Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Савельев, Игра на универсуме множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 3, 175–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:36:59

УДК 510.322.2+510.325.2+510.327+510.336

Д. И. Савельев

Игра на универсуме множеств¹

В теории множеств без аксиомы регулярности рассматривается игра двух участников на универсуме множеств. В этой игре игроки выбирают по очереди элемент данного множества, элемент этого элемента и т. д.; игрок выигрывает, если его противник не может сделать никакого следующего хода, т. е. если ему удалось выбрать пустое множество. Выигрышные множества, т. е. множества, допускающие выигрышную стратегию для одного из игроков, образуют естественную иерархию с уровнями, индексированными ординалами (в конечном случае ординал указывает наименьшую длину выигрышной стратегии). Показано, что класс всех наследственно выигрышных множеств является внутренней моделью, содержащей все фундированные множества, и что каждое из четырех возможных неравенств между универсумом, классом наследственно выигрышных множеств и классом фундированных множеств непротиворечиво. Что касается класса выигрышных множеств, либо он совпадает со всем универсумом, либо на нем нарушается много аксиом теории множеств. Несколько неожиданно, что аксиома регулярности не входит в их число: нарушение этой аксиомы совместимо с ее релятивизацией на выигрышные множества. Затем устанавливаются более тонкие свойства выигрышных нефундированных множеств. Описаны все классы ординалов, для которых непротиворечиво, что выигрышные множества без минимальных (в смысле принадлежности) элементов находятся в точности на уровнях, индексированных ординалами данного класса. В частности, показано, что если некоторый четный уровень иерархии выигрышных множеств содержит множество без минимальных элементов, то и все более высокие уровни содержат такие множества; и что нарушение аксиомы регулярности влечет существование множеств без минимальных элементов на всех нечетных уровнях, но совместимо как с их отсутствием на всех четных уровнях, так и с появлением на произвольном четном неперечисленном или счетно-конфинальном уровне. Для получения результатов о непротиворечивости предложен новый метод построения моделей с нефундированными множествами. Наконец, рассматривается, насколько длинной может быть эта игра в общем случае. Показано, что, хотя существуют игры любой конечной длины, для почти всех (в смысле определенной естественной вероятности) наследственно конечных фундированных множеств игра заканчивается очень быстро: либо за один, либо за три хода. Как следствие, первый игрок выигрывает почти всегда. Этот результат, как и результаты о выигрышных множествах без минимальных элементов, показывает глубокое различие между четно- и нечетно-выигрышными множествами: последние более редки и сложны.

Библиография: 24 наименования.

¹Результаты настоящей работы были представлены на семинарах мех.-матем. факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в 2003 г. и на конгрессе NSM 2006 (Пиза, Италия). Краткое сообщение было опубликовано в [1].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 06-01-00608-а).

§ 1. Предварительные замечания

Мы работаем в ZF, теории множеств Цермело–Френкеля, без аксиомы регулярности. Так как мы иногда будем ссылаться на аксиомы теории ZF, для краткости мы их обозначим следующим образом: AE – аксиома экстенциональности, AP_r – аксиома пары, AU – аксиома объединения, AP – аксиома степени, AInf – аксиома бесконечности, ASp – схема аксиом выделения, ARp – схема аксиом замены, AR – аксиома регулярности. Кроме того, как обычно, AC – аксиома выбора, ZFC – теория ZF + AC. Хотя язык теории ZF описывает объекты одного типа, называемые *множествами*, очень часто мы говорим о *классах*, рассматривая их как сокращения для формул (этот обычный способ корректен; подробное доказательство можно найти в [2]). Все наши обозначения стандартны. В частности, V – универсум, т. е. класс всех множеств, On – класс всех ординалов (в смысле фон Неймана), 0 – наименьший ординал, т. е. пустое множество, ω – наименьший бесконечный ординал, $\mathcal{P}$ – взятие всех подмножеств, tc – транзитивное замыкание, cf – конфинальность и т. д. (см. [3]).

Поскольку аксиома регулярности из приведенного выше списка будет находиться в центре нашего внимания, напомним, что она представляет собой следующее утверждение:

$$\forall x (x \neq 0 \rightarrow (\exists y \in x) x \cap y = 0).$$

Элемент y множества x называется $\in$ -минимальным (в x), если y не пересекается с x . Множество *фундировано*, если любое непустое подмножество его транзитивного замыкания имеет $\in$ -минимальный элемент, и *нефундировано* в противном случае. (Итак, хотя нефундированное множество x (если оно существует) и может иметь $\in$ -минимальный элемент, но некоторое множество $u \subseteq tc(x)$ пересекается с каждым своим элементом.) Таким образом, AR постулирует, что всякое непустое множество имеет $\in$ -минимальный элемент, или равносильно, что все множества фундированны (и другое название этой аксиомы – *аксиома фундированности*). Напомним хорошо известную *кумулятивную иерархию* множеств:

$$V_0 = 0, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta, \text{ если } \alpha \text{ предельный,} \quad V_\infty = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha.$$

Класс V_∞ представляет собой “регулярную часть” всего универсума V ; он удовлетворяет AR (и, более того, ZF). Для любого множества $x \in V_\infty$ существует его *ранг* в этой иерархии: $r(x) = \min\{\alpha \in On : x \in V_{\alpha+1}\}$. Функция (класс) $r: V_\infty \rightarrow On$ является сильным $\in$ -гомоморфизмом, $r(x) = \sup\{r(x_0) + 1 : x_0 \in x\}$, и $r(V_\alpha) = r(\alpha) = \alpha$. Классическая теорема фон Неймана устанавливает, что фундированные множества – это в точности множества, лежащие в V_∞ ; таким образом, аксиома AR равносильна равенству $V = V_\infty$ (см., например, [2], [3]). Это показывает, что AR имеет в определенном смысле обедняющий характер (подобно AE и в отличие от прочих аксиом теории ZF): она запрещает существование определенных множеств, а именно тех множеств, которые не получаются из множества 0 трансфинитной итерацией операции $\mathcal{P}$ (в то время как AE запрещает существование “слишком похожих” множеств).

Аксиома AR не является “естественной” или “самоочевидной”; кажется, не существует очень веских доводов в поддержку ее истинности. (Некоторые доводы, предложенные Д. Скоттом, приводятся в [4], но они основаны на итеративной концепции множества, которая сама слишком близка к AR, чтобы обосновывать ее. Об итеративной концепции см. [5]; обсуждение “естественности” или “истинности” различных аксиом можно найти в [6]; мы обсуждаем это в другом месте, частично в [7].) Тем не менее, аксиома AR имеет определенные и большие преимущества. Во-первых, она выглядит “практически безопасной”: все множества, используемые в “обычной” математике (и теории множеств), лежат в V_∞ . Во-вторых, она очень упрощает конструкции, особенно теоретико-модельные конструкции, в силу теоремы Мостовского о сжатии. Поэтому ее обычно включают в список аксиом теории ZF (сам Э. Цермело сделал это в [8]). Мы также принимаем это соглашение; мы обозначаем более слабую теорию $ZF - AR$ через ZF^- , а $ZFC - AR$ через ZFC^- . На самом деле, все утверждения настоящей работы доказаны в ZF^- , т. е. без использования AC и AR, за одним лишь исключением: в доказательстве утверждения 4) леммы 15 используется AC.

Существует более слабый вариант аксиомы AR, который также имеет обескураживающий (в том же смысле) характер:

$$\neg(\exists\{x_n : n \in \omega\})(\forall n \in \omega) x_{n+1} \in x_n.$$

Назовем это утверждение *слабой аксиомой регулярности* и обозначим через WR. Таким образом, WR постулирует, что не существует бесконечных $\in$ -убывающих последовательностей вида $x \ni x_0 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$. В частности, из WR следует, что никакое множество x не допускает $\in$ -циклы вида $x \in x_0 \in \dots \in x_n \in x$. Будем говорить, что множество является *множеством с кручением* (или *циркулярным*), если некоторый элемент его транзитивного замыкания допускает такие $\in$ -циклы, и что множество *свободно от кручения* (или *нециркулярно*) в противном случае. Легко видеть, что AR влечет WR (в ZF^-). С другой стороны, WR влечет AR в предположении DC – принципа счетного зависимого выбора. Без DC последнее утверждение может оказаться ложным, т. е. $WR \wedge \neg AR$ непротиворечиво (см. [9]). Также $\neg WR \wedge$ “не существует множеств с кручением” непротиворечиво (и ниже мы увидим примеры таких моделей). Многие авторы, работая в присутствии AC, отождествляют AR и WR и трактуют формулировку WR как определение аксиомы регулярности. Но мы работаем без AC и, следовательно, должны тщательно различать их.

Понятие фундированности (явно сформулированное в [8]) получается релятивизацией AR. Пусть R – бинарное отношение. Элемент y множества x называется R -минимальным (в x), если не существует такого $u \in x$, что $uRy \wedge u \neq x$. Отношение R *фундированно*, если:

- (i) $\{u : uRv\}$ является множеством для любого v ;
- (ii) любое x с непустым $R \cap (x \times x)$ имеет R -минимальный элемент.

(Конечно, множество, являющееся фундированным отношением, не то же самое, что фундированное множество, но эта небольшая терминологическая вольность общепринята и безопасна.)

Заметим, что отношение $\in$ тривиально удовлетворяет (i), и AR утверждает, что оно удовлетворяет также и (ii). (Понятие *слабой фундированности* может быть получено подобным образом, если заменить (ii) на релятивизацию WR.) Любой класс A с бинарным отношением R на нем включает наибольшую часть A_∞ , на которой R фундированно (а также наибольшую часть, на которой R слабо фундированно). Если отношение $R \subseteq A \times A$ фундированно на A , можно получить много полезных результатов об (A, R) , таких как теорема индукции: если $\{u: uRx\} \subseteq B$ влечет $x \in B$ для всех $x \in A$, то $A \subseteq B$; теорема рекурсии: если $G: V \rightarrow V$ – функция, то существует единственная функция F на A такая, что $F(x) = G(F \upharpoonright \{u: uRx\})$ для всех $x \in A$; далее можно построить (рекурсией по ординалам) функцию *ранга* $r_{A,R}$, которая является сильным гомоморфизмом из (A, R) в $(On, \in)$, “расслаивающим” A на уровни A_α ; другой важный сильный гомоморфизм (по R -рекурсии) – *транзитивное сжатие* $\pi_{A,R}$ из (A, R) в $(V_\infty, \in)$; и затем доказать теорему Мостовского о сжатии: если модель (A, R) удовлетворяет AE, то $\pi_{A,R}$ – ее единственный изоморфизм на транзитивный класс. Заметим также, что “ R фундированно” и AR равносильны Δ_1 -формулам и, значит, абсолютны (см. [3, с. 185]; аналогично для слабых вариантов).

Напомним некоторые понятия, относящиеся к моделям теории множеств. Модель (теории ZF, ZF^- или другой теории в стиле Цермело) называется *внутренней моделью*, если она транзитивна и содержит все ординалы, существование которых доказуемо в этой теории. Назовем класс A *густым*, если $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, т. е. если любое множество $y \subseteq A$ принадлежит A . (Здесь $\mathcal{P}(A)$ означает, конечно, класс всех подмножеств (но не подклассов) класса A . Заметим, что $\mathcal{P}(V) = V$.) Кроме того, класс A *транзитивен*, если $A \subseteq \mathcal{P}(A)$; таким образом, класс A транзитивный и густой одновременно, если и только если $\mathcal{P}(A) = A$. Нетрудно показать, что любой транзитивный густой класс является внутренней моделью; назовем такие классы *полными моделями* (данной теории). Доказательство леммы 2 показывает в действительности, что полные модели содержат все фундированные множества (и подавно являются внутренними моделями); таким образом, V_∞ – наименьшая полная модель теории ZF^- и единственная полная модель теории ZF. Поэтому понятие полной модели не интересно в случае ZF; в случае ZF^- оно нетривиально. Далее, пусть $E \subseteq M \times M$. Класс M назовем *E-густым*, если для любого подмножества $y \subseteq M$ существует такой элемент $v \in M$, что $y = \{u: uEv\}$; будем говорить, что такой v *представляет* множество y в (M, E) . Очевидно, $\in$ -густота – это просто густота. Мы будем говорить также, что класс M является *E-экстенциональным*, если $(M, E) \models AE$. Чтобы строить модели теории ZF^- , часто пользуются следующей важной теоремой, принадлежащей Л. Ригеру (см. [10] или [11, с. 119]): если M является E -густым и E -экстенциональным (т. е. для любого множества $y \subseteq M$ существует единственный такой элемент $v \in M$, что $y = \{u: uEv\}$), то $(M, E) \models ZF^-$; более того, если AC верна (в V), то $(M, E) \models ZFC^-$. Эта теорема позволяет нам строить нефундированные модели, отправляясь от основной модели V и подбирая подходящее E : аксиомы ZFC^- , которые выполнялись в V , будут выполняться и в получающейся модели; AR, вообще говоря, не сохраняется, так как E могло быть нефундированным. Мы используем эту теорему в нашем специальном построении моделей.

Наконец, напомним некоторые понятия, используемые в современных исследованиях нефундированных множеств. На самом деле, рассматривая нефундированные множества в настоящей статье, мы будем мало пользоваться этими понятиями; в частности, мы предоставим конструкцию нефундированных моделей, отличную от обычной конструкции (но более удобную для нас). Тем не менее, для полноты изложения мы даем краткий обзор этих понятий.

Мы можем наглядно представлять множества, рассматривая рисунки определенного вида. Пусть M – множество, $E \subseteq M \times M$, $t \in M$ и для каждого $v \in M$ существует путь из v в t , т.е. (конечная) последовательность вида $vE \dots Et$. Мы будем называть такую тройку (M, E, t) *предмножеством* (в терминах [11] это *допустимый граф с отмеченной точкой*). *Подпредмножество* предмножества (M, E, t) , *порожденное элементом* $s \in M$, – это, конечно, (M', E', s) , где $M' = \{u \in M : \text{существует путь из } u \text{ в } s\}$ и $E' = E \cap (M' \times M')$. Предмножество (M, E, t) является *изображением* множества x , если существует функция π , определенная на M и такая, что $\pi(t) = x$ и $\pi(v) = \{\pi(u) : uEv\}$ для всех $v \in M$. Изображение *точное*, если функция π взаимно однозначна. Любое множество x имеет очевидное *каноническое* точное изображение (M, E, x) , где $M = \text{tc}(\{x\})$ и $E = \in \cap (M \times M)$. Таким образом, изображение будет точным, если и только если оно изоморфно некоторому каноническому изображению.

Какие предмножества являются изображениями множеств? Какие изображения точные? В силу АЕ только те предмножества, которые *экстенциональны* (т.е. такие, что M является E -экстенциональным), могут быть точными изображениями множеств. Кроме того, в силу теоремы Мостовского о сжатии каждое *фундированное* предмножество (т.е. такое, что E фундированно) является изображением ровно одного множества (и π будет единственно возможным транзитивным сжатием). В предположении АR только фундированные предмножества могут быть изображениями множеств. Таким образом, в теории ZF мы имеем полное описание всех изображений и всех точных изображений: таковыми являются фундированные предмножества и фундированные экстенциональные предмножества соответственно. В теории ZF^- ситуация может измениться в двух направлениях. Во-первых, некоторые нефундированные предмножества также могут быть изображениями. Во-вторых, обычной аксиомы АЕ может оказаться недостаточно для “правильного” описания тождества множеств: не все экстенциональные изображения будут точными. Таким образом, чтобы описать нефундированный универсум, необходимо постулировать обогащающую аксиому, указывающую, какие нефундированные предмножества являются изображениями, и обедняющую аксиому, указывающую, какие из изображенных множеств на самом деле совпадают.

Естественный путь, предоставляющий такие аксиомы, связан с понятием бисимуляции. Пусть отношение эквивалентности $\sim \subseteq M \times M'$ включает эквивалентность по равноэкстенциональности; оно называется *бисимуляцией* между (M, E) и (M', E') , если:

- (i) для всех x, y, y' существует такое x' , что $xEy \wedge y \sim y' \rightarrow x'E'y' \wedge x \sim x'$;
- (ii) для всех y, x', y' существует такое x , что $x'E'y' \wedge y \sim y' \rightarrow xEy \wedge x \sim x'$;

бисимуляция между предмножествами переводит, кроме того, верхнюю точку в верхнюю точку; бисимуляция между множествами – это бисимуляция между их

каноническими изображениями. Несложно показать, что объединение всех бисимуляций будет ($\subseteq$ -наибольшей) бисимуляцией и что множества связаны этим отношением наибольшей бисимуляции, если и только если они имеют некоторое общее изображение. (Более общим образом, $\pi \subseteq M \times M'$, удовлетворяющее (i), называется *симуляцией* между (M, E) и (M', E') ; очевидно, $\pi \subseteq M \times M'$ удовлетворяет (ii), если и только если π^{-1} – симуляция между (M', E') и (M, E) ; и $\pi \subseteq M \times M'$ будет *бисимуляцией*, если и только если оба отношения π и π^{-1} являются симуляциями. Таким образом, симуляции (бисимуляции) – своего рода многозначные гомоморфизмы (изоморфизмы). Большинство понятий теории нефундированных множеств, как она развита, например, в [11]–[14], может быть в действительности определено в терминах симуляций (например, функции π из определения изображений множеств – это в точности те функции, которые являются бисимуляциями); мы обсудим это подробнее в следующей работе. Очевидным обобщением будет понятие бисимуляции между моделями; это понятие важно для модальной логики: теорема ван Бенгема характеризует ее как часть логики предикатов, устойчивую относительно бисимуляций (см. также [12]). Здесь мы используем бисимуляции, чтобы описать определенные критерии тождества множеств, и рассматриваем лишь те бисимуляции, которые являются эквивалентностями и включают равноэкстенциональность.)

С помощью бисимуляций можно определить естественные усиления обычного понятия экстенциональности: предмножество *экстенционально относительно $\sim$* , если оно не содержит различных $\sim$ -эквивалентных подпредмножеств (в [11] это свойство называется *$\sim$ -экстенциональностью*, но мы должны избежать смешения с понятием *E-экстенциональности*, введенным выше); предмножество *сильно экстенционально*, если оно экстенционально относительно наибольшей бисимуляции. Заметим, что это усиление оказывается нетривиальным лишь в нефундированном случае: фундированное (пред)множество сильно экстенционально, если и только если оно экстенционально; в противоположность этому существование двух (или большего числа) различных множеств вида, например, $x = \{x\}$ не противоречит АЕ, хотя пара, состоящая из таких множеств, очевидно, не сильно экстенциональна. Множества вида $x = \{x\}$ называют *автосинглетами* (или иногда *атомами Куайна*); заметим, что все они $\in$ -изоморфны.

