Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Управляемые системы субдифференциального типа, зависящие от параметра, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 5, 149–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:49:30

УДК 517.988

А. А. Толстоногов

Управляемые системы субдифференциального типа, зависящие от параметра

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается управляемая система с субдифференциальным оператором и с нелинейным возмущением монотонного типа. Управление подчинено ограничению, которое представляет зависящее от фазовых переменных многозначное отображение с замкнутыми, невыпуклыми значениями в рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве. Субдифференциальный оператор, возмущение, ограничение на управление и начальное условие зависят от параметра. Наряду с исходной рассматривается управляемая система с овыпукленными ограничениями на управление. Под решением системы понимается пара “траектория–управление”. Доказаны теоремы существования непрерывных по параметру селекторов, значениями которых являются решения управляемой системы. Установлены взаимосвязи между множествами непрерывных по параметру селекторов, значениями которых являются решения исходной системы и решения системы с овыпукленными ограничениями на управление. Как следствие получены различные топологические свойства множеств решений. В качестве приложения рассмотрена управляемая система, описываемая векторным параболическим уравнением с малым диффузионным коэффициентом в эллиптическом члене. Доказана сходимость решений управляемой системы к решениям предельной сингулярной системы при стремлении диффузионного коэффициента к нулю.

Библиография: 25 наименований.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и σ -алгеброй Σ μ -измеримых множеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$, H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Функция $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, т. е. если ее эффективная область $\text{dom } \varphi = \{x \in H; \varphi(x) < +\infty\}$ не пуста. Множество всех функций $\varphi: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, которые являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу, обозначим через $\Gamma_0(H)$. Для $\varphi \in \Gamma_0(H)$ через $\partial\varphi(x)$ обозначим ее субдифференциал в точке x [1], а через $\text{dom } \partial\varphi$ – область определения $\partial\varphi$. Известно [1], что $\partial\varphi(x)$ является максимально монотонным оператором, $\text{dom } \partial\varphi \subset \text{dom } \varphi$ и

$$\overline{\text{dom } \partial\varphi} = \overline{\text{dom } \varphi},$$

где черта обозначает замыкание в H .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00247).

Пусть Λ – компактное метрическое пространство параметра ξ и Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -\dot{x}(\xi)(t) &\in \partial\varphi(\xi)(x(\xi)(t)) + F(\xi)(t, x(\xi)(t)) + A(\xi)(t)u(\xi)(t), \\ x(\xi)(0) &= y(\xi) \in \text{dom } \varphi(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \end{aligned} \quad (1.1)$$

со смешанным ограничением на управление

$$u(\xi)(t) \in U(\xi)(t, x(\xi)(t)). \quad (1.2)$$

Наряду с ограничением (1.2) мы будем рассматривать ограничение

$$u(\xi)(t) \in \overline{\text{co}} U(\xi)(t, x(\xi)(t)), \quad (1.3)$$

где через $\overline{\text{co}}$ обозначена замкнутая выпуклая оболочка множества. Здесь $\varphi(\xi) \in \Gamma_0(H)$, $\xi \in \Lambda$, $F(\xi): T \times \text{dom } \varphi(\xi) \rightarrow H$ – нелинейное однозначное отображение, $A(\xi): T \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, где $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H , $U(\xi): T \times \text{dom } \varphi(\xi) \rightarrow Y$ – многозначное отображение с замкнутыми значениями.

Обозначим через $W^{1,2}(T, H)$ пространство абсолютно непрерывных функций $x: T \rightarrow H$ с производной $\dot{x}(\cdot) \in L^2(T, H)$. При фиксированном $\xi \in \Lambda$ под решением управляемой системы (1.1) с ограничением (1.2) (системы (1.1), (1.2)) понимается пара $(x(\xi), u(\xi))$, $x(\xi) \in W^{1,2}(T, H)$, $u(\xi) \in L^2(T, Y)$, $x(\xi)(0) = y(\xi)$, такая, что $x(\xi)(t) \in \text{dom } \partial\varphi(\xi)$ почти всюду и почти всюду на T имеют место включения (1.1), (1.2). Аналогично определяется решение управляемой системы (1.1), (1.3). Множества решений управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3) будем обозначать $\mathcal{R}_U(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(\xi)$. При этом если $(x, u) \in \mathcal{R}_U(\xi)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(\xi)$), то x называется *траекторией управляемой системы*, а u – *управлением*.

Основное содержание работы посвящено доказательству существования непрерывных селекторов многозначных отображений $\xi \rightarrow \mathcal{R}_U(\xi)$, $\xi \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(\xi)$, установлению взаимосвязи между непрерывными селекторами этих отображений и изучению ряда топологических свойств множеств $\mathcal{R}_U(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}U}(\xi)$ таких, как компактность, абсолютная ретрактность и т.д.

Вопрос о предельном переходе по параметру ξ в системах, содержащих субдифференциальные операторы, возникает при решении многих физических задач (см. [2]–[7] и др.). В качестве приложения мы рассмотрим следующую задачу.

Пусть $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^l$ – конечномерные евклидовы пространства переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$, $u = (u_1, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^l$, $T = [0, 1]$, $\Lambda = [0, 1]$, $\xi \in \Lambda$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная открытая область с границей $\partial\Omega$, $\Gamma = T \times \Omega$.

Для замкнутого выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^N$, содержащего нулевой элемент O пространства $\mathbb{R}^N$, обозначим через I^K индикаторную функцию множества K и через $\partial I^K(z)$ ее субдифференциал.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -z_t(\xi)(t, x) &\in -\xi \Delta z(\xi)(t, x) + \tilde{F}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)) + \tilde{A}(\xi)(t, x)u(\xi)(t, x) \\ &\quad + \partial I^K(z(\xi)(t, x)), \\ z(\xi)(0, x) &= y(\xi)(x), \quad z(\xi)|_{T \times \partial \Omega} = O, \quad \xi \in (0, 1], \end{aligned} \quad (1.4)$$

с ограничением на управление

$$u(\xi)(t, x) \in \tilde{U}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)). \quad (1.5)$$

Здесь $\tilde{U}(\xi): T \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^l$ – многозначное отображение с замкнутыми значениями, $\tilde{F}(\xi): T \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^N$ – однозначное отображение, $\tilde{A}(\xi)(t, x)$ – матрица размера $N \times l$, $\xi \in \Lambda$ и $\Delta z = (\Delta z_1, \dots, \Delta z_N)$.

Возникает вопрос: что является пределом последовательности решений $(z(\xi_n), u(\xi_n))$, $n \geq 1$, системы (1.4), (1.5) при $\xi_n \rightarrow 0+$? Подобная проблема возникает при решении задач о фазовых переходах (см. [6], [7] и др.). Используя абстрактные результаты, полученные в настоящей работе, мы показываем, что предел последовательности $(z(\xi_n), u(\xi_n))$, $n \geq 1$, решений системы (1.4), (1.5) при $\xi_n \rightarrow 0+$ является решением управляемой системы

$$\begin{aligned} -z_t(0)(t, x) &\in \tilde{F}(0)(t, x, z(0)(t, x)) + \tilde{A}(0)(t, x)u(0)(t, x) \\ &\quad + \partial I^K(z(0)(t, x)), \\ z(0)(0, x) &= y(0)(x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

с ограничением на управление

$$u(0)(t, x) \in \tilde{U}(0)(t, x, z(0)(t, x)). \quad (1.7)$$

Справедливо и обратное утверждение: для любой последовательности $\xi_n \rightarrow 0+$ и для любого решения $(z(0), u(0))$ системы (1.6), (1.7) существует последовательность $(z(\xi_n), u(\xi_n))$, $n \geq 1$, решений системы (1.4), (1.5), сходящаяся к $(z(0), u(0))$.

Отметим, что предельная управляемая система (1.6), (1.7) в отличие от системы (1.4), (1.5) описывается обыкновенным дифференциальным включением.

Взаимосвязь между решениями частного вида управляемой системы (1.4) и ее предельной системы при $\xi = 0$ составляла предмет самостоятельного изучения в работе [7], в которой при исследовании использовались аргументы, отличные от наших. Мы получаем обобщение и уточнение результатов из работы [7] как следствие результатов, полученных в настоящей работе.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть X и Z – топологические пространства, 2^Z – совокупность всех подмножеств из Z , включая и пустое множество. Отображение $F: X \rightarrow 2^Z$ обычно называют *отношением*, а отображение $F: X \rightarrow 2^Z \setminus \{\emptyset\}$ называют *многозначным отображением*, где $\{\emptyset\}$ – пустое множество, рассматриваемое как элемент пространства 2^Z .

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *полу непрерывным снизу по Вьеторису* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $U \subset Z$, $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \cap U \neq \emptyset$ для любого $x \in V(x_0)$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Z$ называется *полу непрерывным сверху по Вьеторису* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $U \subset Z$, $F(x_0) \subset U$, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \subset U$ для любого $x \in V(x_0)$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow Z$ с замкнутыми значениями называется *непрерывным по Вьеторису*, если оно одновременно полу непрерывно сверху и снизу по Вьеторису.

Для банахова пространства X через ω - X обозначено то, что пространство X наделено слабой топологией. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств пространства X с топологией, индуцированной топологией пространства ω - X . В остальных случаях пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Через $C(T, H)$ ($C(T, \omega$ - H)) мы обозначаем пространство непрерывных функций $x: T \rightarrow H$ ($x: T \rightarrow \omega$ - H) с топологией равномерной сходимости на T .

В определениях ретракта, абсолютного ретракта и дугообразно связного множества мы следуем [8].

Семейство функций $A \subset L^2(T, Y)$ называется *равномерно интегрируемым с квадратом*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_E \|f(t)\|_Y^2 dt \leq \varepsilon$$

для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) \leq \delta(\varepsilon)$ и всех $f \in A$.

На пространстве $L^2(T, Y)$ наряду со стандартной нормой мы рассмотрим так называемую “слабую” норму

$$\|u\|_\omega = \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} u(t) dt \right\|_Y, \quad u \in L^2(T, Y). \quad (2.1)$$

Пространство $L^2(T, Y)$ с нормой (2.1) мы будем обозначать через $L_\omega^2(T, Y)$.

Пусть (X, d) – метрическое пространство. Обозначим через cX совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из X . На пространстве cX введем обобщенную метрику Хаусдорфа

$$D_X(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}.$$

Поскольку функция $D_X(\cdot, \cdot)$ может принимать бесконечные значения, то она называется *обобщенной метрикой*. Обобщенную метрику Хаусдорфа на пространствах cH и $cL^2(T, Y)$ будем обозначать через $D(\cdot, \cdot)$ и $D_L(\cdot, \cdot)$. Под $d(x, A)$ ($d_L(x, A)$) мы понимаем расстояние от точки $x \in H$ ($x \in L^2(T, Y)$) до множества $A \subset H$ ($A \subset L^2(T, Y)$).

Пусть $C: H \rightarrow 2^H$ – отношение с областью определения $\text{dom } C = \{x \in H: Cx \neq \emptyset\}$. Как это принято, отношение $C: H \rightarrow 2^H$ мы отождествляем с его

графиком $\text{gr } C = \{(x, y); x \in \text{dom } C, y \in Cx\}$. Тем самым на $\text{dom } C$ будет определен многозначный оператор C из H в 2^H . Оператор $C: H \rightarrow 2^H$ называется *монотонным*, если $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$ для любых $(x_i, y_i) \in \text{gr } C$, $i = 1, 2$. Монотонный оператор называется *максимально монотонным*, если его график не является собственным подмножеством графика другого монотонного оператора.

Пусть X и Z – метрические пространства и $\mathcal{B}(X)$ – σ -алгебра борелевских множеств из X . Многозначное отображение $F: T \rightarrow Z$ называется *измеримым* [9, с. 97], если $F^{-1}(U) = \{t \in T; F(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma$ для любого открытого множества $U \subset Z$.

Когда мы рассматриваем многозначное отображение $F: T \times X \rightarrow Z$, введенное выше определение измеримости понимается относительно σ -алгебры $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$, порожденной множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}(X)$. Отметим, что в терминологии из работы [10], результаты которой мы будем использовать, такие отображения называются *слабо измеримыми*.

Пусть $\{C(t)\}_{t \in T}$ – семейство операторов из H в 2^H . Семейство $\{C(t)\}_{t \in T}$ назовем *измеримым* [9], если многозначное отображение $t \rightarrow \text{gr } C(t)$ из T в $H \times H$ является измеримым.

Используя [11, утверждение 3.19], введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Последовательность $\varphi_n \in \Gamma_0(H)$, $n \geq 1$, *сходится к функции φ в смысле Моско* ($\varphi_n \xrightarrow{M} \varphi$), если:

- 1) для любого $x \in H$ существует последовательность $x_n \rightarrow x$ такая, что $\varphi_n(x_n) \rightarrow \varphi(x)$;
- 2) для любого $x \in H$ и любой последовательности $x_n \in H$, $n \geq 1$, сходящейся к x в пространстве ω - H , имеет место неравенство

$$\varphi(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_n).$$

Отметим, что согласно [11, утверждение 3.19] определение 2.1 сходимости по Моско эквивалентно определению 3.17 из [11].

Следующие свойства максимально монотонных операторов хорошо известны, и мы их приводим для удобства изложения. Если $C: H \rightarrow 2^H$ – максимально монотонный оператор, то для каждого $x \in \text{dom } C$ множество Cx является выпуклым и замкнутым в H . Выпуклым является и множество $\overline{\text{dom } C}$, где черта обозначает замыкание в H . Для любого $x \in \text{dom } C$ существует единственный элемент $C^\circ x \in Cx$ такой, что

$$\|C^\circ x\| = \min\{\|y\|; y \in Cx\}.$$

Если $C: H \rightarrow 2^H$ – максимально монотонный оператор, то для любого $\lambda > 0$ существуют однозначные операторы

$$J_\lambda(C) = (I + \lambda C)^{-1}, \quad C_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda(C)) \quad (2.2)$$

из H в H , где I – тождественный оператор на H , которые называются соответственно *резольвентой* и *аппроксимацией Иосиды* оператора C . Эти операторы обладают следующими свойствами:

1) имеет место

$$\|J_\lambda(C)(x) - J_\lambda(C)(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \|C_\lambda x - C_\lambda y\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x - y\|, \quad \lambda > 0, \quad x, y \in H; \quad (2.3)$$

2) C_λ является монотонным оператором и

$$\|C_\lambda x\| \leq \|C^\circ x\|, \quad \lambda > 0, \quad x \in \operatorname{dom} C. \quad (2.4)$$

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Поскольку $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором из H в H , то для него по формулам (2.2) будут определены резольвента и аппроксимация Иосиды, которые будем обозначать J_λ и $(\partial\varphi)_\lambda$.

Для каждого $\lambda > 0$ регуляризацией Моро–Иосиды $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2, \quad y \in H \right\}, \quad \lambda > 0.$$

Следующие свойства хорошо известны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Тогда:

- 1) φ_λ является конечной, непрерывной и выпуклой функцией на H ;
- 2) φ_λ является дифференцируемой по Фреше и для ее производной $\partial\varphi_\lambda$ по Фреше имеет место равенство $\partial\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda$;
- 3) для любых $x \in H$, $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x), \quad \varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x) \text{ при } \lambda \downarrow 0; \quad (2.5)$$

4) если $x \in \operatorname{dom} \partial\varphi$, то

$$\|\partial\varphi_\lambda(x)\| \leq \|(\partial\varphi)^\circ(x)\|, \quad \partial\varphi_\lambda(x) \rightarrow (\partial\varphi)^\circ(x) \text{ при } \lambda \downarrow 0, \quad (2.6)$$

$$J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right) J_\lambda x \right), \quad \lambda, \mu > 0, \quad x \in H, \quad (2.7)$$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda} \|x - J_\lambda x\|^2 + \varphi(J_\lambda x), \quad \lambda > 0, \quad x \in H, \quad (2.8)$$

$$\partial\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} (x - J_\lambda x), \quad \lambda > 0, \quad x \in H, \quad (2.9)$$

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi_\lambda(y) + \|\partial\varphi_\lambda(x)\| \|x - y\|, \quad \lambda > 0, \quad x, y \in H. \quad (2.10)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $\{C(t)\}_{t \in T}$ – семейство максимально монотонных операторов из H в H . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) семейство $\{C(t)\}_{t \in T}$ измеримо;
- 2) для каждого $\lambda > 0$ и $x \in H$ отображение $t \rightarrow C_\lambda(t)x$ измеримо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из [9, теорема 2.1] и первого равенства в (2.2).

