Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Коэн, С. Пинзон, Обобщение свойства $(1,2)$ -симплектичности на f -структуры, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 3, 69–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:37:07

УДК 514.763.42

Н. Коэн, С. Пинзон

Обобщение свойства $(1, 2)$ -симплектичности на f -структуры на флаговых многообразиях

Свойство $(1, 1)$ -симплектичности f -структур на комплексном римановом многообразии M – это естественное обобщение свойства $(1, 2)$ -симплектичности почти комплексных структур на M , возникающее при изучении комплексных гармонических отображений со значениями в M . Описание этого свойства в комбинаторных терминах известно только для почти комплексных структур или для случая, когда M является классическим флаговым многообразием $\mathbb{F}(n)$. В настоящей работе эти ограничения устраняются с помощью понятия графа пересечений, определенного в терминах соответствующей системы корней. Доказано, что f -структура является $(1, 1)$ -симплектической в точности тогда, когда граф пересечений локально транзитивен. Наша конструкция графа пересечений может также оказаться полезной при описании многих других свойств типа келеровости на комплексных флаговых многообразиях.

Библиография: 27 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе дается комбинаторное описание свойства $(1, 1)$ -симплектичности f -структур на общем комплексном флаговом многообразии $\mathbb{F}$. Это описание мотивировано тем, что указанное свойство играет фундаментальную роль в некоторых результатах о комплексных гармонических отображениях со значениями в $\mathbb{F}$ (см. [1], [2], а также [3]).

Тензорное поле $\mathcal{F}$ типа $(1, 1)$ на комплексном римановом многообразии M называется f -структурой, если $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ (см. [4]). Для сравнения укажем, что почти комплексная структура J удовлетворяет $J^2 = -I$ и, очевидно, является f -структурой. Мы сохраняем двойные обозначения $\mathcal{F}/J$, чтобы различать эти два уровня общности.

В эрмитовой геометрии почти комплексная структура J на римановом многообразии (M, g) называется $(1, 2)$ -симплектической, если $(+, -, -)$ -часть $d\sigma$ равна нулю, где σ – соответствующая вторая фундаментальная (келерова) форма. Известно, что это условие равносильно обращению в нуль $(+, -)$ -части тензора $d^\nabla J$ (см. [1], [5]).

Однако эта эквивалентность уже не имеет места для f -структур. Вместо этого обращение в нуль $(+, -)$ -части тензора $d^\nabla \mathcal{F}$ (в обозначениях [1]) эквивалентно обращению в нуль $(+, -, *)$ -части $d\sigma$ (см. [6]). Будем называть такие структуры $(1, 1)$ -симплектическими.

Работа второго автора поддержана COLCIENCIAS (контракт № 138–2004).

Не известно общего описания свойства $(1, 1)$ -симплектичности даже для случая, когда (M, g) – флаговое многообразие. В этом контексте естественно считать, что как структура $\mathcal{F}/J$, так и метрика g являются *инвариантными*. Нас интересует следующая задача.

ЗАДАЧА. *Дано общее флаговое многообразие $\mathbb{F}$. Описать все такие инвариантные f -структуры $\mathcal{F}$ на $\mathbb{F}$, что тройка $(\mathbb{F}, g, \mathcal{F})$ является $(1, 1)$ -симплектической для некоторой инвариантной римановой метрики g на $\mathbb{F}$.*

В дальнейшем будем называть такие f -структуры $(1, 1)$ -*допустимыми*, или, для краткости, *допустимыми*. Свойство допустимости возникает при изучении гармонических отображений во флаговые многообразия (см. [1], [2], [7]). Его описание в комбинаторных терминах известно только в частных случаях и всегда имеет следующий вид.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Структура $\mathcal{F}$ допустима тогда и только тогда, когда надлежащий комбинаторный объект локально транзитивен.*

Важность этого наблюдения состоит в том, что оно дает комбинаторную процедуру, которая намного проще, чем прямая проверка вычислением ковариантных производных. При переходе на более высокий уровень общности основным вопросом становится нахождение надлежащей комбинаторной задачи и приспособленного к ней понятия локальной транзитивности. Обратимся к известным частным случаям.

Рассмотрим классическое многообразие $\mathbb{F}(n)$ полных флагов типа A_{n-1} , а на нем – почти комплексную структуру J . С парой $(\mathbb{F}(n), J)$ ассоциируется диграф турнира с n игроками (см. [8], [9]). Понятие локальной транзитивности для диграфов турниров хорошо известно [10]. Оно является *локальным* свойством в том смысле, что его достаточно проверять для индуцированных подтурниров с четырьмя игроками (это отмечено в [9] и [11]). Отсюда вытекает оценка снизу комбинаторной сложности задачи, поскольку число подтурниров с четырьмя игроками для $\mathbb{F}(n)$ ограничено числом $n^4/4!$.

Связь допустимости пары $(\mathbb{F}(n), J)$ с локальной транзитивностью диграфа турнира была установлена в [9] и [11] и завершена в [12], [13] (см. также [14]). Этот результат был недавно обобщен в двух различных направлениях:

- (i) с заменой J на f -структуру $\mathcal{F}$;
- (ii) с заменой $\mathbb{F}(n)$ на более общее флаговое многообразие.

