Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Коссовский, Об оболочках голоморфности модельных многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 113–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:29:57

УДК 517.53

И. Г. Коссовский

Об оболочках голоморфности модельных многообразий

Построены оболочки голоморфности модельных многообразий порядка четыре. Предъявлен класс таких многообразий, для которых оболочка представляет собой цилиндрическую по группе переменных область, основанием которой служит область Зигеля второго рода. С помощью этого результата доказана голоморфная жесткость модельных многообразий рассмотренного класса. Изучена оболочка голоморфности специального модельного многообразия типа (1,4). Доказано, что она представляет собой область ограниченного вида, остов которой совпадает с исходной поверхностью, и что группа ее голоморфных автоморфизмов совпадает с группой голоморфных автоморфизмов исходного многообразия. При этом группа порождает слоение построенной оболочки на орбиты, в общем положении представляющие собой восьмимерные однородные несферические вполне невырожденные многообразия в $\mathbb{C}^5$.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

В теории вещественных подмногообразий комплексного пространства оказывается полезным понятие *касательного модельного многообразия*, введенное В. К. Белошапкой. Суть соответствующей конструкции состоит в следующем. Пусть M – росток порождающего многообразия типа (n, k) в пространстве $\mathbb{C}^N$ (это означает, что k – вещественная коразмерность M , а n – CR-размерность M , $k + n = N$) с центром в точке p . Для такого ростка вводится понятие *полной невырожденности*. Полная невырожденность – это условие, налагаемое на алгебру Леви–Танаки многообразия [1] и заключающееся в том, что, во-первых, эта алгебра имеет конечную длину в точке p (*конечность типа по Кону*), а во-вторых, переход к каждой следующей градуированной компоненте алгебры дает максимально возможный рост размерности линейного пространства составляющих ее полей в данной точке. Это условие можно также выразить, используя понятие типа многообразия по Блуму–Грэхэму [2]. Отметим, что полная невырожденность ростка есть условие общего положения. Итак, касательное модельное многообразие порождающего вполне невырожденного ростка в данной точке – это некоторое алгебраическое многообразие того же типа по Блуму–Грэхэму. При этом если уравнение ростка записать в виде

$$\operatorname{Im} w = h(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w),$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^k$, h – гладкая функция в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^{2n+k}$, $h(0) = 0$ (этого всегда можно достичь подходящей заменой координат), то уравнение касательного модельного многообразия (или, короче, касательной модели) будет иметь вид

$$\operatorname{Im} w = F(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w),$$

где F – набор из k многочленов степени не меньше двух, причем эти степени не убывают с ростом индекса j компоненты w_j . Максимальная из этих степеней называется *порядком модели*, или ее *длиной* (последнее обусловлено тем, что порядок будет равен длине алгебры Леви–Танаки модельного многообразия). При этом тейлоровское разложение вектор-функции h будет иметь вид

$$h(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) = F(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w) + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые более высокого веса, чем выделенные (веса назначаются специальным образом, в зависимости от типа ростка). В общем виде соответствующая конструкция подробно описана в работе [1].

Ценность понятия вполне невырожденной касательной модели обусловлена ее многочисленными свойствами “хорошей” модели такими, как универсальность, голоморфная однородность, конечномерность и полиномиальность алгебры голоморфных автоморфизмов, конечномерность и рациональность группы голоморфных автоморфизмов, и особенно тем, что свойства касательной модели во многом обуславливают свойства самого ростка, что видно, например, из свойства экстремальности: размерность локальной группы ростка не превосходит размерности группы его касательной модели, более того, стабилизатор центра ростка вкладывается как подгруппа Ли в стабилизатор начала координат в группе модельного многообразия (более подробно об этих свойствах см. [1], [3], [4]).

Вполне невырожденные модели второго порядка соответствуют случаю $k \leq n^2$. Соответствующая модельная поверхность – квадрика – записывается уравнениями $\operatorname{Im} w = \langle z, \bar{z} \rangle$, где $\langle z, \bar{z} \rangle$ – набор из k эрмитовых форм. Полная невырожденность модели означает линейную независимость этих форм и отсутствие у них общего ядра. Длина алгебры Леви–Танаки для квадрик равна двум (см. [3]). Если же k больше n^2 – размерности пространства эрмитовых форм, то условие линейной независимости форм выполняться не может, что приводит к появлению моделей более высоких порядков. Так, в случае $n^2 < k \leq n^2(n+2)$ вполне невырожденной моделью является кубика, уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \langle z, \bar{z} \rangle, \\ \operatorname{Im} w_3 &= 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}), \end{aligned}$$

где Φ – набор из $k - n^2$ однородных кубических многочленов бистепени $(2,1)$, линейно независимых над $\mathbb{R}$ и симметричных по первым двум аргументам (размерность пространства таких многочленов равна $n^2(n+1)$), а $\langle z, \bar{z} \rangle$ – набор из n^2 линейно независимых эрмитовых форм. Размерность алгебры Леви–Танаки для кубик повышается на единицу и равна трем (см. [5]). Алгебре Леви–Танаки длины 4 соответствуют модельные многообразия четвертого порядка, в этом случае

$$n^2(n+2) < k \leq n^2(n+2) + \frac{n^2(n+1)(7n+11)}{12},$$

а уравнения модели записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= \langle z, \bar{z} \rangle, \\ \operatorname{Im} w_3 &= 2 \operatorname{Re} \langle z, z, \bar{z} \rangle, \\ \operatorname{Im} w_4 &= 2 \operatorname{Re} (F_{22}(z, z, \bar{z}, \bar{z}) + F_{31}(z, z, z, \bar{z})), \end{aligned}$$

где $\langle z, \bar{z} \rangle$ – набор из n^2 линейно независимых эрмитовых форм, $\langle z, z, \bar{z} \rangle$ – набор из $n^2(n+1)$ линейно независимых однородных кубических многочленов, симметричных по первым двум аргументам, $F_{22}(z, z, \bar{z}, \bar{z})$ и $F_{31}(z, z, z, \bar{z})$ – наборы из $k - n^2(n+2)$ однородных многочленов бистепеней (2,2) и (3,1) соответственно (набор F_{22} симметричен по первым двум и последним двум аргументам, набор F_{31} – по первым трем аргументам), суммы которых образуют вектор-функцию с линейно независимыми компонентами. Более длинным алгебрам Леви–Танаки соответствуют модели более высоких порядков [1].

В. К. Белошапка в работе [3] обсуждает проблему, суть которой состоит в следующем. Известно [6], что оболочка голоморфности невырожденной квадрики представляет собой область

$$\{(z, w) : \operatorname{Im} w - \langle z, \bar{z} \rangle \in V\}, \quad V = \operatorname{int}(\operatorname{conv}\{\langle z, \bar{z} \rangle : z \in \mathbb{C}^n\}).$$

При этом если конус V острый, что соответствует положительно определенной квадрике (т. е. такой, для которой существует положительно определенная линейная комбинация компонент формы $\langle z, \bar{z} \rangle$), то оболочка представляет собой область Зигеля второго рода [7]. Для знаконеопределенной квадрики оболочка будет в подходящей системе координат цилиндрической областью. В связи с этим возникают следующие вопросы: что будут представлять собой оболочки голоморфности модельных поверхностей более высокого порядка?, какие из них окажутся цилиндрическими (соответственно, слоящимися на комплексные прямые), а какие не цилиндрическими?, дадут ли нецилиндрические оболочки интересные примеры ограниченных (ограниченного вида) и (или) однородных областей?

Первый шаг в решении этой проблемы сделан автором в работе [8]. Было показано, что для произвольной невырожденной кубики оболочка представляет собой цилиндр по w_3 над областью Зигеля второго рода $\{\operatorname{Im} W_2 \gg ZZ^*\}$ (обозначения см. в § 2). Такая область однородна, но не является областью ограниченного вида. Этот результат вместе с результатом о строении оболочки голоморфности квадрики позволил предположить, что вид оболочки голоморфности определяется тем, какой вид имеют многочлены старшей степени в уравнении модели. Если они являются в некотором смысле положительно определенными (или если последние “превалируют” над знаконеопределенными), то оболочка будет областью ограниченного вида, что имеет место для положительно определенных квадрик (и такие многообразия будем также называть *положительно определенными*), а если “превалируют” знаконеопределенные, то оболочка будет цилиндрической областью, как это имеет место для знаконеопределенных квадрик и для произвольных кубик (и такие многообразия будем называть *знаконеопределенными*).

Пример кубики позволяет предположить, что все многообразия, многочлены старшей степени которых имеют фиксированную несимметричную бистепень (т. е. бистепень (p, q) , $p > q$), будут знаконеопределенными. Такие многообразия будем называть *многообразиями с отражением* (благодаря наличию специального линейного автоморфизма вида

$$z \rightarrow \varepsilon z, \quad w_2 \rightarrow \rho_2 w_2, \quad \dots, \quad w_{d-1} \rightarrow \rho_{d-1} w_{d-1}, \quad w_d \rightarrow -w_d,$$

где $\varepsilon^{p-q} = -1$, ρ_j – подходящие линейные отображения, d – длина модели). Имеющиеся примеры позволяют также предположить, что знакоопределенные

многообразия следует искать, прежде всего, среди многообразий, многочлены старшей степени которых имеют фиксированную симметричную бистепень (т. е. бистепень (p, p)). Их будем называть S^1 -симметричными многообразиями (благодаря наличию действия

$$z \rightarrow e^{i\varphi} z, \quad w_2 \rightarrow \rho_2 w_2, \quad \dots, \quad w_{d-1} \rightarrow \rho_{d-1} w_{d-1}, \quad w_d \rightarrow w_d$$

окружности S^1 на таких многообразиях, где $\varphi \in \mathbb{R}$, ρ_j – линейные отображения, при четных j тождественные, а при нечетных разлагающиеся в прямую сумму вращений на угол φ , d – длина модели).

В настоящей работе предьявляются классы модельных многообразий четвертого порядка, для которых изложенные выше предположения о структуре оболочки находят свое подтверждение.

В § 2 строится оболочка голоморфности произвольного модельного многообразия четвертого порядка с отражением, которая оказывается цилиндрической по w_3, w_4 области, основанием которой служит область Зигеля второго рода $\{\Im W_2 \gg ZZ^*\}$ (обозначения см. в § 2). То, что цилиндричность имеет место не только по кубической переменной, но и по переменной w_4 , соответствующей многочленам четной (четвертой) степени, – факт весьма примечательный. Полученный результат применяется к решению следующей проблемы.

Известно [3], что существуют квадрики, группа голоморфных автоморфизмов которых содержит нелинейные преобразования, сохраняющие начало координат. Это квадрики коразмерности 1, 2, n^2 , $n^2 - 1$, $n^2 - 2$, а также некоторые исключительные квадрики других коразмерностей. При изучении моделей высших порядков модели с нелинейными автоморфизмами, сохраняющими начало координат, обнаружить до сих пор не удалось, т. е. все изученные модели оказались жесткими, в связи с чем возник вопрос о существовании нежестких моделей. Как показано автором в [8], произвольная кубическая модель является жесткой. Доказательство этого результата существенно использует строение оболочки голоморфности кубики. Как показано в § 2, для модели четвертого порядка с отражением ситуация аналогична: из строения оболочки голоморфности многообразия немедленно следует его жесткость.

В § 3 изучается случай модельного S^1 -симметричного многообразия типа (1,4). Для этого многообразия знакоопределенность (в естественном смысле) старшего многочлена, который представляет собой квадрат положительно определенной эрмитовой формы, замечательным образом согласуется со знакоопределенностью многообразия в обозначенном выше смысле. Более точно, оболочка голоморфности такого многообразия будет областью ограниченного вида в $\mathbb{C}^5$, причем остов этой области совпадает с исходным многообразием. Это многообразие – первая известная модель высшего (большого двух) порядка с таким свойством.