§ 3. Основные предположения и вспомогательные результаты

Всюду далее $\mathcal{M} \subset \Lambda$ – фиксированное замкнутое множество. Мы не исключаем случаи $\mathcal{M} = \emptyset$ и $\mathcal{M} = \Lambda$.

Введем следующие предположения.

Гипотезы $H(\varphi)$. Семейство функций $\varphi(\xi) \in \Gamma_0(H)$, $\xi \in \Lambda$, обладает свойствами:

- 1) $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$ для любого $\xi \in \Lambda$ и любой последовательности $\xi_n \rightarrow \xi$;
- 2) существует r такое, что

$$\{x \in H; \varphi(\xi)(x) < r\} \neq \emptyset \quad \forall \xi \in \Lambda; \quad (3.1)$$

3) для любого $r > 0$ и любого замкнутого множества $Q \subset \Lambda \setminus \mathcal{M}$ множество $\bigcup_{\xi \in Q} \{x \in H; \|x\| \leq r, |\varphi(\xi)(x)| \leq r\}$ относительно компактно в H .

Гипотезы $H(F)$. Отображение $F(\xi): T \times \text{dom } \varphi(\xi) \rightarrow H$ обладает следующими свойствами:

- 1) отображение $t \rightarrow F(\xi)(t, x)$ измеримо, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$;
- 2) почти всюду для любых последовательностей $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \Lambda$, и $x_n \rightarrow x$ в H , $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $n \geq 1$, последовательность $F(\xi_n)(t, x_n)$, $n \geq 1$, сходится в H к $F(\xi)(t, x)$;

3) существует непрерывная функция $\omega: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega(\xi) = 0$, $\xi \in \mathcal{M}$, такая, что

$$\langle F(\xi)(t, x) - F(\xi)(t, y), x - y \rangle \geq -\omega(\xi)\|x - y\|^2 \quad \text{п. в.}, \quad (3.2)$$

где $x, y \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$;

4) существуют непрерывные функции $a: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$, $b: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\|F(\xi)(t, x)\| \leq a(\xi)(t) + b(\xi)\|x\|, \quad \xi \in \Lambda, \quad x \in \text{dom } \varphi(\xi) \quad \text{п. в.} \quad (3.3)$$

Гипотезы $H(A)$. Отображение $A(\xi): T \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$, $\xi \in \Lambda$, является таким, что:

- 1) отображение $t \rightarrow A(\xi)(t)u$ измеримо, $u \in Y$;
- 2) отображение $\xi \rightarrow A(\xi)(t)u$, $\xi \in \Lambda$, $u \in Y$, непрерывно п. в.;
- 3) отображение $\xi \rightarrow A^*(\xi)(t)h$, $\xi \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $h \in H$, непрерывно п. в., где $A^*(\xi)$ – оператор, сопряженный к $A(\xi)$;
- 4) имеет место неравенство

$$\|A(\xi)(t)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq c \quad \text{п. в.}, \quad c > 0, \quad \xi \in \Lambda. \quad (3.4)$$

Гипотезы $H(U)$. Семейство $\{U(\xi), \xi \in \Lambda\}$ многозначных отображений $U(\xi): T \times \text{dom } \varphi(\xi) \rightarrow cH$ является таким, что:

- 1) отображение $t \rightarrow U(\xi)(t, x)$ измеримо, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$;
- 2) существует непрерывная функция $l: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$D_Y(U(\xi)(t, x), U(\xi)(t, y)) \leq l(\xi)(t)\|x - y\| \quad \text{п. в.}, \quad (3.5)$$

где $x, y \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$;

3) почти всюду на T для любых последовательностей $\xi_n \rightarrow \xi$, $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $n \geq 1$, и любого $u \in U(\xi)(t, x)$ существует последовательность $u_n \in U(\xi_n)(t, x_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к u ;

4) для любых последовательностей $\xi_n \rightarrow \xi$, $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $n \geq 1$, имеет место включение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} U(\xi_k)(t, x_k) \subset U(\xi)(t, x) \text{ п. в.}; \quad (3.6)$$

5) для любой последовательности $\xi_n \rightarrow \xi$ существует ограниченная последовательность $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $n \geq 1$, такая, что последовательность функций $t \rightarrow d_Y(\Theta, U(\xi_n)(t, x_n))$, $n \geq 1$, где Θ – нулевой элемент пространства Y , равномерно интегрируема с квадратом;

6) почти всюду на T для любых последовательностей $\xi_n \rightarrow \xi$, $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $n \geq 1$, имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_Y(U(\xi_n)(t, x_n), U(\xi)(t, x)) = 0. \quad (3.7)$$

7) существуют функции $m, n \in L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что

$$\|U(\xi)(t, x)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in U(\xi)(t, x)\} \leq m(t) + n(t)\|x\| \text{ п. в.}, \quad (3.8)$$

$\xi \in \Lambda$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$.

Далее, не оговаривая особо, мы считаем, что гипотезы $H(\varphi)$, $H(F)$, $H(A)$, $H(U)$, 1)–3), 5) имеют место.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из гипотез $H(U)$, 1), 2) следует, что для любого $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$ функция $t \rightarrow d_Y(\Theta, U(\xi)(t, x))$, $\xi \in \Lambda$, измерима. Если мы предположим, что существуют непрерывные функции $m, n: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такие, что

$$d_Y(\Theta, U(\xi)(t, x)) \leq m(\xi)(t) + n(\xi)(t)\|x\| \text{ п. в.}, \quad \xi \in \Lambda, \quad x \in \text{dom } \varphi(\xi), \quad (3.9)$$

то гипотеза $H(U)$, 5) будет иметь место. В самом деле, из определения 2.1 сходимости по Моско $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$ следует, что для любой точки $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$ существует последовательность $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к x . Поскольку последовательность x_n , $n \geq 1$, ограничена, то гипотеза $H(U)$, 5) вытекает из (3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если имеет место гипотеза $H(U)$, 6), то гипотезы $H(U)$, 3), 4) выполняются автоматически. Точно так же гипотеза $H(U)$, 5) следует из $H(U)$, 7).

Пусть $r > 0$ – константа, фигурирующая в неравенстве (3.1). Рассмотрим отображение

$$R(\xi) = \{x \in H; \varphi(\xi)(x) \leq r\}, \quad \xi \in \Lambda.$$

ЛЕММА 3.1. Мнозначное отображение $R: \Lambda \rightarrow H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми выпуклыми значениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпуклость и замкнутость значений отображения $R(\xi)$ очевидна. Пусть

$$Q(\xi) = \{x \in H; \varphi(\xi)(x) < r\}. \quad (3.10)$$

Из (3.1) следует, что значениями отображения $Q(\xi)$ являются непустые выпуклые множества пространства H . Пусть $\xi \in \Lambda$, $y \in Q(\xi)$ произвольны, и

пусть $\xi_n \rightarrow \xi$, $n \geq 1$. Поскольку $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$, существует последовательность $y_n \rightarrow y$, $n \geq 1$, такая, что $\varphi(\xi_n)(y_n) \rightarrow \varphi(\xi)(y)$. Тогда в соответствии с (3.10) при достаточно больших $n \geq 1$ будет иметь место включение $y_n \in Q(\xi_n)$. Поэтому отображение $\xi \rightarrow Q(\xi)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Пусть $y \in R(\xi)$ и $x \in Q(\xi)$. Рассмотрим последовательность $x_n = \lambda_n y + (1 - \lambda_n)x$, $\lambda_n \rightarrow 1$, $0 < \lambda_n < 1$. Воспользовавшись выпуклостью функции $\varphi(\xi)$, мы получим, что $\varphi(\xi)(x_n) < r$. Поэтому $x_n \in Q(\xi)$, $n \geq 1$, и $x_n \rightarrow y$. Следовательно, $\overline{Q(\xi)} = R(\xi)$, где черта сверху обозначает замыкание в H . Поэтому многозначное отображение $\xi \rightarrow R(\xi)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любых $\xi_0 \in \Lambda$ и $y_0 \in H$ такого, что $\varphi(\xi)(y_0) \leq r$, существует непрерывная функция $y: \Lambda \rightarrow H$ такая, что $y(\xi_0) = y_0$ и

$$\varphi(\xi)(y(\xi)) \leq r, \quad \xi \in \Lambda. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие вытекает из леммы 3.1 и теоремы Майкла [12] о непрерывных селекторах у полунепрерывных снизу по Вьеторису многозначных отображений с выпуклыми замкнутыми значениями.

Следующая необходимая нам лемма хорошо известна [1, лемма 3.3].

ЛЕММА 3.2. Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$, $x \in W^{1,2}(T, H)$ и $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi$ п.в. Предположим, что существует $v \in L^2(T, H)$ такое, что $v(t) \in \partial\varphi(x(t))$ п.в. Тогда функция $t \rightarrow \varphi(x(t))$ является абсолютно непрерывной на T и

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = \langle h, \dot{x}(t) \rangle \text{ п.в. для любого } h \in \partial\varphi(x(t)).$$

ЛЕММА 3.3. Существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\varphi(\xi)(x) + \alpha \|x\| + \alpha \geq 0, \quad \xi \in \Lambda, \quad x \in H. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Предположим, что неравенство (3.12) не имеет места. Тогда существуют последовательности $\xi_n \in \Lambda$, $x_n \in H$, $n \geq 1$, такие, что

$$\varphi(\xi_n)(x_n) + n(\|x_n\| + 1) < 0. \quad (3.13)$$

Возможны два случая.

1. Последовательность x_n , $n \geq 1$, ограничена. Не нарушая общности, будем считать, что $\xi_n \rightarrow \xi$ и $x_n \rightarrow x$ в ω - H . Поскольку $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$, то из неравенства (3.13) следует, что

$$\varphi(\xi)(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(x_n) \leq -\infty.$$

Последнее неравенство приводит нас к противоречию.

2. Последовательность x_n , $n \geq 1$, не ограничена. Тогда мы можем считать, что $\xi_n \rightarrow \xi$ и $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. Пусть $y: \Lambda \rightarrow H$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (3.11). Положим

$$\beta_n = (\sqrt{n} \|x_n - y(\xi_n)\|)^{-1}, \quad z_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) y(\xi_n).$$

Поскольку $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ и $y(\xi_n) \rightarrow y(\xi)$, $n \rightarrow \infty$, то $\beta_n \in (0, 1)$ при достаточно больших n . Из равенства

$$\|z_n - y(\xi_n)\| = \beta_n \|x_n - y(\xi_n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

следует, что $z_n \rightarrow y(\xi)$, $n \rightarrow \infty$. Из выпуклости функций $\varphi(\xi_n)$, $n \geq \infty$, и неравенства (3.13) при достаточно больших n следует

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_n)(z_n) &\leq \beta_n \varphi(\xi_n)(x_n) + (1 - \beta_n) \varphi(\xi_n)(y(\xi_n)) \\ &\leq -\sqrt{n} \frac{\|x_n\| + 1}{\|x_n - y(\xi_n)\|} + (1 - \beta_n) \varphi(\xi_n)(y(\xi_n)). \end{aligned}$$

Из этого неравенства, сходимости $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$ и (3.11) вытекает, что

$$\varphi(\xi)(y(\xi)) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n) \leq -\infty.$$

Последнее неравенство приводит нас к противоречию. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Существует константа $M > 0$ такая, что*

$$\|J_\lambda(\xi)(x)\| \leq M + \|x\|, \quad \|\partial\varphi_\lambda(\xi)(x)\| \leq \frac{1}{\lambda}(M + 2\|x\|), \quad (3.14)$$

$x \in H$, $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y: \Lambda \rightarrow H$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (3.11). Тогда согласно (3.12) существует $r_1 > 0$ такое, что

$$\|y(\xi)\| \leq r_1, \quad |\varphi(\xi)(y(\xi))| \leq r_1, \quad \xi \in \Lambda. \quad (3.15)$$

Используя (2.5), (2.8) при $\lambda = 1$ и (3.12), (3.15), получаем

$$r_1 \geq \varphi(\xi)(y(\xi)) \geq \frac{1}{2} \|y(\xi) - J_1(\xi)(y(\xi))\|^2 - \alpha \|J_1(\xi)(y(\xi))\| - \alpha, \quad \xi \in \Lambda.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\|J_1(\xi)(y(\xi))\| \leq r_2, \quad \xi \in \Lambda, \quad (3.16)$$

при некотором $r_2 > 0$.

Учитывая (2.3), (2.7) и (3.16), мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|J_\mu(\xi)(y(\xi))\| &\leq \|J_1(\xi)(y(\xi))\| + \|J_\mu(\xi)(y(\xi)) - J_1(\xi)(y(\xi))\| \\ &\leq \|J_1(\xi)(y(\xi))\| + (1 - \mu)\|y(\xi)\| + (1 - \mu)\|J_1(\xi)(y(\xi))\| \\ &\leq 2r_2 + \|y(\xi)\|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\xi \in \Lambda$, $\mu \in (0, 1]$. Теперь из (2.3), (3.15) и (3.17) вытекает

$$\begin{aligned} \|J_\mu(\xi)(x)\| &\leq \|J_\mu(\xi)(y(\xi))\| + \|x - y(\xi)\| \leq 2r_2 + 2r_1 + \|x\|, \\ \xi &\in \Lambda, \quad \mu \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Полагая $M = 2r_2 + 2r_1$ в последнем неравенстве, мы приходим к первому неравенству (3.14). Второе неравенство (3.14) непосредственно вытекает из первого и (2.9). Утверждение доказано.

Из неравенства (2.3) и утверждения 2.1, 1)–3) непосредственно вытекает, что для любой функции $x \in L^2(T, H)$ функции $t \rightarrow \varphi(\xi)(x(t))$, $t \rightarrow \varphi_\lambda(\xi)(x(t))$, $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda(\xi)(x(t))$, $t \rightarrow J_\lambda(\xi)(x(t))$, $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$, измеримы.

Воспользовавшись (3.12), мы можем на $L^2(T, H)$ определить функцию

$$\Phi(\xi)(x) = \int_T \varphi(\xi)(x(t)) dt, \quad x \in L^2(T, H), \quad \xi \in \Lambda, \quad (3.18)$$

которая является собственной, выпуклой и полунепрерывной снизу в силу леммы Фату. Пусть $\Phi_\lambda(\xi)$, $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$, – регуляризация Моро–Иосиды функции $\Phi(\xi)$. Воспользовавшись (3.12), (3.14) и результатами работы [13], мы приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *В рамках гипотез $H(\varphi)$ для любого $x \in L^2(T, H)$ имеют место равенства:*

$$\Phi_\lambda(\xi)(x) = \int_T \varphi_\lambda(\xi)(x(t)) dt, \quad \xi \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1], \quad (3.19)$$

$$\partial\Phi_\lambda(\xi)(x)(t) = \partial\varphi_\lambda(\xi)(x(t)) \text{ п. в.}, \quad \xi \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (3.20)$$

Если $f \in L^2(T, H)$, то $f \in \partial\Phi(\xi)$ тогда и только тогда, когда $f(t) \in \partial\varphi(\xi)(x(t))$ п. в., $\xi \in \Lambda$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любой последовательности $\xi_n \rightarrow \xi$ последовательность $\Phi(\xi_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Phi(\xi)$ в смысле Моско.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (2.8), (2.10), (3.12) вытекает, что

$$-\alpha - \alpha \|J_\lambda(\xi)(x)\| \leq \varphi_\lambda(\xi)(x) \leq \varphi(\xi)(y(\xi)) + \|\partial\varphi_\lambda(\xi)(x)\| \|x - y(\xi)\|, \\ \xi \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1], \quad x \in H.$$

Используя это неравенство и неравенства (3.14), (3.15), мы получаем

$$-\alpha - \alpha(M + \|x\|) \leq \varphi_\lambda(\xi)(x) \leq r_1 + \frac{1}{\lambda}(M + 2\|x\|)\|x\| + \frac{1}{\lambda}(M + 2\|x\|)r_1, \quad (3.21)$$

где $\xi \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$, $x \in H$.