Теперь мы можем сформулировать обогащающую и обедняющую аксиомы соответственно следующим образом: “любое предмножество, экстенциональное относительно $\sim$, является точным изображением” и “любое точное изображение экстенционально относительно $\sim$ ”. Обозначим эти аксиомы (следуя [11]) через $\text{AFA}_1^\sim$ и $\text{AFA}_2^\sim$, а их конъюнкцию через $\text{AFA}^\sim$. Если $\sim$ – наибольшая бисимуляция, вместо $\text{AFA}^\sim$ пишут просто AFA . Фактически, если обозначить обогащающий принцип “любое предмножество является изображением” через AFA_1 , а обедняющий принцип “любое изображение является изображением единственного множества” – через AFA_2 , то AFA будет конъюнкцией AFA_1 и AFA_2 ; таким образом, AFA постулирует: “любое предмножество является изображением в точности одного множества”. (Это можно понимать, как максимальное обобщение теоремы Мостовского о сжатии.) Из AFA следует, что существует много нефундированных множеств, но, например, существует ровно один автосинглетон. Эта наиболее экстремальная и, пожалуй, наиболее известная аксиома

среди так называемых “аксиом антифундированности” впервые была предложена М. Форти и Ф. Хонселлом в [13]; они доказали непротиворечивость теории $ZFC^- + AFA$ (относительно ZFC^-). Различные авторы (П. Финслер, Д. Скотт, М. Боффа и др.) в разное время предложили много других аксиом антифундированности; все они имеют вид $AFA^\sim$ или близкий к нему. В [11] и [12] рассматриваются как эти частные аксиомы, так и общая теория; модели теории $ZF^- + AFA^\sim$ строятся факторизацией относительно $\sim$ класса всех предмножеств (или всех предмножеств, экстенциональных относительно $\sim$), т.е. фактически тем же методом, что и в [13]; дальнейшую информацию об этом можно найти в [11]–[14] (в последней работе особенно о связях с модальной логикой), а также в работах из указанной в [11]–[14] библиографии. Среди более недавних известных нам статей упомянем [15] (апология понимания тождества как $\in$ -изоморфизма) и [16] (доказательство совместимости с теорией ZF^- несуществования линейно упорядоченного аналога ранга в кумулятивной иерархии). В [7] мы изучаем, “насколько много фундированности” достаточно, чтобы получить такие следствия, как теоремы об отражении или возможность представлять кардиналы множествами, т.е. общие следствия аксиом регулярности и выбора. В следующей работе мы намереемся объединить наш подход к нефундированным моделям с обычным, как он развит в [11]–[14]. В [17] мы изучаем кардиналы в отсутствие как AC, так и AR; в частности, мы показываем, что AR может влиять на кардиналы. Исторические замечания можно найти в [11]; напомним лишь, что впервые различие между фундированными и нефундированными множествами рассмотрел Д. Мириманов, он также ввел ранг в кумулятивной иерархии фундированных множеств (см. [18], [19]).

Подлинной областью применения предмножеств и изображений являются, конечно, теории и модели типа обсуждаемых в [11]; в настоящей статье мы будем использовать изображения лишь в качестве графических иллюстраций наших рассуждений. Такая иллюстрация представляет собой ориентированный граф с вершинами в M , ребрами в E и верхней точкой t . Почти всегда, изображая uEv , можно нарисовать вершину v над вершиной u ; поэтому, чтобы упростить наши иллюстрации, мы можем (и будем) рисовать ребра без стрелок. Мы помещаем здесь несколько простейших примеров. Рис. 1, *a* содержит изображения множеств $0, 1, \{1\}, 2, x_n = \{x_{n+1}\}$ для $n < \omega$ и $x = \{x\}$. Рис. 1, *b*

Рис. 1

содержит неточные изображения трех из этих множеств: 1, 2 и $x = \{x\}$, вместе с их отображениями π на точные изображения. Эти неточные изображения являются *деревьями* – предмножествами, в которых для каждой вершины существует единственный путь из нее в верхнюю точку; на самом деле любое изображение может быть *развернуто* очевидным способом в дерево, являющееся изображением того же множества. Неточные изображения множеств 1 и 2 не экстенциональны и, значит, не могут быть точными изображениями каких-либо множеств. Неточное изображение автосинглтона $x = \{x\}$ экстенционально, но не сильно экстенционально; следовательно, в предположении AFA_2 оно не может быть изображением никакого множества другого вида и, значит, не может быть точным изображением какого-либо множества.

После этих приготовлений мы возвращаемся к цели нашей работы.

§ 2. Игра

В этом параграфе мы описываем главный объект нашего исследования – игру двух участников. Эта игра задается произвольным множеством и развертывается вдоль отношения принадлежности на его транзитивном замыкании. Мы показываем, что множества, являющиеся выигрышными, т. е. допускающие в задаваемой ими игре выигрышную стратегию для некоторого из игроков, образуют естественную ординальную иерархию и что эта иерархия невырождена на всех уровнях (лемма 4). Мы показываем также, что класс всех наследственно выигрышных множеств является внутренней моделью теории множеств без аксиомы регулярности (теорема 1), содержащей все фундированные множества (лемма 2). Кроме того, мы помещаем здесь много примеров.

Предположим, что два игрока, *игрок I* и *игрок II*, начиная с данного множества x , пытаются построить $\in$ -убывающую последовательность множеств x_n так, чтобы противник не смог продолжить ее. Таким образом, игроки I и II выбирают по очереди некоторый элемент x_0 в множестве x , некоторый элемент x_1 в множестве x_0 и т. д.; игрок выигрывает, если его противник не может сделать никакого следующего хода. Оба игрока знают все предыдущие ходы, т. е. это игра с совершенной информацией. Удобно положить $x_{-1} = x$. Итак, игра происходит следующим образом: если $k < \omega$, то

$$\begin{aligned} \text{ход } 2k: & \text{ игрок I выбирает } x_{2k} \in x_{2k-1}, \\ \text{ход } 2k+1: & \text{ игрок II выбирает } x_{2k+1} \in x_{2k}. \end{aligned}$$

Партия – это (конечная или бесконечная) $\in$ -убывающая последовательность (выбранных) множеств x_n . Партия *заканчивается* на ходе n (или *занимает* $n+1$ ходов), если не может быть сделан ход $n+1$, т. е. если не существует никакого $x_{n+1} \in x_n$. В силу АЕ это значит, что $x_n = 0$. Игрок, выбравший пустой элемент x_n , *выигрывает* на ходе n . Ясно, что игрок I (II) выигрывает на ходе n , если и только если число $n+1$ нечетно (четно). Определив понятия *стратегии* и *выигрышной стратегии* очевидным образом, назовем множество x *выигрышным множеством*, если игра, начинающаяся с x , допускает выигрышную стратегию для некоторого из игроков.

Выигрышные множества образуют естественную *выигрышную иерархию* с уровнями, индексированными ординалами. Чтобы определить ее, сначала заметим, что игра занимает 0 ходов, если и только если $x = 0$. В этой ситуации игрок II имеет выигрышную стратегию длиной 0 (т.е. игрок II выигрывает, так как игрок I не может начать игру, сделав ход 0). Мы будем говорить, что пустое множество является *0-выигрышным*. Далее, если $0 \in x$, игрок I имеет выигрышную стратегию длиной 1: если на ходе 0 он сыграл 0, игра не может быть продолжена после этого хода (и, значит, игрок I выиграл). Мы будем говорить, что такие множества (образующие “главный ультрафильтр на V , порожденный точкой $0 \in V$ ”) являются *1-выигрышными*. Теперь определим ν -выигрышные множества рекурсией по всем ординалам ν . Мы различаем четный и нечетный случаи: $\nu = 2\gamma$ и $\nu = 2\gamma + 1$. Скажем, что множество x является *(2γ)-выигрышным*, если каждый элемент $x_0 \in x$ является *($2\delta + 1$)-выигрышным* для некоторого $\delta < \gamma$, и *($2\gamma + 1$)-выигрышным*, если существует *(2γ)-выигрышный* элемент $x_0 \in x$.

Итак, множество нечетно-выигрышно, если и только если оно содержит четно-выигрышный элемент, и четно-выигрышно, если и только если все его элементы нечетно-выигрышны. Очевидно, множество выигрышно, если и только если оно ν -выигрышно для некоторого ординала ν ; более того, множества, выигрышные для игрока I (II), – это нечетно-выигрышные (четно-выигрышные) множества. Схематические (и не точные) изображения ν -выигрышных множеств помещены на рис. 2. Существенное различие между определениями нечетной и четной выигрышности состоит в том, что первое зависит от *одного* элемента, в то время как второе – от *всех*. Это приводит к глубокому различию свойств четно- и нечетно-выигрышных множеств; так, мы увидим в следующих

Рис. 2

параграфах, что четно-выигрышные множества в некотором смысле устроены сложнее и встречаются реже.

Введем следующие обозначения. Пусть W – класс всех выигрышных множеств; W_I (W_{II}) – класс всех множеств, выигрышных для игрока I (II); W_ν – класс всех ν -выигрышных множеств. Имеем

$$\begin{aligned} W_0 &= \{0\}, & W_{2\gamma+1} &= V \setminus \mathcal{P}(V \setminus W_{2\gamma}), \\ W_{2\gamma} &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} W_{2\delta+1}\right), & W &= \bigcup_{\nu \in On} W_\nu, \\ W_I &= V \setminus \mathcal{P}(V \setminus W_{II}) = \bigcup_{\gamma \in On} W_{2\gamma+1}, & W_{II} &= \mathcal{P}(W_I) = \bigcup_{\gamma \in On} W_{2\gamma}, \\ W_I \cup W_{II} &= W, & W_I \cap W_{II} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} W_{1+\nu} \cap V_\infty &\text{ – собственный класс,} \\ W_\nu &\subseteq W_{\nu+2} \subseteq \dots \subseteq W_{\nu+2\gamma} \subseteq \dots \end{aligned}$$

(оба эти утверждения очевидны при $\nu = 0$, и затем следуют из определений по трансфинитной индукции). Из $W_\nu \subseteq W_{\nu+2}$ следует, что в частном случае, когда четный ординал ν неопределен, $\nu = 2\gamma + 2$, имеем

$$W_{2\gamma+2} = \mathcal{P}(W_{2\gamma+1}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хотя любое ν -выигрышное множество является $(\nu + 2)$ -выигрышным, это не значит, что для него действительно существует выигрышная стратегия длиной (в точности) $\nu + 2$. Например, пустое множество ν -выигрышно при всех четных ν , но допускает единственную выигрышную стратегию длиной 0 (ср., однако, с замечанием 8, приведенным в конце этого параграфа).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Высказывание “ $x \in W_\nu$ ” равносильно Δ_0 -формуле с параметрами x и ν (это доказывается индукцией по ν из того, что высказывания “ u пусто” и “ u – ординал” суть Δ_0 -формулы). В частности, свойство “быть ν -выигрышным” абсолютно для транзитивных моделей. Ясно, что тогда свойство “быть выигрышным (нечетно-выигрышным, четно-выигрышным)” равносильно Σ_1 -формуле; в настоящий момент я не знаю, равносильно ли оно Π_1 -формуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно дать определения конечно-выигрышных множеств, не прибегая к квантификации ординалов. А именно, легко проверить, что множество x является $(2k + 1)$ -выигрышным (при $k < \omega$), если и только если

$$(\exists x_0 \in x)(\forall x_1 \in x_0)(\exists x_2 \in x_1) \dots (\forall x_{2k-1} \in x_{2k-2}) 0 \in x_{2k-1},$$

и является $(2k + 2)$ -выигрышным, если и только если

$$(\forall x_0 \in x)(\exists x_1 \in x_0)(\forall x_2 \in x_1)(\exists x_3 \in x_2) \dots (\forall x_{2k} \in x_{2k-1}) 0 \in x_{2k}.$$

Поскольку " $0 \in x$ " – это " $(\exists y \in x)(\forall z \in y) z \neq z$ ", видим, что определение n -выигрышного множества равносильно формуле такого вида с $n + 1$ чередующимися ограниченными кванторами, где самый внутренний – универсальный квантор.

Прежде чем изучать выигрышные множества в целом, рассмотрим некоторые примеры (как конкретных множеств, так и специфических, связанных с выигрышностью свойств). Начнем с простейших случаев. Положим $\{x\}^0 = x$ и $\{x\}^{n+1} = \{\{x\}^n\}$.

ПРИМЕР 1. Множество $\{0\}^n$ является n -выигрышным, но не является m -выигрышным ни при каком $m < n$ (рис. 3). Ясно, что каждый игрок в игре на этом множестве имеет ровно одну стратегию и она будет выигрышной для игрока I (II), если и только если n нечетно (четно). Мы видим, кроме того, что существуют игры любой конечной длины.

ПРИМЕР 2. Множество $x = \{0, \{0\}\}$ (т.е. ординал 2) является 1-выигрышным (рис. 4). Если, однако, на ходе 0 игрок I сделает ошибку, выбрав $\{0\}$ вместо верного 0, то он проиграет (в два хода), так как $\{0\}$ является 1-выигрышным. Итак, хотя на x существует выигрышная стратегия, не все стратегии таковы.

Рис. 3

Рис. 4

ПРИМЕР 3. Множество $x = \{0, \{0\}^2\}$ также 1-выигрышно. Более того, если игрок I начал игру, выбрав $\{0\}^2$ вместо оптимального 0, он все равно выигрывает (но в три хода вместо одного), так как $\{0\}^2$ является 2-выигрышным (рис. 5). Итак, любая партия на x заканчивается в пользу игрока I, т.е. все стратегии выигрышны (для него).

Рис. 5

Рис. 6

ПРИМЕР 4. Множество $x = \{\{0\}, \{0\}^2\}$ является 3-выигрышным, но не является n -выигрышным при $n < 3$. Как в примере 2, здесь не все стратегии выигрышны для игрока I: если игрок I начинает, выбрав $\{0\}$ вместо верного 0, он проигрывает в два хода (рис. 6).

ПРИМЕР 5. Множество $x = \{\{0\}, \{\{0\}, \{0\}^2\}\}$ является 4-выигрышным и не является n -выигрышным при $n < 4$. На ходе 0 игроку I разумно выбрать $\{\{0\}, \{0\}^2\}$. В самом деле, хотя этот ход не может гарантировать ему выигрыш, но единственный альтернативный выбор $\{0\}$ гарантирует его проигрыш после следующего единственного возможного хода противника; с другой стороны, если после того, как игрок I выберет $\{\{0\}, \{0\}^2\}$, игрок II сделает ошибку, выбрав $\{0\}$ вместо верного $\{0\}^2$, то игрок I выиграет (рис. 7).

ПРИМЕР 6. Множество $x = \{\{0\}^{2k+1} : k \in \omega\}$ является ω -выигрышным, но не является конечно-выигрышным (рис. 8). Заметим, что хотя любая партия на x рано или поздно, т. е. за конечное число ходов, закончится в пользу игрока II, ее длина зависит от того, какой ход 0 сделал игрок I, и поэтому может быть произвольно большой. Таким образом, хотя любая партия заканчивается после $< \omega$ ходов в пользу игрока II, не существует такой выигрышной стратегии и такого числа $n < \omega$, что любая партия, сыгранная согласно этой стратегии, заканчивалась бы после $< n$ ходов.

Рис. 7

Рис. 8

ПРИМЕР 7. Этот пример обобщает примеры 1 и 6 и будет важен для нас. Построенные здесь множества являются простейшими примерами множеств, ν -выигрышных, но не μ -выигрышных ни при каком $\mu < \nu$. Они будут часто использоваться в дальнейшем, и мы вводим для них специальный символ o_ν (с ординальным параметром ν). Определим по рекурсии:

$$\begin{aligned} o_0 &= 0, & o_{\nu+1} &= \{o_\nu\}, \\ o_\nu &= \{o_{2\delta+1} : \delta < \nu\}, & \text{если } \nu \text{ пределен (и, значит, } \sup_{\delta < \nu} (2\delta + 1) = \nu) \end{aligned}$$

(см. рис. 9). Очевидно, все эти множества лежат в V_∞ , и несложно проверить, что

$$r(o_\nu) = \nu, \quad o_\nu \in W_\nu \setminus \bigcup_{\mu < \nu} W_\mu.$$

Рис. 9

ПРИМЕР 8. Множество x выигрышно, если и только если таков его синглетон $\{x\}$. Более того, x будет ν -выигрышным, если и только если $\{x\}$ будет $(\nu + 1)$ -выигрышным.

ПРИМЕР 9. Множество $x \cup \{0\}$ будет 1-выигрышным при любом x ; множество $x \cup \{0\}^2$ не будет выигрышным, если x не выигрышно. Более общим образом, множество $x \cup y$ будет $(2\gamma + 1)$ -выигрышным, если y таково (а x произвольно), и не будет выигрышным, если x не выигрышно, а y не нечетно-выигрышно (т. е. либо четно-выигрышно, либо не выигрышно).

Прежде чем привести следующие примеры, напомним, что множество *наследственно принадлежит* данному классу C , если как оно само, так и все элементы его транзитивного замыкания принадлежат C . Мы обозначим класс всех множеств, наследственно принадлежащих C , через HC :

$$HC = \{x: \text{tc}(\{x\}) \subseteq C\}.$$

Очевидно, для любого класса C класс HC транзитивен и $HC \subseteq C$; таким образом, $HC = C$ тогда и только тогда, когда C транзитивен.

ПРИМЕР 10 (наследственно невыигрышные множества). Легко видеть, что все следующие условия равносильны:

- (а) x наследственно невыигрышно;
- (б) x наследственно нефундированно;
- (с) x наследственно непусто;
- (д) некоторое (или любое) изображение x не имеет минимальных вершин;
- (е) любая партия, сыгранная на x , не кончается никогда.

Простейшим примером наследственно невыигрышного множества является любой автосинглетон, т. е. множество вида $x = \{x\}$ (если оно существует); рис. 10, а.

Рис. 10

Развертывая каноническое изображение этого множества, положим $x_n = \{x_{n+1}\}$ для всех $n < \omega$ (рис. 10, b). Все x_n (если они существуют) наследственно невыигрышны. Если все они различны (хотя $\in$ -изоморфны), то они свободны от кручения. (Заметим, что каждое из этих x_n допускает ровно одну партию; чтобы получить наследственно невыигрышное множество, допускающее две партии, можно взять пару $\{x_0, x_1\}$ при $x_0 \neq x_1$ и т. д.) С другой стороны, в предположении АФА существует единственное наследственно невыигрышное множество и оно является автосинглетоном; поэтому все такие x_n должны совпадать и быть с кручением.

ПРИМЕР 11 (наследственно выигрышные нефундированные множества). Все множества в примерах 1–7 были наследственно выигрышными и фундированными. Однако наследственно выигрышное множество может не быть фундированным. Простейшим примером является любое множество вида $x = \{0, x\}$ (если оно существует); очевидно, оно 1-выигрышно и состоит из одного 0-выигрышного и одного 1-выигрышного элементов (рис. 11, а).

