомоморфизма (как и в примере 2) может быть применение свободного ультрафильтра к бесконечному семейству представлений простого компактного фактора в полупростой части компактной группы N . В частности, если простые компактные факторы в связной компактной группе N_0 являются такими высокими группами [48], что любое натуральное число является размерностью лишь конечного числа (с точностью до эквивалентности) непрерывных неприводимых унитарных представлений группы, то полупростая часть группы N_0 не имеет разрывных локально ограниченных конечномерных представлений. Мы обсудим эту задачу в отдельной публикации.

§ 6. Непрерывность представлений в терминах колебаний в точке и гипотеза Мищенко

6.1. Непрерывность представлений в терминах колебаний в точке.

При обсуждении этих условий непрерывности мы ограничимся конечномерными представлениями топологических групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (ср. с [18]). Пусть G – топологическая группа и π – её (не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E над

полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $\|\cdot\|$ – норма на E , а E^* – пространство, сопряженное к E . Введём слабое колебание $\omega(\pi, \|\cdot\|) \geq 0$ представления π в единичном элементе e группы G (или, кратко, слабое колебание представления π), полагая

$$\omega(\pi, \|\cdot\|) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1 \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|,$$

и колебание $v(\pi) \geq 0$ представления π в единичном элементе группы G (или, кратко, колебание представления π), полагая $v(\pi) = \inf_{\{\|\cdot\|\}} \omega(\pi, \|\cdot\|)$, где нижняя грань берётся по всем нормам в конечномерном векторном пространстве E .

Мы будем иногда пользоваться записью $\omega(\pi)$ вместо $\omega(\pi, \|\cdot\|)$, если норма в соответствующем рассуждении остаётся неизменной. Безусловно, величина $v(\pi)$ конечна тогда и только тогда, когда представление π локально ограничено. Докажем, что в этом случае величина $v(\pi)$ имеет нетривиальную верхнюю границу.

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть G – топологическая группа, а π – локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E . Тогда существует такая (евклидова) норма $\|\cdot\|$ на E , что $\omega(\pi, \|\cdot\|) \leq 2$. В частности, $v(\pi) \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу следует из теоремы 1 и определения 9. Действительно, пусть π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Рассмотрим группу разрывов $DG(\pi)$. Это компактная подгруппа полной линейной группы пространства E . Следовательно, существует такое скалярное произведение в E , что группа $DG(\pi)$ является подгруппой соответствующей унитарной группы. Тогда неравенство $\omega(\pi, \|\cdot\|) \leq 2$ выполняется для нормы $\|\cdot\|$ на E , связанной с этим скалярным произведением, поскольку расстояние между любыми двумя унитарными операторами не превосходит числа 2, а базис фильтра $\{\pi(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $DG(\pi)$.

С другой стороны, если локально ограниченное конечномерное представление связной локально компактной группы разрывно, то величина $v(\pi)$ имеет и нетривиальную нижнюю границу.

ТЕОРЕМА 13. Пусть G – связная локально компактная группа, и пусть π – локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E . В этом случае неравенство $v(\pi) \geq 2$ выполняется тогда и только тогда, когда представление π группы G разрывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если представление π непрерывно, то $DG(\pi) = \{1_E\}$ и, следовательно, нужно рассматривать только случай, в котором представление π разрывно. Как было доказано в следствии 9, в этом случае группа разрывов представления π – связная компактная группа. Диагонализуя образ максимального тора в группе разрывов в некотором базисе, получаем, что ограничение тавтологического представления компактной связной группы

разрывов на максимальный тор содержит по крайней мере один нетривиальный диагональный матричный элемент. Этот матричный элемент определяет непрерывный характер тора, образ которого является нетривиальной замкнутой связной подгруппой одномерного тора, и поэтому весь одномерный тор. Следовательно, если $DG(\pi) \neq \{1_E\}$, то по крайней мере один матричный элемент представления π принимает значение -1 в базисе собственных векторов некоторого максимального тора в $DG(\pi)$. Поэтому диаметр группы $DG(\pi)$ не меньше 2 по отношению к любой норме в E , так что $v(\pi) \geq 2$.

Получаем следующий критерий непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп (ср. с [23]).

ТЕОРЕМА 14 (ср. с [18]). *Пусть G – связная локально компактная группа. Любое конечномерное представление π группы G , удовлетворяющее условию $v(\pi) < 2$, непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы немедленно следует из теоремы 13.