Пусть $x(\cdot) \in L^2(T, H)$, $\lambda \in (0, 1]$ произвольны и фиксированы. Тогда из (3.21) следует, что существует функция $g_\lambda(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$|\varphi_\lambda(\xi)(x(t))| \leq g_\lambda(t) \text{ п. в.}, \quad \xi \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (3.22)$$

Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$; так как $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$, то согласно [11, теорема 3.26]

$$\varphi_\lambda(\xi_n)(x(t)) \rightarrow \varphi_\lambda(\xi)(x(t)) \text{ п. в.}, \quad \lambda \in (0, 1].$$

Поэтому из (3.20), (3.22) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\Phi_\lambda(\xi_n)(x) \rightarrow \Phi_\lambda(\xi)(x), \quad x \in L^2(T, H), \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (3.23)$$

Воспользовавшись (3.23) и [11, теорема 3.26], мы получаем

$$\Phi(\xi_n) \xrightarrow{M} \Phi(\xi).$$

Теорема доказана.

Пусть $0 < t \leq 1$. По аналогии с (3.18) на пространстве $L^2([0, t], H)$ мы можем определить собственную, выпуклую и полунепрерывную снизу функцию

$$\Phi^t(\xi)(x) = \int_0^t \varphi(\xi)(x(s)) ds, \quad x \in L^2([0, t], H), \quad \xi \in \Lambda. \quad (3.24)$$

Непосредственно из теоремы 3.1 вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любого $0 < t \leq 1$ и любой последовательности $\xi_n \rightarrow \xi$, $n \geq 1$, последовательность $\Phi^t(\xi_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Phi^t(\xi)$ в смысле Моско.*

Пусть $\xi_* \in \Lambda$ фиксировано и $F(\xi_*): T \times \text{dom } \varphi(\xi_*) \rightarrow H$ – отображение, удовлетворяющее гипотезам $H(F)$. Положим $Z = \text{dom } \varphi(\xi_*)$. Поскольку Z можно представить как объединение возрастающей по включению последовательности замкнутых множеств из H , то Z – борелевское множество в H . Рассмотрим семейство $\{F(t)\}_{t \in T}$ операторов из H в H , определенных по правилу

$$F(t)(x) = F(\xi_*)(t, x), \quad x \in Z. \quad (3.25)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Семейство операторов $\{F(t)\}_{t \in T}$ является измеримым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из гипотез $H(F)$, 1), 2) и [10, теорема 6.1] следует, что отображение $(t, x) \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Z)$ -измеримым. Тогда согласно [10, утверждение (i) теоремы 3.5] график отображения $(t, x) \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$ является $(\Sigma \otimes \mathcal{B}(Z)) \otimes \mathcal{B}(H)$ -измеримым подмножеством пространства $T \times Z \times H$. Поскольку Z является борелевским множеством в H , то график отображения $(t, x) \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}(H \times H)$ -измеримым подмножеством пространства $T \times H \times H$. Однако график отображения $(t, x) \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$ совпадает с графиком отображения $t \rightarrow \text{gr } F(t)$. Поэтому согласно [10, теорема 3.4] отображение $t \rightarrow \text{gr } Q(t)$ является измеримым из T в $H \times H$. Утверждение доказано.

Пусть $\xi_* \in \Lambda$ и $0 < \alpha \leq 1$ фиксированы. Рассмотрим семейство операторов $\{C(t)\}_{t \in T}$, определенных по правилу

$$C(t) = \alpha \partial \varphi(\xi_*) + F(t) + \omega(\xi_*)I. \quad (3.26)$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(\varphi)$, $H(F)$. Тогда $\{C(t)\}_{t \in T}$ является измеримым семейством максимально монотонных операторов из H в H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F_1(t) = F(t) + \omega(\xi_*)I, \quad (3.27)$$

и пусть $\overline{F_1}(t)$, $t \in T$, – замыкание оператора $F_1(t)$, т. е. замыкание в $H \times H$ его графика $\text{gr } F_1(t)$, $t \in T$. Покажем, что

$$\overline{F_1}(t) = \overline{F}(t) + \omega(\xi_*)I \text{ п. в. на } T. \quad (3.28)$$

Пусть $(x, y) \in \overline{\text{gr } F_1(t)}$. Тогда существует последовательность $(x_n, y_n) \in \text{gr } F_1(t)$, $n \geq 1$, сходящаяся к решению (x, y) . Поэтому последовательность $(x_n, z_n) \in \text{gr } F(t)$, $n \geq 1$, сходится к (x, z) , где $z_n = y_n - \omega(\xi_*)x_n$, $n \geq 1$,

$z = y - \omega(\xi_*)x$. Следовательно, $(x, z) \in \overline{\text{gr } F(t)}$ и $(x, y) \in \overline{\text{gr } F(t)} + \text{gr } \omega(\xi_*)I$. Обратное включение доказывается аналогично. Поэтому равенство (3.28) имеет место.

Из утверждения 3.3 и [10, утверждение 2.6] вытекает, что отображение $t \rightarrow \overline{\text{gr } F(t)}$ является измеримым. Поэтому в соответствии с [10, теорема 5.6] существует последовательность $(x_n(t), y_n(t))$, $n \geq 1$, измеримых селекторов отображения $t \rightarrow \overline{\text{gr } F(t)}$ такая, что справедливо равенство

$$\overline{\text{gr } F(t)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n(t), y_n(t))}, \quad t \in T.$$

Тогда согласно (3.28)

$$\overline{\text{gr } F_1(t)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n(t), y_n(t)) + \omega(\xi_*)(x_n(t))}, \quad t \in T.$$

Из этого равенства и [10, теорема 5.6] вытекает, что отображение $t \rightarrow \overline{\text{gr } F_1(t)}$ является измеримым. Воспользовавшись [10, утверждение 2.6], мы получаем, что $\{F_1(t)\}_{t \in T}$ является измеримым семейством операторов, которые в силу гипотезы $H(F)$, 3) являются монотонными.

Согласно [9, теорема 3.1] измеримое семейство $\{F_1(t)\}_{t \in T}$ монотонных операторов допускает продолжение до измеримого семейства $\{\tilde{F}_1(t)\}$ максимально монотонных операторов. Поскольку $\text{dom } F_1(t) = \text{dom } \varphi(\xi_*)$, $\text{dom } \alpha \partial \varphi(\xi_*) = \text{dom } \partial \varphi(\xi_*) \subset \text{dom } \varphi(\xi_*)$ и $\text{dom } \varphi(\xi_*)$ является выпуклым множеством, то из [9, лемма 3.2] вытекает, что

$$\alpha \partial \varphi(\xi_*) + \tilde{F}_1(t) = \alpha \partial \varphi(\xi_*) + F_1(t), \quad t \in T. \quad (3.29)$$

Покажем, что оператор $\alpha \partial \varphi(\xi_*) + \tilde{F}_1(t)$ является максимально монотонным. Пусть $x \in \text{dom } \alpha \partial \varphi(\xi_*)$ и $\tilde{F}_1^\circ(t)(x)$ – минимальный элемент множества $\tilde{F}_1(t)(x)$. Тогда согласно (3.25), (3.27), (3.3)

$$\|\tilde{F}_1^\circ(t)(x)\| \leq \|F(\xi_*)(t, x) + \omega(\xi_*)x\| \leq \omega(\xi_*)\|x\| + a(\xi_*)(t) + b(\xi_*)\|x\|.$$

Пусть $k < 1$. Тогда

$$\|\tilde{F}_1^\circ(t)(x)\| \leq k\|(\alpha \partial \varphi(\xi_*))^\circ(x)\| + \omega(\xi_*)\|x\| + a(\xi_*)(t) + b(\xi_*)\|x\|.$$

Из последнего неравенства и [1, следствие 2.6] непосредственно вытекает, что $\alpha \partial \varphi(\xi_*) + \tilde{F}_1(t)$ является максимально монотонным оператором при почти каждом $t \in T$. Поскольку $\alpha \partial \varphi(\xi_*)$ является максимально монотонным оператором, $\{\tilde{F}_1(t)\}_{t \in T}$ – измеримое семейство максимально монотонных операторов и для почти каждого $t \in T$ оператор $\alpha \partial \varphi(\xi_*) + \tilde{F}_1(t)$ является максимально монотонным, то согласно [9, теорема 2.4] $\{\alpha \partial \varphi(\xi_*) + \tilde{F}_1(t)\}_{t \in T}$ является измеримым семейством максимально монотонных операторов. Теперь утверждение теоремы вытекает из (3.26), (3.27), (3.29). Теорема доказана.

§ 4. Априорные оценки

Пусть $\xi_* \in \Lambda$ фиксировано. Рассмотрим включение

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in \partial\varphi(\xi_*)(x(t)) + F(\xi_*)(t, x(t)) + f(t), \\ x(0) &= y(\xi_*) \in \text{dom } \varphi(\xi_*), \quad f \in L^2(T, H). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При фиксированном $f \in L^2(T, H)$ под решением включения (4.1) мы понимаем функцию $x \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = y(\xi_*)$, такую, что $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi(\xi_*)$ п. в. и почти всюду выполняется включение (4.1).

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любых $\xi_* \in \Lambda$ и $f \in L^2(T, H)$ включение (4.1) имеет единственное решение.*

Существование решения включения (4.1) при несколько иных предположениях для отображения $(t, x) \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$, в основном не связанных с измеримостью отображения $t \rightarrow F(\xi_*)(t, x)$, было доказано в [14, теорема II]. Если воспользоваться утверждением 2.2 и теоремой 3.2, то доказательство теоремы 4.1 повторяет доказательство теоремы II в [14].

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для любых $\xi \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$ включение*

$$\begin{aligned} -\dot{x}(t) &\in \partial\varphi(\xi)(x(t)) + F(\xi)(t, x(t)) + A(\xi)(t)u(t), \\ x(0) &= y(\xi) \in \text{dom } \varphi(\xi), \quad u \in L^2(T, H), \end{aligned} \quad (4.2)$$

имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 4.1 и гипотез $H(A)$.

Всюду в дальнейшем $y: \Lambda \rightarrow H$ – фиксированная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (3.15).

Рассмотрим включение

$$-\dot{z}(\xi)(t) \in \partial\varphi(\xi)(z(\xi)(t)), \quad z(\xi)(0) = y(\xi), \quad \xi \in \Lambda. \quad (4.3)$$

Из теоремы 4.1 вытекает, что при каждом $\xi \in \Lambda$ включение (4.3) имеет единственное решение $z(\xi) \in W^{1,2}(T, H)$, $z(\xi)(0) = y(\xi)$, $z(\xi)(t) \in \text{dom } \partial\varphi(\xi)$ п. в.

ЛЕММА 4.1. *Существует константа $N > 0$ такая, что*

$$\|z(\xi)(t)\| \leq N, \quad |\varphi(\xi)(z(\xi)(t))| \leq N, \quad \|\dot{z}(\xi)\|_{L^2(T, H)} \leq N, \quad (4.4)$$

где $t \in T$, $\xi \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.2 вытекает, что для каждого $\xi \in \Lambda$ функция $t \rightarrow \varphi(\xi)(z(\xi)(t))$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{d}{dt}\varphi(\xi)(z(\xi)(t)) = -\langle \dot{z}(\xi)(t), \dot{z}(\xi)(t) \rangle \text{ п. в.}$$

Поэтому

$$\varphi(\xi)(z(\xi)(t)) = \varphi(\xi)(y(\xi)) - \int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau, \quad t \in T. \quad (4.5)$$

Из этого равенства и (3.12), (3.15) вытекает, что

$$\int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau \leq r_1 + \alpha + \alpha \|z(\xi)(t)\|, \quad t \in T, \quad \xi \in \Lambda.$$

Поскольку

$$\|z(\xi)(t)\| \leq \|y(\xi)\| + \int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\| d\tau \leq r_1 + \left(\int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

то

$$\int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau - \alpha \left(\int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq r_1 + \alpha + \alpha r_1.$$

Поэтому существует $N_1 > 0$ такое, что

$$\left(\int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq N_1, \quad t \in T, \quad \xi \in \Lambda. \quad (4.7)$$

Теперь утверждение леммы вытекает из неравенств (3.15), (4.5), (4.6). Лемма доказана.

Рассмотрим включение (4.2), где $y: \Lambda \rightarrow H$ – непрерывная функция, удовлетворяющая (3.15). Тогда согласно следствию 4.1 для любых $\xi \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$ включение (4.2) имеет единственное решение, которое будем обозначать $x(\xi, u)$. Пусть

$$S_L = \{u \in L^2(T, Y); \|u\|_{L^2(T, Y)} \leq L\}, \quad L > 0, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{R}_L = \{x(\xi, u); \xi \in \Lambda, u \in S_L\}. \quad (4.9)$$

ЛЕММА 4.2. *Существует константа $M(L) > 0$, зависящая только от L , такая, что*

$$\|x(\xi, u)(t)\| \leq M(L), \quad |\varphi(\xi)(x(\xi, u)(t))| \leq M(L), \quad t \in T, \quad (4.10)$$

$$\|\dot{x}(\xi, u)\|_{L^2(T, H)} \leq M(L), \quad \xi \in \Lambda, \quad u \in S_L. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(\xi, u)$ и $z(\xi)$ – решения включений (4.2) и (4.3). Используя монотонность оператора $\partial\varphi(\xi)$ и неравенства (3.2), (3.4), мы получим

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}(\xi, u)(t) - \dot{z}(\xi)(t), x(\xi, u)(t) - z(\xi)(t) \rangle &\leq \omega(\xi) \|x(\xi, u)(t) - z(\xi)(t)\|^2 \\ &+ (c \|u(t)\|_Y + \|F(\xi)(t, z(\xi)(t))\|) \|x(\xi, u)(t) - z(\xi)(t)\|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пусть

$$f(\xi, u)(t) = \|F(\xi)(t, z(\xi)(t))\| + c \|u(t)\|_Y.$$

Тогда из гипотез $H(F)$ и соотношений (4.4), (4.8) следует, что выполнены включение $f(\xi, u) \in L^2(T, \mathbb{R})$ и неравенство

$$\|f(\xi, u)\|_{L^2(T, \mathbb{R})} \leq N_1(L), \quad \xi \in \Lambda, \quad u \in S_L, \quad (4.13)$$

при некотором $N_1(L) > 0$.

Воспользовавшись (4.12) и [15, теорема 1.11], мы получим

$$\|x(\xi, u)(t) - z(\xi)(t)\| \leq \exp\{\omega(\xi)\} \int_0^t \|f(\xi, u)(s)\| ds. \quad (4.14)$$

Из этого неравенства и соотношений (4.4), (4.13) вытекает, что существует $M_1(L) > 0$, при котором имеет место неравенство

$$\|x(\xi, u)(t)\| \leq M_1(L), \quad \xi \in \Lambda, \quad u \in S_L, \quad t \in T. \quad (4.15)$$

Согласно лемме 3.2 имеем

$$\frac{d}{dt} \varphi(\xi)(x(\xi, u)(t)) = -\langle \dot{x}(\xi, u)(t), \dot{x}(\xi, u)(t) + F(\xi)(t, x(\xi, u)(t)) + A(\xi)(t)u(t) \rangle.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \varphi(\xi)(x(\xi, u)(t)) \leq -\|\dot{x}(\xi, u)(t)\|^2 + r(\xi, u)(t) \|\dot{x}(\xi, u)(t)\|, \quad (4.16)$$

где

$$r(\xi, u)(t) = (c\|u(t)\|_Y + a(\xi)(t) + b(\xi)\|x(\xi, u)(t)\|).$$

Из (4.8), (4.15) и свойств функций $a(\xi)(t)$, $b(\xi)$ вытекает, что существует $N(L) > 0$ такое, что

$$\|r(\xi, u)\|_{L^2(T, \mathbb{R})} \leq N(L), \quad \xi \in \Lambda, \quad u \in S_L. \quad (4.17)$$

Применяя неравенство Коши $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ при $\varepsilon = 1$ к члену $\|x(\xi, u)(t)\| \times r(\xi, u)(t)$ в неравенстве (4.16), мы получим

$$\varphi(\xi)(x(\xi, u)(t)) \leq \varphi(\xi)(y(\xi)) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{x}(\xi, u)(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t r^2(\xi, u)(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Теперь неравенства (4.10), (4.11) непосредственно вытекают из соотношений (3.12), (3.15), (4.15), (4.17), (4.18). Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{T}(\xi, u)$ – оператор, который любым $\xi \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$ ставит в соответствие единственное решение включения (4.2), т. е.

$$x(\xi, u) = \mathcal{T}(\xi, u). \quad (4.19)$$

Следующая теорема является основополагающей в наших исследованиях.