Рис. 11

Развертывая каноническое изображение этого множества, положим $x_n = \{0, x_{n+1}\}$ для всех $n < \omega$ (рис. 11, b). Все x_n наследственно выигрышны и

нефундированны. Если все они различны, то свободны от кручения. С другой стороны, в предположении AFA существует единственное нефундированное множество, все элементы которого i -выигрышны при $i \leq 1$, и оно имеет вид $x = \{0, x\}$; поэтому такие x_n должны совпадать и быть с кручением.

ПРИМЕР 12 (наследственно выигрышные множества без $\in$ -минимальных элементов). Из определения фундированности и утверждения 2) приведенной ниже леммы 2 следует, что если наследственно выигрышное множество x нефундированно, то некоторое $u \subseteq \text{tc}(\{x\})$ будет наследственно выигрышным множеством без $\in$ -минимальных элементов. Простейший пример получается, если взять синглетон $\{x\} = \{\{0, x\}\}$ множества $x = \{0, x\}$ из примера 11. Очевидно, он является 2-выигрышным и пересекается со своим единственным элементом (рис. 12). (Как и раньше, можно рассмотреть развернутый вариант такого множества.) Наследственно выигрышные множества без $\in$ -минимальных элементов мы очень подробно изучаем в последнем параграфе.

Рис. 12

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрение множества вида $x = \{0, x\}$ ведет еще к двум интересным наблюдениям.

Первое состоит в том, что синглетон $\{x\} = \{\{0, x\}\}$ этого множества может быть получен из него также *удалением* пустого элемента:

$$\{x\} = x \setminus \{0\}.$$

Отметим, что мощность множества $\text{tc}(\{x\})$ возрастает при убывании мощности самого множества x . (В самом деле, $\text{tc}(\{x\}) = \{0, x, \{x\}\}$, в то время как $\text{tc}(x \setminus \{0\}) = \{0, x, \{x\}, \{x\}^2\}$, причем все четыре множества $0, x, \{x\}, \{x\}^2$ различны.) Определенно, это типичная странность, возникающая при рассмотрении нефундированных множеств.

Второе наблюдение: хотя множество $x = \{0, x\}$ нефундированно (поскольку некоторое непустое $u \subseteq \text{tc}(x)$ не имеет $\in$ -минимальных элементов, а именно $u = x \setminus \{0\}$), однако любое непустое $u \in \text{tc}(x)$ имеет $\in$ -минимальный элемент. (В самом деле, $\text{tc}(x) = x$, и, кроме того, x является единственным непустым элементом множества x и имеет $\in$ -минимальный элемент 0.) Это показывает, что в определении фундированности множества x существование $\in$ -минимальных элементов во всех непустых $u \subseteq \text{tc}(x)$ невозможно заменить на существование $\in$ -минимальных элементов во всех непустых $u \in \text{tc}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Развертывая предмножества в примерах 10–12, мы получали предмножества с изоморфными финальными отрезками и потому не сильно экстенциональные. На самом деле, можно привести примеры сильно экстенциональных (пред)множеств, обладающих свойствами из этих примеров; мы обсудим эту возможность в замечании 24 в конце последнего параграфа.

ПРИМЕР 13 (слабо фундированные множества). Поскольку партии – это в точности $\in$ -убывающие последовательности, принцип WR (утверждающий, что все множества слабо фундированны) можно переформулировать в терминах игры следующим образом: “любая партия рано или поздно закончится (за конечное число ходов)”. (В предположении DC это будет также переформулировкой AR в терминах игры. Утверждения 2) леммы 3 и 1) леммы 14 предоставляют такие переформулировки AR без предположения DC.) Из леммы 2, приведенной ниже, следует, что все фундированные множества выигрышны. В противоположность этому слабо фундированные множества могут быть невыигрышными и даже не иметь $\in$ -минимальных элементов; модели с такими множествами легко построить методом, описанным в последнем параграфе статьи (как подходящий нижний слой (M_0, E_0) модели можно взять бесконечное, но конечное по Дедекинду множество M_0 с его линейным упорядочением E_0 без первой точки). В примере 10 мы отметили, что игра на невыигрышном множестве может никогда не кончиться. Но ситуация имеет особенно аномальный вид, когда невыигрышное множество слабо фундированно: хотя любая игра на нем рано или поздно заканчивается, невозможно предсказать, кто в ней выиграет. Это типичная аномалия в отсутствие аксиомы выбора.

Наша ближайшая цель – показать, что наследственно выигрышные множества образуют естественную внутреннюю модель, содержащую все фундированные множества.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $x \subseteq W$, то $x \in W$ и $\bigcup x \in W$;
- 2) если $x \subseteq HW$, то $x \in HW$ и $\bigcup x \in HW$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \subseteq W$. Поскольку W является дизъюнктивным объединением W_I и W_{II} , видим:

(а) если $x \subseteq W_I$, то $x \in W_{II}$; если $x \not\subseteq W_I$, то $x \cap W_{II}$ непусто и, значит, $x \in W_I$;

(б) если $x \subseteq W_{II}$, то $\bigcup x \subseteq W_I$ и, значит, $\bigcup x \in W_{II}$; если $x \not\subseteq W_{II}$, то $x \cap W_I$ непусто, откуда следует, что $\bigcup x \cap W_{II}$ также непусто и, значит, $\bigcup x \in W_I$.

2) Это утверждение следует из 1).

Лемма доказана.

Таким образом, лемма 1 устанавливает, в частности, что классы W и HW густые:

$$\mathcal{P}(W) \subseteq W, \quad \mathcal{P}(HW) \subseteq HW.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Имеют место также похожие включения:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V \setminus W) &\subseteq (V \setminus W) \cup \{0\}, \\ \mathcal{P}(W \setminus HW) &\subseteq (W \setminus HW) \cup \{0\}, \\ \mathcal{P}(HW \setminus V_\infty) &\subseteq (HW \setminus V_\infty) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

(Первое выполняется, поскольку любое непустое выигрышное множество содержит выигрышный элемент; второе и третье следуют из леммы 1.)

Поскольку класс HW , кроме того, транзитивен (как и HC для всякого C), мы имеем на самом деле

$$\mathcal{P}(HW) = HW,$$

и в силу сказанного в предварительных замечаниях получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Класс HW является внутренней моделью теории ZF^- .*

Более того, класс HW является полной моделью теории ZF^- , а следующая лемма, очевидно, верна для всех полных моделей.

ЛЕММА 2. *Выполнено $V_\infty \subseteq HW$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку класс V_∞ транзитивен, достаточно показать лишь $V_\infty \subseteq W$. Докажем, что все фундированные множества выигрышны, индукцией по их рангу. Для (единственного) множества ранга 0 утверждение тривиально. Если оно доказано для всех множеств ранга $< \alpha$, применяя лемму 1, видим, что оно верно и для всех множеств ранга α . Лемма доказана.

Какие из включений

$$V \supseteq W \supseteq HW \supseteq V_\infty$$

могут быть собственными? Из утверждения 1) следующей леммы вытекает, что достаточно знать ответ для двух включений: $V \supseteq HW$ и $HW \supseteq V_\infty$ (в последнем параграфе мы покажем, что все четыре логически возможных случая: $V = HW = V_\infty$, $V \neq HW = V_\infty$, $V = HW \neq V_\infty$ и $V \neq HW \neq V_\infty$, непротиворечивы). Утверждение 2) переформулирует аксиому AR в этих терминах, а утверждения 3) и 4) уточняют 1) и 2) соответственно.

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $V = W$ равносильно $W = HW$;
- 2) $W = V_\infty$ равносильно AR (т.е. $V = V_\infty$);
- 3) если класс $V \setminus W$ непуст, то оба класса $V \setminus W$ и $W \setminus HW$ собственные;
- 4) если класс $HW \setminus V_\infty$ непуст, то он собственный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, что $V = W$ влечет $W = HW$. Чтобы доказать обратную импликацию, возьмем $x \in V \setminus W$; тогда $\{0, x\} \in W \setminus HW$.

2) Аксиома AR равносильна равенству $V = V_\infty$ по теореме фон Неймана, и $V = V_\infty$ равносильно $W = V_\infty$ в силу леммы 2 и утверждения 1).

3) Предположим, что существует невыигрышное множество u . Тогда синглетон $\{u\}$ также невыигрышный. Как мы отметили в примере 9, объединение любого невыигрышного множества с множеством x будет 1-выигрышным, если x было 1-выигрышным, и будет невыигрышным, если x было 2-выигрышным. Значит,

$$\{\{u\} \cup x : x \in W_1 \cap HW\} \subseteq W_1 \setminus HW \text{ и } \{\{u\} \cup x : x \in W_2 \cap HW\} \subseteq V \setminus W.$$

Оба класса собственные, поскольку классы $W_1 \cap HW$ и $W_2 \cap HW$ собственные, а множества $\{u\} \cup x$ и $\{u\} \cup y$ различны при различных $x, y \in HW$. (Мы брали синглетон невыигрышного u вместо него самого, так как для произвольного невыигрышного u возможно $\{u\} \cup x = \{u\} \cup y$ при $x \neq y$.)

4) Используем тот же способ: возьмем $u \in HW \setminus V_\infty$; тогда класс $\{\{u\} \cup x : x \in V_\infty\} \subseteq HW \setminus V_\infty$ будет собственным, поскольку множества $\{u\} \cup x$ и $\{u\} \cup y$ различны при различных $x, y \in V_\infty$.

Лемма доказана.

Установим теперь несколько простых фактов о выигрышной иерархии. Пусть $w: W \rightarrow On$ – функция (класс), отмечающая ранг в выигрышной иерархии:

$$w(x) = \min\{\nu \in On : x \in W_\nu\},$$

а S_ν – ν -й уровень этой иерархии:

$$S_\nu = \{x \in W : w(x) = \nu\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_0 &= \{0\}, & S_\mu \cap S_\nu &= 0 \text{ при } \mu \neq \nu, & S_\nu &= W_\nu \setminus \bigcup_{\mu < \nu} W_\mu, \\ W_{2\gamma} &= \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta}, & W_{2\gamma+1} &= \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta+1}, & W &= \bigcup_{\nu \in On} S_\nu. \end{aligned}$$

Кроме того, область определения функции w включает V_∞ (в силу леммы 2), а область значений – весь класс On (в силу примера 7). Таким образом, справедлива

ЛЕММА 4. *Все классы S_ν непусты.*

Следующая лемма предоставляет рекуррентное определение классов S_ν .

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $x \in S_{2\gamma+1}$, если и только если $x \cap S_{2\gamma}$ непусто и $x \cap \bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta}$ пусто;
- 2) $x \in S_{2\gamma}$, если и только если $x \subseteq \bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta+1}$ и множество $\{\delta : x \cap S_{2\delta+1} \text{ непусто}\}$ конфинально в γ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{2\gamma+1} &= \mathcal{P}\left(V \setminus \bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta}\right) \setminus \mathcal{P}(V \setminus S_{2\gamma}), \\ S_{2\gamma} &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta+1}\right) \setminus \bigcup_{\varepsilon < \gamma} \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \varepsilon} S_{2\delta+1}\right). \end{aligned}$$

В частности, если четный ординал ν неопределен, $\nu = 2\gamma + 2$, получаем следующий тест: $x \in S_{2\gamma+2}$, если и только если $x \in W_{2\gamma+2}$ и $x \cap S_{2\gamma+1}$ непусто (это верно, поскольку $2\gamma + 2 = 2(\gamma + 1)$, $\bigcup_{\delta < \gamma+1} S_{2\delta+1} = \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta+1} = W_{2\gamma+1}$ и $\mathcal{P}(W_{2\gamma+1}) = W_{2\gamma+2}$ и так как подмножество множества $\gamma + 1$ конфинально в нем, если и только если оно содержит последнюю точку, т. е. γ). Таким образом,

$$S_{2\gamma+2} = W_{2\gamma+2} \setminus \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta+1}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. 1) По определению x принадлежит $W_{2\gamma+1}$ тогда и только тогда, когда существует элемент $x_0 \in x$, принадлежащий $W_{2\gamma} = \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta}$. Если, кроме того, существовал бы элемент $x_0 \in x$, принадлежащий $\bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta}$, т.е. принадлежащий $S_{2\delta} \subseteq W_{2\delta}$ для некоторого $\delta < \gamma$, то x принадлежало бы $W_{2\delta+1}$ при $2\delta + 1 < 2\gamma + 1$ и, значит, не принадлежало бы $S_{2\gamma+1}$.

2) Аналогично, по определению x принадлежит $W_{2\gamma}$ тогда и только тогда, когда $x \subseteq \bigcup_{\delta < \gamma} W_{2\delta+1} = \bigcup_{\delta < \gamma} S_{2\delta+1}$. Если, кроме того, множество $\{\delta: x \cap S_{2\delta+1} \neq \emptyset\}$ было бы не конфинально в γ , то существовал бы такой ординал $\varepsilon < \gamma$, что $x \subseteq \bigcup_{\delta < \varepsilon} W_{2\delta+1}$. Тогда x принадлежало бы $W_{2\varepsilon}$ при $2\varepsilon < 2\gamma$ и, значит, не принадлежало бы $S_{2\gamma}$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $x \in W$ непусто. Тогда

$$w(x) = \begin{cases} \min\{w(x_0) + 1: x_0 \in x \cap W_{\text{II}}\}, & \text{если } x \in W_{\text{I}}, \\ \sup\{w(x_0) + 1: x_0 \in x\}, & \text{если } x \in W_{\text{II}}. \end{cases}$$

В следующем следствии запись $|x| \leq^* |y|$ означает, что существует сюръекция из y на x , тогда как $|x| \leq |y|$ означает, как обычно, что существует инъекция из x в y ; очевидно, эти отношения совпадают на вполне упорядочиваемых множествах.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $x \in W$ непусто. Тогда:

- 1) $\text{cf}(w(x)) \leq^* |x|$;
- 2) $|w(x)| \leq |\text{tc}(x)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если ординал $w(x)$ неопределен, то $\text{cf}(w(x)) = 1$ и $|x| \geq 1$. Если $w(x)$ определен и, значит, $x \in W_{\text{II}}$, согласно следствию 1 имеем $w(x) = \sup A$, где $A = \{w(x_0) + 1: x_0 \in x\}$. Существует очевидная сюръекция из x на A . С другой стороны, $\text{cf}(\sup A) \leq |A|$ верно для всякого $A \subseteq \text{On}$.

2) Это доказываем индукцией по $w(x)$, используя следствие 1.

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $x \subseteq S_\nu$ непусто. Тогда:

- 1) $x \in S_{\nu+1}$;
- 2) $\bigcup x \in S_\nu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Выше мы отметили, что ν -выигрышное множество может не иметь выигрышной стратегии длиной в точности ν (т.е. такой стратегии, что длина любой партии, сыгранной согласно ей, равна ν); однако это будет так в случае, когда ординал ν – наименьший возможный (т.е. $\nu = w(x)$) и конечный: для любого конечно-выигрышного x существует выигрышная стратегия длиной $w(x)$. (Если $w(x) = 0$, утверждение очевидно; затем оно следует индукцией по $w(x)$.) Таким образом, в конечном случае инвариант $w(x)$ отмечает наименьшую длину выигрышной стратегии. В бесконечном случае, скажем $w(x) = \omega\mu + n$ при $\mu > 0$ и $n < \omega$, ординалы μ и n имеют более запутанное значение: n – это наименьшая длина стратегии получения предельно-выигрышного множества, а μ – это (порядковое) число (упорядоченных естественным образом) способов препятствовать противнику, замедляя скорость оставшейся части

партии. (Заметим, что для любого выигрышного x супремум длин выигрышных стратегий всегда не больше ω , поскольку любая “правильно сыгранная” партия на множестве x закончится за конечное число ходов.)

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Описанная в настоящей работе игра не новая, ее можно найти в [20]; кроме того, очень близкая игра описана в [14].

Т. Форстер в [20] рассуждает (неформально, но приготовляясь работать) в NF – теории множеств Куайна. Он определяет *псевдофундированность*, которая фактически является выигрышностью, и принцип *псевдоиндукции* (два принципа, так называемые I-индукция и II-индукция, которые могут использоваться в нефундированной ситуации) и замечает, что отношение допускает псевдоиндукцию, если и только если оно псевдофундированно. Далее он формулирует аксиому $V = W$, отмечает равенства $W_I = \mathcal{P}(V \setminus W_{II})$ и $W_{II} = \mathcal{P}(W_I)$ и замечает, что классы W_I и W_{II} будут собственными в любой теории множеств (аналогично парадоксу Мириманова, касающемуся класса V_∞ ; ср., однако, с [20, теорема 3.1.4]). Он показывает, что включение $V_\infty \subseteq W$ доказуемо в NF [20, предложение 2.1.21]. Форстер также предлагает некоторую иерархию выигрышных множеств; она отлична от нашей иерархии классов W_ν , но подобно ей расслаивает W на уровни, индексированные ординалами; его иерархия выглядит более симметрично, поскольку он работает в теории множеств с универсальным множеством V . Аналогично нашему инварианту w он определяет *псевдоранг* выигрышного множества как наименьший индекс уровня, содержащего это множество².

Игра, описанная Дж. Барвайсом и Л. Моссом [14, с. 162, пример 12.2], – та же, что у нас, с одним отличием: игрок II выигрывает, как только он может сделать ход после любого хода противника (т. е., в частности, если партия не заканчивается за конечное число ходов). Это отличие существенно упрощает игру: нетрудно видеть, что такая игра на любом множестве x допускает выигрышную стратегию для одного из игроков. (Фактически это открытая игра в подходящей топологии, и, значит, она всегда допускает выигрышные стратегии в силу известной теоремы Гейла–Стюарта (см. [14, с. 162–165]); эта теорема, устанавливающая открытую детерминированность, была впервые доказана Э. Цермело в [21].) Дж. Барвайс и Л. Мосс замечают также, что множества, выигрышные для игрока II (в их игре), разделяются на два класса: W_{II} и $V \setminus W$ (в наших обозначениях), тем самым почти формулируя нашу игру³.

Однако результаты настоящей работы отсутствуют в [14], [20] и (насколько мне известно) где-либо еще. Следующие два вопроса представляются интересными: доказуемы ли эти результаты в NF? и насколько слабой может быть теория в стиле Цермело, в которой они доказуемы? В последнем вопросе я имею в виду ограничение схем ASp и ARp определенными классами формул.

²В изложении Т. Форстера есть две неточности (см. [20, с. 17]). Во-первых, он неправильно определяет ранг фундированного x как наименьший α , для которого $x \in V_\alpha$ (вместо $V_{\alpha+1}$). Во-вторых, он ошибочно утверждает, что ранг и псевдоранг согласованы на фундированных множествах. Конечно, это не так, поскольку, например, множество $\{0, 1\}$ имеет ранг 2, но псевдоранг 1; более общим образом, если x имеет ранг α , то $\{0, x\}$ имеет ранг $\alpha + 1$, но псевдоранг 1.