В § 4 изучаются дальнейшие свойства области ограниченного вида, построенной в § 3. Доказывается, что по крайней мере в классе автоморфизмов замыкания эта область голоморфно однородной не является. Показывается, что, более того, группа голоморфных автоморфизмов ее замыкания совпадает с группой автоморфизмов исходного многообразия и порождает слоеение области на семимерные и восьмимерные голоморфно однородные многообразия и что случай общего положения соответствует восьмимерным вполне невырожденным несферическим однородным многообразиям типа (3,2).

В § 5 рассматриваются модели типа (1,4) “смешанного” вида (т. е. не являющиеся ни моделями с отражением, ни S^1 -симметричными моделями). Показывается, что если при этом закононеопределенные слагаемые в известном смысле “превалируют” над законоопределенными (см. ниже), то оболочка голоморфности такого многообразия будет иметь структуру, аналогичную структуре оболочек многообразий, рассмотренных в § 2.

Все оболочки голоморфности будут построены посредством предъявления семейства аналитических дисков, подклеенных к исходному модельному многообразию. Согласно принципу непрерывности это позволит продолжить все голоморфные в окрестности многообразия функции в окрестности таких дисков. При этом будет использоваться одна общая конструкция, изложенная, например, в [9], суть которой состоит в следующем. Если уравнение некоторой порождающей поверхности в $\mathbb{C}^N$ записано в виде $\text{Im } w = h(z, \bar{z})$, то можно предъявить множество дисков следующего вида: в качестве $z(\zeta)$ берется произвольная голоморфная в единичном круге и непрерывная вплоть до границы функция, взятая из некоторого функционального пространства, $z(0) = 0$, функции $w(\zeta)$ подбираются из условия $\text{Im } w(\zeta) = h(z(\zeta), \bar{z}(\zeta))$ для $|\zeta| = 1$, что гарантирует условие принадлежности границы диска исходному многообразию, после чего $\text{Im } w(\zeta)$ продолжается внутрь круга как решение задачи Дирихле, а координатные функции $\text{Re } w(\zeta)$ подбираются как гармонически сопряженные к $\text{Im } w(\zeta)$, что гарантирует аналитичность дисков. Тогда по теореме о среднем имеем

$$\text{Im } w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} h(z(\zeta), \bar{z}(\zeta)) dt. \quad (1.1)$$

Соотношение (1.1) задает отображение исходного функционального пространства в плоскость $z = 0$, и теперь задача состоит в том, чтобы изучить образ этого отображения. Данный образ будет входить в сечение оболочки плоскостью $z = 0$. Перенеся затем полученный образ в соседние плоскости $z = p$ (в рассматриваемых ниже случаях этот переход осуществляется посредством автоморфизмов, обеспечивающих однородность модельных многообразий), получим открытое подмножество оболочки голоморфности исходного многообразия. После этого построение оболочки голоморфности завершается подклейкой к построенному фрагменту оболочки дополнительного семейства аналитических дисков.

§ 2. Оболочки голоморфности модельных многообразий с отражением

В настоящем параграфе конструкция, описанная во введении, будет применена к построению оболочки голоморфности произвольного модельного многообразия четвертого порядка с отражением (такое многообразие будем далее обозначать через M). Для того чтобы это сделать, приведем некоторые свойства многообразия M .

Согласно [10] алгебра инфинитезимальных автоморфизмов модельного многообразия четвертого порядка – это градуированная алгебра Ли вида

$$g = g_{-} + g_0 + g_1, \quad g_{-} = g_{-4} + \dots + g_{-1}.$$

Здесь веса назначены следующим образом: $[z] = 1$, $[w_2] = 2$, $[w_3] = 3$, $[w_4] = 4$, $[\frac{\partial}{\partial z}] = -1$, $[\frac{\partial}{\partial w_2}] = -2$, $[\frac{\partial}{\partial w_3}] = -3$, $[\frac{\partial}{\partial w_4}] = -4$.

Группа G голоморфных автоморфизмов многообразия M есть образ алгебры g под действием экспоненциального отображения. При этом подалгебре g_- соответствует подгруппа $G_- \subset G$, которая обеспечивает голоморфную однородность многообразия. Соответствующие автоморфизмы имеют вид

$$z \rightarrow z + p, \quad w_j \rightarrow w_j + \rho_{j-1}(w_1, \dots, w_{j-1}) + P_{j-1}(z) + a_j, \quad (2.1)$$

где $p \in \mathbb{C}^n$, $(a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^k$, ρ_{j-1} – линейное отображение, P_{j-1} – полином степени $j-1$, $j = 2, 3, 4$, а ρ_{j-1} , P_{j-1} полиномиально зависят от p . Размерность этой группы равна размерности многообразия, и саму эту группу можно, как легко видеть, с многообразием отождествить.

Подалгебре g_0 соответствует нормальная подгруппа $G_0 \subset G$ – стабилизатор начала координат в G . Этой подгруппе соответствуют линейные автоморфизмы многообразия M , сохраняющие начало координат. Структура этой подгруппы существенно зависит от M , но в ней всегда содержится подгруппа скалярных растяжений:

$$z \rightarrow \lambda z, \quad w_2 \rightarrow \lambda^2 w_2, \quad w_3 \rightarrow \lambda^3 w_3, \quad w_4 \rightarrow \lambda^4 w_4, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Подалгебре g_1 соответствует подгруппа нелинейных автоморфизмов многообразия M , сохраняющих начало координат. До сих пор не обнаружено многообразий с нетривиальной подалгеброй g_1 . Тривиальность этой подалгебры (и соответствующей подгруппы) для знаконеопределенных многообразий будет доказана ниже.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа. Для этого выберем систему координат в $\mathbb{C}^N$ таким образом, чтобы набор эрмитовых форм $\langle z, \bar{z} \rangle$ имел вид

$$\langle z, \bar{z} \rangle^{(k,l)} = \operatorname{Re}(z_k \bar{z}_l), \quad k \geq l, \quad \langle z, \bar{z} \rangle^{(k,l)} = \operatorname{Im}(z_k \bar{z}_l), \quad k < l, \quad k, l \in \overline{1, n}$$

(в силу того, что набор $\langle z, \bar{z} \rangle$ содержит базис пространства эрмитовых форм, этого можно достичь вещественно-линейной заменой переменных по w_2). Соответствующие этим формам переменные будем обозначать через $\operatorname{Im} w_2^{(k,l)}$. Составим теперь следующую эрмитову матрицу $\Im W_2$:

$$\Im W_2^{(k,l)} = \begin{cases} \operatorname{Im} w_2^{(k,l)} + i \operatorname{Im} w_2^{(l,k)}, & k > l, \\ \operatorname{Im} w_2^{(k,l)} - i \operatorname{Im} w_2^{(l,k)}, & k < l, \\ \operatorname{Im} w_2^{(k,l)}, & k = l, \end{cases}$$

а также столбец Z с элементами $z_1, \dots, z_n$. Теперь первую часть уравнений многообразия M можно записать в следующем матричном виде:

$$\Im W_2 = ZZ^*.$$

Отметим, что построенное соответствие позволяет однозначно сопоставить вектору $\operatorname{Im} w_2 \in \mathbb{R}^{n^2}$ эрмитову матрицу $\Im W_2$ и, наоборот, всякой эрмитовой матрице A однозначно сопоставляется вектор $\operatorname{Im} w_2 \in \mathbb{R}^{n^2}$ такой, что для него $\Im W_2 = A$. Это соответствие вещественно-линейно. Отсюда следует, в частности, что неравенство $\Im W_2 \gg 0$ задает в пространстве переменных $\operatorname{Im} w_2$ острый выпуклый конус.

ТЕОРЕМА 2.1. *Оболочка голоморфности произвольного модельного многообразия M четвертого порядка с отражением имеет вид*

$$\widehat{M} = \{(z, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^N: \Im W_2 \gg ZZ^*, (w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{k-n^2}\}$$

и представляет собой, таким образом, цилиндрическую по w_3, w_4 область, основанием которой служит область Зигеля второго рода в пространстве переменных z, w_2 .

Доказательство теоремы 2.1 опирается на следующий фундаментальный результат А. Е. Туманова [9], касающийся строения оболочки голоморфности порождающего многообразия конечного типа по Блуму–Грэхэму.

ТЕОРЕМА 2.2 (А. Е. Туманов). *Всякое гладкое порождающее многообразие M конечного типа k , заданное в окрестности точки p уравнениями $\Im w = h(z, \bar{z}, \Re w)$, $dh(p) = 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$, где n – размерность комплексной касательной в точке p , W -продолжимо, т.е. существуют такие открытый выпуклый конус C в $\mathbb{R}^m$ и окрестность U точки p , что все функции, голоморфные в окрестности многообразия M , голоморфно продолжаются в область*

$$G(U, C) = \{(z, w) \in U: \Im w - h(z, \bar{z}, \Re w) \in C\}.$$

Более того, можно считать, что конус C для некоторых a, ε имеет вид

$$C_{a, \varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m: \left| \frac{x}{r} - a \right| < \varepsilon, r > 0 \right\}$$

и является, таким образом, круговым конусом, ось которого направлена вдоль вектора a .

Область $G(U, C)$ называется *тумановским клином*.

Теорема Туманова также доказывается согласно схеме, приведенной во введении. Поэтому будем согласно [9] брать $z(\zeta)$ из пространства функций, голоморфных в единичном круге и липшицевых в замыкании с показателем $0.5 < \alpha < 1$. Формулы (1.1) для многообразия M примут вид

$$\Im W_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} Z(\zeta) Z^*(\zeta) dt, \quad (2.3)$$

$$\Im w_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} 2 \operatorname{Re} \Phi(z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt, \quad (2.4)$$

$$\Im w_4(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} 2 \operatorname{Re} F(z(\zeta), z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt \quad (2.5)$$

(форма F_{22} равна нулю в рассматриваемом случае, а форму F_{31} будем теперь обозначать просто F). Согласно теореме Туманова образ отображения (2.3)–(2.5) гарантированно содержит *локальный тумановский конус* V – сечение тумановского клина плоскостью $z = 0$. Сам конус C (из формулировки теоремы 2.2) будем называть *полным тумановским конусом*. Заметим, что, как следует из (2.3), $\Im W_2$ есть матрица Грамма некоторой системы векторов относительно скалярного произведения в $L_2(\{|\zeta| = 1\})$. В силу этого

матрица $\Im m W_2$ всегда будет неотрицательно определенной, поэтому, несколько уменьшив конус V , можно считать его лежащим в области $\Im m W_2 >> 0$. Покажем также, что этот конус можно заменить на некоторый специальный локальный тумановский конус, более удобный для дальнейших построений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Применение автоморфизмов многообразия M к семейству дисков, подклеенных к M , снова дает семейство дисков, подклеенных к M . Поэтому конус V можно считать расширенным до области, выдерживающей все автоморфизмы многообразия M (тогда, когда это необходимо). Точно так же считаем любое голоморфное расширение M или V расширенным аналогичным образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если некоторый диск подклеен к M или к голоморфному расширению многообразия M , то такой диск всегда (согласно замечанию 2.1) можно включить в семейство подклеенных дисков посредством автоморфизмов (2.2). При малых λ такие диски принадлежат окрестности многообразия M , поэтому данный диск дает голоморфное расширение многообразия M (или какого-либо другого голоморфного расширения многообразия M).

