Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Совместная универсальность периодических дзета-функций Гурвица, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 4, 121–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:52:41

УДК 511.33

А. Лауринчикас

Совместная универсальность периодических дзета-функций Гурвица

Получена совместная теорема универсальности типа теоремы Воронина для системы периодических дзета-функций Гурвица с такими параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, что система $\{\log(m + \alpha_j) : j = 1, \dots, r, m \in \mathbb{N}_0\}$ линейно независима над полем рациональных чисел.

Библиография: 26 наименований.

§ 1. Введение

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ будем обозначать множества соответственно всех целых положительных, целых неотрицательных, целых, действительных и комплексных чисел. Пусть $\mathfrak{A} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$, – фиксированный параметр. Периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$, $s = \sigma + it$, при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Легко видеть, что ввиду периодичности последовательности $\mathfrak{A}$ имеем при $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=0}^{k-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{k}\right), \quad (1)$$

где $\zeta(s, \beta)$, $0 < \beta \leq 1$, – классическая дзета-функция Гурвица, в полуплоскости $\sigma > 1$ определяемая рядом

$$\zeta(s, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \beta)^s}.$$

Так как функция $\zeta(s, \beta)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость, где имеет простой полюс $s = 1$ с $\text{Res}_{s=1} \zeta(s, \beta) = 1$, из равенства (1) вытекает, что функция $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$ также имеет аналитическое или мероморфное продолжение на всю плоскость. Если

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a_l = 0,$$

то функция $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$ является целой, в противном случае точка $s = 1$ является ее простым полюсом с вычетом a .

Ясно, что при $\mathfrak{A} = \{a_m \equiv 1\}$ функция $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$ становится дзета-функцией Гурвица $\zeta(s, \alpha)$.

В работах [1] и [2] рассматривалась универсальность в смысле Воронина функции $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$. Через $\text{meas}\{A\}$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ и при $T > 0$ положим

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T], \dots\},$$

где вместо многоточия записывается условие, которому удовлетворяет τ . Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Предположим, что α – трансцендентное число. Пусть K – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f(s)$ – непрерывная в K и аналитическая внутри K функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Отметим, что С. М. Воронин открыл универсальность дзета-функции Римана $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$. При $0 < r < 1/4$ и для функции $f(s)$, аналитической внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывной вплоть до границы круга, он доказал в [3], [4] (см. также [5], [6]), что если $f(s)$ не имеет нулей внутри круга $|s| \leq r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число $\tau = \tau(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} |\zeta(s + 3/4 + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

Позднее теорема Воронина была незначительно усилена и обобщена для других дзета- и L -функций. Последний вариант теоремы Воронина приведен в [7, теорема 6.5.2] (см. также [8], [9]).

С. М. Воронин доказал в [10] (см. также [5], [6]) первую совместную теорему универсальности для L -функций Дирихле. Теорема такого же типа позже была получена С. М. Gonekom [11] и Б. Багчи [12], [13]. Статьи [14]–[16] посвящены совместной универсальности периодических дзета-функций Гурвица. Пусть $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и для $j = 1, \dots, r$

$$\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{A}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj}}{(m + \alpha_j)^s}, \quad \sigma > 1,$$

где $\mathfrak{A}_j = \{a_{mj} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел и $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_j \leq 1$. В работе [14] рассматривался случай $k_j = k$ и $\alpha_j = \alpha$, $j = 1, \dots, r$, а в [15] требование $k_j = k$, $j = 1, \dots, n$, было устранено. Самый общий результат содержится в [16]. Пусть k – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_r$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2 [16]. *Предположим, что $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – алгебраически независимые числа над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\text{rank}(A) = r$. Для каждого*

$j = 1, \dots, r$ пусть K_j – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f_j(s)$ – непрерывная в K_j и аналитическая внутри K_j функция. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{A}_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Целью настоящей статьи является обобщение теоремы 2. Пусть l_j – положительное целое для каждого $j = 1, \dots, r$, кроме того, для каждого $l = 1, \dots, l_j$ пусть $\mathfrak{A}_{jl} = \{a_{mjl} : m \in \mathbb{N}_0\}$ – периодическая с минимальным периодом $k_{jl} \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_j \leq 1$, и при $\sigma > 1$

$$\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}}{(m + \alpha_j)^s}.$$

Для краткости положим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ и $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{11}, \dots, \mathfrak{A}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{A}_{r1}, \dots, \mathfrak{A}_{rl_r})$. Мы будем рассматривать распределение значений вектора

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A}) = (\zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{A}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{A}_{1l_1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{A}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r; \mathfrak{A}_{rl_r})).$$

Пусть $k = (k_{11}, \dots, k_{1l_1}, \dots, k_{r1}, \dots, k_{rl_r})$ – наименьшее общее кратное и

$$B = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11l_1} & a_{122} & \dots & a_{12l_2} & \dots & a_{1r1} & a_{1r2} & \dots & a_{1rl_r} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21l_1} & a_{222} & \dots & a_{22l_2} & \dots & a_{2r1} & a_{2r2} & \dots & a_{2rl_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k11} & a_{k12} & \dots & a_{k1l_1} & a_{k22} & \dots & a_{k2l_2} & \dots & a_{kr1} & a_{kr2} & \dots & a_{krl_r} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, пусть

$$\kappa = \sum_{j=1}^r l_j,$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \{\log(m + \alpha_j) : j = 1, \dots, r, m \in \mathbb{N}_0\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что система чисел $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$ и $\text{rank}(B) = \kappa$. Пусть K_{jl} – компактное подмножество полосы D , обладающее связным дополнением, а $f_{jl}(s)$ – непрерывная в K_{jl} и аналитическая внутри K_{jl} функция, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Доказательство теоремы 3 основано на совместной предельной теореме в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций, при этом существенно используется линейная независимость системы $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Отметим, что условие линейной независимости системы $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ выполняется, если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. При $r = 1$ достаточно потребовать трансцендентность числа α_1 .