6.2. Гипотеза Мищенко и её доказательство. Основная теорема настоящей статьи показывает, что утверждение теоремы 14 может быть существенно уточнено в классе совершенных групп Ли. А именно, справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 13. *Пусть G – совершенная связная локально компактная группа. Любое финально непрерывное конечномерное представление ρ группы G с конечной величиной $\omega(\rho)$ непрерывно.*

Действительно, конечномерное представление ρ локально ограничено тогда и только тогда, когда величина $\omega(\rho)$ конечна для некоторой (и, следовательно, любой) нормы.

Напомним, что утверждение о том, что величины 0, 2, и ∞ являются единственными возможными значениями величины $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ “хороших” топологических групп, было высказано А. С. Мищенко в качестве гипотезы при обсуждении доклада автора (а именно, при обсуждении теоремы 14) на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ. Таким образом, используя результаты настоящей статьи, мы можем описать класс групп Ли, для которых единственными возможными значениями величины $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ являются величины 0 и ∞ , и следующее утверждение даёт полное доказательство гипотезы Мищенко для связных локально компактных групп.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть G и H – связные локально компактные группы и $\pi: G \rightarrow H$ – гомоморфизм. Тогда осуществляется одна и только одна из следующих взаимно исключающих возможностей:*

- 1) гомоморфизм π не локально ограничен;
- 2) гомоморфизм π локально ограничен, причём $FDG(\pi) \neq \{e_H\}$; в этом случае ограничение гомоморфизма π на любой нормальный делитель в группе G , факторгруппа по которому является группой Ли, разрывно и имеет относительно компактный образ в H ;

3) гомоморфизм π локально ограничен, причём $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$, $\text{DG}(\pi) \neq \{e_H\}$; в этом случае гомоморфизм π является проективным пределом гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения 2) теоремы 10), но среди аппроксимирующих гомоморфизмов есть разрывные, эта ситуация возможна только в случае, если группа G не является совершенной;

4) гомоморфизм π непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно следует из следствия 12, теоремы 13 и теоремы 12. А именно, случай (А) теоремы 12 отвечает случаю 1), случай (В) теоремы 12 отвечает случаю 2), случай (Г) теоремы 12 отвечает случаю 3), а случай (Δ) теоремы 12 отвечает случаю 4).

§ 7. Замечания и приложения

7.1. Приложения к теории квазипредставлений. Напомним основные определения этой теории [49]–[55].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть S – полугруппа, E – топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *U-квазипредставлением*, где U – данное равностепенно непрерывное семейство в $L(E)$) полугруппы S в E , если семейство $U(T)$, определяемое равенством

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2) \mid s_1, s_2 \in S\},$$

равностепенно непрерывно (соответственно, если $U(T)$ содержится в U).

Если локально выпуклое пространство E метризуемо и d – некоторая метрика в E , а $\varepsilon > 0$, то отображение T называется ε -*квазипредставлением* относительно метрики d , если $d(T(s_1 s_2)x, T(s_1)T(s_2)x) \leq \varepsilon d(x, 0)$, $s_1, s_2 \in S$, $x \in E$, а число ε называется *дефектом* квазипредставления T .

Напомним также, что вещественная функция f на группе G называется (*вещественным*) *квазихарактером* на этой группе [49]–[55], если числовое множество $\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$ ограничено, и квазихарактер f называется *псевдохарактером* на G , если $f(g^n) = n f(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Понятие псевдохарактера было введено в 1983 г. [51]. Напомним, что для любого квазихарактера f на группе G формула

$$\varphi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(g^n), \quad g \in G, \quad (2)$$

корректно определяет псевдохарактер φ на G , который называется *псевдохарактером*, связанным с квазихарактером f . Этот псевдохарактер φ непрерывен, если G – топологическая группа и квазихарактер f непрерывен [52]–[55].