ЛЕММА 2.1. *Существует локальный тумановский конус V' в плоскости $z = 0$, принадлежащий оболочке голоморфности M , ось которого является проекцией оси исходного конуса на плоскость $w_3 = 0$, $w_4 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $(0, w_2^0, w_3^0, w_4^0) \in V$. Она включена в V посредством некоторого диска, порожденного функцией $z(\zeta)$. Поскольку конус V выдерживает сдвиги по $\operatorname{Re} w$ (см. замечание 2.1), то можно считать, что $\operatorname{Re} w$ подобрана удобным для нас образом, а именно

$$w_3^0 = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi(z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt, \quad w_4^0 = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=1} F(z(\zeta), z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt.$$

Рассмотрев теперь диски, порожденные функциями $e^{i\varphi} z(\zeta)$, из (2.3)–(2.5) получим, что точки с теми же z - и w_2 -координатами и w_3 - и w_4 -координатами, измененными по формулам

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{e^{i\varphi}}{\pi} \int_{|\zeta|=1} \Phi(z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt, \\ w_4 &= \frac{e^{2i\varphi}}{\pi} \int_{|\zeta|=1} F(z(\zeta), z(\zeta), z(\zeta), \overline{z(\zeta)}) dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

включены в оболочку. Отсюда следует, что можно подклеить к V диски следующего вида:

$$\{z = 0, w_2 = w_2^0, w_3 = w_3^0 \zeta, w_4 = w_4^0 \zeta^2, |\zeta| \leq 1\}.$$

Из (2.6) следует, что границы дисков, соответствующие $|\zeta| = 1$, принадлежат V . Значит, подставив $\zeta \in [-1, 1]$ и взяв всю совокупность точек $(0, w_2^0, w_3^0, w_4^0) \in V$, а затем применив сдвиги по $\operatorname{Re} w$, мы получим некоторое связное голоморфное расширение конуса V . В частности, при $\zeta = -1$ мы получим конус, симметричный V относительно плоскости $w_3 = 0$.

Полученное голоморфное расширение V (а значит, и M) представляет собой трубчатую по $\operatorname{Re} w$ область в плоскости $z = 0$. Как показано в [11], ко всякой

такой области можно подклеить семейство голоморфных дисков, совокупность которых заматывает ее выпуклую оболочку. Но выпуклая оболочка множества $V \cup V^-$, где V^- – отраженный относительно $w_3 = 0$ конус, будет содержать некоторый локальный тумановский конус с осью, являющейся проекцией на плоскость $w_3 = 0$ оси исходного конуса (в силу того, что он круговой).

Итак, можно считать, что ось конуса V лежит в плоскости $w_3 = 0$. Подклеив теперь к нему семейство дисков аналогично тому, как это было сделано выше для исходного конуса, но взяв на этот раз $\zeta \in [-i, i]$, мы вновь получаем некоторое связное голоморфное расширение V . В частности, при $\zeta = i$ получаем конус, зеркально симметричный конусу V относительно плоскости $w_4 = 0$. Это следует из того, что при отображении, порожденном подстановкой $\zeta = i$, $w_4 \rightarrow -w_4$, плоскость $w_3 = 0$ остается на месте, а само это отображение является линейной изометрией, которая переводит составляющие конус шары в отраженные шары. Поэтому, применяя вновь утверждение о выпуклой оболочке, получаем в голоморфном расширении локальный конус, ось которого является проекцией оси исходного на плоскость $w_3 = 0$, $w_4 = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.1 позволяет с самого начала считать ось конуса V лежащей в плоскости $w_3 = 0$, $w_4 = 0$. Будем называть такой локальный тумановский конус *улучшенным* (то же самое определение введем и для полного тумановского конуса).

Назовем точку $(0, w_2, w_3, w_4)$ *цилиндрической*, если для этой точки выполняется $\Im m W_2 \gg 0$ и некоторое голоморфное расширение многообразия M содержит все точки с тем же w_2 .

ЛЕММА 2.2. *Все точки, лежащие в проекции улучшенного полного тумановского конуса на плоскость $w_3 = 0$, $w_4 = 0$, являются цилиндрическими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Улучшенный локальный тумановский конус V имеет вид

$$\{(0, w_2, w_3, w_4) : (\Im m w_2 - ta_2)^2 + (\Im m w_3)^2 + (\Im m w_4)^2 < r^2 t^2\},$$

где a_2 – направляющий вектор оси конуса, $r > 0$ фиксированно, $t \in (0, \varepsilon)$ произвольно. Возьмем теперь произвольную точку с той же w_2 -координатой, что и у точки из проекции полного улучшенного тумановского конуса. Пусть для нее $\Im m w = (b_2, b_3, b_4)$. Тогда $(b_2 - t_0 a_2)^2 < r^2 t_0^2$ для некоторого t_0 . Применяя теперь к конусу автоморфизмы (2.2), получим точку, для которой $\Im m w = (\lambda^2 b_2, \lambda^3 b_3, \lambda^4 b_4)$. Докажем, что λ можно подобрать так, чтобы “растянутая” точка принадлежала локальному конусу (тогда в силу обратимости растяжения получим, что исходная точка включена в голоморфное расширение). Для этого необходимо найти такое $t \in (0, \varepsilon)$, чтобы $(\lambda^2 b_2 - ta_2)^2 + \lambda^6 b_3^2 + \lambda^8 b_4^2 < r^2 t^2$. Положив теперь $t = t_0 \lambda^2$, получим

$$(b_2 - t_0 a_2)^2 + \lambda^2 b_3^2 + \lambda^4 b_4^2 < r^2 t_0^2. \quad (2.7)$$

Поэтому ввиду неравенства $(b_2 - t_0 a_2)^2 < r^2 t_0^2$ при достаточно малых λ (что позволяет заодно взять достаточно малое t) получим, что неравенство (2.7) выполнено. Поэтому исходная точка принадлежит голоморфному расширению многообразия M , что и доказывает цилиндричность всех точек из проекции улучшенного полного тумановского конуса. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *Всякую эрмитову положительно определенную матрицу A можно представить в виде*

$$A = A_0 + \sum_{k=1}^n b_k b_k^*, \quad b_k \in \mathbb{C}^n,$$

где $A_0 = \Im W_2$ для некоторой цилиндрической точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим следующее. Если B – эрмитова положительно определенная матрица, то в некотором базисе она приводится к единичной, т. е. существует матрица T такая, что $B = TET^*$, где E – единичная матрица. Однако $E = \sum_{k=1}^n e_k e_k^*$, где e_k – k -й вектор стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$, следовательно,

$$B = T \left(\sum_{k=1}^n e_k e_k^* \right) T^* = \sum_{k=1}^n T e_k e_k^* T^* = \sum_{k=1}^n T e_k (T e_k)^*.$$

Отсюда следует, что всякую эрмитову положительно определенную матрицу можно представить в виде $\sum_{k=1}^n b_k b_k^*$, $b_k \in \mathbb{C}^n$. Теперь, пользуясь существованием тумановского конуса (теорема 2.2) и леммой 2.2, можно утверждать, что существует по крайней мере один луч цилиндрических точек в плоскости $w_3 = 0$, $w_4 = 0$. Возьмем на этом луче точку, для которой норма матрицы A_0 , где $A_0 = \Im W_2$, достаточно мала для того, чтобы $A - A_0 \gg 0$. Тогда $A - A_0 = \sum_{k=1}^n b_k b_k^*$, $b_k \in \mathbb{C}^n$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть T_0 – объединение всех цилиндрических точек. Цилиндр T_0 по определению включен в оболочку голоморфности многообразия M . Покажем, что подклейкой дисков можно присоединить к T_0 его сдвиг на pp^* по $\Im W_2$ –“координатам” для всякого $p \in \mathbb{C}^n$. Действительно, применив к цилиндру T_0 автоморфизмы вида (2.2), получим цилиндры T_p в плоскостях $\{z = p\}$. Оболочка голоморфности многообразия M содержит объединение T этих цилиндров. При этом множество точек цилиндра T_p будет совпадать с множеством точек из T_0 , сдвинутым на pp^* по $\Im W_2$ –“координатам” и на p по z -координате (это следует из структуры автоморфизмов (2.1); уточним, что по w_2 преобразования (2.1) имеют вид

$$w_2 \rightarrow w_2 + 2i\langle z, \bar{p} \rangle + \langle p, \bar{p} \rangle,$$

откуда и следует утверждение о сдвиге на pp^* по $\Im W_2$ –“координатам”). Для всякой точки $(0, w_2^0, w_3^0, w_4^0)$ из T_0 обозначим $\Im W_2' = \Im W_2^0 + pp^*$. Подклеим к T диски следующего вида:

$$\{z = p\zeta, w_2 = w_2', w_3 = w_3^0, w_4 = w_4^0, |\zeta| \leq 1\}.$$

Для того чтобы диски были подклеенными к T , достаточно, чтобы точка $(0, \Im W_2' - pp^*, w_3^0, w_4^0)$ была цилиндрической, что выполнено по построению. Следовательно, подставив $\zeta = 0$, получим, что точка $(0, w_2', w_3^0, w_4^0)$ включена в оболочку, что и требуется. Значит, сдвиги T_0 на pp^* по $\Im W_2$ –“координатам” также будут давать цилиндрические точки, а значит, и сдвиги на $\sum_{k=1}^s b_k b_k^*$, $b_k \in \mathbb{C}^n$, $s \in \mathbb{N}$, что по лемме 2.3 означает цилиндричность всех точек плоскости $z = 0$, для которых $\Im W_2 \gg 0$. Их совокупность представляет собой сечение нужной области

$$\widehat{M} = \{(z, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^N: \Im W_2 \gg ZZ^*, (w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{k-n^2}\}$$

плоскостью $z = 0$. Применяв к этому сечению автоморфизмы (2.1), получим, что область $\widehat{M}$ есть голоморфное расширение многообразия M .

Осталось доказать голоморфную выпуклость области $\widehat{M}$, для чего достаточно заметить, что она геометрически выпукла (соответствующее вычисление см., например, в [8]). Теорема доказана.

Как уже упоминалось во введении, теорема 2.1 применяется к доказательству жесткости произвольной модели с отражением четвертого порядка.