§ 2. Предельная теорема

Пусть $H(D)$ – пространство аналитических в D функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах. Положим

$$H^\kappa(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_\kappa.$$

Кроме того, определим

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

где $\gamma_m = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Ввиду теоремы Тихонова бесконечномерный тор Ω является компактной топологической абелевой группой. Через $\mathcal{B}(S)$ обозначим класс борелевских множеств пространства S . Тогда на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ существует вероятностная мера Хаара m_H , и мы получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Пусть

$$\Omega^r = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

где $\Omega_j = \Omega$ для всех $j = 1, \dots, r$. Также по теореме Тихонова имеем, что Ω^r – компактная топологическая абелева группа. Это приводит к новому вероятностному пространству $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_{H^r})$, где m_{H^r} – вероятностная мера Хаара на $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$. Через $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ обозначим элементы группы Ω^r и на вероятностном пространстве $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_{H^r})$ определим $H^\kappa(D)$ -значный случайный элемент

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) = & (\zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{A}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{A}_{1l_1}), \dots \\ & \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{A}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{A}_{rl_r})), \end{aligned}$$

где

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{A}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} \omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j,$$

а $\omega_j(m)$ является проекцией элемента $\omega_j \in \Omega_j$, $j = 1, \dots, r$, на координатное пространство γ_m , $m \in \mathbb{N}_0$. Через P_ζ обозначим распределение случайного элемента $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A})$, т. е.

$$P_\zeta(A) = m_{H^r}(\omega \in \Omega^r : \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^\kappa(D)).$$

В этом параграфе мы будем рассматривать слабую сходимость вероятностной меры

$$P_T(A) = \nu_T(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^\kappa(D)),$$

при $T \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере P_ζ .*

Сначала докажем предельную теорему на торе Ω^r . Определим

$$\begin{aligned} Q_T(A) = \nu_T(& (((m + \alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)) \in A), \\ & A \in \mathcal{B}(\Omega^r). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда вероятностная мера Q_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере Хаара m_{H_r} на $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дуальной группой группы Ω^r является

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j=1}^r \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m,j},$$

где $\mathbb{Z}_{m,j} = \mathbb{Z}$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$. Элемент $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = (k_{01}, k_{11}, \dots, k_{0r}, k_{1r}, \dots) \in \mathcal{D}$, где только конечное количество целых чисел k_{mj} , $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$, отлично от нуля, действует на Ω^r по формуле

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r) \rightarrow (\mathbf{x}_1^{\mathbf{k}_1}, \dots, \mathbf{x}_r^{\mathbf{k}_r}) = \prod_{j=1}^r \prod_{m=0}^{\infty} x_{mj}^{k_{mj}},$$

$$\mathbf{x}_j = (x_{0j}, x_{1j}, \dots), \quad x_{mj} \in \gamma, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Поэтому преобразование Фурье $g_{T,r}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r)$ меры $Q_{T,r}$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_{T,r}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) &= \int_{\Omega^r} \prod_{j=1}^r \prod_{m=0}^{\infty} x_{mj}^{k_{mj}} dQ_{T,r} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{j=1}^r \prod_{m=0}^{\infty} e^{-i\tau k_{mj} \log(m+\alpha_j)} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left\{ -i\tau \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m+\alpha_j) \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$, отсюда находим, что

$$g_{T,r}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), \\ \frac{\exp \left\{ -iT \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m+\alpha_j) \right\} - 1}{-iT \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m+\alpha_j)}, & \\ \text{если } (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_{T,r}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), \\ 0, & \text{если } (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}). \end{cases}$$

Отсюда и из общих теорем непрерывности для вероятностных мер на локально компактных группах (см., например, [17, теорема 1.4.2]) вытекает, что мера $Q_{T,r}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере Хаара m_{H_r} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ не является линейно независимой над полем $\mathbb{Q}$, то мера $Q_{T,r}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере, определяемой преобразованием Фурье

$$g_r(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m+\alpha_j) = 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m+\alpha_j) \neq 0. \end{cases}$$

Однако в этом случае предельная мера не является мерой Хаара m_{Hr} , не является инвариантной и поэтому не пригодна для доказательства теоремы 4.

Докажем предельную теорему для вектора, компонентами которого являются абсолютно сходящиеся ряды.

Пусть при $\sigma_1 > 1/2$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$ имеем

$$v_n(m, \alpha) = \exp \left\{ - \left(\frac{m + \alpha}{n + \alpha} \right)^{\sigma_1} \right\},$$

$$l_n(s, \alpha) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma \left(\frac{s}{\sigma_1} \right) (n + \alpha)^s.$$

При $\sigma > 1/2$ определим

$$\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \zeta(s + z, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) l_n(z, \alpha_j) \frac{dz}{z},$$

$$j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

Кроме того, пусть

$$k_n(m, \alpha_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} l_n(z, \alpha_j) \frac{dz}{(m + \alpha_j)^z z}.$$

Тогда

$$k_n(m, \alpha_j) \ll (m + \alpha_j)^{-\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_1 + it, \alpha_j)| dt \ll_n (m + \alpha_j)^{-\sigma_1}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} k_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}$$

при $\sigma > 1/2$ абсолютно сходится, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Отсюда, учитывая представление

$$\zeta(s + z, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}}{(m + \alpha_j)^{s+z}}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl}}{(m + \alpha_j)^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} l_n(z, \alpha_j) \frac{dz}{(m + \alpha_j)^z z} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} k_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}, \end{aligned}$$

причем ряд сходится абсолютно при $\sigma > 1/2$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Кроме того, формула Меллина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) b^{-z} dz = e^{-b}, \quad b, c > 0,$$

показывает, что

$$k_n(m, \alpha_j) = v_n(m, \alpha_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда вытекает, что функция $\zeta_n(s, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl})$ при $\sigma > 1/2$ определяется абсолютно сходящимся рядом Дирихле

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} v_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

Очевидно, что ряд

$$\zeta_n(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{A}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mjl} \omega_j(m) v_n(m, \alpha_j)}{(m + \alpha_j)^s}$$

также абсолютно сходится при $\sigma > 1/2$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$.