³Профессор Л. Мосс сообщил мне в частном письме, что в действительности они с Дж. Барвайсом не думали об этой игре.

§ 3. Игра и фундированные множества

В этом параграфе мы изучаем выигрышные свойства фундированных множеств. Как мы установили (в лемме 2), все фундированные множества выигрышны. Здесь мы будем интересоваться *количественными* соотношениями между кумулятивной и выигрышной иерархиями: сколько ν -выигрышных множеств появляется на α -м уровне кумулятивной иерархии для данных α и ν ? Сначала (в леммах 6 и 7) мы исследуем непустоту и мощность таких пересечений, а затем (в теореме 2) – более тонкие вероятностные свойства, касающиеся наследственно конечных множеств.

Пусть $S_{\alpha,\nu}$ состоит из всех множеств $x \in V_\alpha$, для которых $w(x) = \nu$:

$$S_{\alpha,\nu} = V_\alpha \cap S_\nu.$$

Таким образом,

$$S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu} = \{x: r(x) = \alpha \wedge w(x) = \nu\},$$

и, очевидно,

$$\begin{aligned} S_{0,\nu} &= 0, & V_\alpha \cap W_{2\gamma} &= \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{\alpha,2\delta}, \\ S_{\alpha,0} &= \{0\}, \text{ если } \alpha > 0, & V_\alpha \cap W_{2\gamma+1} &= \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}, \\ S_{\alpha,\mu} \cap S_{\beta,\nu} &= 0, \text{ если } \mu \neq \nu, & V_\alpha &= \bigcup_{\nu \in On} S_{\alpha,\nu}. \\ S_{\alpha,\nu} &\subseteq S_{\beta,\nu}, \text{ если } \alpha \leq \beta, \\ S_{\alpha,\nu} &= \bigcup_{\beta < \alpha} S_{\beta,\nu}, \text{ если } \alpha \text{ предельн}, \end{aligned}$$

В следующей лемме уточним два из этих утверждений. Мы увидим, во-первых, что множество $S_{\alpha,\nu}$ является очень малой частью множества $S_{\alpha+1,\nu}$ при $\alpha \geq \nu > 0$; во-вторых, что лишь множества $S_{\alpha,\nu}$ с индексами $\nu < \alpha$ образуют V_α .

Подобно классам S_ν , множества $S_{\alpha,\nu}$ можно задать рекуррентно:

$$\begin{aligned} S_{\alpha+1,2\gamma+1} &= \mathcal{P}\left(V_\alpha \setminus \bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta}\right) \setminus \mathcal{P}(V_\alpha \setminus S_{\alpha,2\gamma}), \\ S_{\alpha+1,2\gamma} &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}\right) \setminus \bigcup_{\varepsilon < \gamma} \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \varepsilon} S_{\alpha,2\delta+1}\right). \end{aligned}$$

В частном случае, когда четный ординал ν неопределен, $\nu = 2\gamma + 2$, отсюда легко следует, что

$$\begin{aligned} S_{\alpha+1,2\gamma+2} &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}\right) \setminus \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}\right) \\ &= (V_{\alpha+1} \cap W_{2\gamma+2}) \setminus \mathcal{P}\left(\bigcup_{\delta < \gamma} S_{\alpha,2\delta+1}\right). \end{aligned}$$

Установим сначала, когда множества $S_{\alpha,\nu}$ и $S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu}$ непусты.

ЛЕММА 6. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $w(x) \leq r(x)$ для всех фундированных x ;
- 2) $S_{\alpha,\nu}$ непусто, если и только если $\nu < \alpha$;
- 3) $S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu}$ непусто, если и только если $0 = \nu = \alpha$ или $0 < \nu \leq \alpha$;
- 4) $S_{\alpha,\nu} \in S_{\alpha+1,\nu+1} \setminus S_{\alpha,\nu+1}$, если и только если $0 = \nu < \alpha = 1$ или $0 < \nu < \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если x пусто, утверждение тривиально. В противном случае доказываем неравенство индукцией по $w(x)$, пользуясь формулой $r(x) = \sup\{r(x_0) + 1 : x_0 \in x\}$ и следствием 1. (Заметим, что, поскольку $|r(x)| \leq |\text{tc}(x)|$, это утверждение уточняет утверждение 2) следствия 2 в случае фундированных x .)

2) *Необходимость.* Если $\nu \geq \alpha$, то $S_{\alpha,\nu}$ пусто в силу 1).

Достаточность. Если $\nu < \alpha$, то $o_\nu \in S_{\nu+1,\nu} \subseteq S_{\alpha,\nu}$.

3) *Необходимость.* Пусть $S_{\alpha+1,\nu} \setminus S_{\alpha,\nu}$ непусто, т.е. существует такое множество x , что $r(x) = \alpha$ и $w(x) = \nu$. Если $\nu = 0$, то $x = 0$ и, значит, $\alpha = 0$. Если $\nu > 0$, то $\alpha \geq \nu$ в силу 1).

Достаточность. Пусть $0 = \nu = \alpha$. Тогда $S_{1,0} \setminus S_{0,0} = S_{1,0} = \{0\}$ непусто.

Пусть теперь $0 < \nu \leq \alpha$. Покажем, что существует такое x , что $r(x) = \alpha$ и $w(x) = \nu$. Заметим, что для всех α, β

$$w(o_\alpha \cup o_\beta) = \begin{cases} \min\{\alpha, \beta\}, & \text{если } \alpha, \beta \text{ нечетны,} \\ \alpha, & \text{если } \alpha \text{ нечетно, а } \beta \text{ четно,} \\ \max\{\alpha, \beta\}, & \text{если } \alpha, \beta \text{ четны.} \end{cases}$$

Используя опять, что $r(x) = \sup\{r(x_0) + 1 : x_0 \in x\}$, и учитывая условие $\nu \leq \alpha$ и следствие 1, несложно проверить следующие два утверждения.

(а) Пусть $\nu = 2\gamma + 1$. Положим $x = o_\alpha \cup o_{2\gamma}$; тогда $r(x) = \alpha$ и $w(x) = 2\gamma + 1$.

(б) Пусть $\nu = 2\gamma$. Положим $x = \{o_\beta \cup o_{2\delta+1} : \beta < \alpha \text{ и } \delta < \gamma\}$; тогда $r(x) = \alpha$ и $w(x) = 2\gamma$.

4) *Необходимость.* Пусть $S_{\alpha,\nu} \in S_{\alpha+1,\nu+1} \setminus S_{\alpha,\nu+1}$, т.е. $r(S_{\alpha,\nu}) = \alpha$ и $w(S_{\alpha,\nu}) = \nu + 1$.

В случае $\nu = 0$ необходимо будет $\alpha = 1$. В самом деле, если $\alpha = 0$, то $S_{\alpha,\nu} = S_{0,0} = 0 \notin S_{1,1}$; если же $\alpha \geq 2$, то $S_{\alpha,\nu} = S_{\alpha,0} = \{0\} \in S_{2,1} \subseteq S_{\alpha,1}$ и, значит, $S_{\alpha,0} \notin S_{\alpha+1,1} \setminus S_{\alpha,1}$.

В случае $\nu > 0$ необходимо будет $\nu < \alpha$. В самом деле, иначе $S_{\alpha,\nu}$ пусто в силу 2), значит, $S_{\alpha,\nu} \in S_{\alpha+1,1}$, откуда $S_{\alpha,\nu} \notin S_{\alpha+1,\nu+1}$ (поскольку $\nu + 1 > 1$).

Достаточность. Пусть $\nu = 0$ и $\alpha = 1$. Тогда $S_{\alpha,\nu} = S_{1,0} = \{0\} \in S_{2,1} \setminus S_{1,1} = S_{2,1} = \{0\}^2$.

Пусть теперь $0 < \nu < \alpha$. Тогда в силу 3) для каждого β , удовлетворяющего $(0 <)\nu \leq \beta < \alpha$, найдется такое x_β , что $r(x_\beta) = \beta$ и $w(x_\beta) = \nu$. Все такие x_β принадлежат $S_{\alpha,\nu}$, значит, $r(S_{\alpha,\nu}) = \alpha$. Чтобы проверить $w(S_{\alpha,\nu}) = \nu + 1$, применим утверждение 1) следствия 3.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что $\alpha > 0$ в силу условия $\alpha > \nu$. Но $S_{\alpha,0} = \{0\}$ для всех $\alpha > 0$.

2) Чтобы доказать первую формулу, заметим, что

$$\begin{aligned} S_{m+1,2k+1} &= \mathcal{P}\left(V_m \setminus \bigcup_{j < k} S_{m,2j}\right) \setminus \mathcal{P}(V_m \setminus S_{m,2j}) \\ &= \mathcal{P}\left(V_m \setminus \bigcup_{j < k} S_{m,2j}\right) \setminus \mathcal{P}\left(V_m \setminus \bigcup_{j \leq k} S_{m,2j}\right). \end{aligned}$$

Поскольку все множества $S_{m,2j}$ не пересекаются при различных j и включены в V_m и, кроме того, $\mathcal{P}(V_m \setminus \bigcup_{j \leq k} S_{m,2j})$ включено в $\mathcal{P}(V_m \setminus \bigcup_{j < k} S_{m,2j})$, мы получаем эту формулу.

Вторая формула доказывается аналогично: замечаем, что

$$S_{m+1,2k+2} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{j \leq k} S_{m,2j+1}\right) \setminus \mathcal{P}\left(\bigcup_{j < k} S_{m,2j+1}\right),$$

и затем используем то, что все множества $S_{m,2j+1}$ не пересекаются при различных j и что, кроме того, $\mathcal{P}(\bigcup_{j < k} S_{m,2j+1})$ включено в $\mathcal{P}(\bigcup_{j \leq k} S_{m,2j+1})$.

3) Если $\alpha = \omega$, имеем $|S_{\omega,n}| = |V_\omega|$ в силу возрастания мощностей $|S_{m,n}|$ при $m \rightarrow \omega$, в чем мы только что убедились (рассматривая конечный случай). Затем обе формулы следуют индукцией по α : берем объединения на предельных шагах и применяем утверждение 1) следствия 3 на непрелельных.

Лемма доказана.

Выпишем в явном виде подслучаи $n = 1, 2, 3$ конечного случая (т. е. случая $n < m < \omega$), которые нам понадобятся ниже (мы считаем, что в формулах из утверждения 2) леммы 7 множества $S_{m,n}$ пусты при $n < 0$):

$$\begin{aligned} |S_{m,1}| &= |V_m|/2, \\ |S_{m,2}| &= \sqrt{|V_m|} - 1, \\ |S_{m,3}| &= 2^{|V_{m-1}|-1} - 2^{|V_{m-1}|-\sqrt{|V_{m-1}|}}. \end{aligned}$$

Итак, начиная с уровня $V_{\omega+1}$ мощности различных множеств S_ν одинаковы (и максимально возможны). Мы хотели бы иметь какое-то более тонкое представление о величине этих множеств, например: насколько велика вероятность того, что произвольно взятое множество лежит в S_ν (и, таким образом, насколько велика вероятность того, что игрок I (или II) выиграет в произвольно взятой игре). Пожалуй, не очень ясно, как может выглядеть *естественная* вероятность над всем универсумом V или хотя бы его регулярной частью V_∞ (по крайней мере, на первый взгляд). Поэтому мы ограничимся рассмотрением множества V_ω , над которым естественную вероятность очень легко определить; таким образом, величину множеств S_ν мы будем исследовать только на уровне $V_{\omega+1}$. (Напомним, что множество V_ω состоит из всех наследственно конечных фундированных множеств и, если не существует множеств с кручением, из всех наследственно конечных множеств.) Эта вероятность над V_ω будет аппроксимироваться частотами на предшествующих уровнях V_m . Сначала, так

как все V_m при $m < \omega$ конечны, мы можем определить вероятностную меру p_m над V_m просто как *частоту*, с которой элементы данного класса встречаются среди всех элементов из V_m :

$$p_m(S) = \frac{|S|}{|V_m|}$$

для любого $S \subseteq V_m$. Затем мы определяем *асимптотическую* вероятностную меру p_ω над V_ω как предел предшествующих p_m , когда он существует:

$$p_\omega(S) = \lim_{m \rightarrow \omega} p_m(S \cap V_m)$$

для любого такого $S \subseteq V_\omega$, что этот предел существует. Очевидно, все такие S образуют поле множеств – подполе поля $V_{\omega+1}$, имеющее 0 и V_ω как соответственно наименьший и наибольший элементы и синглеты $\{x\}$ в качестве минимальных непустых элементов для всех $x \in V_\omega$; неотрицательная вещественнозначная функция p_ω конечно аддитивна (т. е. является мерой), принимает значение 1 на V_ω (т. е. является вероятностной мерой) и значение 0 на каждом синглетоне; она не является счетно аддитивной (поскольку V_ω счетно).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если кто-нибудь разочарован, что вероятность p_ω оказалась лишь конечно аддитивной, он может действовать по-другому: так как среди всех подмножеств множества V_ω для нашей задачи важны только подмножества вида $S_{\omega,n}$, он может рассматривать их в качестве образующих вероятностного пространства (поскольку они не пересекаются); тогда расширение ограниченной на них функции p_ω будет уже счетно аддитивной вероятностной мерой.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Эта асимптотическая вероятность (или близкие варианты) хорошо известна в теории случайных графов. Одна важная теорема – *закон нуля-единицы* – утверждает, что любое свойство первого порядка (в языке теории графов) выполняется с асимптотической вероятностью, равной либо 0, либо 1 (получено Ю. В. Глебским и др. [22]; близкий результат – закон нуля-единицы Шелаха; дальнейшие результаты см., например, в [23]).

Ясно, что $S_{\omega,n} \cap V_m = S_{m,n}$ и, таким образом,

$$p_\omega(S_{\omega,n}) = \lim_{m \rightarrow \omega} \frac{|S_{m,n}|}{|V_m|}.$$

Этот предел будет (интересующей нас) вероятностью того, что случайное множество $x \in V_\omega$ имеет $w(x) = n$ (или, равносильно, допускает выигрышную стратегию с наименьшей возможной длиной n ; см. замечание 7). Он существует для каждого $n < \omega$; более того, после тривиальных вычислений (которые мы не приводим), приложенных к случаям 1) и 2) леммы 7, легко получить явную формулу: если в $S_{m,n}$ имеет место $n < m < \omega$, то

$$p_m(S_{m,0}) = \frac{1}{|V_m|},$$

$$p_{m+1}(S_{m+1,2k+1}) = 2^{-|V_m| \sum_{j < k} p_m(S_{m,2j})} - 2^{-|V_m| \sum_{j \leq k} p_m(S_{m,2j})},$$

$$p_{m+1}(S_{m+1,2k+2}) = 2^{|V_m|(-1 + \sum_{j \leq k} p_m(S_{m,2j+1}))} - 2^{|V_m|(-1 + \sum_{j < k} p_m(S_{m,2j+1}))}.$$

В частности, при $n = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} p_m(S_{m,1}) &= \frac{1}{2}, \\ p_m(S_{m,2}) &= \frac{1}{\sqrt{|V_m|}} - \frac{1}{|V_m|}, \\ p_m(S_{m,3}) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{|V_{m-1}|}}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *В смысле асимптотической вероятности одна половина множества V_ω лежит в S_1 , тогда как вторая его половина лежит в S_3 :*

$$p_\omega(S_{\omega,n}) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } n \in \{1, 3\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, случайное множество из V_ω оказывается 1-выигрышным с вероятностью $1/2$ и 3-выигрышным с вероятностью 1 . Таким образом, одна половина наследственно конечных фундированных множеств состоит из множеств, имеющих пустой элемент, а другая половина – из множеств без пустого элемента, но имеющих некоторый такой элемент, что любой его элемент имеет пустой. Как следствие, вероятность $\sum_{k < \omega} p_\omega(S_{\omega,2k+1})$ того, что в случайной игре игрок I имеет выигрышную стратегию, равна 1 . Более того, игрок I может выиграть очень быстро: за один или за три хода. Исключая пренебрежимо мало случаев, игрок II находится целиком во власти игрока I. (С “практической” точки зрения уже $|V_5|$ можно отождествить с $|V_\omega|$: невозможно перебрать 2^{65536} элементов за какое-то “разумное” время; в мире V_5 игрок II имеет вероятность выигрыша, равную лишь 2^{-256} .)

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Вопросу: сколько существует множеств с данным свойством? – можно придать еще одно значение, рассматривая какой-нибудь фильтр на универсуме. (Строго говоря, “фильтр на собственном классе” не является корректно определенным понятием теории ZF, но это не важно: мы можем считать, что класс “принадлежит фильтру” или “большой”, если он обладает определенным свойством.) Например, рассмотрим фильтр, порожденный классами, замкнутыми и неограниченными в $(V, \subseteq)$. (Здесь класс C замкнут, если $\bigcup x \in C$ для любого непустого линейно $\subseteq$ -упорядоченного множества $x \subseteq C$, и неограничен, если он $\subseteq$ -конфинален в V .) Очевидно, все классы S_n замкнуты (в силу утверждения 2) следствия 3), но лишь класс S_1 – замкнутый неограниченный. Таким образом, в этом смысле почти все множества 1-выигрышны.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пусть ZFA^- обозначает $\text{ZFA} - \text{AR}$. (Напомним, что ZFA – это ослабление ZF, допускающее существование копий пустого множества, называемых *атомами* или *праэлементами*; см. [3, с. 249].) В ZFA^- класс S_0 состоит из пустого множества и всех атомов, следующие классы S_ν определяются, как прежде. Очевидно, класс S_1 по-прежнему остается замкнутым неограниченным. Если существует лишь конечное число, скажем $a < \omega$, атомов, мы можем определить вероятность над V_ω тем же способом; вычисления,

подобные проделанным выше, дают тогда

$$p_{\omega}(S_{\omega,n}) = \begin{cases} 1 - 2^{-a}, & \text{если } n = 1, \\ 2^{-a}, & \text{если } n = 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Игрок I опять выигрывает почти наверное. Фактически такое рассуждение приложимо к нашим моделям (M, E) из последнего параграфа, как только их начальные уровни (M_0, E_0) имеют конечную мощность.