ТЕОРЕМА 2.3. *Произвольное модельное многообразие четвертого порядка с отражением является голоморфно жестким, т. е. алгебра $g_+ \subset g$ и соответствующая ей группа нелинейных голоморфных автоморфизмов многообразия, сохраняющих начало координат, тривиальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать тривиальность алгебры $g_+ = g_1$. Как показано в [10], произвольное векторное поле из g_1 имеет вид

$$X_1 = 2 \operatorname{Re} \left((Aw_2 + C(z, z)) \frac{\partial}{\partial z} + (aw_3 + 2i\langle z, \bar{A}w_2 \rangle) \frac{\partial}{\partial w_2} + (tw_4 + b(w_2, w_2) + 2i\Phi(z, z, \bar{A}w_2)) \frac{\partial}{\partial w_3} + 2iF_{31}(z, z, z, \bar{A}w_2) \frac{\partial}{\partial w_4} \right),$$

где a, A, t – линейные отображения, а b, C – билинейные вектор-функции, заданные все на пространствах соответствующих размерностей. Для того чтобы векторное поле X_1 было касательным к кубике, должны выполняться следующие уравнения – условия касания:

$$\operatorname{Im} a = 0, \quad \operatorname{Im} b = 0, \quad \operatorname{Im} t = 0, \quad (2.8)$$

$$a(\Phi(z, z, \bar{z})) = \langle C(z, z), \bar{z} \rangle - 2i\langle z, \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle \rangle, \quad (2.9)$$

$$b(x, \langle z, \bar{z} \rangle) = 2 \operatorname{Re} \Phi(Ax, z, \bar{z}), \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Re}(tF_{22}(z, z, \bar{z}, \bar{z})) = \operatorname{Re} \Phi(z, z, \overline{C(z, z)}) - 2 \operatorname{Im} \Phi(A\langle z, \bar{z} \rangle, z, \bar{z}), \quad (2.11)$$

$$tF_{31}(z, z, z, \bar{z}) = 2\Phi(C(z, z), z, \bar{z}) - 2i\Phi(z, z, \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle), \quad (2.12)$$

$$2iF_{31}(z, z, z, \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle) = 3F_{31}(C(z, z), z, z, \bar{z}), \quad (2.13)$$

$$2F_{22}(z, z, \bar{z}, \bar{A}x) + 3F_{31}(Ax, z, z, \bar{z}) + 2\overline{F_{22}(Ax, z, \bar{z}, \bar{z})} = 0, \quad (2.14)$$

$$2F_{22}(C(z, z), z, \bar{z}, \bar{z}) - 2i\overline{F_{22}(A\langle z, \bar{z} \rangle, z, \bar{z}, \bar{z})} + 2\overline{F_{22}(z, z, \bar{z}, \overline{C(z, z)})} - 2iF_{22}(z, z, \bar{z}, \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle) + 3iF_{31}(A\langle z, \bar{z} \rangle, z, z, \bar{z}) + F_{31}(z, z, z, \overline{C(z, z)}) = 0. \quad (2.15)$$

Здесь $x = \operatorname{Re} w_2$, $\Phi(z, z, \bar{z}) = \langle z, z, \bar{z} \rangle$.

Повторяя рассуждения, приведенные в работе [8], мы можем заключить, что всякий голоморфный автоморфизм многообразия M продолжается до автоморфизма области $\widehat{M}$, а автоморфизмы последней должны иметь вид

$$(z, w_2) \rightarrow U(z, w_2), \quad (w_3, w_4) \rightarrow V(z, w_2, w_3, w_4),$$

где U, V – голоморфные отображения. Отсюда заключаем, что если такие автоморфизмы порождены некоторым голоморфным векторным полем, то коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial w_2}$ у такого поля не могут зависеть от w_3, w_4 . Для поля из g_1 это означает, что $a = 0$. Тогда из (2.9) заключаем, что

$$\langle C(z, z), \bar{z} \rangle = 2i\langle z, \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle \rangle. \quad (2.16)$$

В [8] показано, что (2.16) имеет решения лишь следующего вида:

$$C(z, z) = 2i\lambda(z)Z, \quad \bar{A}\langle z, \bar{z} \rangle = \lambda(z)Z^*. \quad (2.17)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $F_{22} = 0$, из (2.11) имеем

$$2i\lambda(z)\Phi(z, z, \bar{z}) = i\lambda(z)\Phi(z, z, \bar{z}),$$

откуда $\Phi(z, z, \bar{z}) = 0$ при $\lambda(z) \neq 0$, что возможно лишь при $\lambda(z) \equiv 0$. Последнее означает, что $A = 0$, $C = 0$, а также $b = 0$ (из (2.10)) и $t = 0$ (из (2.12)). Значит, $X_1 = 0$. Теорема полностью доказана.

§ 3. Оболочка голоморфности S^1 -симметричного модельного многообразия

В этом и следующих параграфах настоящей работы рассматриваются модели четвертого порядка типа (1,4). Эти модельные многообразия подробно изучены Е. Н. Шананиной в [12]. Всякое такое многообразие – это шестимерное алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^5$, которое линейной заменой координат приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= |z|^2, \\ \operatorname{Im} w_3 &= \operatorname{Re} z^2 \bar{z}, \\ \operatorname{Im} w'_3 &= \operatorname{Im} z^2 \bar{z}, \\ \operatorname{Im} w_4 &= |z|^4, \end{aligned}$$

где $z, w_j \in \mathbb{C}$ (S^1 -симметричная модель), либо к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_2 &= |z|^2, \\ \operatorname{Im} w_3 &= \operatorname{Re} z^2 \bar{z}, \\ \operatorname{Im} w'_3 &= \operatorname{Im} z^2 \bar{z}, \\ \operatorname{Im} w_4 &= \operatorname{Re} z^3 \bar{z} + \alpha |z|^4, \end{aligned}$$

где $z, w_j \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. При $\alpha = 0$ получаем модель с отражением. Пространство модулей модельных многообразий такого типа (см. [13]) представляет собой окружность.

В настоящем параграфе нас будет интересовать именно S^1 -симметричное многообразие. Его отличие от всех остальных представителей этого типа заключается в наличии одной дополнительной подгруппы вращений в группе голоморфных автоморфизмов многообразия:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow e^{i\varphi} z, & w_2 &\rightarrow w_2, & w_3 &\rightarrow w_3 \cos \varphi - w'_3 \sin \varphi, \\ w'_3 &\rightarrow w_3 \sin \varphi + w'_3 \cos \varphi, & w_4 &\rightarrow w_4, & \varphi &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поэтому размерность группы S^1 -симметричного многообразия равна восьми, в то время как для всех остальных равна семи.

Приведем строения алгебры $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных автоморфизмов и группы G голоморфных автоморфизмов S^1 -симметричной модели типа (1,4) (будем в дальнейшем обозначать эту модель через Q).

Алгебра g будет иметь вид

$$g = g_{-4} + g_{-3} + g_{-2} + g_{-1} + g_0.$$

При этом алгебра $g_- = g_{-4} + g_{-3} + g_{-2} + g_{-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_- = & a_4 \frac{\partial}{\partial w_4} + a'_3 \frac{\partial}{\partial w'_3} + a_3 \frac{\partial}{\partial w_3} + a_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + p \frac{\partial}{\partial z} + 2iz\bar{p} \frac{\partial}{\partial w_2} \\ & + (iz^2\bar{p} + 2w_2 \operatorname{Re} p) \frac{\partial}{\partial w_3} + (z^2\bar{p} + 2w_2 \operatorname{Im} p) \frac{\partial}{\partial w'_3} + 4(\operatorname{Re} p + \operatorname{Im} p) \frac{\partial}{\partial w_4}, \end{aligned}$$

а стабилизатор – вид

$$\begin{aligned} g_0 = & \lambda \left(z \frac{\partial}{\partial z} + 2w_2 \frac{\partial}{\partial w_2} + 3w_3 \frac{\partial}{\partial w_3} + 3w'_3 \frac{\partial}{\partial w'_3} + 4w_4 \frac{\partial}{\partial w_4} \right) \\ & + \mu \left(iz \frac{\partial}{\partial z} - w'_3 \frac{\partial}{\partial w_3} + w_3 \frac{\partial}{\partial w'_3} \right). \end{aligned}$$

Группа G_0 , соответствующая алгебре g_0 , разлагается в прямое произведение описанной выше группы вращений (3.1) и группы скалярных растяжений (2.2).

Группа G_- , соответствующая g_- , представляет собой факторгруппу G/G_0 и обеспечивает голоморфную однородность многообразия посредством преобразований (2.1), для поверхности Q имеющих вид

$$z \rightarrow z + p, \quad (3.2)$$

$$w_2 \rightarrow w_2 + i|p|^2 + 2iz\bar{p} + a_2, \quad (3.3)$$

$$w_3 \rightarrow w_3 + i|p|^2 \operatorname{Re} p + iz^2\bar{p} + iz\bar{p}^2 + 2w_2 \operatorname{Re} p + 2izp\bar{p} + a_3, \quad (3.4)$$

$$w'_3 \rightarrow w'_3 + z^2\bar{p} - z\bar{p}^2 + i|p|^2 \operatorname{Im} p + 2w_2 \operatorname{Im} p + 2|p|^2 z + a'_3, \quad (3.5)$$

$$w_4 \rightarrow w_4 + 4w_3 \operatorname{Re} p + 4w'_3 \operatorname{Im} p + 2iz^2\bar{p}^2 + 4|p|^2 w_2 + 4izp\bar{p}^2 + i|p|^4 + a_4, \quad (3.6)$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{C}$.

В настоящем параграфе построим оболочку голоморфности многообразия Q , руководствуясь, как и в § 2, описанной во введении конструкцией. Функции $z(\zeta)$ будем брать из пространства функций, голоморфных в окрестности единичного круга. Замечания 2.1, 2.2 в этом и в последующих параграфах также выполняются.

Будем обозначать $\operatorname{Im} w_2$ через v_2 , $\operatorname{Im} w_3$ через v_3 , $\operatorname{Im} w'_3$ через v'_3 , $\operatorname{Im} w_4$ через v_4 и $v_3 + iv'_3$ через V_3 . Тогда формулы (1.1) примут вид

$$v_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} |z(\zeta)|^2 dt, \quad (3.7)$$

$$V_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} z^2(\zeta) \overline{z(\zeta)} dt, \quad (3.8)$$

$$v_4(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} |z(\zeta)|^4 dt. \quad (3.9)$$

Изучив образ отображения (3.7)–(3.9) в плоскость $z = 0$, взяв внутренность этого образа и применив к последней автоморфизмы многообразия Q из группы G_- , мы получим некую область, в которую продолжатся все голоморфные в окрестности многообразия Q функции.

В дальнейшем, зафиксировав диск, задаваемый функцией $z(\zeta)$, для краткости будем записывать просто v_2, v_3, v'_3, V_3, v_4 вместо $v_2(0), v_3(0), v'_3(0), V_3(0), v_4(0)$. Установим ряд неравенств, связывающих v_2, V_3, v_4 .

ЛЕММА 3.1. *Имеют место следующие неравенства:*

$$v_2 \geq 0, \quad (3.10)$$

$$v_4 \geq v_2^2, \quad (3.11)$$

$$2|V_3|^2 \leq v_2(v_4 - v_2^2). \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.10) сразу следует из (3.7). Неравенство (3.11) получается, если применить неравенство Коши–Буняковского в интеграле из (3.7) для функций $u(\zeta) = |z(\zeta)|^2$ и $v(\zeta) = 1$. Для доказательства (3.12) рассмотрим разложение функции $z(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k$ в ряд Тейлора. Тогда, используя очевидное равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \zeta^m \bar{\zeta}^n dt = \delta_{mn},$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, получаем

$$v_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Заметим, далее, что

$$|z(\zeta)|^2 = z(\zeta) \overline{z(\zeta)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \zeta^k + \overline{a_k \zeta^k}),$$

где a_k – некоторые коэффициенты, причем $a_0 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = v_2$. Теперь

$$V_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} |z(\zeta)|^2 z(\zeta) dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{c}_k,$$

поэтому из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|V_3|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right).$$

Однако

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 - |a_0|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} |z(\zeta)|^2 |z(\zeta)|^2 dt - v_2^2 \right) = \frac{1}{2} (v_4 - v_2^2),$$

откуда $|V_3|^2 \leq (v_4 - v_2^2)/2$, что равносильно (3.12). Лемма доказана.

Оказывается, строгие неравенства (3.10)–(3.12) задают в точности сечение оболочки голоморфности плоскостью $z = 0$.