ТЕОРЕМА 4.2. *Оператор $\mathcal{T}(\xi, u)$ является непрерывным из $\Lambda \times L^2(T, Y)$ в $C(T, H)$ и секвенциально непрерывным из $\Lambda \setminus \mathcal{M} \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ в $C(T, H)$. Оператор $(\xi, u) \rightarrow \dot{x}(\xi, u)$, $x = \mathcal{T}(\xi, u)$, является непрерывным из $\Lambda \times L^2(T, Y)$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$ и секвенциально непрерывным из $\Lambda \setminus \mathcal{M} \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$. Для любых $u_1, u_2 \in L^2(T, Y)$ имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{T}(\xi, u_1)(t) - \mathcal{T}(\xi, u_2)(t)\| \leq m \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds, \quad \xi \in \Lambda, \quad (4.20)$$

где

$$m = c \exp\left\{\sup_{\xi \in \Lambda} \omega(\xi)\right\}. \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим три случая.

I. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $n \geq 1$, $\xi \in \mathcal{M}$, и $u_n \rightarrow u$ в $L^2(T, Y)$. Тогда $u_n \in S_L$ при некотором $L > 0$. Из неравенства (4.11) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\|x(\xi_n, u_n)(t) - x(\xi_n, u_n)(s)\| \leq |t - s|^{1/2} M(L).$$

Поэтому последовательность $x(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна в $C(T, H)$.

Пусть $B_L = \{y \in H; \|y\| \leq M(L)\}$. Тогда из (4.10) мы получаем, что последовательность $x(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, является относительно компактной в пространстве $C(T, \omega-B_L)$. Поскольку множество $\omega-B_L$ является выпуклым метризуемым компактом в пространстве $\omega-H$, то согласно (4.11) существует последовательность n_k , $k \geq 1$, такая, что

$$x(\xi_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow x(\cdot) \text{ в } C(T, \omega-H), \quad (4.22)$$

$$\dot{x}(\xi_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow z(\cdot) \text{ в } \omega-L^2(T, H). \quad (4.23)$$

Далее последовательности $x(\xi_{n_k}, u_{n_k})$, $\dot{x}(\xi_{n_k}, u_{n_k})$, u_{n_k} , ξ_{n_k} , $k \geq 1$, будем обозначать соответственно x_k , $\dot{x}_k$, u_k , ξ_k , $k \geq 1$.

Поскольку для любого $h \in H$ имеет место равенство

$$\langle h, x_k(t) \rangle = \langle h, y(\xi_k) \rangle + \int_0^t \langle h, \dot{x}_k(s) \rangle ds, \quad t \in T, \quad k \geq 1,$$

то из (4.22), (4.23) следует

$$\langle h, x(t) \rangle = \langle h, y(\xi) \rangle + \left\langle h, \int_0^t z(s) ds \right\rangle, \quad t \in T.$$

Поэтому

$$x(t) = y(\xi) + \int_0^t z(s) ds, \quad t \in T, \quad \dot{x}(t) = z(t) \text{ п. в.}$$

Из этих равенств следует, что $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = y(\xi)$ и

$$\dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \text{ в } \omega-L^2(T, H). \quad (4.24)$$

Покажем, что $x = \mathcal{T}(\xi, u)$. Так как $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в $\omega-H$, $t \in T$, то для любой ступенчатой функции $h: T \rightarrow H$ будет иметь место сходимость

$$\langle h(t), x_k(t) \rangle \rightarrow \langle h(t), x(t) \rangle \text{ п. в.}$$

Поскольку множество ступенчатых функций плотно в $L^2(T, H)$, то из (4.10) следует, что

$$x_k \rightarrow x \text{ в } \omega-L^2(T, H). \quad (4.25)$$

Пусть $0 < t \leq 1$. Обозначим через x_k^* , x^* сужения функций x_k и x на отрезок $[0, t]$. Тогда из определения субдифференциала и определения решения включения (4.2) и (3.18) вытекает

$$\int_0^t \langle -\dot{x}_k(s) - F(\xi_k)(s, x_k(s)) - A(\xi_k)(s)u_k(s), g(s) - x_k(s) \rangle ds$$

$$\leq \Phi^t(\xi_k)(g) - \Phi^t(\xi_k)(x_k^*) \quad \forall g \in L^2([0, t], H). \quad (4.26)$$

Согласно следствию 3.2 имеем

$$\Phi^t(\xi_k) \xrightarrow{M} \Phi^t(\xi). \quad (4.27)$$

Поэтому существует последовательность $g_k \in L^2([0, t], H)$, $k \geq 1$, такая, что

$$g_k \rightarrow x^* \text{ в } L^2([0, t], H), \quad (4.28)$$

$$\Phi^t(\xi_k)(g_k) \rightarrow \Phi^t(\xi)(x^*). \quad (4.29)$$

Из (4.10), (4.25), (4.27) следует, что $\Phi^t(\xi)(x^*) \leq M(L)$. Поэтому из (4.29) вытекает, что $g_k(s) \in \text{dom } \varphi(\xi_k)$ п. в. на $[0, t]$ при достаточно больших $k \geq 1$. Тогда согласно (3.3)

$$\|F(\xi_k)(s, g_k(s))\| \leq a(\xi_k)(s) + b(\xi_k)\|g_k(s)\|, \quad s \in [0, t].$$

Из последнего неравенства вытекает, что последовательность функций $s \rightarrow \|F(\xi_k)(s, g_k(s))\|$ равномерно интегрируема с квадратом на $[0, t]$. Не нарушая общности, будем считать, что $g_k(s) \rightarrow x(s)$ почти всюду на отрезке $[0, t]$. Тогда из гипотезы $H(F)$, 2) следует, что

$$F(\xi_k)(s, g_k(s)) \rightarrow F(\xi)(s, x(s)) \text{ п. в. на } [0, t].$$

Поэтому согласно [16, утверждение 2.4] имеем

$$F(\xi_k)(s, g_k(s)) \rightarrow F(\xi)(s, x(s)) \text{ в } L^2([0, t], H). \quad (4.30)$$

Аналогично, не нарушая общности и используя гипотезу $H(A)$, 2), мы можем считать, что

$$A(\xi_k)(s)u_k(s) \rightarrow A(\xi)(s)u(s) \text{ п. в. на } [0, t]. \quad (4.31)$$

Тогда из (3.4), (4.31) и [16, утверждение 2.4] следует, что

$$A(\xi_k)(s)u_k(s) \rightarrow A(\xi)(s)u(s) \text{ в } L^2([0, t], H). \quad (4.32)$$

Используя (3.2), перепишем неравенство (4.26) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), x_k(s) \rangle ds &\leq \Phi^t(\xi_k)(g_k) - \Phi^t(\xi_k)(x_k^*) \\ &+ \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), g_k(s) \rangle ds + \int_0^t \langle F(\xi_k)(s, g_k(s)), g_k(s) - x_k(s) \rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle A(\xi_k)(s)u_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle ds + \int_0^t \omega(\xi_k)\|g_k(s) - x_k(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Переходя к пределу в (4.33), учитывая свойства функции $\omega(\xi)$ и соотношения (4.24), (4.25), (4.28)–(4.31), мы получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), x_k(s) \rangle ds \leq \int_0^t \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle ds + \Phi^t(\xi)(x_*) - \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^t(\xi_k)(x_k^*). \quad (4.34)$$

Теперь из (4.27), (4.34) вытекает

$$\|x(t)\|^2 \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|^2.$$

С другой стороны, из (4.22) вытекает, что

$$\|x(t)\|^2 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|^2.$$

Поэтому имеем

$$\|x(t)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|.$$

Из этого равенства и сходимости $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в ω - H следует, что $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в H . Поскольку $t \in T$ произвольно и последовательность $x_k(t)$, $k \geq 1$, равномерно непрерывна в $C(T, H)$, то $x_k(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C(T, H)$.

Пусть

$$f_k(t) = -\dot{x}_k(t) - F(\xi_k)(t, x_k(t)) - A(\xi_k)(t)u_k(t).$$

Тогда $f_k \in L^2(T, H)$, $k \geq 1$, и $f_k(t) \in \partial\varphi(\xi_k)(x_k(t))$ п.в. Поэтому согласно утверждению 3.2

$$f_k \in \partial\Phi(\xi_k)(x_k). \quad (4.35)$$

Поскольку $x_k(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $L^2(T, H)$, по аналогии с (4.30) мы получим

$$F(\xi_k)(t, x_k(t)) \rightarrow F(\xi)(t, x(t)) \text{ в } L^2(T, H).$$

Поэтому с учетом (4.31), (4.24) имеем

$$f_k \rightarrow f \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \quad (4.36)$$

где $f(t) = -\dot{x}(t) - F(\xi)(t, x(t)) - A(\xi)(t)u(t)$. Тогда из теоремы 3.1, соотношений (4.35), (4.36) и [11, утверждение 3.59 и теорема 3.66] вытекает

$$f \in \partial\Phi(\xi)(x).$$

Из этого включения и утверждения 3.2 непосредственно вытекает, что

$$-\dot{x}(t) - F(\xi)(t, x(t)) - A(\xi)(t)u(t) \in \partial\varphi(\xi)(x(t)) \text{ п.в.}$$

Следовательно, $\partial\varphi(\xi)(x(t)) \neq \emptyset$ п.в. на T . Поэтому $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi(\xi)$ п.в. на T . Из (4.10) мы получаем, что $x(t) \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $t \in T$. Поскольку $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = y(\xi)$, то $x(\cdot)$ является решением включения (4.2), т.е. имеет место равенство (4.19).

Если мы предположим, что последовательность $x(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $x(\cdot)$ в $C(T, H)$, то найдется подпоследовательность $x(\xi_{n_k}, u_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $x(\xi_{n_k}, u_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $x(\cdot)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, к последовательности $x(\xi_{n_k}, u_{n_k})$, $k \geq 1$, и учитывая, что включение (4.2) имеет единственное решение, мы придем к противоречию. Тем самым мы показали, что если $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $\xi \in \mathcal{M}$, и $u_n \rightarrow u$ в $L^2(T, Y)$, то $x_n = \mathcal{T}(\xi_n, u_n) \rightarrow x = \mathcal{T}(\xi, u)$ в $C(T, H)$ и $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$ (см. (4.24)).

II. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \mathcal{M}$ и $u_n \rightarrow u$ в $L^2(T, Y)$. Учитывая, что $\omega(\xi_n) = 0$, $\xi_n \in \mathcal{M}$, $n \geq 1$, и дословно повторяя рассуждения, использованные при рассмотрении случая I, мы получим, что $x_n = \mathcal{T}(\xi_n, u_n) \rightarrow x = \mathcal{T}(\xi, u)$ в $C(T, H)$ и $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$.

III. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $n \geq 1$, $\xi \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, и $u_n \rightarrow u$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Тогда $u_n \in S_L$, $n \geq 1$, при некотором $L > 0$. Используя неравенства (4.10), (4.11) и гипотезу $H(\varphi)$, 3), мы получим, что последовательность $x(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$, а последовательность $\dot{x}(\xi_n, u_n)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $\omega\text{-}L^2(T, H)$.

Пусть $h \in L^2(T, H)$ и $u \in Y$. Тогда из равенства

$$\langle h(t), A(\xi_n)(t)u \rangle = \langle A^*(\xi_n)(t)h(t), u \rangle, \quad n \geq 1,$$

и гипотез $H(A)$, 1), 2) следует, что функции $t \rightarrow A^*(\xi_n)(t)h(t)$, $n \geq 1$, скалярно измеримы из T в Y^* , где Y^* – пространство, топологически сопряженное Y . Поскольку Y является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством, то функции $t \rightarrow A^*(\xi_n)(t)h(t)$, $n \geq 1$, измеримы. Воспользовавшись гипотезой $H(A)$, 3) и неравенством (3.4), мы получаем, что

$$A^*(\xi_n)(t)h(t) \rightarrow A^*(\xi)(t)h(t) \text{ в } L^2(T, Y^*).$$

Тогда из равенства

$$\langle A(\xi_n)(t)u_n(t), h(t) \rangle = \langle u_n(t), A^*(\xi_n)(t)h(t) \rangle$$

следует, что

$$A(\xi_n)(t)u_n(t) \rightarrow A(\xi)(t)u(t) \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (4.37)$$

Теперь, используя (4.37) и повторяя конец доказательства случая I начиная с включения (4.35), мы получим, что $x(\cdot)$ является решением включения (4.2). Поэтому если $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $n \geq 1$, $\xi \in \Lambda \setminus \mathcal{M}$, и $u_n \rightarrow u$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, то $x_n = \mathcal{T}(\xi_n, u_n) \rightarrow x = \mathcal{T}(\xi, u)$ в $C(T, H)$ и $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ в $\omega\text{-}L^2(T, H)$. Тем самым первая часть утверждений теоремы доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать неравенства (4.20), (4.21). Если $u_1, u_2 \in L^2(T, Y)$, то, используя неравенства (3.2), (3.4) и определение решения включения (4.2), мы получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x(\xi, u_1)(t) - x(\xi, u_2)(t)\|^2 &\leq \int_0^t \omega(\xi) \|x(\xi, u_1)(s) - x(\xi, u_2)(s)\|^2 ds \\ &+ \int_0^t c \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y \|x(\xi, u_1)(s) - x(\xi, u_2)(s)\| ds. \end{aligned}$$

Теперь неравенства (4.20), (4.21) непосредственно вытекают из этого неравенства и [15, теорема 1.1]. Теорема 4.2 доказана.

§ 5. Свойства неподвижных точек многозначного оператора Немыцкого

Пусть $\mathcal{T}: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow C(T, H)$ – оператор, определенный равенством (4.19). Для любых $\xi \in \Lambda$, $u \in L^2(T, Y)$ положим

$$\Phi(\xi, u) = \{v \in L^2(T, Y); v(t) \in U(\xi)(t, \mathcal{T}(\xi, u)(t)) \text{ п. в.}\}. \quad (5.1)$$

Поскольку $\mathcal{T}(\xi, u)(t) \in \text{dom } \varphi(\xi)$, $t \in T$, то многозначное отображение $t \rightarrow U(\xi)(t, \mathcal{T}(\xi, u)(t))$ определено на T и в соответствии с гипотезами $H(U)$, 1), 2) измеримо. Согласно гипотезе $H(U)$, 5) для фиксированного $\xi \in \Lambda$ существует элемент $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$ такой, что функция $t \rightarrow d_Y(\Theta, U(\xi)(t, x))$ интегрируема с квадратом. Воспользовавшись неравенством (3.5), мы получим

$$d_Y(\Theta, U(\xi)(t, \mathcal{T}(\xi, u)(t))) \leq d_Y(\Theta, U(\xi)(t, x)) + l(\xi)(t)\|x - \mathcal{T}(\xi, u)(t)\|.$$

Из этого неравенства следует, что функция $t \rightarrow d(\Theta, U(\xi)(t, \mathcal{T}(\xi, u)(t)))$ интегрируема с квадратом. Поэтому из (5.1) и свойств измеримых многозначных отображений следует, что множество $\Phi(\xi, u)$ не пусто и является замкнутым разложимым [16] подмножеством пространства $L^2(T, Y)$. Тем самым будет определено многозначное отображение $\Phi: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow L^2(T, Y)$, которое называется *многозначным оператором Немыцкого*.

На пространстве $\Lambda \times L^2(T, Y)$ рассмотрим числовую функцию

$$P(\xi, u) = \left(\int_T \rho^2(t, \xi, u(t)) dt \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

где

$$\rho(t, \xi, u) = \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 m^2 \int_0^t l^2(\xi)(\tau) d\tau \right) \|u\|_Y, \quad (5.3)$$

m – константа из неравенства (4.21) и $l(\xi)$ – функция из неравенства (3.5).