Дальнейшее обобщение получается, если рассматривать вместо V и $\in$ произвольные классы A и $R \subseteq A \times A$ и релятивизировать нашу игру на (A, R) . В основном, содержание § 1 переносится на такое обобщение; например, фундированная часть системы (A, R) состоит из выигрышных элементов. Чтобы получить количественный результат типа теоремы 2, достаточно иметь R фундированным над нижним слоем системы (A, R) , распределение вероятностей над этим нижним слоем и закон порождения для следующих уровней. Опять заметим, что получающаяся конструкция очень напоминает случайные графы. Вообще, кажется интересным посчитать в терминах (ориентированных) случайных графов, как много существует моделей с данным *теоретико-множественным* свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Если мы модифицируем игру, заменив двух игроков $m > 2$ игроками, игра становится недетерминированной даже на простейших множествах x из V_{ω} . Например, положим $m = 3$ и $x = \{\{0\}, \{0\}^2\}$; тогда если игрок I начинает партию, сыграв $\{0\}$, то выигрывает игрок II, а если игрок I начинает, сыграв $\{0\}^2$, то выигрывает игрок III (рис. 13). Таким образом, ни один игрок

Рис. 13

не имеет выигрышной стратегии. Пожалуй, в этой ситуации важнее понимать, сколько партий данной длины существует на данном множестве. Интересно также знать соотношения между количеством выигрышных стратегий и количеством партий данной длины.

§ 4. Игра и нефундированные множества

В этом параграфе мы исследуем выигрышные множества в мире без регулярности. В теореме 3 мы устанавливаем (в ZF^-), насколько класс W может быть похож на модель ZFC. Мы увидим, что либо W совпадает с V , либо сходство очень мало: много аксиом не выполняется в W . Несколько неожиданно то, что

AR не входит в их число: AR^W совместимо с $ZF^- + \neg AR$. В теореме 5 мы полностью описываем все непротиворечивые взаимоотношения между классами V , W , HW , V_∞ и релятивизациями аксиомы AR на них. Затем мы установим более тонкие результаты, касающиеся выигрышных нефундированных множеств, в особенности выигрышных множеств без $\in$ -минимальных элементов. В лемме 14 мы сравниваем нечетно- и четно-выигрышные множества без $\in$ -минимальных элементов. В теореме 6 мы полностью описываем все те классы A ординалов, для которых непротиворечиво, что выигрышные множества без $\in$ -минимальных элементов принадлежат классам S_ν тогда и только тогда, когда $\nu \in A$. Оба эти результата демонстрируют глубокое различие между нечетно- и четно-выигрышными множествами. Для результатов о непротиворечивости мы предлагаем определенный метод получения моделей ZF^- с нефундированными множествами заданной структуры (отличный от обычного метода типа ацеловского). С технической точки зрения развитие этого метода (в леммах 9–13 и теореме 4) является основным содержанием параграфа.

Итак, мы начинаем с изучения класса W в качестве возможной модели теории ZFC.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *класс W замкнут относительно взятия множества всех подмножеств и пары, $W \models AP_r$, $W \models AU$, $W \models AInf$ и, кроме того, $W \models AC$, если AC выполняется (в V);*

2) *равенство $V = W$ равносильно каждому из следующих условий: W транзитивен, W замкнут относительно объединения, W “слабо замкнут” относительно функций выбора (в том смысле, что если на некотором выигрышном множестве существует функция выбора, то на нем существует выигрышная функция выбора), $W \models AE$, $W \models AP$, $W \models ASp$ и $W \models ARp$;*

3) *AR^W не зависит от $\neg AR$; $V = W$ и AR^W взаимно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Множество всех подмножеств.* Очевидно, для любого множества x множество $\mathcal{P}(x)$ принадлежит W_1 .

Пара. Для любых выигрышных x и y пара $\{x, y\}$ выигрышна в силу утверждения 1) леммы 1.

Пара в W . Формула AP_r^W утверждает, что для любых $x, y \in W$ существует такое $z \in W$, что для всякого $u \in W$ формула $u \in z$ верна, если и только если $u = x$ или $u = y$. (Так как мы предполагаем, что язык содержит предикат равенства, формула $u = x \vee u = y$ для свертывания в AP_r является бескванторной и, значит, не изменяется при релятивизации на W .) Следовательно, любое множество является таким z , если и только если оно равно $\{x, y\} \cup a$ для некоторого (произвольного) $a \subseteq V \setminus W$. Мы должны проверить, что некоторое такое z принадлежит W ; но это верно при пустом a , как мы только что видели.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Если бы выбранный нами язык теории множеств не имел предиката равенства и равенство определялось бы как равноэкстенциональность, то AP_r^W не выполнялась бы по тем же причинам, которые приведены ниже для AP^W .

Объединение в W . Формула AU^W утверждает, что для любого $y \in W$ существует такое $z \in W$, что для любого $u \in W$ формула $u \in z$ верна, если и

только если $u \in v \in y$ для некоторого $v \in W$. Следовательно, любое множество является таким z , если и только если оно равно $\bigcup(y \cap W) \cup a$ для некоторого (произвольного) $a \subseteq V \setminus W$. Мы должны проверить, что некоторое такое z принадлежит W . Но $\bigcup(y \cap W)$ принадлежит W в силу утверждения 2) леммы 1.

Бесконечность в W . Множество ω , стандартный пример бесконечного множества, наследственно принадлежит W . (По тем же причинам W отражает все сильные аксиомы бесконечности, т. е. аксиомы больших кардиналов.)

Выбор в W . Формула AC^W утверждает, что если $x \in W$ состоит из непустых в W множеств y , то существует такое множество $f \in W$, что f – функция в W и для любого $y \in x \cap W$ существует $z \in y \cap W$, удовлетворяющее $(y, z)^W \in f$. Так как (настоящие) упорядоченные пары и функции являются таковыми и в W , достаточно показать, что существует такая функция $f \in W$, что $f(y) \in y \cap W$ для всех $y \in x \cap W$. Каждое $y \cap W$ непусто (по условию все элементы множества x непусты в W); значит (в силу AC), существует функция выбора f на $\{y \cap W : y \in x \cap W\}$. Так как поле функции f включается в W , имеем $f \in W$ (в силу утверждения 1) леммы 1). Таким образом, функция f искомая.

2) Мы докажем только, что любое данное свойство класса W влечет $V = W$; обратная импликация тривиальна.

Транзитивность; объединение. Для любого x множество $y = \{0, x\}$ принадлежит W_1 . Но если класс W транзитивен, то $x \in y$ должно принадлежать W ; если W замкнут относительно $\bigcup$, то $\bigcup y = x$ должно принадлежать W . Итак, в обоих случаях $W = V$.

Выбор. Пусть $x \in V \setminus W$. Положим $y = \{\{0\}^2, \{x\}\}$. Тогда $y \in W$ (и на самом деле, $y \in S_3$); y состоит из непустых множеств; существует единственная функция выбора f на y , очевидно, $f = \{(\{0\}^2, \{0\}), (\{x\}, x)\}$; и $f \notin W$ (так как множество $(\{0\}^2, \{0\}) = \{\{0\}^3, \{0, \{0\}^2\}\}$ 4-выигрышно, а множество $(\{x\}, x) = \{\{x\}^2, \{x, \{x\}\}\}$ невыигрышно).

Экстенциональность в W . Пусть $x \in V \setminus W$. Полагая $y = \{0\}$ и $z = \{0, x\}$, мы видим, что y и z принадлежат W и, кроме того, различны, но равноэкстенциональны в W (т. е. состоят из тех же самых элементов класса W). Итак, $\neg AE^W$. Теперь мы сделаем более тонкое наблюдение.

Формула AE^W утверждает, что любые $x, y \in W$ равны, как только они равноэкстенциональны в W , т. е. как только $x \cap W$ и $y \cap W$ равноэкстенциональны на самом деле, т. е. (в силу AE) как только $x \cap W = y \cap W$. Очевидно, $x \cap W = y \cap W$ верно, если и только если $y = (x \setminus a) \cup b$ для каких-то (произвольных) $a, b \subseteq V \setminus W$. Рассмотрим два случая.

(а) Множество x четно-выигрышно. Тогда $x \subseteq W$, откуда $x \setminus a = x$. Кроме того, если b непусто, то $x \cup b \notin W$. Итак, если множество $y \in W$ равноэкстенционально множеству x в W , то оно равноэкстенционально ему на самом деле, т. е. $y = x$.

(б) Множество x нечетно-выигрышно. Тогда всякое y вида $y = (x \setminus a) \cup b$, где $a, b \subseteq V \setminus W$, тоже будет нечетно-выигрышным. Если класс $V \setminus W$ непуст, то он является собственным по утверждению 3) леммы 3. Следовательно, тогда класс $\{y \in W : y \text{ равноэкстенционально с } x \text{ в } W\}$ собственный.

Итак, AE в W выполняется на четно-выигрышных множествах, но, если $V \neq W$, максимально нарушается на нечетно-выигрышных.

Множество всех подмножеств в W . Формула AR^W утверждает, что для всякого $x \in W$ существует такое $y \in W$, что для любого $u \in W$ формула $u \in y$ верна, если и только если $u \cap W \subseteq x$. Множество будет таким y , если и только если оно равно классу вида $\{u \in W : u \cap W \subseteq x\} \cup a$ для какого-нибудь $a \subseteq V \setminus W$. Но если $V \neq W$, то любой такой класс является собственным (в силу разъясненных выше причин) и, значит, не может быть элементом класса W .

Выделение в W ; замена в W . Так как ASp следует из ARp , достаточно проверить, что ASp^W влечет $V = W$. Здесь конструкция будет чуть более запутанной. Для частного случая схемы выделения мы возьмем свойство “ u непусто”. Тогда аксиома, релятивизированная на W , утверждает, что для всякого $y \in W$ существует такое $z \in W$, что для любого $u \in W$ формула $u \in z$ верна, если и только если $u \in y$ и $v \in u$ для некоторого $v \in W$. Пусть $x \in V \setminus W$ и $y = \{0, \{\{0\}, x\}\}$. Тогда любое множество будет таким z , если и только если оно равно $\{\{\{0\}, x\}\} \cup a$ для некоторого (произвольного) $a \subseteq V \setminus W$. Мы должны проверить, что любое такое z не принадлежит W . Но $\{\{0\}, x\}$ невыигрышно и все элементы множества a невыигрышны; отсюда мы видим, что z невыигрышно. Следовательно, наш частный случай выделения не выполняется в W .

3) *Регулярность в W .* Сначала дадим простую переформулировку релятивизаций AR^W и AR^{HW} аксиомы AR .

Поскольку мы часто интересуемся, какого рода множества нарушают AR , обозначим через $\varsigma(C)$ схему “существует непустое множество $x \in C$ без $\in$ -минимальных элементов”. (Это схема, которая зависит от формул, определяющих классы C . Конечно, $\varsigma(V)$ – это в точности $\neg AR$.)

ЛЕММА 8. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\neg AR^C$ влечет $\varsigma(\mathcal{P}(C))$;
- 2) пусть класс C густой; тогда:
 - (a) $\neg AR^C$ равносильно $\varsigma(\mathcal{P}(C))$;
 - (b) $\neg AR^{HC}$ равносильно $\varsigma(HC)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $\neg AR^C$ выполняется, т.е. существует такое $x \in C$, что $x \cap C$ непусто и не имеет $\in$ -минимальных элементов. Пусть $y = x \cap C$. Тогда y является непустым подмножеством класса C без $\in$ -минимальных элементов. Значит, $\varsigma(\mathcal{P}(C))$ выполняется.

2), (a). После доказательства утверждения 1) остается проверить только достаточность. Предположим, что $\varsigma(\mathcal{P}(C))$ выполняется, т.е. существует непустое множество $y \subseteq C$ без $\in$ -минимальных элементов. Тогда $y \in C$, поскольку класс C густой. Итак, существует такое множество из C , что его пересечение с C непусто и не имеет $\in$ -минимальных элементов, т.е. выполняется $\neg AR^C$.

2), (b). Если класс C густой, то класс HC – полная модель, т.е. $\mathcal{P}(HC) = HC$. Применяем утверждение 2), (a).

Лемма доказана.

Поскольку класс W густой по лемме 1, получаем следующие критерии.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\neg AR^W$ равносильно $\varsigma(\mathcal{P}(W))$;
- 2) $\neg AR^{HW}$ равносильно $\varsigma(HW)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) AR^{HW} равносильно $HW = V_\infty$;
- 2) AR^W влечет AR^{HW} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу утверждения 2) следствия 4 формула AR^{HW} выполняется, если и только если любое $x \in HW$ имеет $\in$ -минимальный элемент, и, значит (поскольку класс HW густой и транзитивный), любое $u \subseteq tc(x)$ имеет $\in$ -минимальный элемент. Но это последнее свойство означает, что x фундированно. Таким образом, AR^{HW} выполняется, если и только если $HW \subseteq V_\infty$. Так как $V_\infty \subseteq HW$ (по лемме 2), мы получаем наше утверждение.

2) Применим утверждения 1) и 2) следствия 4: формула $\neg AR^{HW}$ выполняется, если и только если существует $x \in HW$ без $\in$ -минимальных элементов; тогда это x – подмножество класса W ; значит, $\neg AR^W$ выполнена.

Следствие доказано.

Далее мы увидим, что обратная импликация не имеет места, т.е. что конъюнкция $AR^{HW} \wedge \neg AR^W$ непротиворечива. Также мы увидим, что AR^W и $V = W$ независимы, т.е. обе конъюнкции $AR^W \wedge V \neq W$ и $\neg AR^W \wedge V = W$ непротиворечивы.

Чтобы доказать независимость принципа AR^W в теории $ZF^- + \neg AR$, мы будем строить модели определенного рода. Обычно модели теории $ZF^- + \neg AR$ строят из “достаточно больших” классов предмножеств, факторизуя их относительно некоторой бисимуляции (как в [11]–[14]). Однако получающиеся универсумы оказываются слишком “нерасслоенными”: они не имеют иерархии уровней, естественно согласованной с их отношением принадлежности. Для наших целей более удобна конструкция типа кумулятивной иерархии. Мы берем (M_0, E_0) с подходящей структурой в качестве начального слоя будущей модели и затем строим всю модель (M, E) итерацией определенного аналога операции взятия множества всех подмножеств. Верхние слои полученной иерархии будут концевыми расширениями нижних. Интересующие нас свойства будут отражаться в нижних слоях и поэтому могут быть легко контролируемы. Мы дадим точное определение ниже. Сперва разясним терминологию.

Пусть (A, R) – модель. Напомним понятия, введенные в § 1: мы говорим, что $v \in A$ представляет множество $y \subseteq A$ в (A, R) , если $uRv \leftrightarrow u \in y$ выполняется для всех $u \in A$, т.е. если $y = \{u : uRv\}$; что A является R -экстенциональным, если $(A, R) \models AE$, и R -густым, если для всякого подмножества $y \subseteq A$ существует элемент $v \in A$, представляющий y в (A, R) . (Заметим, что $\in$ -густота – это густота; что если A является R -густым, то $(A, R) \models$ “существует пустое множество”; и что A будет R -экстенциональным и R -густым, если и только если любое подмножество класса A представлено в (A, R) единственным элементом из A .) Далее, пусть (B, S) – модель и $B \supseteq A$. Вспомним, что (B, S) – *концевое расширение* модели (A, R) , если $S \cap (B \times A) = R$ (т.е. расширение не прибавляет новых “элементов” к старым “множествам”), и что (A, R) *отражает* формулу φ над (B, S) , если $\varphi^{A, R}(x, \dots) \leftrightarrow \varphi^{B, S}(x, \dots)$ для всех $x, \dots \in A$. Заметим, что если $v \in A$ представляет y в модели (A, R) , то v представляет y в любом ее концевом расширении. Пусть $(A, R) \subseteq_e (B, S)$ означает, что (B, S) – концевое расширение (A, R) ; легко проверить, что $\subseteq_e$ является порядком, замкнутым относительно направленных систем.

Теперь опишем нашу конструкцию моделей теории ZF^- . Для данных M_0 и $E_0 \subseteq M_0 \times M_0$ мы определяем M_α и $E_\alpha \subseteq M_\alpha \times M_\alpha$ рекурсией по α следующим образом. Пусть $\mathcal{S}(M_\beta) \subseteq \mathcal{P}(M_\beta)$ состоит из всех непустых подмножеств класса M_β , кроме тех, которые уже представлены в (M_β, E_β) :

$$\mathcal{S}(M_\beta) = \{y \subseteq M_\beta : y \neq \emptyset \wedge \neg(\exists v \in M_\beta)(\forall u \in M_\beta) uE_\beta v \leftrightarrow u \in y\}.$$

Теперь полагаем для всех α :

$$\begin{aligned} M_{\alpha+1} &= M_\alpha \cup \mathcal{S}(M_\alpha), & E_{\alpha+1} &= E_\alpha \cup (\in \cap (M_\alpha \times \mathcal{S}(M_\alpha))), \\ M_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta, & E_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta, & \text{если } \alpha \text{ предельный,} \\ M &= \bigcup_{\alpha \in On} M_\alpha, & E &= \bigcup_{\alpha \in On} E_\alpha. \end{aligned}$$

Кроме того, полагаем $M_{>\alpha} = M \setminus M_\alpha$ и $E_{>\alpha} = E \cap (M_{>\alpha} \times M_{>\alpha})$. Для $x \in M$ мы определяем его (M, E) -ранг следующим образом:

$$\rho_{M,E}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in M_0, \\ \min\{\alpha : x \in M_{\alpha+1}\}, & \text{если } x \in M_{>0}. \end{cases}$$

В дальнейшем мы всегда подразумеваем, что (M_α, E_α) , $(M_{>\alpha}, E_{>\alpha})$ и (M, E) порождены из некоторого данного (M_0, E_0) описанным выше путем. Так как все элементы класса M получаются из M_0 с помощью $\mathcal{S}$, мы видим, что если M_0 непуст, то:

$$\begin{aligned} M_0 \cap \text{tc}(\{y\}) &\text{ непусто для любого } y \in M, \\ M_0 \cap \text{tc}(y) &\text{ непусто для любого } y \in \bigcup_{\alpha \in On} \mathcal{S}(M_\alpha). \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Пусть (M_0, E_0) таково, что M_0 и $\mathcal{S}(M_0)$ не пересекаются. Тогда:

- 1) любое непустое множество $y \in M_0 \cap \mathcal{P}(M_0)$ представлено в (M_0, E_0) некоторым элементом $v \in M_0$;
- 2) любое множество $y \in \mathcal{S}(M_0)$ представлено в (M_1, E_1) самим собой;
- 3) (M_1, E_1) является конечным расширением (M_0, E_0) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это очевидная переформулировка условия леммы: для любого непустого y , если $y \in M_0 \cap \mathcal{P}(M_0)$ не представлено в (M_0, E_0) , имеем $y \in M_0 \cap \mathcal{S}(M_0)$, и наоборот. (Таким образом, условие исключает “аномалию”, при которой некоторое подмножество класса M_0 принадлежит ему, но не представлено в нем.)

2) Пусть $y \in \mathcal{S}(M_0)$; тогда $y \notin M_0$ следует из условия. По определению множество y представляет само себя в (M_1, E_1) , если и только если $uE_1y \leftrightarrow u \in y$ для всех $u \in M_1$, а uE_1y равносильно $uE_0y \vee u \in y$. Так как $E_0 \subseteq M_0 \times M_0$ и $y \notin M_0$, не существует никакого u , удовлетворяющего uE_0y . Таким образом, uE_1y равносильно $u \in y$.