Пусть $\tilde{G}$ – произвольная связная односвязная простая некомпактная группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим), и пусть $\tilde{K}$ – аналитическая подгруппа группы $\tilde{G}$, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли $\tilde{G}$. Осуществим изоморфное отождествление

центра $Z_{\tilde{K}}$ аналитической группы $\tilde{K}$ с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на кривой). Рассмотрим соответствующее разложение Ивасава $\tilde{G} = \tilde{K}AN$ группы $\tilde{G}$. Пусть A – абелева, а N – нильпотентная группа в этом разложении, и пусть

$$g = k(g)an, \quad g \in \tilde{G}, \quad k(g) \in \tilde{K}, \quad a \in A, \quad n \in N,$$

– соответствующее разложение элемента $g \in \tilde{G}$. Как хорошо известно, отображение $\varpi: g \mapsto k(g)$, $g \in \tilde{G}$, переводящее каждый элемент $g \in \tilde{G}$ в “компактную” компоненту $k(g) \in \tilde{K}$ его разложения Ивасава, является непрерывным. Рассмотрим композицию ψ отображения $\varpi: t \mapsto k(t)$ и непрерывной проекции α , отображающей каждый элемент $k \in \tilde{K}$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_{\tilde{K}}$. Как доказано в [52]–[55], эта композиция $\psi = \alpha \circ \varpi$ определяет некоторый квазихарактер на $\tilde{G}$. Напомним также, что псевдохарактер φ , соответствующий квазихарактеру ψ (см. (2)), мы называем *псевдохарактером Гишарде–Вигнера*. Псевдохарактер Гишарде–Вигнера автоматически непрерывен на всей группе $\tilde{G}$ [52]–[55].

Отметим приложения основной теоремы к условиям непрерывности псевдохарактеров и одномерных псевдопредставлений. Сначала напомним следующий результат.

ТЕОРЕМА 16 [56], [57]. *Пусть G – связная группа Ли. Любой вещественный псевдохарактер на G непрерывен. В частности, если G – эрмитово симметрическая некомпактная простая группа Ли с бесконечным центром, то любой вещественный псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера, а на остальных простых группах Ли любой вещественный псевдохарактер равен нулю. Любое одномерное унитарное псевдопредставление некомпактной полупростой группы Ли является экспонентой от мнимого кратного некоторого вещественного псевдохарактера.*

В следующей теореме, которая может рассматриваться как свидетельство физической осмысленности понятия неприводимого неограниченного конечномерного представления совершенной группы Ли, объединены результаты известных теорем из [20]–[24] и [52]–[57] с результатами настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 17. *Любое локально ограниченное неограниченное неприводимое конечномерное квазипредставление совершенной группы Ли G есть обычное непрерывное представление этой группы.*

Случай ограниченных отображений в утверждении такого вида должен быть исключён, поскольку экспоненты от мнимых кратных псевдохарактера Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрических полупростых группах Ли являются нетривиальными непрерывными одномерными унитарными чистыми псевдопредставлениями этих полупростых групп Ли (и их расширений) и малые возмущения нетривиальных прямых сумм таких экспонент могут быть неприводимыми.

В отличие от представлений, непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Например, таково отображение $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \varphi(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g \in G$, где G – простая эрмитова симметрическая группа Ли с бесконечным центром, а φ – псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G .

7.2. Заключительные замечания. Отметим два непосредственных следствия теорем 12 и 15.

СЛЕДСТВИЕ 14. *Если G – совершенная связная локально компактная группа и H – связная локально компактная группа, то любой финально непрерывный гомоморфизм G в H , переводящий ограниченные множества в G в ограниченные множества в H , непрерывен. Образ любого такого гомоморфизма совершенен. В частности, любой финально непрерывный изоморфизм совершенной связной локально компактной группы на связную локально компактную группу, переводящий ограниченные множества в ограниченные, непрерывен, и потому является топологическим изоморфизмом совершенных локально компактных групп.*

СЛЕДСТВИЕ 15. *Если G – совершенная связная группа Ли, то семейство ограниченных множеств в G определяет топологию группы G , т.е. любой автоморфизм группы G , сохраняющий класс ограниченных множеств, является топологическим автоморфизмом группы Ли, и любой групповой изоморфизм между совершенными группами Ли, сохраняющий класс ограниченных множеств, непрерывен и, следовательно, является топологическим изоморфизмом групп Ли.*

Отметим следующий критерий непрерывности конечномерных представлений связных групп Ли.

СЛЕДСТВИЕ 16. *Пусть G – связная группа Ли. Данное локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно тогда и только тогда, когда ограничение этого представления на радикал непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда группа односвязна. В этом случае ограничение представления на подгруппу Леви непрерывно по теореме 5, а ограничение на радикал непрерывно по условию.