Тогда функция $\rho(t, \xi, u)$ обладает свойствами (1_ρ) – (3_ρ) , введенными в работе [17, § 2], а функция $P(\xi, u)$ удовлетворяет неравенству (3.1) из [17]. Поэтому, как было установлено в [17], функция $(\xi, u) \rightarrow P(\xi, u)$ является непрерывной и при каждом $\xi \in \Lambda$ функция $P(\xi, \cdot)$ является нормой, эквивалентной норме пространства $L^2(T, Y)$. Для каждого $\xi \in \Lambda$ обозначим через $D_L(\xi)(\cdot, \cdot)$ обобщенную метрику Хаусдорфа на пространстве замкнутых множеств из $L^2(T, Y)$, порожденную нормой $P(\xi, \cdot)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5). Тогда оператор Немыцкого $\Phi: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow cL^2(T, Y)$, определенный равенством (5.1), обладает свойствами:

- 1) отображение $(\xi, u) \rightarrow \Phi(\xi, u)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису;
- 2) справедливо неравенство

$$D_L(\xi)(\Phi(\xi, u), \Phi(\xi, v)) \leq \frac{1}{2} P(\xi, u - v); \quad (5.4)$$

- 3) имеет место неравенство

$$D_L(\Phi(\xi, u), \Phi(\xi, v)) \leq m \|l(\xi)\|_{L^2(T, \mathbb{R})} \|u - v\|_{L^2(T, Y)}, \quad (5.5)$$

где $D_L(\cdot, \cdot)$ – метрика Хаусдорфа на пространстве $cL^2(T, Y)$, порожденная нормой пространства $L^2(T, Y)$;

- 4) если выполняется и гипотеза $H(U)$, 4), то отображение $(\xi, u) \rightarrow \Phi(\xi, u)$ имеет замкнутый график в $\Lambda \times L^2(T, Y) \times L^2(T, Y)$.

Если воспользоваться гипотезами $H(U)$, теоремой 4.2, неравенством (4.20) и соотношениями (5.1)–(5.3), то доказательство утверждений теоремы 5.1 дословно повторяет доказательство подобных утверждений в [18, теорема 2.1] или [19, теорема 4.1].

Наряду с оператором Φ рассмотрим оператор $\overline{\text{co}} \Phi$, $(\overline{\text{co}} \Phi)(\xi, u) = \overline{\text{co}} \Phi(\xi, u)$. Известно [20], что

$$\overline{\text{co}} \Phi(\xi, u) = \{u \in L^2(T, Y); u(t) \in \overline{\text{co}} U(\xi)(t, T(\xi, u)(t)) \text{ п. в.}\}. \quad (5.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5). Тогда утверждения 1)–3) теоремы 5.1 имеют место и для многозначного оператора $\overline{\text{co}} \Phi(\xi, u)$. Если дополнительно предположить, что для любых последовательностей $\xi_n \rightarrow \xi$, $x_n \rightarrow x$, $x_n \in \text{dom } \varphi(\xi_n)$, $n \geq 1$, $x \in \text{dom } \varphi(\xi)$, имеет место включение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} \overline{\text{co}} U(\xi_k)(t, x_k) \subset \overline{\text{co}} U(\xi)(t, x) \text{ п. в.}, \quad (5.7)$$

то утверждение 4) теоремы 5.1 сохраняет свою силу и для многозначного оператора $\overline{\text{co}} \Phi(\xi, u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5) имеют место для отображения $U(\xi)(t, x)$, то они автоматически выполняются и для отображения $\overline{\text{co}} U(\xi)(t, x)$. Поэтому следствие вытекает из теоремы 5.1 и соотношения (5.7).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1), 2), 6), 7). Тогда все утверждения теоремы 5.1 имеют место для операторов $\Phi(\xi, u)$ и $\overline{\text{co}} \Phi(\xi, u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3.1 в этом случае все гипотезы $H(U)$, 1)–5) и включение (5.7) будут иметь место для отображений $F(\xi)(t, x)$ и $\overline{\text{co}} F(\xi)(t, x)$. Поэтому следствие вытекает из следствия 5.1.

Для фиксированного $\xi \in \Lambda$ обозначим через $\text{Fix } \Phi(\xi)$ и $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ множество всех неподвижных точек операторов $\Phi(\xi, u)$ и $\overline{\text{co}} \Phi(\xi, u)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5). Тогда:

а) для каждого $\xi \in \Lambda$ множество $\text{Fix } \Phi(\xi)$ не пусто и существует непрерывная функция $u: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что

$$u(\xi) \in \text{Fix } \Phi(\xi), \quad \xi \in \Lambda; \quad (5.8)$$

б) если $D \subset \Lambda$ – замкнутое множество и $u_D: D \rightarrow L^2(T, Y)$ – непрерывная функция, $u_D(\xi) \in \text{Fix } \Phi(\xi)$, $\xi \in D$, то существует непрерывная функция $u: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что справедливо включение (5.8) и $u(\xi) = u_D(\xi)$, $\xi \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5). Тогда:

а) отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \Phi(\xi)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми значениями;

б) для каждого $\xi \in \Lambda$ множество $\text{Fix } \Phi(\xi)$ является абсолютным ретрактом в пространстве $L^2(T, H)$, и если пространство Λ дугообразно связно, то множество $\bigcup \{\text{Fix } \Phi(\xi) : \xi \in \Lambda\}$ является дугообразно связным;

в) если выполняется и гипотеза $H(U)$, 4), то многозначное отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \Phi(\xi)$ имеет замкнутый график в $\Lambda \times L^2(T, Y)$;

г) при выполнении гипотезы $H(U)$, 4) ретракцию можно выбрать непрерывно зависящей от ξ , т. е. существует такая непрерывная функция $g: \Lambda \times L^2(T, Y) \rightarrow L^2(T, Y)$, что

$$\begin{aligned} g(\xi, u) &\in \text{Fix } \Phi(\xi), & \xi &\in \Lambda, \quad u \in L^2(T, Y), \\ g(\xi, u) &= u, & \xi &\in \Lambda, \quad u \in \text{Fix } \Phi(\xi); \end{aligned}$$

д) более того, для любых непрерывных селекторов $u_i: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$, $i = 1, 2$, отображения $\xi \rightarrow \text{Fix } \Phi(\xi)$ существует непрерывная функция $h: \Lambda \times [0, 1] \rightarrow L^2(T, Y)$ такая, что

$$\begin{aligned} h(\xi, 0) &= u_1(\xi), \quad h(\xi, 1) = u_2(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \\ h(\xi, \tau) &\in \text{Fix } \Phi(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Согласно теореме 5.1 для оператора $\Phi(\xi, u)$ выполняются все предположения теоремы 3.1 из [17]. Поэтому теорема 5.2 и следствие 5.3 представляют собой переформулировки теорем 3.1, 4.1 и следствия 4.1 из [17].

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1)–3), 5). Тогда для отображения $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ справедливы утверждения теоремы 5.2 и утверждения а), б) следствия 5.3. Если к тому же имеет место включение (5.7), то утверждения в), г), д) следствия 5.3 сохраняют свою силу и для отображения $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1), 2), 6), 7). Тогда все утверждения теоремы 5.2 и следствия 5.3 сохраняют свою силу для отображений $\text{Fix } \Phi(\xi)$ и $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$.

Следствия 5.4, 5.5 вытекают из следствий 5.1, 5.2, теоремы 5.2 и следствия 5.3.

ЛЕММА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1), 2), 6), 7). Тогда отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ является непрерывным по Вьеторису из $\Lambda \setminus \mathcal{M}$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ значениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии со следствиями 5.3, 5.5 отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису из Λ в $L^2(T, Y)$. Поэтому оно будет полунепрерывным снизу по Вьеторису из Λ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Докажем теперь полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ из $\Lambda \setminus \mathcal{M}$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Пусть $Q \subset \Lambda \setminus \mathcal{M}$ – фиксированный компакт, $\xi \in Q$ и $v \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$. Тогда $v \in \overline{\text{co}} \Phi(\xi, v)$. Воспользовавшись (3.8), мы получим

$$\|v(t)\|_Y \leq m(t) + n(t)\|\mathcal{T}(\xi, v)(t)\|.$$

Полагая $u_1 = \Theta$ в (4.20) и учитывая, что оператор $\mathcal{T}(\xi, \Theta)$ является непрерывным из Q в $C(T, H)$, мы получим

$$\|v(t)\|_Y \leq m(t) + n(t) \left(d + \int_0^t \|v(s)\|_Y ds \right) \text{ п. в.} \quad (5.9)$$

при некотором $d > 0$. Из неравенства (5.6) вытекает, что

$$\int_0^t \|v(s)\|_Y^2 ds \leq \int_0^t \left[2(m(s) + n(s)d)^2 + 2n^2(s) \int_0^s \|v(\tau)\|_Y^2 d\tau \right] ds.$$

Поэтому в соответствии с неравенством Беллмана–Гронуолла существует $L > 0$ такое, что $\|v\|_{L^2(T, Y)} \leq L$. Поэтому (см. (4.8))

$$\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi) \subset S_L, \quad \xi \in Q. \quad (5.10)$$

Покажем, что отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ имеет замкнутый график в $Q \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Согласно (5.10) нам достаточно показать секвенциальную замкнутость графика отображения $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$, поскольку множество S_L является метризуемым компактом в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \in Q$, и $v_n \rightarrow v$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, $v_n \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi_n)$. Тогда согласно теореме 4.2 последовательность $x_n = \mathcal{T}(\xi_n, v_n)$, $n \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к $x = \mathcal{T}(\xi, v)$. Поэтому из (3.7) вытекает, что

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k \geq n} \overline{\text{co}} U(\xi_n)(t, x_k(t)) \right) \subset \overline{\text{co}} U(\xi)(t, x(t)) \text{ п. в.}$$

Поскольку $v_n(t) \in \overline{\text{co}} U(\xi_n)(t, x_n(t))$ п. в. и $v_n \rightarrow v$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$, то из теоремы Мазура следует, что $v(t) \in \overline{\text{co}} U(\xi)(t, x(t))$ п. в. Последнее включение означает, что $v \in \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$. Тем самым, отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ на Q имеет замкнутый график в $Q \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$. Известно, что если значения многозначного отображения лежат в компакте, то полунепрерывность сверху по Вьеторису отображения и компактность его значений следуют из замкнутости графика. Поэтому отображение $\xi \rightarrow \text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$ полунепрерывно сверху по Вьеторису из Q в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными значениями в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Так как $Q \subset \Lambda \setminus \mathcal{M}$ – произвольный компакт, то лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть выполняются гипотезы $H(U), 1), 2), 6), 7)$. Тогда для любого непрерывного селектора $v: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ отображения $\text{Fix } \overline{\text{co}} \Phi(\xi)$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $Q \subset \Lambda \setminus \mathcal{M}$ существует непрерывный селектор $u: \Lambda \rightarrow L^2(T, Y)$ отображения $\text{Fix } \Phi(\xi)$ такой, что

$$\|v(\xi) - u(\xi)\|_\omega < \varepsilon, \quad \xi \in Q, \quad (5.11)$$

где $\|\cdot\|_\omega$ – норма (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается дословным повторением подобной теоремы 5.2 в [19] при использовании теоремы 4.2, гипотезы $H(U), 6)$, неравенства (5.9) и включения (5.10).

§ 6. Основные результаты

Из определения решения управляемой системы (1.1), (1.2) и соотношений (4.2), (4.19), (5.1) следует, что $(x(\xi), u(\xi)) \in \mathcal{R}_U(\xi)$ тогда и только тогда, когда

$$x(\xi) = T(\xi, u(\xi)), \quad (6.1)$$

$$u(\xi) \in \text{Fix } \Phi(\xi). \quad (6.2)$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U), 1)-3), 5)$. Тогда для любого $\xi \in \Lambda$ множество $\mathcal{R}_U(\xi)$ не пусто и существует непрерывная функция $s: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такая, что:

а) выполнено

$$s(\xi) \in \mathcal{R}_U(\xi), \quad \xi \in \Lambda; \quad (6.3)$$

б) если $D \subset \Lambda$ – замкнутое множество и $s_D: D \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ – непрерывная функция, $s_D(\xi) \in \mathcal{R}_U(\xi)$, $\xi \in D$, то существует непрерывная функция $s: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, H)$ такая, что справедливо включение (6.3) и $s(\xi) = s_D(\xi)$, $\xi \in D$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U), 1)-3), 5)$. Тогда:

а) отображение $\xi \rightarrow \mathcal{R}_U(\xi)$, $\xi \in \Lambda$, является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми значениями в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$;

б) для каждого $\xi \in \Lambda$ множество $\mathcal{R}_U(\xi)$ является абсолютным ретрактом в пространстве $C(T, H) \times L^2(T, H)$, и если пространство Λ дугообразно связно, то множество $\bigcup \{\mathcal{R}_U(\xi); \xi \in \Lambda\}$ является дугообразно связным;

в) если выполняется и гипотеза $H(U), 4)$, то многозначное отображение $\xi \rightarrow \mathcal{R}_U(\xi)$ имеет замкнутый график в $\Lambda \times C(T, H) \times L^2(T, Y)$;

г) при выполнении гипотезы $H(U), 4)$ ретракцию можно выбрать непрерывно зависящей от ξ , т. е. существует непрерывная функция $g: \Lambda \times C(T, H) \times L^2(T, Y) \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такая, что

$$\begin{aligned} g(\xi, x, u) &\in \mathcal{R}_U(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \quad x \in C(T, H), \quad u \in L^2(T, Y), \\ g(\xi, x, u) &= (x, u), \quad \xi \in \Lambda, \quad (x, u) \in \mathcal{R}_U(\xi); \end{aligned}$$

д) более того, для любых непрерывных селекторов $s_i: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$, $i = 1, 2$, отображения $\mathcal{R}_U(\xi)$ существует непрерывное отображение h из $\Lambda \times [0, 1]$ в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такое, что

$$\begin{aligned} h(\xi, 0) &= s_1(\xi), \quad h(\xi, 1) = s_2(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \\ h(\xi, \tau) &\in \mathcal{R}_U(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \quad \tau \in [0, 1]. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть выполняются гипотезы $H(U), 1)-3), 5)$. Тогда для отображения $\xi \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{C}U}(\xi)$ справедливы утверждения теоремы 6.1 и утверждения а), б) следствия 6.1. Если к тому же имеет место включение (5.7), то утверждения в)–д) следствия 6.1 сохраняют свою силу и для отображения $\xi \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{C}U}(\xi)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть выполняются гипотезы $H(U), 1), 2), 6), 7)$. Тогда все утверждения теоремы 6.1 и следствия 6.1 справедливы для отображений $\mathcal{R}_U(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{C}U}(\xi)$.

ЛЕММА 6.1. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1), 2), 6), 7). Тогда отображение $\xi \rightarrow \mathcal{R}_{\overline{co}U}(\xi)$ является непрерывным по Вьеторису из $\Lambda \setminus \mathcal{M}$ в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$ с компактными значениями в $C(T, H) \times \omega\text{-}L^2(T, Y)$.

Рассмотрим пространство $C(T, H) \times L^2_\omega(T, Y)$ с нормой

$$\|h\|_{C,\omega} = \|(x, u)\|_{C,\omega} = \|x\|_{C(T,H)} \times \|u\|_\omega,$$

где $\|\cdot\|_\omega$ – норма (2.1), $h = (x, u) \in C(T, H) \times L^2(T, Y)$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполняются гипотезы $H(U)$, 1), 2), 6), 7). Тогда для любого непрерывного селектора $g: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ отображения $\mathcal{R}_{\overline{co}U}(\xi)$, любого компакта $D \subset \Lambda \setminus \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывный селектор $h: \Lambda \rightarrow C(T, H) \times L^2(T, Y)$ отображения $\mathcal{R}_U(\xi)$ такой, что

$$\|g(\xi) - h(\xi)\|_{C,\omega} < \varepsilon, \quad \xi \in Q.$$

Доказательства теорем 6.1, 6.2, леммы 6.1 и следствий 6.1–6.3 дословно повторяют доказательства подобных утверждений в [18, § 4], [19, § 6] с использованием теоремы 4.2, равенств (6.1), (6.2), теорем 5.2, 5.3, леммы 5.1 и следствий 5.3–5.5.

§ 7. Приложение

Пусть $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^l$ – конечномерные евклидовы пространства переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$, $u = (u_1, \dots, u_l) \in \mathbb{R}^l$ с нормами $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|z\|_{\mathbb{R}^N}$, $\|u\|_{\mathbb{R}^l}$ и со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^l}$.