3) Покажем, что $E_1 \cap (M_1 \times M_0) = E_0$. Так как E_1 — это объединение отношений E_0 и $\in \cap (M_0 \times \mathcal{S}(M_0))$, мы можем разложить $E_1 \cap (M_1 \times M_0)$ в

объединение отношений $E_0 \cap (M_1 \times M_0)$ и $\in \cap (M_0 \times \mathcal{S}(M_0)) \cap (M_1 \times M_0)$. Теперь замечаем, что $E_0 \cap (M_1 \times M_0)$ – это просто E_0 , а $\in \cap (M_0 \times \mathcal{S}(M_0)) \cap (M_1 \times M_0)$ пусто.

В самом деле, первое верно, поскольку $E_0 \subseteq M_0 \times M_0 \subseteq M_1 \times M_0$. Чтобы увидеть второе, заметим, что класс $(M_0 \times \mathcal{S}(M_0)) \cap (M_1 \times M_0) = (M_0 \cap M_1) \times (\mathcal{S}(M_0) \cap M_0)$ пуст, так как класс $\mathcal{S}(M_0) \cap M_0$ пуст по условию.

Лемма доказана.

В действительности классы (M_0, E_0) , используемые в нашей конструкции, будут иметь следующие свойства:

- (i) $\{u: uE_0v\}$ является множеством для всех v ;
- (ii) $x \notin \text{tc}(y)$ для всех $x, y \in M_0$;
- (iii) $(M_0, E_0) \models \text{“}\exists \text{ пустое } x\text{”}$;
- (iv) $(M_0, E_0) \models \text{AE}$.

Наша ближайшая цель – показать, что классы (M, E) , порожденные такими (M_0, E_0) , будут моделями теории ZF^- .

ЛЕММА 10. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii). Пусть $\alpha \leq \beta$. Тогда:

- 1) M_α и $\mathcal{S}(M_\beta)$ не пересекаются;
- 2) (M_β, E_β) является конечным расширением (M_α, E_α) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathcal{S}(M_\beta)$ для некоторого $\beta \geq \alpha$; если, кроме того, $x \in M_\alpha$, то $x \in M_\beta$ с этим β (так как $M_\alpha \subseteq M_\beta$ при $\beta \geq \alpha$). Следовательно, достаточно проверить, что M_β и $\mathcal{S}(M_\beta)$ всегда не пересекаются и что $(M_{\beta+1}, E_{\beta+1})$ – конечное расширение (M_β, E_β) .

Мы проверим это индукцией по β . Вначале мы заметим, что M_0 и $\mathcal{S}(M_0)$ не пересекаются; это легко следует из (ii). Значит, (M_1, E_1) – конечное расширение (M_0, E_0) в силу утверждения 3) леммы 9.

Теперь предположим, что M_γ и $\mathcal{S}(M_\gamma)$ не пересекаются при всех $\gamma < \beta$. Значит, снова в силу утверждения 3) леммы 9 каждое $(M_{\gamma+1}, E_{\gamma+1})$ будет конечным расширением (M_γ, E_γ) . Так как $\subseteq_e$ является порядком, замкнутым относительно направленных систем, то (M_β, E_β) будет конечным расширением каждого предыдущего (M_γ, E_γ) . Мы покажем, что M_β и $\mathcal{S}(M_\beta)$ не пересекаются.

Возьмем любое $y \in \mathcal{S}(M_\beta)$. По определению операции $\mathcal{S}$ множество y непусто и не представлено в (M_β, E_β) . Мы должны показать, что $y \notin M_\beta$. Так как $M_\beta = M_0 \cup \bigcup_{\gamma < \beta} \mathcal{S}(M_\gamma)$, мы должны проверить два следующих случая.

(а) Пусть $y \in M_0$. Так как $M_0 \cap \text{tc}(y)$ непусто (поскольку $y \in \mathcal{S}(M_\beta)$), мы получаем $x \in \text{tc}(y)$ для $y \in M_0$ и некоторого $x \in M_0$. Но это противоречит условию (ii).

(б) Пусть $y \in \mathcal{S}(M_\gamma)$ для некоторого $\gamma < \beta$. Так как M_γ и $\mathcal{S}(M_\gamma)$ не пересекаются по индуктивному предположению, из утверждения 2) леммы 9 следует, что y представлено (самим собой) в $(M_{\gamma+1}, E_{\gamma+1})$. Но (M_β, E_β) – конечное расширение (M_γ, E_γ) , значит, y представлено и в (M_β, E_β) . Тогда $y \notin \mathcal{S}(M_\beta)$. Противоречие.

Итак, $y \notin M_\beta$ в обоих случаях. Мы проверили, что M_β и $\mathcal{S}(M_\beta)$ не пересекаются. Наконец, опять из утверждения 3) леммы 9 следует, что $(M_{\beta+1}, E_{\beta+1})$ – конечное расширение слоя (M_β, E_β) . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii). Тогда (M, E) будет конечным расширением всех (M_α, E_α) .

Мы видим также, что в предположении (i) и (ii):

$M_0, \mathcal{S}(M_0), \dots, \mathcal{S}(M_\alpha), \dots$ образуют разбиение M ,

$M_{>\alpha} = \bigcup_{\beta > \alpha} \mathcal{S}(M_\beta)$,

$E_0, \in \cap (M_0 \times \mathcal{S}(M_0)), \dots, \in \cap (M_\alpha \times \mathcal{S}(M_\alpha)), \dots$ образуют разбиение E ,

$E_\alpha = E \cap (M_\alpha \times M_\alpha)$ (так что обозначения “ E_α ” и “ $E_{>\alpha}$ ” согласованы),

$\rho_{M,E}$ является сильным гомоморфизмом из $(M, \in)$ на $(\{-1\} \cup On, <)$.

ЛЕММА 11. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i)–(iii). Тогда M будет E -густым. Кроме того, если $v \in M$ представляет $y \subseteq M_\alpha$ в (M, E) , то $v \in M_{\alpha+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii), то (M, E) будет конечным расширением каждого (M_α, E_α) в силу следствия 6. Возьмем любое множество $y \subseteq M$. Заметим, что если y представлено в каком-то (M_α, E_α) , то оно представлено в его конечном расширении (M, E) . Имеем два случая.

(a) Множество y пусто. Из (iii) следует, что некоторый элемент $v \in M_0$ представляет y в (M_0, E_0) и, значит, в (M, E) .

(b) Множество y непусто. Пусть ординал α таков, что $y \subseteq M_\alpha$ (такой α , конечно, найдется в силу ARp). Тогда либо существует некоторый $v \in M_\alpha$, представляющий y в (M_α, E_α) , либо, в противном случае, имеем $y \in \mathcal{S}(M_\alpha)$, и, полагая $v = y$, видим, что v представляет y в $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$ согласно утверждению 2) леммы 9. В обоих подслучаях $v \in M_{\alpha+1}$ и v представляет y в (M, E) .

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii). Тогда (M_0, E_0) отражает АЕ над (M, E) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во всем доказательстве мы используем, что в предположении (i) и (ii) каждый уровень является конечным расширением любого предшествующего уровня и вся модель является конечным расширением их всех в силу леммы 10 и следствия 6. Мы должны показать, что $(M_0, E_0) \models \text{АЕ}$ равносильно $(M, E) \models \text{АЕ}$.

Достаточность. Так как (M, E) – конечное расширение (M_0, E_0) , любые $x, y \in M_0$ равноэкстенциональны в (M, E) тогда и только тогда, когда они равноэкстенциональны в (M_0, E_0) .

Необходимость. Мы начнем со следующего наблюдения: если аксиома АЕ выполняется в (M_β, E_β) для всех $\beta < \alpha$, где α предель, то она выполняется в (M_α, E_α) . Это так, поскольку (M_α, E_α) – конечное расширение всех (M_β, E_β) . По той же причине если аксиома АЕ выполняется во всех (M_α, E_α) , то она выполняется в (M, E) . Теперь, предполагая, что АЕ выполняется в (M_0, E_0) , мы докажем, что АЕ выполняется во всех (M_α, E_α) , индукцией по α ; более того, остается лишь доказать, что если АЕ выполняется в (M_α, E_α) , то она выполняется в $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$.

Пусть $x, y \in M_{\alpha+1}$ равноэкстенциональны в $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$; другими словами, пусть $uE_{\alpha+1}x \leftrightarrow uE_{\alpha+1}y$ верно для всех $u \in M_{\alpha+1}$. Покажем, что $x = y$.

Во-первых, мы утверждаем, что возможны лишь два случая: либо x, y принадлежат M_α , либо x, y принадлежат $M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha = \mathcal{S}(M_\alpha)$. В самом деле,

допустим противное: $x \in M_\alpha$, но $y \in \mathcal{S}(M_\alpha)$. Так как $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$ – конечное расширение (M_α, E_α) , мы видим, что если $z \in M_\alpha$, то $uE_{\alpha+1}z \leftrightarrow uE_\alpha z$, и если $z \in \mathcal{S}(M_\alpha)$, то $uE_{\alpha+1}z \leftrightarrow u \in z$. Тогда согласно нашему допущению $uE_\alpha x \leftrightarrow u \in y$ верно для всех $u \in M_{\alpha+1}$. Но это противоречит определению $\mathcal{S}(M_\alpha)$.

Во-вторых, мы утверждаем, что $x = y$ в обоих случаях. В самом деле, рассмотрим их.

(а) Пусть $x, y \in M_\alpha$. Так как x и y равноэкстенциональны в $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$, они тем более равноэкстенциональны в (M_α, E_α) (опять потому, что если $z \in M_\alpha$, то $uE_{\alpha+1}z \leftrightarrow uE_\alpha z$). Значит, $x = y$, поскольку АЕ выполняется в (M_α, E_α) по индуктивному предположению.

(б) Пусть $x, y \in \mathcal{S}(M_\alpha)$. Так как x и y равноэкстенциональны в $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1})$, они равноэкстенциональны в V (опять потому, что если $z \in \mathcal{S}(M_\alpha)$, то $uE_{\alpha+1}z \leftrightarrow u \in z$). Значит, $x = y$, поскольку АЕ выполняется в V .

Таким образом, в любом случае имеем $x = y$, откуда $(M_{\alpha+1}, E_{\alpha+1}) \models \text{АЕ}$. Учитывая сказанное выше, получаем $(M, E) \models \text{АЕ}$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i)–(iv). Тогда $(M, E) \models \text{ZF}^-$. Более того, $(M, E) \models \text{ZFC}^-$, если $V \models \text{АС}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем теорему Л. Ригера, упоминавшуюся во вводной части: если класс M – E -густой и E -экстенциональный, то $(M, E) \models \text{ZF}^-$; более того, если $V \models \text{АС}$, то $(M, E) \models \text{АС}$. В силу этого результата теорема следует из лемм 11 и 12. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний о возможных модификациях рассмотренной конструкции (подробнее мы рассмотрим это в следующей работе).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Можно потребовать, чтобы все элементы класса M_0 были транзитивными. Нетрудно доказать, что существует собственный класс транзитивных попарно $\in$ -несравнимых множеств (и даже такой класс $A \subseteq V_\infty$ и биекция между A и V_∞).

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Вариант этой конструкции получается, если условие (ii) заменить на следующие два условия:

- (iia) $E_0 \cap (A \times A) = \in \cap (A \times A)$ и A транзитивен,
- (iib) $x \notin \text{tc}(y)$, как только x или y принадлежит $M_0 \setminus A$,

где $A \subseteq M_0$ обозначает E_0 -фундированную часть класса M_0 (или, вообще, любую часть M_0 , на которой отношение E_0 изоморфно отношению $\in$ на некоторой части основной модели V). Очевидно, обе конструкции легко трансформируются друг в друга.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Вместо V можно брать другую основную модель. Например, если это L , получающаяся модель будет иметь определимое полное упорядочение (и подавно удовлетворять АС). Более общим образом, вместо операции $\mathcal{P}$ (порождающей $\mathcal{S}$) можно применять другую операцию типа $\mathcal{P}$, например взятие всех определимых подмножеств и т. п.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Будем рассматривать только классы (M_0, E_0) , удовлетворяющие (i) и (ii). Более или менее сильные версии аксиомы АЕ тоже могут отражаться в начальных слоях над полученными (M, E) . Например, если (M_0, E_0) вместо (iv) удовлетворяет лишь экстенциональности на непустых множествах, то и (M, E) будет удовлетворять этому условию; если при этом (iii) тоже выполнено, то $(M, E) \models \text{ZFA}^-$. Если, наоборот, (M_0, E_0) удовлетворяет некоторой аксиоме типа “сильной экстенциональности” $\text{AFA}_2^\sim$, то и (M, E) будет удовлетворять ей.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Подобно хорошо известным перестановочным моделям ZFA (см. [3, с. 250]) можно получать подмодели моделей ZF^- (или ZFA^-), порожденные некоторой группой автоморфизмов исходного (M_0, E_0) и некоторым фильтром над ней. В частном случае, когда исходный слой модели является множеством, состоящим из автосинглетонов, разные авторы использовали этот метод (см., например, [9], [16]); но эта ситуация фактически равносильна ситуации с атомами, т. е. ZFA .

Теперь мы установим некоторые свойства таких моделей, касающиеся регулярности и выигрышных множеств. Грубо говоря, следующая лемма показывает, что итерация операции $\mathcal{S}$ является “фундированной процедурой”: нефундированные множества возникают только из исходных множеств, и поэтому их свойства полностью определяются данным начальным слоем. (На самом деле, это будет так для любой основной модели, даже нефундированной, и любой операции типа $\mathcal{P}$.)

ЛЕММА 13. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) Для любого (M_0, E_0) верно $(M_{>0}, E_{>0}) \models \text{AR}$.
- 2) Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii). Тогда для любого $x \in M$, если $(M, E) \models “x \text{ непусто и не имеет } \in\text{-минимальных элементов}”$, существует такое $v \in M_1$, что $(M, E) \models “v \subseteq x \text{ непусто и не имеет } \in\text{-минимальных элементов}”$ и $(M_1, E_1) \models “v \text{ непусто и не имеет } \in\text{-минимальных элементов}”$.
- 3) Пусть, кроме того, $C^{M_1, E_1} = C^{M, E} \cap M_1$. Тогда:
 - (а) (M_1, E_1) отражает $\varsigma(\mathcal{P}(C))$ над (M, E) ;
 - (б) если класс C густой, то (M_1, E_1) отражает AR^C над (M, E) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем любое $x \in M_{>0}$, непустое в $(M_{>0}, E_{>0})$, т. е. такое, что $v E_{>0} x$ для некоторого $v \in M_{>0}$. Пусть u будет таким v наименьшего (M, E) -ранга, скажем α . (Заметим, что $\alpha > -1$ и $u \in \mathcal{S}(M_\alpha)$.) Мы утверждаем, что $(M_{>0}, E_{>0}) \models “u \text{ является } \in\text{-минимальным элементом в } x”$.

В самом деле, $z E_{>0} u \leftrightarrow z \in u$ для всякого z (так как $u \in M_{>0}$). Теперь пусть $z E_{>0} u$. Тогда $z \in M_\alpha$ (так как $z \in u \in \mathcal{S}(M_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(M_\alpha)$) и, значит, $\rho_{M, E}(z) < \alpha$. Следовательно, $z E_{>0} x$ невозможно: иначе α не наименьший. Таким образом, элемент u является $E_{>0}$ -минимальным среди всех $v E_{>0} x$.

2) Пусть $x \in M$ и $(M, E) \models “x \text{ непусто и не имеет } \in\text{-минимальных элементов}”$. Пусть y состоит из всех $u E x$ наименьшего (M, E) -ранга, скажем α . Рассуждая, как в утверждении 1), мы видим, что каждое такое u принадлежит M_0 , т. е. $\alpha = -1$. (Если не так, то $u \in \mathcal{S}(M_\alpha)$; поскольку u не E -минимален, имеем $z E x$ и $z E u$ для некоторого z ; тогда $z E u \leftrightarrow z \in u$, откуда $z \in M_\alpha$ и, значит, $\rho_{M, E}(z) < \alpha$, т. е. α не наименьший.) Итак, $y \subseteq M_0$.

Заметим, что до сих пор мы не использовали условий (i) и (ii). Однако далее мы будем пользоваться леммами 10 и 11, которые зависят от них.

Согласно лемме 11 существует элемент $v \in M$, представляющий множество y ; более того, $v \in M_1$ (так как $y \subseteq M_0$). Кроме того, $(M, E) \models "v \subseteq x$ непусто и не имеет $\in$ -минимальных элементов". Так как в силу следствия 6 модель (M, E) – концевое расширение слоя (M_1, E_1) , мы имеем $(M_1, E_1) \models "v$ непусто и не имеет $\in$ -минимальных элементов".

3), (a). Вспомним, что $\varsigma(\mathcal{P}(C))$ – это формула “существует непустое подмножество класса C без $\in$ -минимальных элементов”. Мы должны показать, что она выполняется в (M_1, E_1) , если и только если она выполняется в (M, E) .

Необходимость. Пусть $(M_1, E_1) \models$ “существует непустое $x \subseteq C$ без $\in$ -минимальных элементов”. Так как вся модель (M, E) – концевое расширение слоя (M_1, E_1) в силу следствия 6, она не прибавляет “ $\in$ -минимальных элементов” к x . Кроме того, из $C^{M_1, E_1} = C^{M, E} \cap M_1$ и из того, что (M, E) – концевое расширение (M_1, E_1) , легко следует $(M, E) \models x \subseteq C$.

Достаточность. Пусть $(M, E) \models$ “существует непустое $x \subseteq C$ без $\in$ -минимальных элементов”. Тогда согласно утверждению 2) существует такое $v \in M_1$, что, во-первых, $(M, E) \models v \subseteq x$, откуда $(M, E) \models v \subseteq C$, во-вторых, $(M_1, E_1) \models "v$ непусто и не имеет $\in$ -минимальных элементов”. Кроме того, из $C^{M_1, E_1} = C^{M, E} \cap M_1$ и из того, что (M, E) – концевое расширение (M_1, E_1) , легко следует $(M_1, E_1) \models v \subseteq C$.

3), (b). Это выполняется в силу утверждения 2), (a) леммы 8 и 3), (a).