Как мы видели выше (см. пример 2), аналогичный критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп не имеет места.

Отметим в заключение, что за пределами семейства локально компактных групп семейство разрывных представлений группы может быть устроено сложнее, чем в локально компактном случае, даже в классе групп, весьма близких к компактным, например в классе псевдокомпактных групп. В [58] приведён пример (пример 1 в § 9) характера связной псевдокомпактной группы, для которого и группа разрывов, и группа финальных разрывов суть группа корней третьей степени из единицы.

Список литературы

1. B. L. van der Waerden, “Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen”, *Math. Z.*, **36**:1 (1933), 780–786.
2. L. W. Anderson, R. P. Hunter, “On the continuity of certain homomorphisms of compact semigroups”, *Duke Math. J.*, **38**:2 (1971), 409–414.
3. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. II. *Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах*, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*. V. II: *Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*, Grundlehren Math. Wiss., **152**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970.
4. J. E. Hart, K. Kunen, “Bohr compactifications of discrete structures”, *Fund. Math.*, **160**:2 (1999), 101–151.
5. J. E. Hart, K. Kunen, “Bohr compactifications of non-abelian groups”, *Topology Proc.*, **26**:2 (2001–2002), 593–626.
6. J. E. Hart, K. Kunen, “Bohr topologies and compact function spaces”, *Topology Appl.*, **125**:2 (2002), 183–198.
7. G. Lukács, *Lifted closure operators*, [arXiv: math/0502410](https://arxiv.org/abs/math/0502410).
8. W. W. Comfort, D. Remus, H. Szambien, “Extending ring topologies”, *J. Algebra*, **232**:1 (2000), 21–47.
9. J. D. Lawson, “Intrinsic topologies in topological lattices and semilattices”, *Pacific J. Math.*, **44** (1973), 593–602.
10. A. Pillay, “An application of model theory to real and p -adic algebraic groups”, *J. Algebra*, **126**:1 (1989), 139–146.
11. K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The structure of compact groups. A primer for the student—a handbook for the expert*, de Gruyter Stud. Math., **25**, de Gruyter, Berlin, 1998.
12. W. W. Comfort, “Topological groups”, *Handbook of set-theoretic topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1143–1263.
13. W. W. Comfort, L. C. Robertson, “Images and quotients of $SO(3, R)$: remarks on a theorem of Van der Waerden”, *Rocky Mountain J. Math.*, **17**:1 (1987), 1–13.
14. K. de Leeuw, I. Glicksberg, “The decomposition of certain group representations”, *J. Analyse Math.*, **15** (1965), 135–192.
15. R. T. Moore, *Measurable, continuous and smooth vectors for semi-groups and group representations*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
16. L. G. Brown, “Continuity of actions of groups and semigroups on Banach spaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **62**:1 (2000), 107–116.
17. А. И. Штерн, “Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 139–156; англ. пер.: A. I. Shtern, “Criteria for weak and strong continuity of representations of topological groups in Banach spaces”, *Sb. Math.*, **193**:9 (2002), 1381–1396.
18. A. I. Shtern, “Continuity of Banach representations in terms of point variations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:2 (2002), 250–252.
19. A. I. Shtern, “Representations of topological groups in locally convex spaces: continuity properties and weak almost periodicity”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 81–108.
20. A. I. Shtern, “Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **6**:2 (2003), 141–156.
21. А. И. Штерн, “Критерии непрерывности конечномерных представлений групп”, *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования*, Наука, М., 2003, 122–124.