Пусть $T = [0, 1]$, $\Lambda = [0, 1]$, $\xi \in \Lambda$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная открытая область с регулярной границей $\partial\Omega$ [21], $\Gamma = T \times \Omega$. Рассмотрим соболевские пространства $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ и пространство $H^{-1}(\Omega)$, топологически сопряженное к $H_0^1(\Omega)$. Хорошо известно, что вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ непрерывны, плотны и компактны. Обозначим через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$, и через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Как обычно, мы считаем, что сужение формы $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ на $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ совпадает с $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Пусть $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = \prod_N H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N) = \prod_N H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) = \prod_N H^2(\Omega)$, где $\prod$ обозначает прямое произведение, $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$. Всюду в дальнейшем пространство $L^2(T, H) = L^2(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^N))$ мы отождествляем с пространством $L^2(T \times \Omega, \mathbb{R}^N)$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ – замкнутое выпуклое (не обязательно ограниченное) множество, содержащее нулевой элемент O пространства $\mathbb{R}^N$. Обозначим через I^K индикаторную функцию множества K , т. е.

$$I^K(z) = \begin{cases} 0, & z \in K, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и через $\partial I^K(z)$ ее субдифференциал.

Пусть $\tilde{U}(\xi): T \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^l$ – многозначное отображение с замкнутыми значениями, $\tilde{F}(\xi): T \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^N$ – однозначное отображение, $\tilde{A}(\xi)(t, x) -$

матрица размера $N \times l$, $\xi \in \Lambda$, и $\Delta z = (\Delta z_1, \dots, \Delta z_N)$. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -z_t(\xi)(t, x) &\in -\xi \Delta z(\xi)(t, x) + \tilde{F}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)) + \tilde{A}(\xi)(t, x)u(\xi)(t, x) \\ &\quad + \partial I^K(z(\xi)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma, \\ z(\xi)(0, x) &= y(\xi)(x), \quad y(\xi)(x) \in K \text{ п. в. на } \Omega, \\ y(\xi) &\in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad z(\xi)|_{T \times \partial\Omega} = O, \quad \xi \in (0, 1], \end{aligned} \quad (7.1)$$

и предельную управляемую систему при $\xi = 0$

$$\begin{aligned} -z_t(0)(t, x) &\in \tilde{F}(0)(t, x, z(0)(t, x)) + \tilde{A}(0)(t, x)u(0)(t, x) \\ &\quad + \partial I^K(z(0)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma, \\ z(0)(0, x) &= y(0)(x), \quad y(0)(x) \in K \text{ п. в. на } \Omega, \quad y(0) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \end{aligned} \quad (7.2)$$

с ограничением на управление

$$u(\xi)(t, x) \in \tilde{U}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma, \quad \xi \in \Lambda. \quad (7.3)$$

Наряду с ограничением (7.3) рассмотрим ограничение

$$u(\xi)(t, x) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma, \quad \xi \in \Lambda. \quad (7.4)$$

Под решением управляемой системы (7.1), (7.3) при $\xi \in (0, 1]$ мы понимаем пару $(z(\xi), u(\xi))$ такую, что $z(\xi) \in W^{1,2}(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^N))$, $z(\xi)(0) = y(\xi)$, $z(\xi)(t) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ п. в. на T , $\Delta z(\xi) \in L^2(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^N))$, $u(\xi) \in L^2(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^l))$, удовлетворяющую включениям (7.1), (7.3).

Решением предельной управляемой системы при $\xi = 0$ является пара $(z(0), u(0))$, $z(0) \in W^{1,2}(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^N))$, $z(0)(0) = y(0)$, $u(0) \in L^2(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^l))$, удовлетворяющая (7.2), (7.3).

Решения управляемых систем (7.1), (7.4) и (7.2), (7.4) определяются аналогично.

Решения управляемых систем (7.1), (7.3) и (7.1), (7.4) мы будем обозначать соответственно через $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(\xi)$, $\xi \in (0, 1]$. Под $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(0)$ ($\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}\tilde{U}}(0)$) мы будем понимать решения системы (7.2), (7.3) ((7.2), (7.4)).

Введем предположения.

Гипотезы $H(\tilde{F})$. Компоненты $\tilde{f}_i(\xi)(t, x, z)$, $i = 1, \dots, N$, вектор-функции $\tilde{F}(\xi)(t, x, z)$ имеют вид $\tilde{f}_i(\xi)(t, x, z) = r(\xi)(t, x, \|z\|_{\mathbb{R}^N})z_i$, $i = 1, \dots, N$, $\xi \in \Lambda$, $t \in T$, $x \in \Omega$, $z \in K$, где функция $r(\xi): T \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами:

- а) функция $x \rightarrow r(\xi)(t, x, s)$ измерима, $s \in \mathbb{R}^+$;
- б) функция $(\xi, t, s) \rightarrow r(\xi)(t, x, s)$ непрерывна п. в. на Ω ;
- в) почти всюду на Ω функция $s \rightarrow r(\xi)(t, x, s)s$, $\xi \in \Lambda$, $t \in T$, возрастает, т. е.

$$r(\xi)(t, x, s_1)s_1 \geq r(\xi)(t, x, s_2)s_2, \quad s_1 \geq s_2; \quad (7.5)$$

г) имеет место неравенство

$$|r(\xi)(t, x, s)| \leq b \text{ п. в. на } \Omega, \quad b > 0, \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad \xi \in \Lambda. \quad (7.6)$$

Гипотезы $H(\tilde{A})$. Элементы $\tilde{a}_{ij}(\xi)(t, x)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, l$, матрицы $\tilde{A}(\xi)(t, x)$ обладают следующими свойствами:

- а) функции $x \rightarrow a_{ij}(\xi)(t, x)$ измеримы;
- б) функции $(\xi, t) \rightarrow a_{ij}(\xi)(t, x)$ непрерывны п. в. на Ω ;
- в) $|a_{ij}(\xi)(t, x)| \leq c_1$ п. в. на Ω , $c_1 > 0$, $t \in T$, $\xi \in \Lambda$.

Гипотезы $H(\tilde{U})$. Считаем, что $\tilde{U}(\xi): T \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^l$ является многозначным отображением с замкнутыми значениями таким, что:

- 1) отображение $x \rightarrow \tilde{U}(\xi)(t, x, z)$ измеримо;
- 2) отображение $(\xi, t, z) \rightarrow \tilde{U}(\xi)(t, x, z)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа $D_{\mathbb{R}^l}(\cdot, \cdot)$ п. в. на Ω ;
- 3) существует непрерывная функция $l: \Lambda \rightarrow L^2(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что почти всюду на Γ для любых $z_1, z_2 \in K$, $\xi \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$D_{\mathbb{R}^l}(\tilde{U}(\xi)(t, x, z_1), \tilde{U}(\xi)(t, x, z_2)) \leq l(\xi)(t) \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{R}^N};$$

- 4) существуют $a(\cdot) \in L^2(\Gamma, \mathbb{R}^+)$ и $b > 0$ такие, что

$$\|\tilde{U}(\xi)(t, x, z)\|_{\mathbb{R}^l} \leq a(t, x) + b\|z\|_{\mathbb{R}^N} \text{ п. в. на } \Gamma, \quad \xi \in \Lambda.$$

В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Пусть

$$\mathcal{K} = \{z \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N): z(x) \in K \text{ п. в. на } \Omega\}, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{K}^* = \{z \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N): z(x) \in K \text{ п. в. на } \Omega\}. \quad (7.8)$$

ЛЕММА 7.1. *Множество $\mathcal{K}$ является замкнутым выпуклым подмножеством пространства $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{K}^*$ является замкнутым выпуклым подмножеством пространства $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, и справедливо равенство*

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}^*}, \quad (7.9)$$

где черта сверху обозначает замыкание в $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $O \in K$, то множество $\mathcal{K}^*$ не пусто и $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}$. Выпуклость и замкнутость множества $\mathcal{K}^*$ в $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{K}$ в $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ следуют из выпуклости и замкнутости множества K . Пусть $z \in \mathcal{K}$. Так как пространство $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ плотно вложено в $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, то существует последовательность z_k , $k \geq 1$, бесконечно дифференцируемых функций из Ω в $\mathbb{R}^N$ с компактными носителями в Ω , сходящаяся к z в пространстве $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $z_k(x)$, $k \geq 1$, сходятся к $z(x)$ почти всюду. Обозначим через $\text{pr } z_k(x)$ проекцию точки $z_k(x) \in \mathbb{R}^N$ на множество K . Поскольку

$$\|\text{pr } z_k(x) - \text{pr } z_k(y)\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|z_k(x) - z_k(y)\|_{\mathbb{R}^N} \quad (7.10)$$

и функции $z_k(x)$, $k \geq 1$, являются липшицевыми на Ω , то из (7.10) следует, что функции $\text{pr } z_k(x)$ являются липшицевыми на Ω . Ясно, что

$$\text{pr } z_k(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{pr } z_k(x) \in K, \quad x \in \Omega. \quad (7.11)$$

Так как совокупность липшицевых функций является плотным подмножеством пространства $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ [22, с. 31], то $\text{pr } z_k \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$. Тогда из [21, лемма 1.34] и (7.11) следует, что $\text{pr } z_k \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$. Поэтому согласно (7.11) $\text{pr } z_k \in \mathcal{K}^*$, $k \geq 1$. Теперь из неравенства

$$\|z(x) - \text{pr } z_k(x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|z(x) - z_k(x)\| \text{ п. в. на } \Omega$$

следует, что $\text{pr } z_k \rightarrow z$ в $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Лемма доказана.

Для вектора $z = (z_1, \dots, z_N) \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ положим

$$\|\nabla z(x)\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 = \sum_{i=1}^N \|\nabla z_i(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (7.12)$$

Рассмотрим функции $\varphi_1(\xi): L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\xi \in (0, 1]$, определенные по правилу

$$\varphi_1(\xi)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi \int_{\Omega} \|\nabla z(x)\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 dx, & \text{если } z \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7.13)$$

Пусть $I^{\mathcal{K}}(z)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{K} \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Поскольку функции $\varphi_1(\xi)(z)$, $I^{\mathcal{K}}(z)$ являются выпуклыми, собственными, полунепрерывными снизу, то функции $\varphi(\xi): H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $H = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\varphi(\xi)(z) = \varphi_1(\xi)(z) + I^{\mathcal{K}}(z), \quad \xi \in \Lambda, \quad z \in H, \quad (7.14)$$

являются собственными, выпуклыми и полунепрерывными снизу. Ясно, что

$$\text{dom } \varphi(\xi) = \mathcal{K}^*, \quad \xi \in (0, 1], \quad \text{dom } \varphi(0) = \mathcal{K}. \quad (7.15)$$

ЛЕММА 7.2. Пусть $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ – монотонная функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда $\psi(z) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ для любого $z \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ и справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \langle \nabla z(x), \nabla \psi(z(x)) \rangle_{\mathbb{R}^{nN}} dx \geq 0. \quad (7.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L > 0$ – константа Липшица функции ψ и $v(x) = \psi(z(x))$, $z \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Тогда [23, § 6.4] для почти каждой прямой, параллельной координатной оси пространства $\mathbb{R}^n$, функция $v(x)$ абсолютно непрерывна вдоль этой прямой. Поэтому почти всюду на Ω функции $\frac{\partial v}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, определены, измеримы и

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{\mathbb{R}^N} \leq L \left\| \frac{\partial z}{\partial x_j} \right\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{п. в. на } \Omega, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку $z \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, то из этого неравенства следует, что $v = \psi(z) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. В силу монотонности ψ для почти каждого $x \in \Omega$ мы имеем

$$\langle v(x + te_j) - v(x), z(x + te_j) - z(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где e_j – j -й единичный вектор в $\mathbb{R}^n$. Из этого неравенства при $t \rightarrow 0$ следует, что

$$\left\langle \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}, \frac{\partial z(x)}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0 \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Теперь неравенство (7.16) вытекает из последнего неравенства. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Для любых $\xi \in (0, 1]$ справедливы равенства

$$\partial\varphi(\xi) = \partial\varphi_1(\xi) + \partial I^K, \quad (7.17)$$

$$\text{dom } \partial\varphi(\xi) = H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{K}^*, \quad (7.18)$$

$$\partial\varphi(\xi)(z) = \{-\xi\Delta z + \partial I^K\}. \quad (7.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\partial\varphi_1(\xi) + \partial I^K \subset \partial\varphi(\xi), \quad \xi \in (0, 1],$$

то для доказательства равенства (7.17) нам достаточно показать, что оператор $\partial\varphi_1(\xi) + \partial I^K$ является максимально монотонным. Рассмотрим функции $\varphi_1^i(\xi) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$,

$$\varphi_1^i(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\xi \int_{\Omega} \|\nabla z_i(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx, & \text{если } z_i \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

которые являются выпуклыми, собственными, полунепрерывными снизу. Тогда

$$\varphi_1(\xi)(z) = \sum_{i=1}^N \varphi_1^i(\xi)(z_i), \quad z = (z_1, \dots, z_N).$$

Из этого равенства следует, что включения

$$y = (y_1, \dots, y_N) \in \partial\varphi_1(\xi)(z), \quad y_i \in \partial\varphi_1^i(z_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

эквивалентны. Поскольку [24]

$$\begin{aligned} \text{dom } \partial\varphi_1^i(\xi) &= H_1^0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \partial\varphi_1^i(\xi) &= -\xi\Delta z_i, \end{aligned}$$

то

$$\text{dom } \partial\varphi_1(\xi) = H_1^0(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad (7.20)$$

$$\partial\varphi_1(\xi)(z) = -\xi\Delta z, \quad \xi \in (0, 1]. \quad (7.21)$$

Пусть $I_\lambda^K(z)$, $z \in H$, $\lambda > 0$, – регуляризация Моро–Иосиды функции $I^K(z)$. Так как

$$I^K(z) = \int_{\Omega} I^K(z(x)) dx, \quad (7.22)$$

то хорошо известно (см., например, (3.20)), что

$$\partial I_\lambda^K(z)(x) = \partial I_\lambda^K(z(x)) \text{ п. в. на } \Omega. \quad (7.23)$$

Поскольку функция $z \rightarrow \partial I_\lambda^K(z)$, $z \in \mathbb{R}^N$, является монотонной и липшицевой с константой Липшица $1/\lambda$, то из леммы 7.2 и (7.20), (7.21) и (7.23) вытекает, что

$$\langle \partial\varphi_1(\xi)(z), \partial I_\lambda^K(z) \rangle_H = \xi \int_{\Omega} \langle \nabla z(x), \nabla \partial I_\lambda^K(z(x)) \rangle_{\mathbb{R}^n N} dx \geq 0, \quad (7.24)$$

$z \in \text{dom } \partial\varphi_1(\xi)$. Поскольку $\text{dom } \partial\varphi_1(\xi) \cap \text{dom } \partial I^K \neq \emptyset$, то, воспользовавшись [24, теорема 1.10] и (7.24), мы получаем, что оператор $\partial\varphi_1(\xi) + \partial I^K$ является максимально монотонным. Поэтому равенство (7.17) доказано. Поскольку $\text{dom } \partial I^K = K$, то равенства (7.18), (7.19) вытекают из (7.17), (7.20), (7.21) и (7.8). Лемма доказана.

Пусть $M \subset \Lambda$ – множество, состоящее из нулевой точки.

ЛЕММА 7.4. Семейство функций $\varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$, определенных формулой (7.14), удовлетворяет гипотезам $H(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_n \downarrow 0$. Поскольку последовательность $\varphi(\xi_n)$, $n \geq 1$, является монотонно убывающей, то сходимость $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(0)$ следует из [11, теорема 2.46] и равенства (7.9).