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. В случае $C = V$ справедливо утверждение, более сильное, чем утверждение 3), (b) леммы 13: $(M_1, E_1) \models \text{AR}$, если и только если (M, E) изоморфно V_∞ (с обычным отношением принадлежности). На самом деле, тогда (M_α, E_α) и V_α изоморфны для всех α начиная с некоторого.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть (M_0, E_0) удовлетворяет (i) и (ii). Тогда:

- 1) (M_1, E_1) отражает $\varsigma(W_{2\gamma})$ и $\varsigma(W_{\text{II}})$ над (M, E) ;
- 2) (M_1, E_1) отражает AR^W над (M, E) ;
- 3) $(M, E) \models \varsigma(S_{2\gamma})$ влечет $(M_1, E_1) \models \varsigma(S_{2\delta})$ для некоторого $\delta \leq \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $W_\nu^{M_\alpha, E_\alpha} = W_\nu^{M, E} \cap M_\alpha$. Отсюда следует, что если $A \subseteq On$ и C_A – это $\bigcup_{\nu \in A} W_\nu$, то $C_A^{M_\alpha, E_\alpha} = C_A^{M, E} \cap M_\alpha$. Поэтому (M_1, E_1) отражает $\varsigma(\mathcal{P}(C_A))$ над (M, E) в силу утверждения 3), (a) леммы 13. Тогда утверждения 1)–3) легко следуют.

1) Пусть $A = \{2\delta + 1 : \delta < \gamma\}$, соответственно, $A = \{2\delta + 1 : \delta \in On\}$; тогда $\mathcal{P}(C_A) = W_{2\gamma}$, соответственно, $\mathcal{P}(C_A) = W_{\text{II}}$. Значит, (M_1, E_1) отражает формулы $\varsigma(W_{2\gamma})$ и $\varsigma(W_{\text{II}})$ над (M, E) .

2) Пусть $A = On$; тогда $C_A = W$. Значит, (M_1, E_1) отражает формулу $\varsigma(\mathcal{P}(W))$ над (M, E) . Применяем утверждение 1) следствия 4.

3) Это утверждение немедленно следует из 1), поскольку $W_{2\gamma} = \bigcup_{\delta \leq \gamma} S_{2\delta}$.

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. В утверждениях 1)–3) следствия 7 мы не можем заменить (M_1, E_1) на (M_0, E_0) . Например, модель 2, приведенная ниже, показывает это. Заметим также, что $(M, E) \models \varsigma(S_{2\gamma})$ не влечет $(M_1, E_1) \models \varsigma(S_{2\gamma})$.

Мы возвращаемся к доказательству теоремы 3. Для его завершения остается доказать непротиворечивость в ZF^- предположений из утверждения 3) этой теоремы. Сначала мы покажем, что AR^W независима от $ZF^- + \neg AR$.

Для доказательства непротиворечивости $\neg AR \wedge AR^W$ мы предъявим модель теории $ZF^- + \neg AR$, в которой AR^W выполняется.

Модель 1. Положим

$$M_0 = \{c, u\}, \quad E_0 = \{(u, u)\}$$

с элементами c, u , удовлетворяющими (ii) (т.е. такими, что $c \notin tc(\{u\})$ и $u \notin tc(\{c\})$) в качестве начального слоя, и построим (M, E) описанным выше способом (рис. 14). Так как (M_0, E_0) , очевидно, удовлетворяет (i)–(iv), то (M, E) будет моделью теории ZF^- . В этой модели c – пустое множество, а u – автосинглетон (множество, совпадающее со своим синглетоном); отсюда следует, что $(M, E) \models \neg AR$. Легко видеть также, что (M_1, E_1) удовлетворяет AR^W . Следовательно, в силу утверждения 2) следствия 7 вся модель (M, E) также удовлетворяет AR^W .

Докажем непротиворечивость $\neg AR \wedge \neg AR^W$. Чтобы нарушить AR^W , достаточно иметь множество вида $x = \{0, x\}$; как мы отметили в примере 12, его синглетон $\{x\}$ будет 2-выигрышным и будет пересекаться со своим единственным 1-выигрышным элементом. Для этого подходят модели типа ацеловских, и любая обогащающая аксиома вида $AFA_1^\sim$ дает такое множество. Однако мы предъявим модель того же типа, что и выше.

Модель 2. Положим

$$M_0 = \{c, v\}, \quad E_0 = \{(c, v), (v, v)\}$$

с элементами c, v , удовлетворяющими (ii) (рис. 15). Опять условия (i)–(iv) очевидным образом выполнены, и, значит, (M, E) – модель теории ZF^- . В этой модели c – пустое множество, а v – множество искомого вида: $v = \{0, v\}$. Следовательно, $(M, E) \models \neg AR^W$.

Модель 2

Модель 1

Рис. 14

Рис. 15

Теперь мы докажем, что AR^W и $V = W$ взаимно независимы.

Конъюнкция $V = W \wedge AR^W$ – это просто аксиома AR ; она выполняется в стандартной модели V_∞ .

Конъюнкция $V \neq W \wedge AR^W$ выполняется в модели 1.

Конъюнкция $V = W \wedge \neg AR^W$ выполняется в модели 2.

Наконец, чтобы показать непротиворечивость конъюнкции $V \neq W \wedge \neg AR^W$, мы предъявляем

МОДЕЛЬ 3. Положим

$$M_0 = \{c, u, v\}, \quad E_0 = \{(u, u), (c, v), (v, v)\}$$

с различными c, u, v , удовлетворяющими (ii) (рис. 16). Тогда (M, E) будет моделью теории $ZF^- + \neg AR$, в которой $c = 0$, $u = \{u\}$, $v = \{0, v\}$, $v \in HW \setminus V_\infty$ и $\{c, u, v\} \in W \setminus HW$. Применяя утверждения 1) и 2) следствия 5, мы видим также $(M, E) \models \neg AR^W$.

Доказательство теоремы 3 закончено.

Следующая теорема представляет собой окончательное описание непротиворечивых соотношений между классами V , W , HW , V_∞ и релятивизациями аксиомы AR на них.

ТЕОРЕМА 5. Все четыре возможных соотношения между классами V , HW и V_∞ :

$$V = HW = V_\infty,$$

$$V \neq HW = V_\infty,$$

$$V = HW \neq V_\infty,$$

$$V \neq HW \neq V_\infty,$$

непротиворечивы. Первый случай равносильен AR ; во втором случае AR^{HW} выполняется, а AR^W независима, т.е. каждое из утверждений

$$V \neq HW = V_\infty \wedge AR^W,$$

$$V \neq HW = V_\infty \wedge \neg AR^W$$

непротиворечиво; и наконец, в двух последних случаях обе релятивизации AR^W и AR^{HW} нарушаются.

Более того, все непротиворечивые соотношения между классами V , W , HW , V_∞ и релятивизациями AR на них полностью определены этими пятью случаями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства непротиворечивости мы предъявляем следующие модели.

1) Формула $V = HW = V_\infty$ выполняется в модели V_∞ (упомянутой ниже как модель 0).

2) Формула $V \neq HW = V_\infty$ выполняется в модели 1. Кроме того, в ней выполняется как AR^W , так и AR^{HW} .

3) Формула $V = HW \neq V_\infty$ выполняется в модели 2. Кроме того, в ней нарушается как AR^W , так и AR^{HW} .

4) Формула $V \neq HW \neq V_\infty$ выполняется в модели 3. В ней тоже нарушается как AR^W , так и AR^{HW} .

5) Наконец, чтобы доказать, что конъюнкция $V \neq HW = V_\infty \wedge \neg AR^W$ непротиворечива, мы предъявляем следующую

МОДЕЛЬ 4. Положим

$$M_0 = \{c, u, v\}, \quad E_0 = \{(u, u), (c, v), (u, v), (v, v)\}$$

с теми же самыми c, u, v (рис. 17). Тогда (M, E) – модель теории $ZF^- + \neg AR$, в которой $c = 0$, $u = \{u\}$, $v = \{0, u, v\}$, $HW = V_\infty$ и $v \in W \setminus HW$. В этой модели AR^W нарушается, но AR^{HW} выполняется.

Модель 3

Рис. 16

Модель 4

Рис. 17

Для проверки выполнимости (или невыполнимости) AR^W и AR^{HW} в этих моделях и для того, чтобы показать, что данные пять случаев исчерпывают все непротиворечивые соотношения между V , W , HW , V_∞ и релятивизациями AR на них, мы применяем леммы 2 и 3, а также следствие 5. Теорема доказана.

Мы приведем еще раз, более явно, эти пять соотношений и изображения начальных уровней соответствующих моделей:

$V = W = HW = V_\infty \wedge AR \wedge AR^W \wedge AR^{HW}$,	модель 0: •
$V \neq W \neq HW = V_\infty \wedge \neg AR \wedge AR^W \wedge AR^{HW}$,	модель 1: • ○
$V \neq W \neq HW = V_\infty \wedge \neg AR \wedge \neg AR^W \wedge AR^{HW}$,	модель 4: ○ ○
$V = W = HW \neq V_\infty \wedge \neg AR \wedge \neg AR^W \wedge \neg AR^{HW}$,	модель 2: ○
$V \neq W \neq HW \neq V_\infty \wedge \neg AR \wedge \neg AR^W \wedge \neg AR^{HW}$,	модель 3: ○ ○

В оставшейся части параграфа мы исследуем, когда различные классы выигранных множеств могут содержать множества без $\in$ -минимальных элементов, т. е. для данного класса $C \subseteq W$ мы исследуем выполнимость $\varsigma(C)$ и связанные с этим тонкие свойства. Мы рассматриваем случаи $C = W_I, W_{II}$ в лемме 14 и $C = S_\nu$ при $\nu \in On$ в теореме 6.

ЛЕММА 14. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\varsigma(W_I)$ равносильно $\neg AR$;
- 2) $\varsigma(W_{II})$ влечет $\neg AR^W$;
- 3) $\neg \varsigma(W_{II})$ совместимо с $\neg AR^W$;
- 4) $\varsigma(W_{II})$ непротиворечиво;
- 5) $\neg \varsigma(\mathcal{P}(W_{II}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) *Необходимость.* Это очевидно.

Достаточность. Предположим $\neg AR$; таким образом, некоторое множество x не имеет $\in$ -минимальных элементов. Пусть $u = \{0, x\}$, $v = \{1, u\}$ и $y = x \cup \{x, u, v\}$ (рис. 18). Ясно, что y не имеет $\in$ -минимальных элементов, но $w(y) = 3$ (верным ходом 0 будет v). (Этот пример может быть распространен на все нечетные ординалы ≥ 3 ; см. ниже утверждение 2) леммы 15.)

- 2) Так как $W_{II} \subseteq \mathcal{P}(W)$, применяем следствие 4.

Модель 5

Рис. 18

Рис. 19

3) Чтобы показать непротиворечивость теории $ZF^- + \neg AR^W +$ “любое $x \in W_{II}$ имеет $\in$ -минимальный элемент”, мы предъявим следующую

МОДЕЛЬ 5. Положим

$$M_0 = \{c_0, c_1, u, v\}, \quad E_0 = \{(c_0, c_1), (c_0, u), (c_1, v), (u, v), (v, u)\},$$

и пусть, кроме того, (ii) выполняется (рис. 19, a). Так как условия (i), (iii) и (iv) очевидным образом выполнены, получающаяся модель (M, E) будет моделью теории ZF^- . В этой модели c_0 – это 0, c_1 – это 1, u – это $\{0, v\}$ и v – это $\{1, u\}$. (Таким образом, в (M, E) будет $u = \{0, \{1, u\}\}$ и $v = \{1, \{0, v\}\}$.) Теперь пусть $x \in M$ представляет $\{u, v\}$. Тогда в (M, E) верно следующее:

- (a) x наследственно выигрышно;
- (b) x не имеет $\in$ -минимальных элементов;
- (c) $\neg AR^W$;
- (d) $(\forall y \in W_{II}) y \subseteq x \rightarrow y$ имеет $\in$ -минимальный элемент;
- (e) $(\forall y \in W_{II}) y$ имеет $\in$ -минимальный элемент.

(Здесь (a), (b) и (d) непосредственно очевидны, (c) следует из (a) и (b), (e) следует из (d) в силу следствия 7; см. точное изображение множества x на рис. 19, b.)

4) Модель 2 удовлетворяет этому условию.

5) Как мы только что видели, непротиворечиво, что множество без $\in$ -минимальных элементов является подмножеством класса W_I (т.е. принадлежит классу W_{II}). Покажем, что, в противоположность этому, множество без $\in$ -минимальных элементов не может быть подмножеством класса W_{II} . В самом деле, предположим, что некоторое $x \subseteq W_{II}$ пересекается с каждым своим элементом. Рассмотрим произвольный $u \in x$. Мы имеем $u \subseteq W_I$, так как $u \in x \subseteq W_{II}$. Возьмем любой $v \in u \cap x$. Тогда v принадлежит W_I , поскольку $v \in u \subseteq W_I$, и, вместе с тем, принадлежит W_{II} , поскольку $v \in x \subseteq W_{II}$. Противоречие.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \subseteq On$. Тогда утверждение

$$\{\nu \in On : \varsigma(S_\nu)\} = A$$

совместимо с ZFC^- в любом из следующих трех случаев, и только в них:

- 1) A пусто;
- 2) $A = \{\nu > 1: \nu \text{ нечетно}\}$;
- 3) $A = \{\nu > 1: \nu \text{ нечетно или } \nu \geq \mu\}$ для μ конфинальности $\leq \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Нам достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 15. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $\varsigma(S_\nu)$ влечет $\nu > 1$;
- 2) $\neg AR$ влечет $(\forall \text{ нечетных } \nu > 1) \varsigma(S_\nu)$;
- 3) если μ четный, то $\varsigma(S_\mu)$ влечет $(\forall \nu \geq \mu) \varsigma(S_\nu)$;
- 4) если μ предельный, то $\varsigma(S_\mu)$ влечет $(\exists \nu \leq \mu) \text{ cf } \nu = \omega \wedge \varsigma(S_\nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это утверждение очевидно.

2) Предположим $\neg AR$; таким образом, некоторое x не имеет $\in$ -минимальных элементов. Фиксируем произвольный нечетный ординал $\nu > 1$: $\nu = 2\gamma + 1$ для некоторого $\gamma > 0$. Пусть $u = \{0, x\}$, $v = o_{2\gamma} \cup \{u\}$ и $y = x \cup \{x, u, v\}$ (рис. 20). Легко проверить, что y не имеет $\in$ -минимальных элементов, но $w(y) = \nu$ (верным ходом 0 будет v).

Рис. 20

- 3) Начиная с данного x , определяем множества x_α рекурсией по α :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x, \\
 x_{\alpha+1} &= x \cup \{x_\alpha\}, \\
 x_\alpha &= x \cup \{x_{2\beta+1}: \beta < \alpha\}, \text{ если } \alpha \text{ пределен.}
 \end{aligned}$$

Тогда:

(а) если x не имеет $\in$ -минимальных элементов, то и все x_α не имеют $\in$ -минимальных элементов;

(б) если $x \in S_{2\gamma}$, то $x_\alpha \in S_{2\gamma+\alpha}$ для всех α .

В самом деле, пусть $u \in x_\alpha$; если $u \in x$, то u не может быть $\in$ -минимальным в x_α , так как u не $\in$ -минимален в x и $x \subseteq x_\alpha$; если $u = x_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$, то u не может быть $\in$ -минимальным в x_α , так как $x \subseteq x_\beta \cap x_\alpha$. Чтобы вычислить $w(x_\alpha) = 2\gamma + \alpha$, используем индукцию по α , применяя следствие 1.

Итак, мы доказали, что $\varsigma(S_{2\gamma})$ влечет $\forall \alpha \varsigma(S_{2\gamma+\alpha})$.

4) Здесь (и только здесь) мы будем использовать АС. Мы докажем чуть более сильное утверждение: если μ пределен и $x \in S_\mu$ не имеет $\in$ -минимальных элементов, то существуют такие $\nu \leq \mu$ и $y \subseteq x$, что $\text{cf } \nu = \omega$, $y \in S_\nu$ и y не имеет

$\in$ -минимальных элементов. (Вместо АС можно предполагать, что множество x вполне упорядочиваемо.)

Пусть $\xi_0 = \min\{\alpha: x \cap S_\alpha \text{ непусто}\}$. Возьмем любой элемент $x_{0,0} \in x \cap S_{\xi_0}$. Так как x не имеет $\in$ -минимальных элементов, мы можем построить, начиная с $x_{0,0}$, бесконечную $\in$ -убывающую последовательность элементов множества x ; пусть $y_0 = \{x_{0,n} \in x: n < \omega\}$, где $x_{0,n+1} \in x_{0,n}$ для всех $n < \omega$. Если $\nu_0 = \sup_{n < \omega}(w(x_{0,n}) + 1)$ предельен, наше утверждение доказано: в самом деле, тогда $\nu_0 \leq \mu$, $\text{cf } \nu_0 = \omega$, $y_0 \subseteq x$, $y_0 \in S_{\nu_0}$ и y_0 не имеет $\in$ -минимальных элементов (заметим, что x , а значит, и y_0 принадлежат W_{II} , и применим следствие 1 для вычисления $w(y_0)$). Если же ν_0 не предельен (и, значит, $\nu_0 < \mu$), мы продолжим наше построение тем же самым способом. Пусть $\xi_1 = \min\{\alpha > \nu_0: x \cap S_\alpha \text{ непусто}\}$ (так как $\nu_0 < \mu$ и μ предельен, такие α существуют). Как раньше, возьмем любой элемент $x_{1,0} \in x \cap S_{\xi_1}$ и построим $y_1 = \{x_{1,n} \in x: n < \omega\}$, где $x_{1,n+1} \in x_{1,n}$ для всех $n < \omega$. Опять, если $\nu_1 = \sup_{n < \omega}(w(x_{1,n}) + 1)$ предельен, утверждение доказано; если не предельен, мы повторяем процесс. В конце концов возможен один из двух случаев.

(а) Для некоторого $m < \omega$ мы получили $y_m = \{x_{m,n}: n < \omega\} \subseteq x$, где $x_{m,n+1} \in x_{m,n}$ для всех $n < \omega$ и ординал $\nu_m = \sup_{n < \omega}(w(x_{m,n}) + 1)$ предельен. Тогда утверждение доказано: ν_m и y_m искомые.

(б) Если все ν_m не предельны, мы получили возрастающую последовательность ординалов: $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_m < \dots$. Тогда, полагая $y = \bigcup_m y_m$ и $\nu = \sup_m \nu_m$, мы опять получаем: $\nu \leq \mu$, $\text{cf } \nu = \omega$, $y \subseteq x$, $y \in S_\nu$ и y не имеет $\in$ -минимальных элементов.

Итак, утверждение 4), а с ним и вся лемма доказаны.

Достаточность. Для данного $A \subseteq On$ требуемого вида мы построим модель теории $ZFC^- + \neg AR$, в которой $\varsigma(S_\nu)$ выполняется, если и только если $\nu \in A$.

1) A пусто. В силу утверждения 2) леммы 15 это равносильно AR .