22. A. I. Shtern, "Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups", *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **8**:1 (2004), 13–22.
23. А. И. Штерн, "Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп", *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 145–159; англ. пер.: A. I. Shtern, "Criteria for the continuity of finite-dimensional representations of connected locally compact groups", *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1377–1391.
24. А. И. Штерн, "Критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп", *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 951–953; англ. пер.: A. I. Shtern, "Continuity criterion for finite-dimensional representations of locally compact groups", *Math. Notes*, **75**:5–6 (2004), 890–892.
25. А. И. Штерн, "Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах", *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 155–176; англ. пер.: A. I. Shtern, "Weak and strong continuity of representations of topologically pseudocomplete groups in locally convex spaces", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 453–473.
26. J.-P. Serre, "Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 4194–4196.
27. H. A. Keller, "On valued, complete fields and their automorphisms", *Pacific J. Math.*, **121**:2 (1986), 397–406.
28. J. Tits, "Sur le groupe des automorphismes d'un arbre", *Essays on topology and related topics*, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Springer, New York, 1970, 188–211.
29. J. Tits, "Homomorphismes et automorphismes "abstraits" de groupes algébriques et arithmétiques", *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 349–355.
30. S. A. Adeleke, "Discontinuous automorphisms of the proper Galilei and Euclidean groups", *Internat. J. Theoret. Phys.*, **28**:4 (1989), 469–479.
31. M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1985.
32. D. Kazhdan, "On ε -representations", *Israel J. Math.*, **43**:4 (1982), 315–323.
33. А. И. Штерн, "Проблема Каждана–Мильмана для полупростых компактных групп Ли", *УМН*, **62**:1 (2007), 123–190; англ. пер.: A. I. Shtern, "Kazhdan–Milman problem for semisimple compact Lie groups", *Russian Math. Surveys*, **62**:1 (2007), 113–174.
34. K. Grove, H. Karcher, E. A. Ruh, "Jacobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differential pinching problems", *Math. Ann.*, **211**:1 (1974), 7–21.
35. А. И. Штерн, "Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп", *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 908–920; англ. пер.: A. I. Shtern, "Roughness and approximation of quasi-representations of amenable groups", *Math. Notes*, **65**:6 (1999), 760–769.
36. A. I. Shtern, "Van der Waerden continuity theorem for semisimple Lie groups", *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 210–223.
37. A. I. Shtern, "Van der Waerden continuity theorem for the Poincaré group and for some other group extensions", *Adv. Theor. Appl. Math.*, **1**:1 (2006), 79–90.
38. A. I. Shtern, "Van der Waerden's continuity theorem for the commutator subgroups of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture", *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **13**:2 (2006), 143–158.
39. M. A. Naimark, A. I. Štern [Shtern], *Theory of group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **246**, Springer-Verlag, New York, 1982.
40. V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

41. X. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: H. Schaefer, *Topological vector spaces*, The Macmillan Co., New York; Collier–Macmillan Ltd., London, 1966.
42. A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
43. M. Stroppel, “Lie theory for non-Lie groups”, *J. Lie Theory*, **4**:2 (1994), 257–284.
44. D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York–London, 1955.
45. E. Breuillard, T. Gelander, “On dense free subgroups of Lie groups”, *J. Algebra*, **261**:2 (2003), 448–467.
46. R. W. Bagley, T. S. Wu, J. S. Yang, “Pro-Lie groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287**:2 (1985), 829–838.
47. M. Rajagopalan, “Characters of locally compact abelian groups”, *Math. Z.*, **86**:4 (1964), 268–272.
48. H. Rindler, “Unitary representations and compact groups”, *Arch. Math. (Basel)*, **58**:5 (1992), 492–499.
49. А. И. Штерн, “Квазипредставления и псевдопредставления”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:2 (1991), 70–73; англ. пер.: A. I. Shtern, “Quasirepresentations and pseudorepresentations”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:2 (1991), 140–143.
50. А. И. Штерн, “Quasisymmetry. I”, *Russian J. Math. Phys.*, **2**:3 (1994), 353–382.
51. А. И. Штерн, *Устойчивость представлений и псевдохарактеры*, Ломоносовские чтения, МГУ, М., 1983.
52. A. I. Shtern, “Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **20**:3 (2001), 199–221.
53. A. I. Shtern, “Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications”, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 122–133.
54. А. И. Штерн, “Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), 67–80; англ. пер.: A. I. Shtern, “Structure properties and real continuous bounded 2-cohomology of locally compact groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:4 (2001), 294–304.
55. A. I. Shtern, “A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional”, *Acta Appl. Math.*, **68**:1–3 (2001), 105–121.
56. A. I. Shtern, “Automatic continuity of pseudocharacters on Hermitian symmetric semisimple Lie groups and some applications”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **12**:1 (2006), 1–8.
57. А. И. Штерн, “Автоматическая непрерывность псевдохарактеров на полупростых группах Ли”, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 456–464; англ. пер.: A. I. Shtern, “Automatic continuity of pseudocharacters on semisimple Lie groups”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 435–441.
58. A. I. Shtern, “Continuity conditions for finite-dimensional representations of some locally bounded groups”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:4 (2006), 438–457.

А. И. ШТЕРН (A. I. SHTERN)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступило в редакцию
 14.12.2006