Пусть для краткости

$$\begin{aligned} \zeta_n(s, \alpha; \mathfrak{A}) &= (\zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{A}_{11}), \dots \\ &\quad \dots, \zeta_n(s, \alpha_1; \mathfrak{A}_{1l_1}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{A}_{r1}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_r; \mathfrak{A}_{rl_r})), \\ \zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) &= (\zeta_n(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{A}_{11}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{A}_{1l_1}), \dots \\ &\quad \dots, \zeta_n(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{A}_{r1}), \dots, \zeta_n(s, \alpha_r, \omega_r; \mathfrak{A}_{rl_r})). \end{aligned}$$

На пространстве $(H^\kappa(D), \mathcal{B}(H^\kappa(D)))$ определим две вероятностные меры

$$\begin{aligned} P_{T,n}(A) &= \nu_T(\zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) \in A), \\ \widehat{P}_{T,n}(A) &= \nu_T(\zeta_n(s + i\tau, \alpha, \widehat{\omega}; \mathfrak{A}) \in A), \end{aligned}$$

где $\widehat{\omega} \in \Omega^r$.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда обе вероятностные меры $P_{T,n}$ и $\widehat{P}_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходятся к одной и той же вероятностной мере на $(H^\kappa(D), \mathcal{B}(H^\kappa(D)))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приводим новое короткое доказательство, отличающееся, например, от доказательства аналогичного утверждения в [18] и [19]. Пусть функция $h_n: \Omega^r \rightarrow H^\kappa(D)$ определена формулой

$$h_n(\omega) = \zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}), \quad \omega \in \Omega^r.$$

Тогда функция h_n непрерывна и

$$h_n(((m + \alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0))) = \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}).$$

Следовательно, $P_{T,n} = Q_T h_n^{-1}$, и лемма 1 вместе с теоремой 5.1 из [20] показывает, что мера $P_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $m_{H^r} h_n^{-1}$.

Теперь определим функцию $h: \Omega^r \rightarrow \Omega^r$ формулой $h(\omega) = \omega \widehat{\omega}$, $\omega \in \Omega^r$. Тогда имеем

$$h_n(h(((m + \alpha_1)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0), \dots, ((m + \alpha_r)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0)))) = \zeta_n(s + i\tau, \alpha, \widehat{\omega}; \mathfrak{A}).$$

Поэтому, рассуждая аналогично случаю меры $P_{T,n}$, отсюда получаем, что мера $\widehat{P}_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $m_{H^r}(h_n(h))^{-1} = (m_{H^r} h^{-1}) h_n^{-1} = m_{H^r} h_n^{-1}$ в силу инвариантности меры Хаара m_{H^r} . Теорема доказана.

Далее мы будем заниматься приближением в среднем функции $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{A})$ функцией $\zeta_n(s, \alpha; \mathfrak{A})$. Для этой цели нам нужна метрика в пространстве $H^\kappa(D)$.

Пусть $\{K_m : m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность компактных подмножеств области D такая, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = D,$$

$K_m \subset K_{m+1}$, и для всякого компакта $K \subset D$ существует m такое, что $K \subseteq K_m$. Существование такой последовательности доказано, например, в [21]. Теперь, полагая

$$\rho(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\sup_{s \in K_m} |f(s) - g(s)|}{1 + \sup_{s \in K_m} |f(s) - g(s)|}, \quad f, g \in H(D),$$

имеем, что ρ является метрикой в пространстве $H(D)$, индуцирующей его топологию. Пусть $\mathbf{f} = (f_{11}, \dots, f_{1l_1}, \dots, f_{r1}, \dots, f_{rl_r})$, $\mathbf{g} = (g_{11}, \dots, g_{1l_1}, \dots, g_{r1}, \dots, g_{rl_r}) \in H^\kappa(D)$. Тогда

$$\rho_\kappa(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \max_{1 \leq j \leq r} \max_{1 \leq l \leq l_j} \rho(f_{jl}, g_{jl})$$

является метрикой в $H^\kappa(D)$.

ЛЕММА 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_\kappa(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}), \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})) d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1/2 < \sigma < 1$. Тогда для дзета-функции Гурвица $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, имеет место оценка (см. [22, теорема 3.3.1])

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha)|^2 dt = O_{\alpha, \sigma}(T).$$

Отсюда и из равенства (1) следует, что

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha; \mathfrak{A})|^2 dt = O_{\alpha, \mathfrak{A}, \sigma}(T). \quad (2)$$

Пусть K – компактное подмножество полосы D . Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| d\tau = 0, \quad (3)$$

где при $\sigma > 1/2$

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathfrak{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}.$$

Передвинем прямую интегрирования в определении функции

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathfrak{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \zeta(s + z, \alpha; \mathfrak{A}) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z}.$$

Подынтегральная функция имеет простой полюс в точке $z = 0$ и возможный простой полюс (если $a \neq 0$) в точке $z = 1 - s$.

Положим $1/2 + \eta_1 = \min\{\sigma : s \in K\}$ и $1 - \eta_2 = \max\{\sigma : s \in K\}$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, и пусть $\sigma_2 = 1/2 + \eta_1/2$. Тогда по теореме о вычетах имеем

$$\zeta_n(s, \alpha; \mathfrak{A}) = \zeta(s, \alpha; \mathfrak{A}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \sigma - i\infty}^{\sigma_2 - \sigma + i\infty} \zeta(s+z, \alpha; \mathfrak{A}) l_n(z, \alpha) \frac{dz}{z} + \frac{al_n(1-s, \alpha)}{1-s}. \quad (4)$$

Пусть L – простой замкнутый контур, лежащий в полосе D и окаймляющий множество K . Тогда по интегральной теореме Коши

$$\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \int_L |\zeta(z + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(z + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| |dz|,$$

где δ – расстояние от контура L до множества K . Обозначая через $|L|$ длину контура L , для достаточно больших T отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| d\tau \\ & \ll \frac{1}{T\delta} \int_L |dz| \int_{\text{Im } z}^{T + \text{Im } z} |\zeta(\text{Re } z + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(\text{Re } z + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| d\tau \\ & \ll \frac{|L|}{T\delta} \sup_{\hat{\sigma}} \int_0^{2T} |\zeta(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A})| dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\hat{\sigma}$ – действительная часть $s \in L$.