Пусть $\xi_n \rightarrow \xi \in (0, 1]$ и $z \in H$. Возьмем стационарную последовательность $z_n = z$. Поскольку $\text{dom } \varphi(\xi) = K^*$, $\xi \in (0, 1]$ и $\varphi(\xi_n)(y) = \xi_n \varphi_1(1)(y)$ для любого $y \in K^*$, то

$$z_n \rightarrow z \text{ в } H, \quad \varphi(\xi)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n). \quad (7.25)$$

Пусть $z_n \rightarrow z$ в ω - H . Нам необходимо доказать, что

$$\varphi(\xi)(z) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n). \quad (7.26)$$

Для этого достаточно рассмотреть случай, когда $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n) < +\infty$. В этом случае существует подпоследовательность z_{n_k} , $k \geq 1$, последовательности z_n , $n \geq 1$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\xi_{n_k})(z_{n_k}) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n) < +\infty.$$

Поэтому $z_{n_k} \in K^*$ при достаточно больших $k \geq 1$. Тогда при достаточно больших $k \geq 1$

$$\varphi(\xi_{n_k})(z_{n_k}) = \xi_{n_k} \varphi_1(1)(z_{n_k}). \quad (7.27)$$

Поскольку $z_{n_k} \rightarrow z$ в ω - H и $z_{n_k} \in K^*$, то из (7.9) следует, что $z \in K$. Поэтому

$$\varphi(\xi)(z) = \xi \varphi_1(1)(z). \quad (7.28)$$

Из (7.27), (7.28) и полунепрерывности снизу функции $z \rightarrow \varphi_1(1)(z)$ вытекает, что

$$\varphi(\xi)(z) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} \varphi_1(1)(z_{n_k}) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_n)(z_n).$$

Тем самым неравенство (7.26) имеет место. Теперь из (7.25), (7.26) мы получаем, что $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{M} \varphi(\xi)$. Следовательно, гипотеза $H(\varphi)$, 1) имеет место.

Из (7.13), (7.14) вытекает, что

$$\{x \in H; \varphi(\xi) < r\} \neq \emptyset \quad \forall \xi \in \Lambda, \quad \forall r > 0. \quad (7.29)$$

Поэтому гипотеза $H(\varphi)$, 2) справедлива для функции $\varphi(\xi)$, $\xi \in \Lambda$. Гипотеза $H(\varphi)$, 3) следует из (7.13), (7.15) и компактности вложения $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow H$. Лемма доказана.

Рассмотрим функции $F(\xi)(t, z)$, $\xi \in \Lambda$, определенные на $T \times \mathcal{K}$, полагая

$$F(\xi)(t, z)(x) = \tilde{F}(\xi)(t, x, z(x)), \quad z \in \mathcal{K}. \quad (7.30)$$

Из гипотез $H(\tilde{F})$, а), б), г) вытекает, что $F(\xi)(t, z)$ для каждого $\xi \in \Lambda$ является отображением из $T \times \mathcal{K}$ в H .

Пусть $Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$. На пространстве $T \times Y$ рассмотрим оператор $A(\xi)(t)$, $\xi \in \Lambda$, определенный по правилу

$$(A(\xi)(t)u)(x) = \tilde{A}(\xi)(t, x)u(x), \quad u \in Y. \quad (7.31)$$

Из гипотез $H(\tilde{A})$ следует, что $A(\xi)(t) \in \mathcal{L}(Y, H)$, $t \in T$, $\xi \in \Lambda$.

Рассмотрим многозначное отображение $(t, z) \rightarrow U(\xi)(t, z)$, $\xi \in \Lambda$, $t \in T$, $z \in \mathcal{K}$, полагая

$$U(\xi)(t, z) = \{u \in Y : u(x) \in \tilde{U}(\xi)(t, x, z(x)) \text{ п. в. на } \Omega\}. \quad (7.32)$$

Из гипотез $H(\tilde{U})$, 1), 2), 4) вытекает, что для каждого $t \in T$, $\xi \in \Lambda$, $z \in \mathcal{K}$ множество $U(\xi)(t, z)$ является непустым ограниченным подмножеством пространства Y и в соответствии с [20, теорема 1.5] имеем

$$\overline{\text{co}} U(\xi)(t, z) = \{u \in Y : u(x) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(\xi)(t, x, z(x)) \text{ п. в. на } \Omega\}. \quad (7.33)$$

ЛЕММА 7.5. Пусть выполняются гипотезы $H(\tilde{F})$, $H(\tilde{A})$, $H(\tilde{U})$. Тогда для отображений $F(\xi)(t, z)$, $A(\xi)(t)$, $U(\xi)(t, z)$, определенных соотношениями (7.30)–(7.32), имеют место гипотезы $H(F)$, $H(A)$, $H(U)$, 1), 2), 6), 7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство выполнения гипотез $H(F)$, 1), 2), 4), $H(A)$, $H(U)$, 1), 2), 6), 7) проводится аналогично доказательству подобных утверждений в [19, § 7], [25, § 7].

Воспользовавшись гипотезой $H(\tilde{F})$, в) и доказательством утверждения а) в лемме 1.6 из [21], мы получим, что

$$\langle F(\xi)(t, z_1) - F(\xi)(t, z_2), z_1 - z_2 \rangle_H \geq 0 \text{ п. в. на } T, \quad \xi \in \Lambda, \quad z_1, z_2 \in \text{dom } \varphi(\xi).$$

Тем самым гипотеза $H(F)$, 3) имеет место. Лемма доказана.

Пусть $y_0 \in \mathcal{K}$ и $r > 0$. Тогда из леммы 7.4 и следствия 3.1 вытекает, что существует непрерывная функция $y: \Lambda \rightarrow H$ такая, что

$$y(0) = y_0, \quad \varphi(\xi)(y(\xi)) \leq r, \quad \xi \in \Lambda, \quad (7.34)$$

где $\varphi(\xi)$ – функция, определенная равенством (7.14).

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} -\dot{z}(\xi)(t) &\in -\xi \Delta z(\xi)(t) + \partial I^{\mathcal{K}}(z(\xi)(t)) + F(\xi)(t, z(\xi)(t)) + A(\xi)(t)u(\xi)(t), \\ z(\xi)(0) &= y(\xi), \quad \xi \in \Lambda, \end{aligned} \quad (7.35)$$

с ограничениями на управление

$$u(\xi)(t) \in U(\xi)(t, z(\xi)(t)) \quad \text{п. в. на } T, \quad (7.36)$$

$$u(\xi)(t) \in \overline{\text{co}} U(\xi)(t, z(\xi)(t)) \quad \text{п. в. на } T, \quad (7.37)$$

где $F(\xi)(t, z)$, $A(\xi)(t)$, $U(\xi)(t, z)$, $\overline{\text{co}} U(\xi)(t, z)$ определены соотношениями (7.30)–(7.33).

Решения управляемых систем (7.35), (7.36) и (7.35), (7.37) определяются точно так же, как и решения управляемых систем (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3), и обозначаются $\mathcal{R}_U(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для любого $\xi \in \Lambda$ множества $\mathcal{R}_U(\xi)$ и $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi)$ не пусты и для них справедливы все утверждения теоремы 6.1, следствия 6.1, леммы 6.1 и теоремы 6.2.*

Более того, для любого $\xi \in (0, 1]$ любая траектория $z(\xi)$ управляемой системы (7.35), (7.36) ((7.35), (7.37)) обладает следующими свойствами:

$$z(\xi)(t) \in \mathcal{K}^*, \quad t \in T, \quad z(\xi)(t) \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{K}^* \text{ п. в. на } T, \quad (7.38)$$

$$z(\xi) \in C(T, H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)), \quad (7.39)$$

$$\Delta z(\xi) \in L^2(T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)). \quad (7.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы вытекает из равенств (7.17), (7.21) и лемм 7.4, 7.5. Согласно определению решения управляемой системы имеем $z(\xi)(t) \in \text{dom } \partial\varphi(\xi)$ п. в. на T . Поэтому включения (7.38) вытекают из (7.15), (7.18).

Пусть $\xi \in (0, 1]$ фиксировано и $z(\xi)$ – траектория управляемой системы. Из леммы 3.2 вытекает, что функция $t \rightarrow \varphi(\xi)(z(t))$ абсолютно непрерывна. Поскольку $z(t) \in \text{dom } \varphi_1(\xi)$, $t \in T$, то $\varphi(\xi)(z(t)) = \varphi_1(\xi)(z(t))$. Поэтому функция $t \rightarrow \varphi_1(\xi)(z(t))$ абсолютно непрерывна. Так как $z(\xi)(t) = (z_1(\xi)(t), \dots, z_N(\xi)(t))$, то из (7.13) вытекает, что:

1) функции $t \rightarrow z_i(\xi)(t)$, $i = 1, \dots, N$, непрерывны из T в $L^2(\Omega)$;

2) функции $t \rightarrow \|z_i(\xi)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int_{\Omega} \|\nabla z_i(\xi)(t)(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ непрерывны и справедливо неравенство

$$\|z_i(\xi)(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M, \quad t \in T, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.41)$$

при некотором $M > 0$.

Из неравенства (7.41) следует, что каждое из множеств $Q_i = \{z_i(\xi)(t), t \in T\}$, $i = 1, \dots, N$, является относительно компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}H_0^1(\Omega)$.

Согласно 1) для любого $h \in L^2(\Omega)$ имеем:

3) функции $t \rightarrow \langle z_i(\xi)(t), h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \langle z_i(\xi)(t), h \rangle \rangle$, $i = 1, \dots, N$, непрерывны.

Поскольку каждое множество Q_i , $i = 1, \dots, N$, является относительно компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}H_0^1(\Omega)$ и вложение $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ плотно, то из 3) вытекает, что

4) функции $t \rightarrow z_i(\xi)(t)$, $i = 1, \dots, N$, из T в $\omega\text{-}H_0^1(\Omega)$ непрерывны.

Теперь из 2), 4) следует, что функции $t \rightarrow z_i(\xi)(t)$, $i = 1, \dots, N$, являются непрерывными из T в $H_0^1(\Omega)$. Тем самым включение (7.39) доказано.

Докажем теперь включение (7.40). Пусть $\xi_* \in (0, 1]$, $(z(\xi_*), u(\xi_*))$ – решение управляемой системы и $f(t) = F(\xi_*)(t, z(\xi_*)(t)) + A(\xi_*)(t)u(\xi_*)(t)$. Тогда $f \in L^2(T, H)$ и $z(\xi_*)$ является единственным решением включения

$$\begin{aligned} -\dot{z}(t) &\in -\xi_* \Delta z(t) + \partial I^{\mathcal{K}}(z(t)) + f(t), \\ z(0) &= y(\xi_*). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Пусть $I_\lambda^K(z)$, $z \in H$, $\lambda > 0$, – регуляризация Моро–Иосиды функции $I^K(z)$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\psi(\lambda)(z) &= \varphi_1(\xi_*)(z) + I_\lambda^K(z), \quad \lambda \in (0, 1], \\ \psi(0) &= \varphi_1(\xi_*)(z) + I^K(z).\end{aligned}$$

Поскольку функция $z \rightarrow I_\lambda^K(z)$, $\lambda \in (0, 1]$, является выпуклой и непрерывной на H , то хорошо известно, что

$$\partial\psi(\lambda) = \partial\varphi_1(\xi_*) + \partial I_\lambda^K, \quad \lambda \in (0, 1].$$

Поэтому

$$\text{dom } \psi(\lambda) = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N),$$

$$\text{dom } \partial\psi(\lambda) = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad (7.43)$$

$$\partial\psi(\lambda)(z) = -\xi_*\Delta z + \partial I_\lambda^K(z), \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (7.44)$$

Пусть $\lambda_k \downarrow 0$. Тогда из (2.5) и [11, теорема 2.40] вытекает, что

$$\psi(\lambda_k) \xrightarrow{M} \psi(0). \quad (7.45)$$

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}-\dot{z}_k(t) &= -\xi_*\Delta z_k(t) + \partial I_{\lambda_k}^K(z_k(t)) + f(t), \quad k \geq 1, \\ z_k(0) &= y(\xi_*).\end{aligned} \quad (7.46)$$

Воспользовавшись при $\mathcal{M} = \emptyset$ следствием 4.1, теоремой 4.2, примененной к уравнениям (7.46), и соотношениями (7.44), (7.45), мы получим, что для каждого $k \geq 1$ уравнение (7.46) имеет единственное решение z_k , последовательность z_k , $k \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к единственному решению $z_*(\xi_*)$ включения (7.42) и

$$\dot{z}_k \rightarrow \dot{z}(\xi_*) \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (7.47)$$

При этом согласно (7.43)

$$z_k(t) \in \text{dom } \partial\varphi_1(\xi) = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ п. в.} \quad (7.48)$$

Поскольку функция $z \rightarrow \partial I_{\lambda_k}^K(z)$ липшицева, то функции $\partial I_{\lambda_k}^K(z_k(t))$, $k \geq 1$, являются элементами пространства $L^2(T, H)$. Тогда из (7.46) вытекает, что $\Delta z_k \in L^2(T, H)$, $k \geq 1$. Воспользовавшись (7.46), (7.48) и леммой 3.2, мы получим

$$\varphi_1(\xi_*)(z_k(t)) - \varphi_1(\xi_*)(y(\xi_*)) = -\xi_* \int_0^t \langle \dot{z}_k(\tau), \Delta z_k(\tau) \rangle_H d\tau. \quad (7.49)$$

Из равенства (7.49) и (7.46) вытекает, что

$$\varphi_1(\xi_*)(z_k(t)) - \varphi_1(\xi_*)(y(\xi_*)) = -\xi_*^2 \int_0^t \|\Delta z_k(\tau)\|_H^2 d\tau$$

$$+ \xi_* \int_0^t \langle \Delta z_k(\tau), \partial I_\lambda^K(z_k(\tau)) \rangle_H d\tau + \xi_* \int_0^t \langle \Delta z_k(\tau), f(\tau) \rangle_H d\tau. \quad (7.50)$$

Используя равенство (7.50) и соотношения (7.13), (7.48), (7.24), получаем

$$\xi_*^2 \int_0^t \|\Delta z_k(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \varphi_1(\xi_*)(y(\xi_*)) + \xi_* \int_0^t \|\Delta z_k(\tau)\|_H \|f(\tau)\|_H d\tau, \\ k \geq 1, \quad t \in T.$$

Применяя неравенство Коши к последнему члену в этом неравенстве, мы получим

$$\frac{1}{2} \xi_*^2 \int_0^t \|\Delta z_k(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \varphi_1(\xi_*)(y(\xi_*)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\tau)\|_H^2 d\tau. \quad (7.51)$$

Из неравенства (7.51) и соотношений (7.46), (7.47) вытекает, что последовательность v_k ,

$$v_k(t) = \partial I_{\lambda_k}^K(z_k(t)) + f(t), \quad k \geq 1, \quad (7.52)$$

ограничена в $L^2(T, H)$. Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что

$$v_k \rightarrow v \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (7.53)$$

Рассмотрим уравнение

$$-\dot{y}_k(t) = -\xi_* \Delta y_k(t) + v_k(t), \quad k \geq 1, \text{ п. в.}, \\ y_k(0) = y(\xi_*). \quad (7.54)$$

Поскольку для любого $r > 0$ множество $\{z \in H: \|z\| \leq r, \varphi_1(\xi_*)(z) \leq r\}$ относительно компактно в H , то, используя следствие 4.1 и теорему 4.2 для уравнения (7.54), мы получим, что при любом $k \geq 1$ уравнение (7.54) имеет единственное решение y_k и согласно (7.53) последовательность y_k , $k \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к единственному решению y уравнения

$$-\dot{y}(t) = -\xi_* \Delta y(t) + v(t) \text{ п. в.}, \\ y(0) = y(\xi_*). \quad (7.55)$$

С другой стороны, согласно (7.52) имеем $z_k = y_k$, $k \geq 1$. Так как z_k , $k \geq 1$, сходится в $C(T, H)$ к единственному решению $z(\xi_*)$ включения (7.42) и $z_k = y_k$, $k \geq 1$, то $z(\xi_*) = y$. Поэтому

$$-\dot{z}(\xi_*)(t) = -\xi_* \Delta z(\xi_*)(t) + v(t) \text{ п. в.}$$

Из этого равенства следует, что $\Delta z(\xi_*) \in L^2(T, H)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. Для любого $\xi \in [0, 1]$ множество $\mathcal{R}_{\bar{U}}(\xi)$ ($\mathcal{R}_{\bar{c} \cap \bar{U}}(\xi)$) не пусто и совпадает с множеством $\mathcal{R}_U(\xi)$ ($\mathcal{R}_{\bar{c} \cap U}(\xi)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in (0, 1]$ и $(z(\xi), u(\xi)) \in \mathcal{R}_U(\xi)$ ($\mathcal{R}_{\bar{c} \cap U}(\xi)$). Тогда согласно теореме 7.1

$$z(\xi) \in W^{1,2}(T, H), \quad z(\xi)(0) = y(\xi), \quad u(\xi) \in L^2(T, Y), \quad (7.56)$$

$$z(\xi)(t) \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ п. в. на } T, \quad \Delta z(\xi) \in L^2(T, H) \quad (7.57)$$

и почти всюду на T выполняются включения (7.35), (7.36) ((7.35), (7.37)).