ЛЕММА 3.2. *Всякая точка области в плоскости $z = 0$, задаваемой строгими неравенствами (3.10)–(3.12), принадлежит оболочке голоморфности Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диски, задаваемые следующими функциями: $z(\zeta) = a\zeta/(1 - a\zeta)$, $0 \leq a < 1$. Вычислим v_2 , V_3 , v_4 с помощью разложения функции $z(\zeta)$ в ряд (см. доказательство леммы 3.1):

$$z(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \zeta^k,$$

откуда получаем $v_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a^{2k} = a^2/(1 - a^2)$. Теперь разложим $z^2(\zeta)$:

$$\begin{aligned} z^2(\zeta) &= \frac{a^2 \zeta^2}{(1 - a\zeta)^2} = a\zeta^2 \left(\frac{1}{1 - a\zeta} \right)'_{\zeta} \\ &= a\zeta^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta^k \right)'_{\zeta} = a\zeta^2 \sum_{k=1}^{\infty} k a^k \zeta^{k-1} = a\zeta \sum_{k=1}^{\infty} k a^k \zeta^k. \end{aligned}$$

Обозначив a^2 через b , получим

$$\begin{aligned} v_4 &= b \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b^k = b^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k b^k \right)'_b = b^2 \left(b \left(\sum_{k=1}^{\infty} b^k \right)'_b \right)'_b \\ &= b^2 \left(\frac{b}{(1 - b)^2} \right)'_b = b^2 \cdot \frac{1 + b}{(1 - b)^3} = \frac{a^4}{(1 - a^2)^2} \frac{1 + a^2}{1 - a^2} = v_2^2 \cdot \frac{1 + a^2}{1 - a^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что отношением v_4 к v_2^2 при подходящем выборе a может служить любое число из промежутка $(1, +\infty)$. Кроме того, применив к рассматриваемым дискам растяжения по всем переменным, мы можем для фиксированного диска добиться любого значения $v_2 > 0$, не меняя это отношение (поскольку $v_2 \rightarrow \lambda^2 v_2$, $v_4 \rightarrow \lambda^4 v_4$). Отсюда следует, что для всякой точки из нужной области найдется точка с теми же v_2 , v_4 , принадлежащая оболочке.

Вычислим теперь значение V_3 . Поскольку

$$z^2(\zeta) \overline{z(\zeta)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k+1} \zeta^{k+1} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a^k \zeta^k} \right),$$

то

$$V_3 = \sum_{k=1}^{\infty} k a^{k+1} \cdot a^{k+1} = b \sum_{k=1}^{\infty} k b^k = b^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b^k \right)'_b = \frac{b^2}{(1 - b)^2} = \frac{a^4}{(1 - a^2)^2}.$$

Сопоставляя полученные значения v_2 , v_4 , V_3 , имеем

$$v_2(v_4 - v_2^2) = v_2^3 \left(\frac{1 + a^2}{1 - a^2} - 1 \right) = \frac{2a^8}{(1 - a^2)^4} = 2|V_3|^2.$$

Применив теперь к нашим дискам автоморфизмы (3.1), не меняющие значения v_2 , v_4 , действующие на V_3 по формуле $V_3 \rightarrow e^{i\varphi} V_3$ и позволяющие придать V_3 любые значения при фиксированном $|V_3|$, а также сдвиги по $\operatorname{Re} w$ (из подгруппы G_-), получаем, что построенные диски заматают следующую поверхность:

$$\{z = 0, v_2 > 0, v_4 > v_2^2, 2|V_3|^2 = v_2(v_4 - v_2^2)\}. \quad (3.13)$$

Теперь для каждой фиксированной точки $(0, w_2, w_3, w'_3, w_4)$ на поверхности (3.13) рассмотрим диски следующего вида:

$$\{z(\zeta) = 0, w_2(\zeta) = w_2, w_4(\zeta) = w_4, w_3 = i\zeta V_3 + a, w'_3 = \zeta V_3 + b, |\zeta| \leq 1, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Эти диски являются подклеенными к поверхности (3.13), поскольку при $\zeta = e^{it}$ выполнено

$$\operatorname{Im} w_3(\zeta) + i \operatorname{Im} w'_3(\zeta) = \operatorname{Re}(\zeta V_3) + i \operatorname{Im}(\zeta V_3) = e^{it} V_3,$$

а поверхность (3.13) выдерживает автоморфизмы вида (1.1). Выбирая теперь $\zeta = r e^{it}$, $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, получим

$$\operatorname{Im} w_3(\zeta) + i \operatorname{Im} w'_3(\zeta) = r V_3 e^{it},$$

т. е. диски заматают все точки, w_2 - и w_4 -координаты которых совпадают с координатами зафиксированной точки, а число $\operatorname{Im} w_3 + i \operatorname{Im} w'_3$ по модулю не превосходит $|V_3|$. Это и означает, что построенные диски заматают область, заданную строгими неравенствами (3.10)–(3.12), что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Строгое неравенство (3.11) следует из строгих неравенств (3.10), (3.12), поэтому для описания области можно ограничиться последними.

Теперь, пользуясь леммой 3.2, мы можем получить некоторую область в $\mathbb{C}^5$, в которую продолжаются все голоморфные в окрестности многообразия Q функции. Для этого применяются автоморфизмы из G_- , переводящие полученную в лемме 3.2 область в семейство областей в плоскостях $z = p$.

ЛЕММА 3.3. Семейство автоморфизмов (3.2)–(3.6) переводит область, построенную в лемме 3.2, в область

$$D = \{2(v_3 - v_2 \operatorname{Re} z)^2 + 2(v'_3 - v_2 \operatorname{Im} z)^2 < (v_2 - |z|^2)(v_4 - v_2^2), v_2 > |z|^2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение, обратное к (3.2)–(3.6), примененное к плоскости $z = 0$, имеет вид

$$w_2 \rightarrow w_2 - i|p|^2, \quad (3.14)$$

$$w_3 \rightarrow w_3 + i|p|^2 \operatorname{Re} p - 2w_2 \operatorname{Re} p, \quad (3.15)$$

$$w'_3 \rightarrow w'_3 + i|p|^2 \operatorname{Im} p - 2w_2 \operatorname{Im} p, \quad (3.16)$$

$$w_4 \rightarrow w_4 - 4w_3 \operatorname{Re} p - 4w'_3 \operatorname{Im} p - i|p|^4 + 4|p|^2 w_2. \quad (3.17)$$

Подставляя теперь (3.14)–(3.17) в (3.10), получим

$$v_2 > |p|^2, \quad (3.18)$$

а подставляя (3.14)–(3.17) в (3.12), получим

$$\begin{aligned} & 2(v_3 + |p|^2 \operatorname{Re} p - 2v_2 \operatorname{Re} p)^2 + 2(v'_3 + |p|^2 \operatorname{Im} p - 2v_2 \operatorname{Im} p)^2 \\ & < (v_2 - |p|^2)(v_4 - 4v_3 \operatorname{Re} p - 4v'_3 \operatorname{Im} p - |p|^4 + 4|p|^2 v_2 - (v_2 - |p|^2)^2), \end{aligned}$$

что после преобразований дает

$$2(v_3 - v_2 \operatorname{Re} p)^2 + 2(v'_3 - v_2 \operatorname{Im} p)^2 < (v_2 - |p|^2)(v_4 - v_2^2). \quad (3.19)$$

Учитывая, что при преобразовании (3.14)–(3.17) значение z переходит в $z + p$, имеем $z = p$. Подставив это равенство в неравенства (3.17), (3.18), получим неравенства, задающие область D в сечении плоскостью $z = p$. Применив еще сдвиги по $\operatorname{Re} w$, в силу произвольности $p \in \mathbb{C}$ мы доказываем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Поскольку область D получена применением G_- к области, выдерживающей группу G_0 , то и сама область D выдерживает всю группу G многообразия Q .

Полученную область D можно представить в виде надграфика

$$v_4 > \frac{2(v_3 - v_2 \operatorname{Re} z)^2 + 2(v'_3 - v_2 \operatorname{Im} z)^2}{v_2 - |z|^2} + v_2^2,$$

пересеченного с цилиндром над шаром в $\mathbb{C}^2$: $v_2 > |z|^2$. Граница области D состоит из двух частей: регулярной (гладкой) части, заданной условиями

$$v_2 > |z|^2, \quad v_4 = \frac{2(v_3 - v_2 \operatorname{Re} z)^2 + 2(v'_3 - v_2 \operatorname{Im} z)^2}{v_2 - |z|^2} + v_2^2,$$

и особой части (ребра), имеющей размерность 7 и заданной условиями

$$v_2 = |z|^2, \quad v_4 \geq v_2^2, \quad v_3 = v_2 \operatorname{Re} z, \quad v'_3 = v_2 \operatorname{Im} z.$$

Регулярная часть обладает подмножеством (назовем его *фундаментальным множеством*), определенным условиями

$$z = 0, \quad v'_3 = 0, \quad v_2 = 1, \quad 2v_3^2 = v_4 - 1.$$

Очевидно, группа G позволяет перевести всякую регулярную точку на границе D в точку фундаментального множества.

Особая часть границы содержит в качестве особого подмножества многообразие Q размерности 6.

ТЕОРЕМА 3.1. *Область D является оболочкой голоморфности многообразия Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.3 достаточно доказать голоморфную выпуклость области D . Для этого будем доказывать выпуклость области D по Леви в каждой граничной точке. Если бы выпуклость области D по Леви не имела место в особой точке границы, то существовали бы голоморфный диск, содержащий эту точку, граница которого принадлежала бы D , и семейство голоморфных дисков, сходящихся к нему и принадлежащих (вместе со своими границами) области D . Но поскольку D лежит внутри области $v_2 > |z|^2$, а рассматриваемая точка – на ее границе, то это означает голоморфную расширяемость в этой точке области $v_2 > |z|^2$, что невозможно в силу ее выпуклости.

Теперь рассмотрим регулярную точку границы. Можно считать, что эта точка принадлежит фундаментальному множеству, поскольку, как отмечалось выше, всегда существует автоморфизм замкнутой области $\overline{D}$, переводящий данную точку в точку фундаментального множества. Рассмотрим форму Леви

граничной поверхности в этой точке. Записав локальное уравнение границы, представим область в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(w_3 - \bar{w}_3)^2 - \frac{1}{2}(w'_3 - \bar{w}'_3)^2 + \frac{1}{2}(w_2 - \bar{w}_2)(z + \bar{z})(w_3 - \bar{w}_3) \\ & + \frac{1}{2i}(w_2 - \bar{w}_2)(z - \bar{z})(w'_3 - \bar{w}'_3) - \frac{1}{4}(w_2 - \bar{w}_2)^2 z \bar{z} \\ & + \frac{1}{4}(w_4 - \bar{w}_4)(w_2 - \bar{w}_2) + \frac{1}{2i}(w_4 - \bar{w}_4)z\bar{z} - \frac{1}{8i}(w_3 - \bar{w}_3)^3 < 0. \end{aligned}$$

С учетом фундаментальности точки уравнение комплексной касательной будет следующее (ввиду равенства $v_4 = 2v_3^2 + 1$):

$$dw_4 = -4iv_3 dz - 2(v_3^2 - 1)dw_2 + 4v_3 dw_3,$$

а форма Леви равна

$$\begin{aligned} & (2v_3^2 + 2)dz d\bar{z} - iv_3 dz d\bar{w}_2 - i dz d\bar{w}_3 - i dz d\bar{w}'_3 + iv_3 d\bar{z} dw_2 + \frac{3}{2}dw_2 d\bar{w}_2 \\ & - \frac{1}{4}dw_2 d\bar{w}_4 + i d\bar{z} dw_3 + dw_3 d\bar{w}_3 - d\bar{z} dw'_3 + dw'_3 d\bar{w}'_3 - \frac{1}{4}d\bar{w}_2 dw_4. \end{aligned}$$

Сужая теперь форму Леви на комплексную касательную, получаем эрмитову форму с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2v_3^2 + 2 & 0 & -i & -1 \\ 0 & v_3^2 + \frac{1}{2} & -v_3 & 0 \\ i & -v_3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя угловые миноры этой матрицы, получаем

$$\Delta_1 = 2v_3^2 + 2 > 0, \quad \Delta_2 = (2v_3^2 + 2)\left(v_3^2 + \frac{1}{2}\right) > 0, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} > 0, \quad \Delta_4 = 0,$$

откуда следует ее неотрицательная определенность, что и означает (см. [11], [14]) выпуклость области D по Леви в данной точке. Теорема доказана.