Выберем контур L так, чтобы выполнялись равенства $\min\{\hat{\sigma}\} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta_1$, $\max\{\hat{\sigma}\} = 1 - \frac{3}{4}\eta_2$ и $\delta = \min(\eta_1/4, \eta_2/4)$. В силу (4) имеем

$$\begin{aligned} & \zeta(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A}) \\ & \ll \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta(\sigma_2 + it + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| |l_n(\sigma_2 - \hat{\sigma} + i\tau, \alpha)| d\tau + \frac{|a| |l_n(1-s, \alpha)|}{|1-s|}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^{2T} |\zeta(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(\hat{\sigma} + it, \alpha; \mathfrak{A})| dt \\ & \ll \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_2 - \hat{\sigma} + i\tau, \alpha)| \left(\frac{1}{T} \int_{\tau}^{2T+\tau} |\zeta(\sigma_2 + it, \alpha; \mathfrak{A})| dt \right) d\tau \\ & \quad + \frac{1}{T} \int_0^{2T} \frac{|l_n(1 - \hat{\sigma} - it, \alpha)|}{|1 - \hat{\sigma} - it|} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя неравенство Коши–Шварца и оценку (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{2T+\tau} |\zeta(\sigma_2 + it, \alpha; \mathfrak{A})| dt & \ll \left(\frac{1}{T} \int_{\tau}^{2T+\tau} |\zeta(\sigma_2 + it, \alpha; \mathfrak{A})|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \ll_{\alpha, \mathfrak{A}} \left(1 + \frac{|\tau|}{T} \right)^{1/2} \ll_{\alpha, \mathfrak{A}} (1 + |\tau|). \end{aligned}$$

Таким образом, отсюда и из (5), (6) имеем, что при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A})| d\tau \\ & \ll \sup_{\sigma \leq -\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma + it, \alpha)| (1 + |\tau|) d\tau + o(1). \end{aligned} \quad (7)$$

Однако по определению $l_n(s, \alpha)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \leq -\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma + it, \alpha)|(1 + |\tau|) d\tau = 0.$$

Это вместе с (7) доказывает соотношение (3).

Из (3) для $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}), \zeta_n(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl})) = 0.$$

Отсюда и из определения метрики ρ_κ получаем утверждение леммы.

Для того чтобы получить аналог леммы 2 для $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A})$ и $\zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A})$, нам понадобятся элементы эргодической теории. Ими будем также пользоваться и при завершении доказательства теоремы 4.

Положим $a_{\tau,j} = \{(m + \alpha_j)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r$, и определим на Ω^r семейство преобразований $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\} = \{\varphi_{\tau,1}, \dots, \varphi_{\tau,r} : \tau \in \mathbb{R}\}$, полагая $\varphi_{\tau,j}(\omega_j) = a_{\tau,j}\omega_j$, $\omega_j \in \Omega_j$, $j = 1, \dots, r$. Тогда $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа измеримых, сохраняющих меру преобразований на Ω^r . Напоминаем, что множество $A \in \mathcal{B}(\Omega^r)$ называется *инвариантным относительно группы* $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$, если для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ множества A и $A_\tau = \Phi_\tau(A)$ отличаются друг от друга самое большее на m_{H^r} -меру нуль. Другими словами, $m_{H^r}(A \Delta A_\tau) = 0$, где Δ обозначает симметрическую разность. Все инвариантные множества образуют σ -поле, являющееся σ -подполем σ -поля $\mathcal{B}(\Omega^r)$.

Однопараметрическая группа $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ *эргодична*, если ее σ -поле инвариантных множеств состоит только из множеств m_{H^r} -меры нуль или единица.

ЛЕММА 3. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда однопараметрическая группа $\{\Phi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ эргодична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi : \Omega^r \rightarrow \mathbb{C}$ является характером группы Ω^r . Как мы уже видели при доказательстве леммы 1,

$$\chi(\omega) = \prod_{j=1}^r \prod_{m=0}^{\infty} \omega_j^{k_{mj}}(m), \quad \omega \in \Omega^r,$$

где только конечное число целых чисел k_{mj} отлично от нуля. Пусть χ – нетривиальный характер. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(\{a_{\tau,1}, \dots, a_{\tau,r}\}) &= \prod_{j=1}^r \prod_{m=0}^{\infty} (m + \alpha_j)^{-i\tau k_{mj}} \\ &= \exp \left\{ -i\tau \sum_{j=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{mj} \log(m + \alpha_j) \right\}, \end{aligned}$$

где опять только конечное число целых чисел $k_{mj} \neq 0$. Поскольку система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$, то отсюда следует, что существует действительное число $\tau_0 \neq 0$ такое, что

$$\chi(\{a_{\tau_0,1}, \dots, a_{\tau_0,r}\}) \neq 1. \quad (8)$$

Пусть теперь A – инвариантное множество группы $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$. Мы должны показать, что $m_{H^r}(A) = 0$ или $m_{H^r}(A) = 1$. Пусть I_A – индикатор множества A . Так как A инвариантно, то

$$I_A(\Phi_\tau \omega) = I_A(\omega) \quad (9)$$

для каждого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$ и почти всех $\omega \in \Omega^r$ относительно меры m_{H^r} . Тогда преобразование Фурье $\hat{I}_A(\chi)$ в силу (9) и инвариантности меры m_{H^r} имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{I}_A(\chi) &= \int_{\Omega^r} \chi(\omega) I_A(\omega) m_{H^r}(d\omega) = \int_{\Omega^r} \chi(\Phi_{\tau_0} \omega) I_A(\Phi_{\tau_0} \omega) m_{H^r}(d\omega) \\ &= \chi(\Phi_{\tau_0}) \int_{\Omega^r} \chi(\omega) I_A(\omega) m_{H^r}(d\omega) = \chi(\Phi_{\tau_0}) \hat{I}_A(\chi). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (8) находим, что $\hat{I}_A(\chi) = 0$ для всех нетривиальных характеров χ группы Ω^r .