Пусть $y \in H$. Тогда хорошо известно (см., например, утверждение 3.2), что для элемента $y \in H$ следующие утверждения эквивалентны:

$$y \in \partial I^K(z), \quad (7.58)$$

$$y(x) \in \partial I^K(z(x)) \text{ п. в. на } \Omega. \quad (7.59)$$

Из (7.35) следует, что

$$v(t) \in \partial I^K(z(\xi)(t)) \text{ п. в. на } T, \quad (7.60)$$

где

$$v(t) = -\dot{z}(\xi)(t) + \xi \cdot \Delta z(\xi)(t) - F(\xi)(t, z(\xi)(t)) - A(\xi)(t)u(\xi)(t). \quad (7.61)$$

Так как $v \in L^2(T, H)$, из (7.60) и эквивалентности включений (7.58), (7.59) вытекает, что

$$v(t)(x) \in \partial I^K(z(\xi)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma. \quad (7.62)$$

Воспользовавшись (7.56), (7.57), (7.61), (7.62), (7.30)–(7.32) ((7.33)), мы получим, что $(z(\xi), u(\xi)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\xi))$. Если $\xi = 0$, то включение $(z(0), u(0)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(0) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(0))$ доказывается аналогично. Тем самым множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\xi))$, $\xi \in [0, 1]$, не пусто.

Пусть $(z(\xi), u(\xi)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\xi))$, $\xi \in (0, 1]$. Тогда из определения решения управляемой системы (7.1), (7.3) ((7.1), (7.4)) и теоремы Фубини следует, что имеют место соотношения (7.56), (7.57) и

$$v(t, x) \in \partial I^K(z(\xi)(t, x)) \text{ п. в. на } \Gamma, \quad (7.63)$$

где

$$\begin{aligned} v(t, x) = & -z_t(\xi)(t, x) + \xi \Delta z(\xi)(t, x) - \tilde{F}(\xi)(t, x, z(\xi)(t, x)) \\ & - \tilde{A}(\xi)(t, x)u(\xi)(t, x). \end{aligned} \quad (7.64)$$

Поскольку функция $v(t, x)$ является элементом пространства $L^2(T \times \Omega, \mathbb{R}^N)$, то $v \in L^2(T, H)$. Тогда из теоремы Фубини следует, что $v(t) \in H$ при почти каждом t . Поэтому из (7.63), (7.64) и эквивалентности включений (7.58), (7.59) следует, что

$$v(t) \in \partial I^K(z(\xi)(t)) \text{ п. в. на } T. \quad (7.65)$$

Используя (7.56), (7.57), (7.64), (7.65), (7.30)–(7.32) ((7.33)) и теорему Фубини, мы получаем, что $(z(\xi), u(\xi)) \in \mathcal{R}_U(\xi) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(\xi))$, $\xi \in (0, 1]$. Включение $(z(0), u(0)) \in \mathcal{R}_U(0) (\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(0))$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Из теорем 7.1, 7.2 следует, что для отображений $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi)$, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}} \tilde{U}}(\xi)$ справедливы все утверждения теоремы 6.1, следствия 6.1, леммы 6.1 и теоремы 6.2. Формулировки этих утверждений применительно к системам (7.1), (7.3) ((7.1), (7.4)) и (7.2), (7.3) ((7.2), (7.4)) мы не приводим в силу их очевидности.

Приведем два простых следствия.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $y(0) \in \mathcal{K}$, $(z(0), u(0)) \in \mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(0)$, $z(0)(0) = y(0)$ и $\xi_k \downarrow 0$. Тогда существует последовательность $(z(\xi_k), u(\xi_k)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi_k)$, $k \geq 1$, $z(\xi_k)(0) = y(\xi_k)$, такая, что $z(\xi_k) \rightarrow z(0)$ в $C(T, H)$, $u(\xi_k) \rightarrow u(0)$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7.4 и следствия 3.1 вытекает, что для $r > 0$ существует непрерывная функция $y: \Lambda \rightarrow H$, удовлетворяющая соотношениям (7.34). Поэтому мы можем рассмотреть управляемую систему (7.35) с ограничениями (7.36), (7.37) и с начальными условиями $z(\xi)(0) = y(\xi)$, $\xi \in \Lambda$. Из теорем 7.1, 7.2 мы получаем, что существует непрерывная функция $\xi \rightarrow (\tilde{z}(\xi), \tilde{u}(\xi))$ из Λ в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$ такая, что $(\tilde{z}(\xi), \tilde{u}(\xi)) \in \mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(\xi)$, $(\tilde{z}(0), \tilde{u}(0)) = (z(0), u(0))$. Пусть $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\xi_k \downarrow 0$. Тогда из теоремы 6.2 вытекает, что существует последовательность $(z(\xi_k), u(\xi_k)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi_k)$ такая, что

$$\|\tilde{z}(\xi_k) - z(\xi_k)\|_{C(T, H)} \leq \varepsilon_k, \quad \|\tilde{u}(\xi_k) - u(\xi_k)\|_{\omega} \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 1,$$

где $\|\cdot\|_{\omega}$ – норма (2.1). Поскольку топология пространства $L^2_{\omega}(T, Y)$ не сильнее топологии пространства $L^2(T, Y)$, то из этих неравенств вытекает

$$z(\xi_k) \rightarrow z(0) \text{ в } C(T, H), \quad u(\xi_k) \rightarrow u(0) \text{ в } L^2_{\omega}(T, Y). \quad (7.66)$$

Воспользовавшись неравенством (3.8) и первым соотношением в (7.66), мы получим, что последовательность $u(\xi_k)$, $k \geq 1$, ограничена в $L^2(T, Y)$. Поэтому из второго соотношения в (7.66) и [25, лемма 2.3] следует, что $u(\xi_k) \rightarrow u(0)$ в $\omega\text{-}L^2(T, Y)$. Следствие доказано.

Следствие 7.1 указывает на возможность аппроксимации элементов множества $\mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(0)$ элементами множества $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi)$, $\xi \in (0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть $y(0) \in \mathcal{K}$, $(z(0), u(0)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(0)$ ($\mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(0)$), $z(0)(0) = y(0)$ и $\xi_k \downarrow 0$. Тогда существует последовательность $(z(\xi_k), u(\xi_k)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi_k)$ ($\mathcal{R}_{\text{co}\tilde{U}}(\xi_k)$), $z(\xi_k) = y(\xi_k)$, $k \geq 1$, такая, что

$$(z(\xi_k), u(\xi_k)) \rightarrow (z(0), u(0)) \text{ в } C(T, H) \times L^2(T, Y), \quad (7.67)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k \int_T \int_{\Omega} \|\nabla z(\xi_k)(t, x)\|_{\mathbb{R}^{nN}}^2 dx dt = 0. \quad (7.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7.4 и определения сходимости по Моско вытекает, что существует последовательность $y(\xi_k) \in \text{dom } \varphi(\xi_k)$,

$$y(\xi_k) \rightarrow y(0) \text{ в } H, \quad \varphi(\xi_k)(y(\xi_k)) \rightarrow \varphi(0)(y(0)), \quad (7.69)$$

где $\varphi(\xi)$ определяется равенством (7.14). Поскольку $\varphi(\xi_k)(y(\xi_k)) \leq r$, $k \geq 1$, при некотором $r > 0$, то из теорем 7.1, 7.2 и 6.1 вытекает, что существует последовательность $(z(\xi_k), u(\xi_k)) \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(\xi_k)$, $z(\xi_k)(0) = y(\xi_k)$, $k \geq 1$, для которой имеет место соотношение (7.67). Используя лемму 4.2 и теорему 4.2, мы получим

$$\dot{z}(\xi_k) \rightarrow \dot{z}(0) \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H), \quad (7.70)$$

$$\varphi(\xi_k)(z(\xi_k))(t) \leq M, \quad t \in T, \quad (7.71)$$

при некотором $M > 0$. Из леммы 3.2, (7.19) и (7.35) вытекает, что

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_k)(z(\xi_k))(t) - \varphi(\xi_k)(y(\xi_k)) &= - \int_0^t \|\dot{z}(\xi)(\tau)\|_H^2 d\tau \\ &- \int_0^t \langle \dot{z}(\xi_k)(\tau), F(\xi_k)(\tau, z(\xi_k)(\tau)) + A(\xi_k)(\tau)u(\xi_k)(\tau) \rangle_H d\tau. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Воспользовавшись гипотезами $H(F)$, $H(A)$ и соотношением (7.67), мы получим (см., например, доказательство теоремы 4.2), что

$$F(\xi_k)(t, z(\xi_k)(t)) \rightarrow F(0)(t, z(0)(t)) \quad \text{в } L^2(T, H), \quad (7.73)$$

$$A(\xi_k)(t)u(\xi_k)(t) \rightarrow A(0)(t)u(0)(t) \quad \text{в } L^2(T, H). \quad (7.74)$$

Переходя к пределу в (7.72) и учитывая (7.69), (7.70), (7.73), (7.74), мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\xi_k)(z(\xi_k))(t) &\leq \varphi(0)(y(0)) - \int_0^t \|\dot{z}(0)(\tau)\|_H^2 d\tau \\ &- \int_0^t \langle \dot{z}(0)(\tau), F(0)(\tau, z(0)(\tau)) + A(0)(\tau)u(0)(\tau) \rangle_H d\tau. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Поскольку $z(\xi_k)(t) \in \text{dom } \varphi(\xi_k)$, $k \geq 1$, то из (7.15) следует, что

$$\varphi(\xi_k)(z(\xi_k))(t) = \varphi_1(\xi_k)(z_k(t)), \quad \varphi(0)(y(0)) = I^K(y(0)) = 0. \quad (7.76)$$

Поэтому из (7.13), (7.75), (7.76) и леммы 3.2 вытекает

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \xi_k \int_{\Omega} \|\nabla z(\xi_k)(t, x)\|_{\mathbb{R}^{n_N}}^2 dx \\ \leq \int_0^t \langle \dot{z}(0)(\tau), -\dot{z}(0)(\tau) - F(0)(\tau, z(0)(\tau)) - A(0)(\tau)u(0)(\tau) \rangle_H d\tau \\ = I^K(z(0)(t)) - I^K(y(0)) = 0, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k \int_{\Omega} \|\nabla z(\xi_k)(t, x)\|_{\mathbb{R}^{n_N}}^2 dx = 0, \quad t \in T. \quad (7.77)$$

Теперь равенство (7.68) следует из (7.71), (7.77) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из теорем 7.1, 7.2 и следствия 6.2 вытекает, что пределом сходящейся в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$ последовательности решений управляемой системы (1.4), (1.5) при $\xi_n \rightarrow 0+$ является решение управляемой системы (1.6), (1.7). Более того, для любого решения предельной управляемой системы (1.6), (1.7) и $\xi_n \rightarrow 0+$ существует сходящаяся в $C(T, H) \times L^2(T, Y)$ к этому решению последовательность решений управляемой системы (1.4), (1.5). Тем самым дается ответ на вопрос, что является пределом сходящейся последовательности решений управляемой системы при $\xi_n \rightarrow 0+$.

Исследованию частного вида управляемой системы (7.1) и связи ее решений с решениями предельной системы (7.2) была посвящена работа [7]. В этой

работе на управление не накладывались ограничения и указывалось, что подобная проблема возникает в задачах о фазовых переходах в многокомпонентных системах. В основу наших исследований положен подход, отличный от использованного в [7]. Все утверждения основной теоремы 2.2 в [7] могут быть получены из теоремы 7.1 и следствия 7.2 настоящей работы. Более того, наши утверждения носят более содержательный характер, так как в них установлены регулярные свойства функции $z(\xi)$ (см. (7.38), (7.39)).

Отметим, что зависимость от параметра для других классов эволюционных управляемых систем и включений изучалась в [8], [9].

Автор благодарит профессора Ю. Спрекелса за любезно представленное доказательство леммы 7.2.

Список литературы

1. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, **5**, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1973.
2. G. Aronsson, L. C. Evans, Y. Wu, “Fast/slow diffusion and growing sandpiles”, *J. Differential Equations*, **131**:2 (1996), 304–335.
3. J. W. Barrett, L. Prigozhin, “Bean’s critical state model as the $p \rightarrow \infty$ limit of an evolutionary p -Laplacian equation”, *Nonlinear Anal.*, **42**:6 (2000), 977–993.
4. H. M. Yin, “On a p -Laplacian type of evolution system and applications to the Bean model in the type-II superconductivity theory”, *Quart. Appl. Math.*, **59**:1 (2001), 47–66.
5. P. Krejčí, J. Sprekels, “Phase-field systems for multi-dimensional Prandtl–Ishlinskii operators with non-polyhedral characteristics”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **25**:4 (2002), 309–325.
6. N. Kenmochi, J. Sprekels, “Phase-field systems with vectorial order parameters including diffusional hysteresis effects”, *Comm. Pure. Appl. Anal.*, **1**:4 (2002), 495–511.
7. P. Krejčí, J. Sprekels, “Parabolic regularization of differential inclusions and the stop operator”, *Interfaces Free Bound.*, **4**:4 (2002), 423–435.
8. К. Куратовский, *Топология*, т. II, Мир, М., 1969.
9. H. Attouch, “Familles d’opérateurs maximaux monotones et mesurabilité”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **120**:1 (1979), 35–111.
10. C. J. Himmelberg, “Measurable relation”, *Fund. Math.*, **87** (1975), 53–72.
11. H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Appl. Math. Ser., Pitman, Boston, MA, 1984.
12. E. Michael, “Continuous selections. I”, *Ann. of Math.* (2), **63**:2 (1956), 361–382.
13. N. Kenmochi, “Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications”, *Bull. Fac. Educ. Chiba Univ.*, **30** (1981), 1–87.
14. Y. Yamada, “On evolution equations generated by subdifferential operators”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **23**:3 (1976), 491–515.
15. А. Н. Филатов, Л. В. Шарова, *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний*, Наука, М., 1976.
16. A. A. Tolstonogov, D. A. Tolstonogov, “ L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems”, *Set-Valued Anal.*, **4**:2 (1996), 173–203.
17. А. А. Толстоногов, “ L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. I. Теоремы существования”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:3 (1999), 695–709; англ. пер.: A. A. Tolstonogov, “ L_p -continuous

- selectors of fixed points of multivalued mappings with decomposable values. I. Existence theorems", *Siberian Math. J.*, **40**:3 (1999), 595–607.
18. А. А. Толстоногов, " L_p -непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений с разложимыми значениями. III. Приложения", *Сиб. матем. журн.*, **40**:6 (1999), 1380–1396; англ. пер.: А. А. Tolstonogov, " L_p -continuous selectors of fixed points of multivalued mappings with decomposable values. III. Applications", *Siberian Math. J.*, **40**:6 (1999), 1173–1187.
 19. А. А. Толстоногов, "О решениях эволюционной управляемой системы, зависящей от параметров", *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 113–140; англ. пер.: А. А. Tolstonogov, "On solutions of an evolution control system depending on parameters", *Sb. Math.*, **194**:9 (2003), 1383–1409.
 20. F. Hiai, H. Umegaki, "Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions", *J. Multivariate Anal.*, **7**:1 (1977), 149–182.
 21. X. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abteilung, **38**, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
 22. Д. Киндерлерер, Г. Стампакия, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure Appl. Math., **88**, Academic Press, New York–London, 1980.
 23. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996; англ. пер. 1-го изд.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Vol. I, Scripta Series in Mathematics, Wiley, New York, 1978; Vol. II, 1979.
 24. V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Res. Notes in Math., **100**, Pitman, Boston, MA, 1984.
 25. А. А. Толстоногов, "Свойства множества допустимых пар "траектория–управление" эволюционных управляемых систем первого порядка", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 201–224; англ. пер.: А. А. Tolstonogov, "Properties of the set of admissible "state-control" pairs for first-order evolution control systems", *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 617–640.

А. А. Толстоногов (А. А. Tolstonogov)
 Институт динамики систем
 и теории управления СО РАН
 E-mail: aatol@icc.ru

Поступило в редакцию
 26.12.2006
 24.09.2007