Как отмечалось выше, представляет интерес вопрос: является ли построенная область областью ограниченного вида, как это имеет место для положительно определенных квадратик, и (или) однородной, что имеет место для квадратик, порождающих аффинно-однородный конус V ? Покажем, что наличие ограниченной реализации действительно имеет место. Это обстоятельство, безусловно, позволяет считать наше многообразие своего рода аналогом положительно определенных квадратик в классе многообразий рассматриваемого типа.

ТЕОРЕМА 3.2. *Область D является областью ограниченного вида и, более того, может быть реализована как комплексная гиперповерхность в области Зигеля второго рода в $\mathbb{C}^6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квадратичные функции $v_2 \operatorname{Re} z$, $v_2 \operatorname{Im} z$, v_2^2 , входящие в определяющее неравенство области D , можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \frac{1}{2} |w_2|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(i w_2^2), \\ v_2 \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(w_2 \bar{z}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z w_2), \\ v_2 \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(w_2 \bar{z}) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(z w_2). \end{aligned}$$

Теперь произведем полиномиальную биголоморфную замену, убирающую возникшие плюригармонические слагаемые:

$$\begin{aligned} w_4 &\rightarrow w_4 + \frac{i}{2} w_2^2, & w_3 &\rightarrow w_3 - \frac{1}{2} z w_2, \\ w'_3 &\rightarrow w'_3 + \frac{i}{2} z w_2, & z &\rightarrow z, & w_2 &\rightarrow w_2. \end{aligned}$$

В результате область D перейдет в область

$$\begin{aligned} D' &= \left\{ 2 \left(v_3 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(w_2 \bar{z}) \right)^2 + 2 \left(v'_3 - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(w_2 \bar{z}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. < (v_2 - |z|^2) \left(v_4 - \frac{1}{2} |w_2|^2 \right), v_2 > |z|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь в $\mathbb{C}^6$ с дополнительной переменной w_5 область $\tilde{D}$, заданную схожими неравенствами:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \left\{ 2 \left(v_3 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(w_2 \bar{z}) \right)^2 + 2 \left(v'_3 - \frac{1}{2} \operatorname{Re}(w_2 \bar{z}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. < (y_5 - |z|^2) \left(v_4 - \frac{1}{2} |w_2|^2 \right), y_5 > |z|^2 \right\}, \end{aligned}$$

и в ней поверхность S , являющуюся сечением этой области плоскостью $w_2 = w_5$. Тогда отображение области $D' \subset \mathbb{C}^5$ в область $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^6$, оставляющее на месте все переменные с дополнительным условием $w_5(z, w_2, w_3, w'_3, w_4) = w_2$, есть голоморфное взаимно однозначное отображение с постоянным рангом 5, которое переводит область D' в поверхность S . Однако заметим, что область $\tilde{D}$ можно реализовать как область Зигеля второго рода, определяемую конусом $V \subset \mathbb{R}^4$, $V = \{2t_3^2 + 2(t'_3)^2 < t_5 t_4, t_5 > 0\}$, и эрмитовыми формами $\frac{1}{2} \operatorname{Im}(w_2 \bar{z})$, $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(w_2 \bar{z})$, $\frac{1}{2} |w_2|^2$, $|z|^2$. Легко видеть, что конус V непустой и острый, эрмитовы формы обращаются в нуль одновременно только при $z = w_2 = 0$, а вектор значений этих эрмитовых форм принадлежит замыканию конуса, точнее, его границе, так как удвоенная сумма квадратов первых двух форм есть произведение третьей и четвертой. Но, как известно [7], всякую область Зигеля второго рода можно биголоморфно отобразить на ограниченную область, отображение осуществляется дробно-линейными функциями. Подставив в эти функции $w_2 = w_5$, получим дробно-линейное отображение области D' на ограниченную. Явное вычисление такого отображения показывает, что среди возникших шести функций можно выбрать пять, задающих взаимно однозначное отображение области D' , значит, D' – область ограниченного вида, а следовательно, и область D также ограниченного вида, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3.3. *Поверхность Q является остовом (границей Шилова) области D .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что всякая функция $f \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{O}(D)$ имеет хотя бы одну точку максимума на Q . Для этого заметим, что граница области D получается подклейкой к Q некоторого семейства аналитических дисков (см. доказательства лемм 3.2, 3.3), значит, максимум модуля f на границе совпадает с максимумом модуля f по всем дискам, который, в свою очередь, в силу принципа максимума совпадает с максимумом модуля f по всем границам дисков. Однако последние принадлежат Q , т.е. максимум модуля f достигается на Q . Осталось доказать, что Q есть наименьшее замкнутое множество с таким свойством. Для этого достаточно рассмотреть функцию $f = \frac{1}{(w_2+i)(w_4+i)}$, которая ввиду неравенств $v_2 \geq 0$, $v_4 \geq 0$, выполненных в $\overline{D}$, достигает своего строгого максимума модуля в точках многообразия Q , удовлетворяющих условиям $z = w_2 = v_3 = v'_3 = v_4 = 0$. Учитывая голоморфную однородность Q , такую же функцию можно указать и для остальных точек из Q . Значит, Q действительно является границей Шилова (ввиду также ее однородности), что и требовалось доказать.

§ 4. Однородные многообразия в $\mathbb{C}^5$

В предыдущем параграфе было продемонстрировано, что Q оказалось многообразием, во всех отношениях родственным положительно определенной квадратике, более точно, оно возникает как граница Шилова своей оболочки голоморфности, причем последняя обладает ограниченной реализацией. Свойство однородности, однако, для D не выполнено, ввиду чего рассматриваемое S^1 -симметричное многообразие не является источником построения новой однородной области Зигеля. Но оказывается, что Q служит источником построения семейства однородных несферических (т.е. голоморфно неэквивалентных своему модельному многообразию) вполне невырожденных многообразий в $\mathbb{C}^5$. Ранее однородные несферические многообразия изучались и классифицировались в случаях гиперповерхностей из $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ в работах [15]–[17]. Построенные ниже многообразия имеют коразмерность 2 и 3. Так же, как и гиперповерхности, рассмотренные в [15]–[17], они возникают как линии уровня элементарных (даже полиномиальных) функций.

ТЕОРЕМА 4.1. *В классе автоморфизмов замыкания $\overline{D}$ область D однородной не является. Группа ее автоморфизмов совпадает с группой G автоморфизмов остова Q . Группа G порождает слоение D на двупараметрическое семейство орбит, представляющих собой вполне невырожденные однородные и, в общем положении, несферические многообразия коразмерности 2, на однопараметрическое семейство орбит, представляющих собой однородные вполне невырожденные многообразия коразмерности 3, и на одну однородную несферическую вырожденную орбиту коразмерности 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что группа автоморфизмов замкнутой области $\overline{D}$ совпадает с группой G модельного многообразия, заметим, что граница Шилова области D остается инвариантной относительно автоморфизмов замкнутой области $\overline{D}$, значит, всякая однопараметрическая подгруппа автоморфизмов замкнутой области $\overline{D}$ является однопараметрической подгруппой автоморфизмов многообразия Q , а последняя должна лежать

в G . Область D , как отмечалось выше, должна выдерживать группу G , откуда и следует совпадение двух групп. Ввиду этого область D однородной быть не может, так как ее вещественная размерность равна десяти, а размерность группы G – лишь восьми.

Найдем в явном виде орбиты действия группы G на D . Из (2.2), (3.1)–(3.6) легко увидеть, что всякая орбита будет содержать точку вида $z = 0$, $w_2 = i$, $w_3 = ia$, $w'_3 = 0$, $w_4 = ib$, $a \geq 0$, $b > 2a^2 + 1$, и что такие точки не будут эквивалентны (в смысле действия группы) для различных пар (a, b) . Таким образом, числа a и b параметризуют наши орбиты. Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Применяя ко всякой такой точке стабилизатор G_0 , а также сдвиги по $\operatorname{Re} w$, получим поверхность $\{z = 0, v_2 > 0, |V_3|^2 = a^2 v_2^3, v_4 = b v_2^2\}$. Применяя после этого к ней подгруппу G_- , из (3.14)–(3.17) получаем следующее однородное многообразие $S_{a,b}$ коразмерности 2:

$$(v_3 + |z|^2 \operatorname{Re} z - 2v_2 \operatorname{Re} z)^2 + (v'_3 + |z|^2 \operatorname{Im} z - 2v_2 \operatorname{Im} z)^2 = a^2(v_2 - |z|^2)^3, \quad (4.1)$$

$$v_4 - 4v_3 \operatorname{Re} z - 4v'_3 \operatorname{Im} z - |z|^4 + 4|z|^2 v_2 = b(v_2 - |z|^2)^2, \quad (4.2)$$

$$v_2 > |z|^2. \quad (4.3)$$

Докажем вполне невырожденность $S_{a,b}$ при $a > 0$. Для этого выделим касательную модель в окрестности исходной точки орбиты. В такой окрестности (4.1) принимает вид

$$v_3 = \sqrt{a^2(v_2 - |z|^2)^3 - (v'_3 + |z|^2 \operatorname{Im} z - 2v_2 \operatorname{Im} z)^2} + 2v_2 \operatorname{Re} z - |z|^2 \operatorname{Re} z.$$

Перенесем теперь нашу точку в начало координат заменой $z = z_1$, $w_2 - i = z_2$, $w'_3 = z_3$, $w_3 - ia = \eta$, $w_4 - ib = \xi$ и назовем переменным веса: $[z_1] = [z_2] = [z_3] = 1$, $[\eta] = [\xi] = 2$. Тогда после разложения корня в ряд Тейлора равенство (4.1) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \eta = & \frac{3}{2} a \operatorname{Im} z_2 - \frac{3}{2} a |z_1|^2 + \frac{3}{8} a (\operatorname{Im} z_2)^2 - \frac{1}{2a} (\operatorname{Im} z_3)^2 \\ & - \frac{2}{a} (\operatorname{Im} z_1)^2 + \frac{2}{a} \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_3 + 2 \operatorname{Re} z_1 + 2 \operatorname{Im} z_2 \operatorname{Re} z_1 + O(3), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $O(3)$ обозначает слагаемые веса 3 и более, откуда после подстановки соотношения (4.4) в (4.2) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \xi = & 4a \operatorname{Re} z_1 + 6a \operatorname{Re} z_1 \operatorname{Im} z_2 + 8(\operatorname{Re} z_1)^2 \\ & + 4 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_3 - 4|z_1|^2 + 2b \operatorname{Im} z_2 + b(\operatorname{Im} z_2)^2 - 2b|z_1|^2 + O(3). \end{aligned}$$

Делая теперь замену, убирающую линейные и квадратичные плюригармонические слагаемые (см. доказательство теоремы 3.2), окончательно получаем для ростка $S_{a,b}$:

$$\operatorname{Im} \eta = P(z, \bar{z}) + O(3), \quad \operatorname{Im} \xi = Q(z, \bar{z}) + O(3),$$

где $P(z, \bar{z})$, $Q(z, \bar{z})$ – эрмитовы формы с матрицами

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}i - \frac{1}{a} & -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2i} & \frac{3}{16}a & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{4a} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2b & -\frac{3a}{2i} & 1 \\ \frac{3a}{2i} & \frac{b}{2}a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы, как легко видеть, линейно независимы, а общего ядра иметь не могут, поскольку обе невырождены ($\det P = \frac{9a}{128} + \frac{1}{16a} > 0$, $\det Q = -\frac{b}{2} < 0$). Поэтому касательная квадрика невырождена, а росток вполне невырожден. В силу голоморфной однородности $S_{a,b}$ вполне невырожденность имеет место и в любой другой точке.