Если χ_0 – тривиальный характер группы Ω^r , то $\chi_0(\omega) = 1$ для всех $\omega \in \Omega^r$. Предположим, что $\hat{I}_A(\chi_0) = u$. Тогда, учитывая равенства

$$\int_{\Omega^r} \chi(\omega) m_{H^r}(d\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

$\hat{I}_A(\chi) = 0$ и $\hat{I}_A(\chi_0) = u$, получаем, что для всякого характера χ группы Ω^r

$$\hat{I}_A(\chi) = u \int_{\Omega^r} \chi(\omega) m_{H^r}(d\omega) = u \hat{1}(\chi) = \hat{u}(\chi).$$

Поскольку функция $I_A(\omega)$ однозначно определяется своим преобразованием Фурье, отсюда следует, что $I_A(\omega) = u$ для почти всех $\omega \in \Omega^r$. Однако $I_A(\omega)$ – индикатор множества A . Поэтому $u = 0$ или $u = 1$. Таким образом, $I_A(\omega) = 0$ или $I_A(\omega) = 1$ для почти всех $\omega \in \Omega^r$. Следовательно, $m_{H^r}(A) = 0$ или $m_{H^r}(A) = 1$. Лемма доказана.

Пусть $a_\tau = \{(m + \alpha)^{-i\tau} : m \in \mathbb{N}_0\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, и пусть функция $\varphi_\tau: \Omega \rightarrow \Omega$ определена формулой $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega$, $\omega \in \Omega$. Тогда $\{\varphi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа измеримых, сохраняющих меру преобразований на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что система $L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда из доказательства леммы 3 следует, что однопараметрическая группа $\{\varphi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ эргодична.

Мы еще напомним классическую теорему Биркгофа–Хинчина. Определение эргодического процесса и доказательство этой теоремы можно найти, например, в [23]. Через $E\mathbf{X}$ будем обозначать математическое ожидание случайного элемента X .

ЛЕММА 4. Пусть $\xi(t)$ – эргодический процесс такой, что $E|\xi(t)| < \infty$, и выборочные функции почти наверное интегрируемы по Риману на каждом конечном интервале. Тогда почти наверное

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = E\xi(0).$$

ЛЕММА 5. *Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega^r$ имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho_\kappa(\zeta(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A})) d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\sigma > 1/2$ и $\omega \in \Omega$ пусть

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{(m + \alpha)^s}, \\ \zeta_n(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v_n(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}. \end{aligned}$$

Предположим, что система $L(\alpha)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Как и в случае леммы 2, достаточно доказать, что для всякого компактного множества K полосы D и почти всех $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A})| d\tau = 0. \quad (10)$$

Для этого достаточно показать, что при $\sigma > 1/2$ для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место оценка

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it, \alpha, \omega; \mathfrak{A})|^2 dt \ll_{\alpha, \mathfrak{A}, \sigma} T. \quad (11)$$

При $\sigma > 1/2$ положим

$$\hat{\zeta}(\sigma, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{(m + \alpha)^\sigma} \right|^2.$$

Поскольку случайные величины $\omega(m), m \in \mathbb{N}_0$, попарно ортогональны, имеем

$$\mathbb{E} \hat{\zeta}(\sigma, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{(m + \alpha)^{2\sigma}}. \quad (12)$$

Кроме того, определение φ_τ показывает, что

$$\hat{\zeta}(\sigma, \alpha, \varphi_\tau(\omega); \mathfrak{A}) = |\zeta(\sigma + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A})|^2,$$

а в силу эргодичности однопараметрической группы $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ (см. замечание 2) процесс $|\zeta(\sigma + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A})|^2$ эргодичен. Следовательно, в силу леммы 4 и (12) для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A})|^2 d\tau = \mathbb{E} \hat{\zeta}(\sigma, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) < \infty.$$

Отсюда вытекает оценка (11). Дальнейшее доказательство леммы использует (11) и полностью совпадает с доказательством леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Сначала докажем, что обе вероятностные меры P_T и $\hat{P}_T$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходятся к одной и той же вероятностной мере P на $(H^\kappa(D), \mathcal{B}(H^\kappa(D)))$.

Пусть E – некоторое метрическое пространство, а $\mathcal{P} = \{P\}$ – семейство вероятностных мер на $(E, \mathcal{B}(E))$. Напоминаем, что семейство $\mathcal{P}$ называется *плотным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество K такое, что для всех $P \in \mathcal{P}$

$$P(K) > 1 - \varepsilon.$$

Семейство называется *относительно компактным*, если любая последовательность элементов из $\mathcal{P}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Теорема Прохорова (см. [20, теорема 6.1]) утверждает, что если семейство $\mathcal{P}$ плотно, то оно относительно компактно.

Через P_n обозначим предельную меру такую, как в теореме 5. Тогда применение стандартных аргументов позволяет показать, что семейство вероятностных мер $\{P_n: n \in \mathbb{N}\}$ является плотным. Отсюда по теореме Прохорова оно относительно компактно. Следовательно, существует подпоследовательность $\{P_{n_k}\} \subset \{P_n\}$ такая, что мера P_{n_k} при $k \rightarrow \infty$ слабо сходится к некоторой мере P на $(H^\kappa(D), \mathcal{B}(H^\kappa(D)))$. Пусть $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n(s)$ – это $H^\kappa(D)$ -значный случайный элемент с распределением P_n . Тогда имеем, что

$$X_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P, \quad (13)$$

где $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ означает сходимость по распределению.