2) $A = \{\nu > 1: \nu \text{ нечетно}\}$. Для этого случая подходит каждая из моделей 1 и 5. В самом деле, пусть (M, E) – любая из них. Она удовлетворяет $\neg AR$, поэтому (в силу утверждения 2) леммы 15) формулы $\varsigma(S_\nu)$ выполняются в ней для всех нечетных $\nu > 1$. И, так как в (M_1, E_1) очевидным образом выполняются $\neg \varsigma(S_\nu)$ для всех четных ν , они также выполняются во всей модели (M, E) в силу следствия 7.

3) $A = \{\nu > 1: \nu \text{ нечетно или } \nu \geq \mu\}$ для некоторого μ не более чем счетной конфинальности. В силу утверждений 1) и 2) леммы 15 мы можем считать, что μ – четный ординал ≥ 2 . Фиксируем такие классы $C = \{c_\alpha: \alpha \in On\}$ и $U = \{u_n: n < \omega\}$ (оба пересчета без повторений), что $C \cup U$ состоит из транзитивных попарно $\in$ -несравнимых множеств (это возможно; см. замечание 15). Сначала мы определяем отношение R на C , полагая для всех $\alpha \in On$ и всех v

$$vRc_{\alpha+1} \leftrightarrow v = c_\alpha,$$

$$vRc_\alpha \leftrightarrow (\exists \beta < \alpha) v = c_{2\beta+1}, \text{ если } \alpha \text{ предельен.}$$

(Таким образом, c_α моделирует множество o_α . Если использовать вариант конструкции, описанный в замечании 16, можно взять сами множества o_α .) Теперь мы построим для каждого четного $\mu \geq 2$ конфинальности $\text{cf } \mu \leq \omega$ такой начальный слой $(M_0(\mu), E_0(\mu))$, что получающаяся из него модель $(M(\mu), E(\mu))$

будет искомой. Рассмотрим подслучаи с неперелыным и перелыным μ по отелыности.

За) cf $\mu = 1$. Пусть $\mu = 2\gamma + 2$ для некоторого γ .

Модель 6 (с параметром μ). Пусть

$$M_0(\mu) = \{u_0\} \cup \{c_\alpha : \alpha \leq 2\gamma\}, \quad E_0(\mu) = \{(u_0, u_0), (c_{2\gamma}, u_0)\} \cup R$$

(рис. 21). (Таким образом, u_0 моделирует множество вида $y = \{o_{2\gamma}, y\}$. Очевидно, любое такое y принадлежит $S_{2\gamma+1}$.) Рассмотрим получающуюся модель $(M(\mu), E(\mu))$. Опять, так как ее начальный уровень удовлетворяет (i)–(iv), имеем $(M(\mu), E(\mu)) \models \text{ZFC}^-$. Кроме того, в ней выполняется следующее:

- (a) $\varsigma(S_\nu)$, если ν – нечетный ординал > 1 ;
- (b) $\varsigma(S_\nu)$, если $\nu \geq \mu$;
- (c) $\neg \varsigma(S_\nu)$, если ν – четный ординал $< \mu$.

Мы рассуждаем внутри модели. Чтобы показать (a), заметим, что c_α – это o_α , а u_0 имеет вид $u_0 = \{o_{2\gamma}, u_0\}$ (это остается верным во всей модели, так как она является концевым расширением своего нижнего слоя). В частности, модель удовлетворяет $\neg \text{AR}$ и, значит (в силу утверждения 2) леммы 15), $\varsigma(S_\nu)$ выполняется для всех нечетных $\nu > 1$. Чтобы показать (b), рассмотрим синглетон $\{u_0\}$. Он принадлежит S_μ и пересекается со своим единственным элементом u_0 . Следовательно, $\varsigma(S_\mu)$ выполнено; значит (в силу утверждения 3) леммы 15), $\varsigma(S_\nu)$ выполняется для всех $\nu \geq \mu$. Наконец, проверим (c). Заметим, что (c) – это в точности $\neg \varsigma(W_{2\gamma})$. В силу следствия 7 слой $(M_1(\mu), E_1(\mu))$ отражает эту формулу над всей моделью $(M(\mu), E(\mu))$. Следовательно, достаточно показать, что если некоторый элемент v из M_1 непуст и не имеет $\in$ -минимальных элементов, то $w(v) \geq \mu$. Непосредственная проверка показывает, что в действительности такой v имеет $w(v) = \mu$. В самом деле, v должен иметь элемент u_0 (поскольку все прочие элементы из M_0 фундированны). Но $w(u_0) = 2\gamma + 1$, откуда $w(v) = 2\gamma + 2 = \mu$ (так как v непусто и четно-выигрышно, имеем $w(v) = \sup\{w(u) + 1 : u \in v\}$ в силу следствия 1). Итак, (c) проверено.

(Заметим, что модель 2 – частный случай модели 6: в ней $\mu = 2$.)

Модель 6

Рис. 21

3b) cf $\mu = \omega$. Пусть $\mu = \sup_n \gamma_n$ для некоторых $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots$ ($n < \omega$). В следующей модели начальный уровень будет иметь чуть более запутанное строение, но все рассуждения по существу такие же.

Модель 7 (с параметром μ). Положим

$$M_0(\mu) = \{u_n : n < \omega\} \cup \{c_\alpha : \alpha < \mu\},$$

$$E_0(\mu) = \{(u_{n+1}, u_n) : n < \omega\} \cup \{(c_{2\gamma_n}, u_n) : n < \omega\} \cup R$$

и рассмотрим получающуюся модель $(M(\mu), E(\mu))$ (рис. 22). Как и раньше, это модель теории $\text{ZFC}^- + \neg \text{AR}$; более того, она обладает теми же свойствами (a)–(c).

Рис. 22

Мы рассуждаем внутри модели. Мы видим, что $u_n = \{u_{n+1}, o_{2\gamma_n}\}$; таким образом, множества u_n образуют бесконечную $\in$ -убывающую последовательность. Ясно, что $u_n \in S_{2\gamma_{n+1}}$. Мы получаем: множество $\{u_n : n < \omega\}$ не имеет $\in$ -минимальных элементов и принадлежит S_μ (так как $\mu = \sup_{n < \omega} (2\gamma_n + 1 + 1)$). Таким образом, $\varsigma(S_\mu)$ выполняется, и, значит (в силу утверждений 2) и 3) леммы 15), $\varsigma(S_\nu)$ выполняются для всех нечетных $\nu > 1$ и всех $\nu \geq \mu$. Итак, (a) и (b) проверены. Проверим (c). В этой ситуации (c) равносильно $\neg \varsigma(W_{2\gamma})$ для всех $\gamma < \mu$. По следствию 7 слой $(M_1(\mu), E_1(\mu))$ отражает все эти формулы над $(M(\mu), E(\mu))$. Следовательно, достаточно показать, что если некоторый элемент v из M_1 непуст и не имеет $\in$ -минимальных элементов, то $w(v) \geq \mu$. В действительности тогда $w(v) = \mu$. В самом деле, такой v должен иметь вид $v = \{u_n : n \geq t\}$ для некоторого t : любой элемент из M_1 состоит из некоторых o_ν и u_n ; но v не имеет фундированных элементов (иначе какой-то из них был бы минимальным), и если u_n принадлежит v , то и u_{n+1} принадлежит v (иначе u_n был бы минимальным). Но тогда $w(v) = \mu$ (так как v непусто и четновыигрышно, имеем $w(v) = \sup\{w(u_n) + 1 : n \geq t\} = \sup_{n \geq t} (2\gamma_n + 1 + 1) = \mu$). Итак, (c) проверено.

Доказательство теоремы 6 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Доказательства утверждений 1)–3) леммы 15 и достаточности в теореме 6 не используют АС. (Чтобы получить модель, удовлетворяющую АС, достаточно работать в основной модели, удовлетворяющей АС

вместо V .) Мне неизвестно, может ли утверждение 4) леммы 15 быть доказано без AC, т. е. совместимо ли с ZF^- то, что ординал $\mu = \min\{\gamma: \varsigma(S_{2\gamma})\}$ имеет несчетную кофинальность. (С другой стороны, вспомним, что с ZF совместимо (относительно определенных больших кардиналов) то, что все ординалы имеют не более чем счетную кофинальность; см. [24].)

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Мне неизвестно, верно ли следующее утверждение (хотя бы в предположении AC): если ординал $\mu = \min\{\gamma: \varsigma(S_{2\gamma})\}$ предель, то существует $\in$ -убывающая последовательность попарно различных элементов (и, более того, тогда такая последовательность найдется в транзитивном замыкании каждого множества без $\in$ -минимальных элементов). Отметим, что, хотя $\in$ -убывающие последовательности, порожденные обычным путем множествами с кручением, являются периодическими (и, значит, не состоят из попарно различных элементов), предположение “существует $\in$ -убывающая последовательность попарно различных элементов” совместимо с предположением “не существует свободных от кручения множеств без $\in$ -минимальных элементов” (модели легко строятся описанным здесь способом). Возможно, доказательство этого утверждения похоже на доказательство утверждения 4) леммы 15; стоило бы попытаться сначала доказать это для случая $\mu = \omega$ с помощью AC.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Покажем, что наши результаты о непротиворечивости остаются в силе при различных предположениях (не прибавляющих новых вымышленных множеств).

Рис. 23

Обсудим вначале предположение “не существует множеств с кручением”. Доказывая результаты о непротиворечивости, мы использовали модели, содержащие множества с кручением; на самом деле все наши модели, за исключением модели 7, содержали множества с кручением (вида $y = \{y\}$ в модели 1,

$y = \{0, y\}$ в модели 2 и т. д.). Мы делали это только для простоты, желая минимизировать размер начальных уровней (M_0, E_0) . На самом деле, все результаты остаются в силе в теории ZF^- + “не существует множеств с кручением”. Чтобы показать это, будем строить модели следующим образом: для данной модели развернем изображение ее нижнего слоя (M_0, E_0) в свободное от кручения предмножество (M'_0, E'_0) и затем построим новую модель описанным выше способом (нужно проверить, что условия (i)–(iv) сохраняются). Так как получающиеся предмножества эквивалентны исходным относительно некоторой бисимуляции, они сохраняют их свойства выигрышности. (В самом деле, если s эквивалентно t , то $w(s) = w(t)$; мы докажем это в следующей работе.) После этой процедуры модели 1–3 преобразуются в модели 8–10, модели 4 и 5 – в 11а и 12а, модель 6 – в 13 (мы опускаем точное описание начальных уровней; его легко восстановить из этих изображений; рис. 23). Эти модели имеют в точности те же свойства выигрышности, а именно:

$$\begin{aligned}
 \text{модель 8} &\models V \neq W \neq HW = V_\infty \wedge \text{AR}^W \wedge \text{AR}^{HW}, \\
 \text{модель 9} &\models V = W = HW \neq V_\infty \wedge \neg \text{AR}^W \wedge \neg \text{AR}^{HW}, \\
 \text{модель 10} &\models V \neq W \neq HW \neq V_\infty \wedge \neg \text{AR}^W \wedge \neg \text{AR}^{HW}, \\
 \text{модель 11а} &\models V \neq W \neq HW = V_\infty \wedge \neg \text{AR}^W \wedge \text{AR}^{HW}, \\
 \text{модель 12а} &\models \neg \text{AR}^W \wedge \neg \varsigma(W_{\text{II}}), \\
 \text{модель 13}(\mu) &\models \min\{\gamma: \varsigma(S_{2\gamma})\} = \mu.
 \end{aligned}$$

Более того, легко понять, что модели 11а и 12а можно упростить следующим образом (рис. 24). Модели 11 и 12 удовлетворяют тем же свойствам выигрышности, что и модели 11а и 12а соответственно.

Рис. 24

Теперь обсудим, что получается в присутствии аксиомы “сильной экстенсинальности” AFA_2 , т. е. предположения “сильно экстенсинальные множества равны”. Легко проверить, что начальные уровни в моделях 1–7 устойчивы относительно бисимуляций (и, значит, могут быть только точными рисунками). Следовательно, получающиеся модели удовлетворяют AFA_2 (см. замечание 18). В моделях 8–12 эта аксиома, очевидно, нарушается. Более того, понятно, что предмножество, порожденное развертыванием любого предмножества,

имеет $\in$ -изоморфные финальные отрезки и подавно не является сильно экстенсionalmente. Тем не менее, наши результаты остаются в силе даже в теории $\text{ZF}^- + \text{AFA}_2 +$ “не существует множеств с кручением”. Чтобы показать это, изобретем своего рода “непериодичное развертывание”. Прием состоит примерно в следующем: возьмем какую-нибудь строго возрастающую последовательность $f: \omega \rightarrow \omega$, которая ни с какого $n \in \omega$ не является арифметической прогрессией; затем, развертывая x , вместо $x_0, x_1, \dots$ с идентичной структурой будем брать только $x_{f(0)}, x_{f(1)}, \dots$, делая тем самым непериодичными все финальные отрезки получающихся предмножеств; эти предмножества сохраняют исходные свойства выигрышности, но оказываются сильно экстенсionalmente. (Точные определения и доказательства мы приведем в следующей работе.) Например, полагая $f(n) = \sum_{k \leq n} k$, мы получаем следующие модели 14–19 (рис. 25). Легко проверить, что они имеют в точности те же свойства выигрышности, что и

Рис. 25

модели 1–6 (или 8–13) соответственно, и что все они свободны от кручения и устойчивы относительно бисимуляций.

Строя подходящие начальные слои моделей, можно проверить также, что наши результаты о непротиворечивости остаются в силе при каждом из следующих предположений: “существуют наследственно невыигрышные множества любой структуры”, “не существует множеств с кручением и существуют наследственно невыигрышные множества любой структуры”, “все множества свободны от кручения и сильно экстенциональны, причем существуют наследственно невыигрышные множества любой свободной от кручения сильно экстенциональной структуры” или “любое множество без $\in$ -минимальных элементов имеет мощность, большую мощности $|x|$ ” для любого заданного наперед множества x .

Наблюдая в свете полученных результатов различие между нечетно- и четно-выигрышными множествами без $\in$ -минимальных элементов, мы видим, что ситуация с четно-выигрышными множествами выглядит более запутанной, чем с нечетно-выигрышными. Нарушение аксиомы регулярности немедленно дает нечетно-выигрышные множества без $\in$ -минимальных элементов, более того, оно дает такие множества на всех нечетных уровнях выигрышной иерархии; чтобы получить модель с такими множествами, достаточно взять начальный слой с весьма простой структурой (как в модели 1). В противоположность этому, отрицание аксиомы регулярности совместимо как с отсутствием четно-выигрышных множеств без $\in$ -минимальных элементов, так и с существованием таких множеств на всех уровнях, начиная с какого-нибудь уровня не более чем счетной конфинальности; начальные уровни таких моделей устроены более сложно (как в моделях 6 и 7). В согласии с прежним наблюдением, при котором мы обнаружили, что четно-выигрышные множества – более редкие объекты, наше новое наблюдение показывает, что они также более сложные и причудливые.

Список литературы

1. Д. И. Савельев, “Сообщение об игре на универсуме множеств”, *Матем. заметки*, **81**:5 (2007), 797–800; англ. пер.: D. I. Saveliev, “A report on a game on the universe of sets”, *Math. Notes*, **81**:5–6 (2007), 716–719; [arXiv: math.LO/0612636](#).
2. A. Lévy, *Basic set theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
3. T. Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
4. Дж. Р. Шёнфилд, “Аксиомы теории множеств”, *Справочная книга по математической логике*, в 4-х т., т. II, *Теория множеств*, Наука, М., 1982, 9–34; пер. с англ.: J. R. Shoenfield, “The axioms of set theory”, *Handbook of mathematical logic*, Part B, *Set theory*, Studies in Logic and Foundations of Math., **90**, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam, 1977.
5. G. Boolos, “The iterative conception of set”, *Philosophy*, **68**:8 (1971), 215–231.
6. P. Maddy, “Believing the axioms. I, II”, *J. Symbolic Logic*, **53**:2 (1988), 481–511; **53**:3 (1988), 736–764.
7. D. I. Saveliev, *Choice and regularity: common consequences in logic*, [arXiv: 0709.2979](#).
8. E. Zermelo, “Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre”, *Fund. Math.*, **16** (1930), 29–47.

9. E. Mendelson, "The axiom of Fundierung and the axiom of choice", *Arch. Math. Logic*, **4**:3–4 (1958), 65–70.
10. L. Rieger, "A contribution to Gödel's axiomatic set theory. I", *Czechoslovak Math. J.*, **7**(82) (1957), 323–357.
11. P. Aczel, *Non-well-founded sets*, CSLI Lecture Notes, **14**, Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 1988.
12. G. d'Agostino, *Modal logic and non-well-founded set theory: translation, bisimulation, interpolation*, Dissertation Series, **4**, Institute for Logic, Language, and Computation, Amsterdam, 1998.
13. M. Forti, F. Honsell, "Set theory with free construction principles", *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (4), **10**:3 (1983), 493–522.
14. J. Barwise, L. Moss, *Vicious circle. On the mathematics of non-wellfounded phenomena*, CSLI Lecture Notes, **60**, Center for the Study of Language and Informations, Stanford, CA, 1996.
15. A. Rieger, "An argument for Finsler–Aczel set theory", *Mind*, **109**:434 (2000), 241–253.
16. M. V. Marshall, M. G. Schwarze, "Rank in set theory without foundation", *Arch. Math. Logic*, **38**:6 (1999), 387–393.
17. D. I. Saveliev, *A note on singular cardinals in set theory without choice*, [arXiv:0709.2436](https://arxiv.org/abs/0709.2436).
18. D. Mirimanoff, "Les antinomies de *Russell* et de *Burali-Forti* et le problème fondamental de la théorie des ensembles", *Enseign. Math.*, **19** (1917), 37–52.
19. D. Mirimanoff, "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies *cantor*iennes. I", *Enseign. Math.*, **19** (1917), 209–217.
20. T. E. Forster, *Set theory with a universal set. Exploring an untyped universe*, Oxford Logic Guides, **31**, The Clarendon Press, London; Oxford University Press, New York, 1995.
21. E. Zermelo, "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proc. 5th Intern. Congress of Math.* (Cambridge, 1912), **2**, Cambridge University Press, Cambridge, 1913, 501–504.
22. Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Легонький, В. А. Таланов, *Кибернетика*, **5**:2 (1969), 17–27; англ. пер.: Yu. V. Glebskii, D. I. Kogan, M. I. Liogon'kii, V. A. Talanov, "Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus", *Cybernetics and Systems Analysis*, **5**:2 (1969), 142–154.
23. A. Blass, Y. Gurevich, *Strong extension axioms and Shelah's zero-one law for choiceless polynomial time*, MSR-TR-2001-68, 1–96.
24. M. Gitik, "All uncountable cardinals can be singular", *Israel J. Math.*, **35**:1–2 (1980), 61–88.

Д. И. САВЕЛЬЕВ (D. I. SAVELIEV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: denissaveliev@mail.ru

saveliev@mccme.ru

Поступило в редакцию

20.12.2006