Осталось доказать несферичность орбит общего положения в каждой точке при $a > 0$. Касательные квадрики орбит $S_{a,b}$ – это квадрики типа (3,2), подробно изученные С. Н. Шевченко в работе [18]. Показано, что алгебра инфинитезимальных автоморфизмов такой квадрики (как и алгебра любой другой невырожденной квадрики) имеет градуированную структуру $h = h_{-2} + h_{-1} + h_0 + h_1 + h_2$. Существуют с точностью до эквивалентности десять таких квадрик. При этом каждой такой квадрике сопоставляется набор корней характеристического многочлена $|P - \lambda Q|$, а также набор целочисленных параметров, называемых *множителями инерции* и *минимальными индексами*. Для эквивалентности двух квадрик необходимо и достаточно совпадения корней характеристического уравнения (с точностью до вещественного дробно-линейного отображения, совмещающего наборы корней) и выполнения некоторых соотношений между целочисленными параметрами. Показано также, что для квадрики общего положения – так называемой жесткой квадрики (а именно квадрики, для которой характеристическое уравнение имеет три различных корня, что сводится к условию отличности от нуля дискриминанта) – алгебры h_1 и h_2 тривиальны, а алгебра h_0 имеет размерность 4 и является коммутативной.

Вернемся к доказательству несферичности орбит. Как следует из сказанного выше, касательная квадрики орбиты общего положения является жесткой в каждой точке (в силу однородности орбиты). Действительно, дискриминант характеристического уравнения в рассматриваемом случае есть ненулевая рациональная функция от a, b , и условие обращения его в нуль есть условие алгебраическое. Поэтому, предположив, что орбита общего положения сферична, мы получим изоморфизм алгебры g поверхности Q на некоторую подалгебру в алгебре h жесткой квадрики. Но в силу коммутативности h_0 и тривиальности h_+ коммутант h' алгебры h вложен в h_- , а значит, $h'' \subset h'_- = h_{-2}$. Однако компонента h_{-2} двумерна, значит, g'' в силу того, что g является по предположению подалгеброй в h , будет не более чем двумерна, но на самом деле g'' , как легко видеть, четырехмерна, что и доказывает несферичность орбиты общего положения в двухпараметрическом семействе.

Опишем орбиты $S_{0,b}$, $b > 1$. Применяя к точке $(z, w_2, w_3, w'_3, w_4) = (0, i, 0, 0, ib)$, $b > 1$, группу G_0 и сдвиги по $\operatorname{Re} w$, получаем поверхность $v_2 > 0$, $z = w_3 = w'_3 = 0$, $v_4 = bv_2^2$ и после сдвигов по z имеем

$$\begin{aligned} v_2 &> |z|^2, \\ v_3 &= 2v_2 \operatorname{Re} z - |z|^2 \operatorname{Re} z, \\ v'_3 &= 2v_2 \operatorname{Im} z - |z|^2 \operatorname{Im} z, \\ v_4 &= 4v_3 \operatorname{Re} z + 4v'_3 \operatorname{Im} z + |z|^4 - 4|z|^2 v_2 + b(v_2 - |z|^2)^2. \end{aligned}$$

Выделив теперь касательную модель аналогично тому, как это было сделано для орбит общего положения, получаем росток вида

$$\operatorname{Im} \eta = P(z, \bar{z}) + O(3), \quad \operatorname{Im} \theta = R(z, \bar{z}) + O(3), \quad \operatorname{Im} \xi = Q(z, \bar{z}) + O(3),$$

где $P(z, \bar{z})$, $R(z, \bar{z})$, $Q(z, \bar{z})$ – эрмитовы формы с матрицами

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2i} & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 8 - 4b & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что эти матрицы всегда линейно независимы и при $b \neq 2$ общего ядра не имеют, в силу чего при $b \neq 2$ являются вполне невырожденными. При $b = 2$ орбита будет вырождена (эрмитовы формы имеют общее ядро $z_2 = 0$) и в силу этого автоматически несферична. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим подробнее орбиты, полученные в теореме 4.1.

Для многообразий $S_{a,b}$, $a > 0$, с касательными $(3, 2)$ -квадриками характеристическое уравнение линейной заменой переменной приводится к виду

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad (4.5)$$

где

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2a} + \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{3}{8b},$$

$$q = \frac{2}{27} \left(\frac{b}{2a} + \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right)^3 + \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8b} \right) \left(\frac{b}{2a} \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{9a}{64b} + \frac{1}{8ab}.$$

Дискриминант уравнения (4.5) есть

$$D = -27q^2 - 4p^3 = 9 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8b} \right)^2 \left(\frac{b}{2a} + \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right)^2 + 108 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8b} \right)^3 - 27 \left(\frac{9a}{64b} + \frac{1}{8ab} \right)^2 - 4 \left(\frac{b}{2a} + \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right)^3 \left(\frac{9a}{64b} + \frac{1}{8ab} \right) - 54 \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8b} \right) \left(\frac{b}{2a} + \frac{3a}{4b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{9a}{64b} + \frac{1}{8ab} \right).$$

Отсюда видно, что если, скажем, зафиксировав a , устремить b к бесконечности, то $D \rightarrow -\infty$ и уравнение будет иметь один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, а если, зафиксировав b , устремить a к нулю, то $D \rightarrow +\infty$ и уравнение будет иметь три вещественных корня, откуда следует, что при некоторых промежуточных значениях a , b будет иметь место и совпадение корней. Это рассуждение показывает, что касательные квадрики рассматриваемых орбит попадают если не во все, то по крайней мере во многие различные точки в классификации Шевченко. Это означает, в частности, существование однородных вполне невырожденных несферических ростков с различными (неэквивалентными) касательными моделями в классе многообразий типа $(3, 2)$.

Касательные квадрики орбит $S_{0,b}$ суть $(2, 3)$ -квадрики. Имеется двойственность между (n, k) -квадриками и $(n, n^2 - k)$ -квадриками [3]. Согласно этой двойственности можно выбрать эрмитову форму H , ортогональную (как элемент $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением) плоскости эрмитовых форм P , Q , R , и эквивалентность $(2, 3)$ -квадрик будет определяться эквивалентностью гиперквадрик вида $\text{Im } w = H(z, \bar{z})$. В нашем случае $H = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 4b - 8 \end{pmatrix}$. Для эквивалентности гиперквадрик имеется единственный инвариант – сигнатура формы H (понимаемая как модуль разности между числом плюсов и числом минусов в канонической форме). Поэтому все рассматриваемые квадрики

делятся на два класса эквивалентности: класс тех, которым соответствует знакоопределенная H , и класс тех, которым соответствует знакопеременная H . Первому классу соответствуют $b > 2$, второму соответствуют $1 < b < 2$. Поэтому и для типа (2,3) получаем примеры однородных вполне невырожденных ростков с различными (неэквивалентными) касательными моделями.

В качестве гипотезы можно сформулировать утверждение о несферичности всех многообразий, полученных в теореме 4.1.

Изученные примеры побуждают нас поставить задачу об описании всех однородных вполне невырожденных ростков в пространствах малой размерности.

§ 5. Знакоопределенные многообразия типа (1,4)

В этом параграфе будут построены оболочки голоморфности одного класса модельных многообразий типа (1,4) “смешанного” вида, не обладающих ни симметрией отражения, ни симметриями вращения. Для (1,4)-многообразия с отражением согласно теореме 2.1 оболочка будет цилиндрической областью, тогда как для S^1 -симметричного многообразия согласно теореме 3.2 оболочка будет областью ограниченного вида. Принципиальный интерес ввиду этого вызывает “смешанный” случай.

Будем в дальнейшем записывать уравнения “смешанной” (1,4)-модели (ее по-прежнему будем обозначать через Q) в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} w_2 &= |z|^2, \\ \operatorname{Im} w_3 &= \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}), \\ \operatorname{Im} w'_3 &= \operatorname{Im}(z^2 \bar{z}), \\ \operatorname{Im} w_4 &= |z|^4 + \alpha \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}),\end{aligned}$$

где $z, w_j \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$. Нам будет также важен вид автоморфизмов (2.1) для такого многообразия:

$$z \rightarrow z + p, \quad (5.1)$$

$$w_2 \rightarrow w_2 + i|p|^2 + 2iz\bar{p} + a_2, \quad (5.2)$$

$$w_3 \rightarrow w_3 + i|p|^2 \operatorname{Re} p + iz^2 \bar{p} + iz\bar{p}^2 + 2w_2 \operatorname{Re} p + 2izp\bar{p} + a_3, \quad (5.3)$$

$$w'_3 \rightarrow w'_3 + z^2 \bar{p} - z\bar{p}^2 + i|p|^2 \operatorname{Im} p + 2w_2 \operatorname{Im} p + 2|p|^2 z + a'_3, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}w_4 \rightarrow w_4 + 4w_3 \operatorname{Re} p + 4w'_3 \operatorname{Im} p + 2iz^2 \bar{p}^2 \\ + 4|p|^2 w_2 + 4izp\bar{p}^2 + i|p|^4 + \alpha(iz^3 \bar{p} + 3w_3 \operatorname{Re} p - 3w'_3 \operatorname{Im} p \\ + 3i|p|^2 z^2 + 3w_2 \operatorname{Re}(p^2) + i\bar{p}^3 z + 3izp^2 \bar{p} + ip^3 \bar{p}) + a_4,\end{aligned} \quad (5.5)$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{C}$. Обозначения, введенные в § 3, метод конструкции дисков и пространство функций $z(\zeta)$ сохраняются прежними. Формулы (1.1) приобретают вид

$$v_2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} |z(\zeta)|^2 dt, \quad (5.6)$$

$$V_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} z^2(\zeta) \overline{z(\zeta)} dt, \quad (5.7)$$

$$v_4(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} (|z(\zeta)|^4 + \alpha \operatorname{Re}(z^3(\zeta) \overline{z(\zeta)})) dt. \quad (5.8)$$

Приведем основное утверждение настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 5.1. *При $\alpha > 2$ оболочка голоморфности многообразия Q имеет вид*

$$\hat{Q} = \{(z, w_2, w_3, w'_3, w_4) \in \mathbb{C}^5 : \operatorname{Im} w_2 > |z|^2, w_3, w'_3, w_4 \in \mathbb{C}\}$$

и представляет собой, таким образом, цилиндрическую по w_3, w'_3, w_4 область, в основании которой лежит биголоморфный образ шара в $\mathbb{C}^2$.