Пусть теперь θ – случайная величина на некотором вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbf{P})$, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда, полагая

$$\mathbf{X}_{T,n} = \mathbf{X}_{T,n}(s) = \zeta_n(s + i\theta T, \alpha, \mathbf{A}),$$

утверждение теоремы 5 можем записать в виде

$$\mathbf{X}_{T,n} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathbf{X}_n. \quad (14)$$

Определим еще один $H^\kappa(D)$ -значный случайный элемент

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_T(s) = \zeta(s + i\theta T, \alpha; \mathbf{A}).$$

Тогда в силу леммы 2 имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\rho_\kappa(\mathbf{X}_T(s), \mathbf{X}_{T,n}(s)) \geq \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\rho_\kappa(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{A}), \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathbf{A})) \geq \varepsilon) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T \rho_\kappa(\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathbf{A}), \zeta_n(s + i\tau, \alpha; \mathbf{A})) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее доказательство опирается на теорему 4.2 из [20]. Пусть (E, ρ) -значные случайные элементы $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, \dots$ имеют общую область определения $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbf{P})$ и пространство E сепарабельно. Предположим, что $X_{kn} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X_k$ и $X_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$ для всякого k . Предположим также, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0.$$

Тогда $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} X$.

Пространство $H^\kappa(D)$ сепарабельно. Поэтому из соотношений (13)–(15) и упомянутой теоремы 4.2 монографии [20] получаем

$$\mathbf{X}_T \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P, \quad (16)$$

что эквивалентно слабой сходимости при $T \rightarrow \infty$ меры P_T к мере P . Кроме того, соотношение (16) показывает, что мера P не зависит от выбора последовательности $\{P_{n_k}\}$. Поэтому имеем

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} P. \quad (17)$$

Определим случайные элементы

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}_{T,n}(s) &= \zeta_n(s + i\theta T, \alpha, \omega; \mathfrak{A}), \\ \widehat{\mathbf{X}}_T(s) &= \zeta(s + i\theta T, \alpha, \omega; \mathfrak{A}). \end{aligned}$$

Повторяя изложенное выше рассуждение для случайных элементов $\widehat{\mathbf{X}}_{T,n}(s)$ и $\widehat{\mathbf{X}}_T(s)$ и используя лемму 5 и соотношение (17), легко находим, что вероятностная мера $\widehat{P}_T$ при $T \rightarrow \infty$ также слабо сходится к мере P .

Таким образом, остается показать, что мера P совпадает с мерой P_ζ .

Через ∂A обозначим границу множества A . Напоминаем, что множество A называется множеством непрерывности меры P на $(E, \mathcal{B}(E))$, если $P(\partial A) = 0$.

Пусть A – фиксированное множество непрерывности меры P . Тогда в силу [20, теорема 2.1] получаем соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\zeta(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A) = P(A). \quad (18)$$

Определим на $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m_{H^r})$ случайную величину ξ формулой

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A, \\ 0, & \text{если } \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \notin A. \end{cases}$$

Эргодичность группы $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ влечет за собой эргодичность случайного процесса $\xi(\Phi_\tau(\omega))$. Поэтому, применяя лемму 4, получаем, что для почти всех $\omega \in \Omega^r$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\Phi_\tau(\omega)) d\tau = E\xi. \quad (19)$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$E\xi = \int_{\Omega^r} \xi dm_{H^r} = m_{H^r}(\omega \in \Omega^r: \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A) = P_\zeta(A). \quad (20)$$

Кроме того, определения случайной величины ξ и группы $\{\Phi_\tau: \tau \in \mathbb{R}\}$ показывают, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi(\Phi_\tau(\omega)) d\tau = \nu_T(\zeta(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A).$$

Отсюда и из (20), (19) вытекает равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \nu_T(\zeta(s + i\tau, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) \in A) = P_\zeta(A).$$

Следовательно, учитывая (18), получаем, что $P(A) = P_\zeta(A)$ для всех множеств непрерывности A меры P . Так как система множеств непрерывности образует определяющий класс, отсюда заключаем, что $P(A) = P_\zeta(A)$ для всех $A \in \mathcal{B}(H^\kappa(D))$. Теорема полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть E – сепарабельное метрическое пространство и P – вероятностная мера на $(E, \mathcal{B}(E))$. Напомним, что *носителем* меры P называется минимальное замкнутое множество $S_P \subseteq E$ такое, что $P(S_P) = 1$. Кроме того, носитель S_P состоит из всех $x \in E$ таких, что для всякой окрестности G элемента x выполняется неравенство $P(G) > 0$.

Теперь пусть X – E -значный случайный элемент на вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), P)$. Тогда носитель распределения $P(X \in A), A \in \mathcal{B}(E)$, называется носителем элемента X и обозначается через S_X .

Для доказательства теоремы 3 мы должны знать носитель меры P_ζ . Для этой цели мы сначала сформулируем два утверждения из [24] для пространства $H^\kappa(D)$.

ЛЕММА 6. Пусть $\{X_m: m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых $H^\kappa(D)$ -значных случайных элементов и ряд $\sum_{m=0}^\infty X_m$ сходится почти наверное. Тогда носителем суммы этого ряда является замыкание множества всех таких элементов $\mathbf{f} \in H^\kappa(D)$, которые могут быть записаны в виде сходящегося ряда:

$$\mathbf{f} = \sum_{m=0}^\infty \mathbf{f}_m, \quad \mathbf{f}_m \in S_{X_m}.$$

Лемма 6 является частным случаем леммы 5, доказанной в [24]. В случае $\kappa = 1$ лемма 6 доказана в [7, теорема 1.7.10].

Вторая лемма из [24] касается плотности множества некоторых рядов в пространстве $H^\kappa(D)$.

ЛЕММА 7. Пусть $\{\mathbf{f}_m: m \in \mathbb{N}_0\} = \{f_{1m}, \dots, f_{\kappa m}\}$ – последовательность в пространстве $H^\kappa(D)$, удовлетворяющая условиям:

1) если $\mu_1, \dots, \mu_\kappa$ – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактными носителями, содержащимися в D , такие, что

$$\sum_{m=0}^\infty \left| \sum_{j=1}^\kappa \int_{\mathbb{C}} f_{jm}(s) d\mu_j(s) \right| < \infty,$$

то $\int_{\mathbb{C}} s^l d\mu_j(s) = 0$ для всех $j = 1, \dots, \kappa$ и $l \in \mathbb{N}_0$;

2) ряд $\sum_{m=0}^\infty \mathbf{f}_m$ сходится в $H^\kappa(D)$;

3) для всякого компакта $K_j \subset D, j = 1, \dots, \kappa$, выполнено

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{j=1}^\kappa \sup_{s \in K_j} |f_{jm}(s)|^2 < \infty.$$

Тогда множество всех сходящихся рядов $\sum_{m=0}^\infty a_m \mathbf{f}_m, a_m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0$, всюду плотно в $H^\kappa(D)$.

Лемма 7 является частным случаем леммы 6 из [24]. В случае $\kappa = 1$ доказательство леммы 7 содержится в [7, теорема 6.3.10].

Отметим, что доказательства лемм 6 и 7 в многомерном случае лишь в деталях отличаются от доказательств в одномерном случае.

Напомним еще один результат о функциях экспоненциального типа.

Пусть $0 < \theta_0 \leq \pi$. Функция $f(s)$, аналитическая в угловой области $|\arg s| \leq \theta_0$, называется *функцией экспоненциального типа*, если

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} < \infty$$

равномерно относительно θ , $|\theta| \leq \theta_0$.

ЛЕММА 8. Пусть μ – комплекснозначная мера на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$. Кроме того, пусть

$$f(s) = \int_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z)$$

и $f(s) \not\equiv 0$. Тогда

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(r)|}{r} > \sigma_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [7, лемма 6.4.10].

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что система $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ линейно независима над полем $\mathbb{Q}$ и $\text{rank}(B) = \kappa$. Тогда носителем меры P_{ζ} является все пространство $H^{\kappa}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\omega \in \Omega$ и $s \in D$ определим

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega; \mathfrak{A}_{jl}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{mj} l \omega(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j,$$

и ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A}) &= (\zeta(s, \alpha_1, \omega; \mathfrak{A}_{11}), \dots, \zeta(s, \alpha_1, \omega; \mathfrak{A}_{1l_1}), \dots \\ &\dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega; \mathfrak{A}_{r1}), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega; \mathfrak{A}_{rl_r})). \end{aligned}$$

Тогда $S_{P_{\zeta}} \subseteq S_{P_{\widehat{\zeta}}}$. Таким образом, достаточно показать, что $S_{P_{\widehat{\zeta}}} = H^{\kappa}(D)$.

По определению Ω имеем, что $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность независимых комплекснозначных случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Кроме того, носителем каждой случайной величины $\omega(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, является единичная окружность γ . Поэтому ввиду леммы 6 носителем $S_{P_{\widehat{\zeta}}}$ является замыкание множества всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m(s, \alpha, a; \mathfrak{A}),$$

где $a = \{a_m : a_m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0\}$ и

$$\zeta_m(s, \alpha, a; \mathfrak{A}) = \left(\frac{a_{m11} a_m}{(m + \alpha_1)^s}, \dots, \frac{a_{m1l_1} a_m}{(m + \alpha_1)^s}, \dots, \frac{a_{mr1} a_m}{(m + \alpha_r)^s}, \dots, \frac{a_{mr l_r} a_m}{(m + \alpha_r)^s} \right).$$

Проверим условия леммы 7. Так как $\widehat{\zeta}(s, \alpha, \omega; \mathfrak{A})$ является $H^{\kappa}(D)$ -значным случайным элементом, то существует последовательность $b = \{b_m : b_m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0\}$ такая, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m(s, \alpha, b; \mathfrak{A})$$

сходится в $H^k(D)$. Кроме того, легко видеть, что для всякого компакта $K \subset D$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \sup_{s \in K} \left| \frac{a_{mjl} b_m}{(m + \alpha_j)^s} \right|^2 < \infty.$$

Следовательно, остается проверить только условие 1) леммы 7. Пусть μ_{jl} , $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, – комплекснозначные меры на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с носителями, лежащими в полосе D , такие, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{mjl} b_m}{(m + \alpha_j)^s} d\mu_{jl}(s) \right| < \infty. \quad (21)$$

Поскольку при $m \geq 2$

$$(m + \alpha)^{-s} = m^{-s} + O(m^{-1-\sigma}|s|),$$

то в силу (21) и свойств мер μ_{jl} получаем сходимость ряда

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{mjl}}{m^s} d\mu_{jl}(s) \right|. \quad (22)$$

По определению числа k последовательность $\mathfrak{A}_{jl}$ периодична с периодом k . Поэтому сходимость ряда (22) приводит к соотношению

$$\sum_{\substack{m=2 \\ m \equiv h \pmod{k}}}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} \int_{\mathbb{C}} \frac{a_{mjl}}{m^s} d\mu_{jl}(s) \right| < \infty, \quad h = 1, \dots, k. \quad (23)$$

Для $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ и $h = 1, \dots, k$ положим

$$\nu_h(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} a_{hjl} \mu_{jl}(A).$$

Тогда ν_h , $h = 1, \dots, k$, также являются комплекснозначными мерами на $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ с носителями, лежащими в полосе D , и ввиду (23) имеем

$$\sum_{\substack{m=2 \\ m \equiv h \pmod{k}}}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{C}} m^{-s} d\nu_h(s) \right| < \infty, \quad h = 1, \dots, k. \quad (24)$$

Для $z \in \mathbb{C}$ определим

$$\rho_h(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\nu_h(s), \quad h = 1, \dots, k.$$

Тогда (24) запишем в следующем виде:

$$\sum_{\substack{m=2 \\ m \equiv h \pmod{k}}}^{\infty} |\rho_h(\log m)| < \infty, \quad h = 1, \dots, k. \quad (25)$$

Для всякого $h = 1, \dots, k$ функция $\rho_h(z)$ имеет экспоненциальный тип. Поэтому из (25) и леммы 8 следует, что для всех $h = 1, \dots, k$ или $\rho_h(z) \equiv 0$, или

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |\rho_h(x)|}{x} > -1. \quad (26)$$

Множество $\{m \in \mathbb{N} : m \equiv h \pmod{k}\}$ имеет положительную плотность. Следовательно, если имеет место (26), то ввиду [25, лемма 5] имеем

$$\sum_{\substack{m=2 \\ m \equiv h \pmod{k}}}^{\infty} |\rho_h(\log m)| = \infty.$$