В основе доказательства теоремы 5.1 лежит следующая важная

ЛЕММА 5.1. *Область D_α , заданная неравенствами*

$$(2 + \alpha)(v_3 - v_2 \operatorname{Re} z)^2 + (2 - \alpha)(v'_3 - v_2 \operatorname{Im} z)^2 < (v_2 - |z|^2)(v_4 - v_2^2 - \alpha v_3 \operatorname{Re} z + \alpha v'_3 \operatorname{Im} z), \quad v_2 > |z|^2,$$

является голоморфным расширением многообразия Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z(\zeta) = a\zeta/(1 - a\zeta)$, $0 < a < 1$. Как было вычислено при доказательстве леммы 3.2, в этом случае $v_2 = a^2/(1 - a^2)$, $V_3 = a^4/(1 - a^2)^2$. Чтобы вычислить v_4 , необходимо вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} z^3(\zeta) \overline{z(\zeta)} dt$. Поскольку

$$\begin{aligned} z^3(\zeta) &= \frac{a^3 \zeta^3}{(1 - a\zeta)^3} = \frac{1}{2} a \zeta^3 \left(\frac{1}{1 - a\zeta} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} a \zeta^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \zeta^k \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) a^k \zeta^k, \end{aligned}$$

то, обозначая $a^2 = b$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} z^3(\zeta) \overline{z(\zeta)} dt &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) a^k \cdot a^k = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) b^k \\ &= \frac{1}{2} b^3 \left(\sum_{k=3}^{\infty} b^{k-1} \right)'' = \frac{1}{2} b^3 \left(\frac{b^2}{1-b} \right)'' = \frac{b^3}{(1-b)^3} = \frac{a^6}{(1-a^2)^3}. \end{aligned}$$

Взяв теперь диски более общего вида: $z(\zeta) = \lambda \frac{a\zeta}{1-a\zeta} e^{i\varphi}$, $\lambda > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и используя результаты вычислений из доказательства леммы 3.2, окончательно получаем

$$v_2 = \frac{a^2 \lambda^2}{1 - a^2}, \quad V_3 = \frac{e^{i\varphi} a^4 \lambda^3}{(1 - a^2)^2}, \quad v_4 = \frac{a^4 (1 + a^2) \lambda^4}{(1 - a^2)^3} + \alpha \frac{a^6 \lambda^4}{(1 - a^2)^3} \cos(2\varphi).$$

Отсюда следует, что центры взятых дисков принадлежат поверхности

$$v_2(v_4 - v_2^2) - \alpha(v_3^2 - (v'_3)^2) = 2|V_3|^2, \quad v_2 > 0, \quad V_3 \neq 0, \quad (5.9)$$

и, более того, замечают эту поверхность. Последнее следует из того, что эта поверхность представляется как график функции вида $v_4 = f(v_2, V_3)$, $v_2 > 0$, $V_3 \neq 0$. Естественно, взяв все возможные a , φ , λ , мы можем придать v_2 и V_3 любые значения такие, что $v_2 > 0$, $V_3 \neq 0$, откуда и следует (после применения сдвигов по $\operatorname{Re} w$), что замечаются все точки на графике.

Обозначив теперь для каждой точки на этой поверхности через v_4^+ и v_4^- соответственно первое и второе слагаемое в формуле для v_4 , мы можем подклеить к поверхности диски следующего вида (для каждой лежащей на поверхности (5.9) точки $(0, w_2^0, w_3^0, w_3'^0, w_4^0)$, которой соответствует $\varphi = 0$):

$$\{z = 0, w_2 = iv_2^0, w_3 = i\zeta V_3^0, w_3' = \zeta V_3^0, w_4 = iv_4^+ + i\zeta^2 v_4^-\}.$$

Непосредственно из выведенных выше формул для $\text{Im } w$ следует, что такие диски будут подклеены к поверхности (достаточно положить $\zeta = e^{i\varphi}$ при $|\zeta| = 1$). Взяв теперь произвольную внутреннюю точку диска, которой соответствует $\zeta = re^{i\varphi}$, $0 \leq r < 1$, мы получим семейство поверхностей вида

$$\left\{ v_2(v_4 - v_2^2) - \alpha(v_3^2 - (v_3')^2) = \frac{2|V_3|^2}{r^2}, v_2 > 0, V_3 \neq 0 \right\},$$

а также поверхность

$$\{V_3 = 0, v_2(v_4 - v_2^2) - \alpha(v_3^2 - (v_3')^2) > 0, v_2 > 0\}$$

(используя сдвиги по $\text{Re } w$). В силу произвольности $0 \leq r < 1$ получаем, что следующая область в плоскости $z = 0$ принадлежит голоморфному расширению многообразия Q :

$$\{v_2(v_4 - v_2^2) - \alpha(v_3^2 - (v_3')^2) > 2|V_3|^2, v_2 > 0, V_3 \neq 0\}, \quad (5.10)$$

откуда после преобразований получаем область

$$\{(2 + \alpha)v_3^2 + (2 - \alpha)(v_3')^2 < v_2(v_4 - v_2^2), v_2 > 0\}.$$

Теперь применим к полученной области автоморфизмы (5.1)–(5.5). Поскольку отображение, обратное к (5.1)–(5.5) и примененное к плоскости $z = 0$, имеет вид

$$w_2 \rightarrow w_2 - i|p|^2, \quad (5.11)$$

$$w_3 \rightarrow w_3 + i|p|^2 \text{Re } p - 2w_2 \text{Re } p, \quad (5.12)$$

$$w_3' \rightarrow w_3' + i|p|^2 \text{Im } p - 2w_2 \text{Im } p, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} w_4 \rightarrow w_4 - 4w_3 \text{Re } p - 4w_3' \text{Im } p - i|p|^4 \\ + 4|p|^2 w_2 + \alpha(3w_3' \text{Im } p - 3w_3 \text{Re } p + 3w_2 \text{Re}(p^2) - ip^3 \bar{p}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

то, подставив (5.11)–(5.14) в (5.10), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \{(2 + \alpha)(v_3 - v_2 \text{Re } p)^2 + (2 - \alpha)(v_3' - v_2 \text{Im } p)^2 \\ < (v_2 - |p|^2)(v_4 - v_2^2 - \alpha v_3 \text{Re } p + \alpha v_3' \text{Im } p), v_2 > |p|^2, z = p\}. \end{aligned}$$

Совокупность таких голоморфных расширений по всем $p \in \mathbb{C}$ и дает нужную область D_α . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Непосредственные вычисления показывают, что ни одна из областей D_α при $\alpha \neq 0$ не является голоморфно выпуклой (форма Леви в гладких точках границы не будет неотрицательно определенной). Соответственно, все эти области допускают голоморфное расширение.

Рассмотрим сечение области D_α плоскостью $z = 0$ и запишем его в виде

$$v_4 > \frac{(\alpha + 2)v_3^2 - (\alpha - 2)(v_3')^2}{v_2} + v_2^2, \quad v_2 > 0. \quad (5.15)$$

Как и при доказательстве леммы 2.1, воспользуемся леммой о выпуклой оболочке, согласно которой область (5.15) можно голоморфно расширить до ее выпуклой оболочки. Для этого заметим, что сечения области (5.15) плоскостями $v_2 = c > 0$ будут при $\alpha > 2$ аффинно эквивалентны надграфу стандартного “седла” $z > x^2 - y^2$, выпуклая оболочка которого совпадает со всем объемлющим пространством, поэтому выпуклая оболочка области (5.15) будет содержать все плоскости вида $v_2 = c > 0$, т.е. область (5.15) голоморфно расширяется до области $\text{Im } w_2 > 0$, а после применения автоморфизмов (5.1)–(5.5) – до области $\text{Im } w_2 > |z|^2$. Последняя является геометрически, а значит, и голоморфно выпуклой, в силу чего она представляет собой оболочку голоморфности области D_α , а согласно лемме 5.1 – и многообразия Q , что и требовалось доказать.

Для оболочек голоморфности многообразий Q при $\alpha \in (0, 2]$ можно утверждать лишь то, что они однолиственны, так как D_α представляют собой полутрубчатые области [19]. В качестве гипотезы можно высказать предположение о том, что при $\alpha \in (0, 2)$ это будут области ограниченного вида, а при $\alpha = 2$ – некоторый промежуточный вариант между областями ограниченного вида и цилиндрическими по w_3, w_4 областями (то, что эта область не будет областью ограниченного вида, ясно из того, что D_2 содержит комплексные прямые, например $\{z = 0, w_2 = i, w_3 = ia, w_4 = ib, w_3' \in \mathbb{C}, b > 4a^2 + 1\}$). Вид оболочки голоморфности области D_2 как области, лежащей “на стыке” семейств областей двух принципиально различных классов, и ее возможные “бифуркационные” свойства вызывают безусловный интерес. Верность этой гипотезы послужила бы еще одним серьезным подтверждением высказанного во введении предположения о структуре оболочек голоморфности произвольных модельных многообразий.

Автор выражает благодарность В. К. Белошапке за ценные указания и постоянный интерес к настоящей работе.

Список литературы

1. В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 507–522; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Universal models for real submanifolds”, *Math. Notes*, **75**:4 (2004), 475–488.
2. T. Bloom, I. Graham, “On ‘type’ conditions for generic real submanifolds of $\mathbb{C}^n$ ”, *Invent. Math.*, **40**:3 (1997), 217–243.
3. В. К. Белошапка, “Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации”, *УМН*, **57**:1 (2002), 3–44; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Real submanifolds in complex space: polynomial models, automorphisms, and classification problems”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 1–41.
4. В. К. Белошапка, *Теорема вложения*, http://www.strogino.ru/~vkb/articles/teorema_vlozhenija.pdf.
5. В. К. Белошапка, “Кубическая модель вещественного многообразия”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 503–519; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “A cubic model of a real manifold”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 457–470.

6. I. Naruki, “Holomorphic extention problem for standard real submanifolds of second kind”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **6**:1 (1970), 113–187.
7. И. И. Пятецкий-Шапиро, *Геометрия классических областей и теория автоморфных функций*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: I. I. Pyateskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Math. Appl., **8**, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1969.
8. Р. В. Гаммель, И. Г. Коссовский, “Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен жесткости”, *Комплексный анализ и приложения*, Тр. МИАН, **253**, Наука, М., 2006, 30–45; англ. пер.: R. V. Gammel, I. G. Kossovskii, “The envelope of holomorphy of a model third-degree surface and the rigidity phenomenon”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **253**:1 (2006), 22–36.
9. А. Е. Туманов, “Продолжение CR-функций в клин”, *Матем. сб.*, **181**:7 (1990), 951–964; англ. пер.: A. E. Tumanov, “Extension of CR-functions into a wedge”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:2 (1991), 385–398.
10. В. К. Белошапка, “Полиномиальные модели вещественных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:4 (2001), 3–20; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Polynomial models of real manifolds”, *Izv. Math.*, **65**:4 (2001), 641–657.
11. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных*, 3-е изд., Наука, М., 1985; англ. пер.: B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables*, Transl. Math. Monogr., **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
12. Е. Н. Шананина, *Полиномиальные модели вещественно-аналитических многообразий и алгебры их автоморфизмов*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2006.
13. V. K. Beloshapka, “Moduli space of model real submanifolds”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 245–252.
14. Л. Хермандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Co., Princeton–Toronto–London, 1966.
15. E. Cartan, “Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l’espace de deux variables complexes”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **11**:1 (1933), 17–90.
16. А. В. Лобода, “Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, К 70-летию со дня рождения акад. А. Г. Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 114–142; англ. пер.: A. V. Loboda, “Homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235**:4 (2001), 107–135.
17. G. Fels, W. Kaup, CR-manifolds of dimension 5: A Lie algebra approach, [arXiv: math.DS/0508011](https://arxiv.org/abs/math/0508011).
18. С. Н. Шевченко, “Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация”, *Матем. заметки*, **55**:5 (1994), 142–153; англ. пер.: S. N. Shevchenko, “Description of the algebra of infinitesimal automorphisms of quadrics of codimension two and their classification”, *Math. Notes*, **55**:5 (1994), 534–542.
19. В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, The M. I. T. Press, Cambridge–London, 1966.

И. Г. КОССОВСКИЙ (I. G. KOSSOVSKII)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: ilya_kos@mail.ru

Поступило в редакцию
27.12.2006