Поскольку это противоречит (25), получаем, что $\rho_h(z) \equiv 0$ для всякого $h = 1, \dots, k$. Отсюда и из определений $\rho_h(z)$ и ν_h следует, что

$$\sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{l_j} a_{hjl} \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_{jl}(s) \equiv 0, \quad h = 1, \dots, k. \quad (27)$$

Так как $\text{rank}(B) = \kappa$, система линейных уравнений (27) имеет единственное решение

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu_{jl}(s) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, l_j.$$

Отсюда путем дифференцирования выводим, что

$$\int_{\mathbb{C}} s^m d\mu_{jl}(s) = 0$$

для всех $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$. Таким образом, мы доказали, что все условия леммы 7 выполняются, и эта лемма позволяет утверждать, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m(s, \alpha, b\hat{a}; \mathfrak{A})$$

с $\hat{a} = \{\hat{a}_m : \hat{a}_m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0\}$ всюду плотно в $H^\kappa(D)$. Поэтому множество всех сходящихся рядов $\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m(s, \alpha, a; \mathfrak{A})$, где $a = \{a_m : m \in \gamma, m \in \mathbb{N}_0\}$, также плотно в $H^\kappa(D)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 существенно опирается на теорему Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами. Мы ее формулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 9. Пусть K – компактное подмножество на комплексной плоскости, обладающее связным дополнением. Тогда всякая функция $f(s)$, непрерывная в K и аналитическая внутри K , равномерно на K приближается многочленами от s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится, например, в [26].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу леммы 9 существует полином $p_{jl}(s)$ такой, что

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |f_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \varepsilon/2. \quad (28)$$

Пусть G – множество всех $\mathbf{g} \in H^\kappa(D)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |g_{jl}(s) - p_{jl}(s)| < \varepsilon/2.$$

Если P_n и P – вероятностные меры на $(E, \mathcal{B}(E))$, то хорошо известно (см. [20, теорема 2.1]), что слабая сходимость при $n \rightarrow \infty$ меры P_n к P эквивалентна следующему утверждению: для каждого открытого множества $G \subset E$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Поскольку множество G является открытым, то в силу последнего замечания и теорем 4 и 6 находим, что

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{A}_{jl}) - p_{jl}(s)| < \varepsilon/2 \right) \geq P_\zeta(G) > 0. \quad (29)$$

Однако ввиду (28) имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \tau : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon \right\} \\ & \supseteq \left\{ \tau : \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{1 \leq l \leq l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{A}) - p_{jl}(s)| < \varepsilon/2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, теорема является следствием неравенства (29).

Автор искренне благодарен рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

1. A. Javtokas, A. Laurinćikas, “On the periodic Hurwitz zeta-function”, *Hardy–Ramanujan J.*, **29** (2006), 18–36.
2. A. Javtokas, A. Laurinćikas, “The universality of the periodic Hurwitz zeta-function”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **17:10** (2006), 711–722.
3. С. М. Воронин, “Теорема о распределении значений дзета-функции Римана”, *Докл. АН СССР*, **221:4** (1975), 771; англ. пер.: S. M. Voronin, “A theorem on the distribution of values of the Riemann zeta-function”, *Soviet Math. Dokl.*, **16:2** (1975), 410.
4. С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39:3** (1975), 475–486; англ. пер.: S. M. Voronin, “Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function”, *Math. USSR-Izv.*, **9:3** (1975), 443–453.
5. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **5**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.
6. С. М. Воронин, *Избранные труды: математика*, Под ред. А. А. Карацубы, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
7. A. Laurinćikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Mathematics and its Applications, **352**, Kluwer, Dordrecht, 1996.
8. A. Laurinćikas, “The universality of zeta-functions”, *Acta Appl. Math.*, **78:1–3** (2003), 251–271.
9. K. Matsumoto, “Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions”, *Sugaku Expositions*, **17:1** (2004), 51–71.

10. С. М. Воронин, “О функциональной независимости L -функций Дирихле”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 493–503.
11. S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L -functions*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1979.
12. B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcuta, 1981.
13. B. Bagchi, “A joint universality theorem for Dirichlet L -functions”, *Math. Z.*, **181**:3 (1982), 319–334.
14. A. Laurinćikas, “The joint universality for periodic Hurwitz zeta-functions”, *Analysis (Munich)*, **26**:3 (2006), 419–428.
15. А. Лауринчикас, “Аналог теоремы Воронина для периодических дзета-функций Гурвица”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 91–102; англ. пер.: A. Laurinćikas, “Voronin-type theorem for periodic Hurwitz zeta-functions”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 231–242.
16. A. Javtokas, A. Laurinćikas, *A joint universality theorem for periodic Hurwitz zeta-functions*, Preprint, Vilnius University, 2006.
17. Х. Хейер, *Вероятностные меры на локально компактных группах*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: H. Heyer, *Probability measures on locally compact groups*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **94**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
18. A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II”, *Liet. Mat. Rink.*, **46**:3 (2006), 332–350; англ. пер.: A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. II”, *Lithuanian Math. J.*, **46**:3 (2006), 271–286.
19. A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions. III”, *Analytic and Probabilistic methods in Number Theory*, Proceedings of the Fourth International Conference in Honour of J. Kubilius (Palanga, Lithuania, 2006), eds. A. Laurinćikas, E. Manstavičius, TEV, Vilnius, 2007, 87–98.
20. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney, 1968.
21. J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Graduate Texts in Mathematics, **11**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
22. A. Laurinćikas, R. Garunkštis, *The Lerch zeta-function*, Kluwer, Dordrecht, 2002.
23. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: H. Cramér, M. R. Leadbetter, *Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications*, John Wiley, New York–London–Sydney, 1967.
24. A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms”, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5** (2002), 57–75.
25. A. Laurinćikas, K. Matsumoto, “The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions”, *Nagoya Math. J.*, **157** (2000), 211–227.
26. Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, American Mathematical Society Colloquium Publications, XX, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.

А. ЛАУРИНЧИКАС (A. LAURINČIKAS)
 Вильнюсский университет,
 Институт математики и информатики
 E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило в редакцию
 25.12.2006
 30.07.2007