В случае (i) рассмотрим f -структуру $\mathcal{F}$ на $\mathbb{F}(n)$. Ей опять соответствует диграф, но уже не обязательно полный. Понятие локальной транзитивности было обобщено на неполные диграфы в работе [6]. Это свойство является локальным: его достаточно проверять на подграфах с четырьмя вершинами. Утверждение 1 для $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F})$ и для общих диграфов было доказано в [6].

В случае (ii) рассмотрим общее многообразие полных флагов $\mathbb{F}$, снабженное почти комплексной структурой J . Здесь подход через диграфы уже не дает результатов, но понятие локальной транзитивности все же было введено в [13] в терминах комбинаторики систем корней. Это свойство локально: его достаточно проверять на подсистемах корней ранга 3. Поэтому самая грубая оценка сложности равна $m^3/4!$, где m – размер соответствующей частичной системы

корней. Утверждение 1 для $(\mathbb{F}, J)$ было по существу проверено в [15] на языке систем корней (см. также [16]).

Естественно возникают два вопроса. Во-первых, можно ли обобщить утверждение 1 сразу в *обоих* направлениях (i) и (ii), сохраняя его локальный характер? Во-вторых, можно ли получить результат (ii) в терминах теории графов?

В настоящей работе дается положительный ответ на оба вопроса. Напомним, что с каждым общим многообразием флагов (полных или частичных) связана (полная или частичная) система корней Π' (см. [17], [18]). Пусть G – *граф пересечений* (см. [19]), вершины которого – это тройки корней из Π' с нулевой суммой. Оказывается, что G представляет собой объединение простых графов, каждый из которых изоморфен кубу, изображенному на рис. 1, причем валентность каждой вершины в G равна трем.

Любая f -структура $\mathcal{F}$ на $\mathbb{F}$ задает некоторое размещение знаков $+, -, 0$ на ребрах графа G . Скажем, что *граф G локально транзитивен относительно $\mathcal{F}$* , если в каждом кубе число вершин с ребрами, помеченными $(+++)$, $(++0)$ или $(+00)$, отлично от 1. Ясно, что это свойство локально, поскольку оно определено в терминах отдельных кубов. Сохраняет силу грубая оценка $m^3/4!$ для сложности задачи.

Наш основной результат (теорема 3) доказывает утверждение 1 для любой f -структуры $\mathcal{F}$ на любом многообразии (полных или частичных) флагов. Значительная часть наших рассуждений, включая доказательство достаточности в теореме 3, основана на диссертации второго автора [16].

Другой, не рассматриваемый здесь, подход к задаче о допустимости приводит к нелокальному описанию этого свойства в терминах действия ассоциированной аффинной группы Вейля. (Рекомендуем заинтересованному читателю работы [13], [18], [22].)

Графы пересечений для флаговых многообразий интересны и полезны при изучении более широкого круга вопросов, связанных с комбинаторикой флагов. Вершины и кубические грани таких графов представляют собой тройки и четверки корней с нулевой суммой из рассматриваемой системы. Наш опыт показывает, что все свойства типа келеровости на флаговых многообразиях (включая изучаемое здесь свойство (1, 2)-симплектичности [23]) можно описать через размещение знаков, индуцированное тензором $\mathcal{F}$ на кубах графа пересечений. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в последующих публикациях.

Наше наблюдение о расщеплении графа пересечений в объединение перекрывающихся кубов означает, что “важная” часть каждой (полной или частичной) системы корней (часть, отвечающая четверкам корней с нулевой суммой) расщепляется в объединение перекрывающихся подсистем типа A_3 . Действительно, граф пересечений системы корней типа A_3 (отвечающей флаговому многообразию $\mathbb{F}(4)$) представляет собой единственный куб. Для сравнения укажем, что системы корней типа A_2 не являются “важными”: их графы пересечений тривиальны. Поэтому всякая f -структура на $\mathbb{F}(3)$ автоматически локально транзитивна и, тем самым, допустима.

§ 2. Общие флаговые многообразия

В этом подготовительном параграфе мы излагаем стандартную теорию многообразий частичных флагов, ассоциированных с полупростыми алгебрами Ли (см., например, [17], [22]) и вводим обозначения.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная полупростая комплексная алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ – ее картановская подалгебра. Фиксируем систему Σ простых корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и обозначим через Π и Π^+ соответственно системы общих и положительных корней. Напомним, что каждый корень $\alpha \in \Pi$ – это линейный функционал на $\mathfrak{g}$, однозначно определяющий элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ посредством представления Рисса $\alpha(X) = \langle X, H \rangle$, $X \in \mathfrak{g}$, относительно формы Картана–Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Имеем картановское разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

есть одномерное корневое подпространство, отвечающее α . Фиксируем базис Вейля $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, со стандартными свойствами:

$$\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = \begin{cases} -1, & \alpha + \beta = 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad [X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} H_\alpha \in \mathfrak{h}, & \alpha + \beta = 0, \\ m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \Pi, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Числа $m_{\alpha, \beta}$ вещественны. Они отличны от нуля тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \in \Pi$. При этом

$$m_{\alpha, \beta} = -m_{-\alpha, -\beta} = -m_{\beta, \alpha} = m_{-\beta, \alpha + \beta}. \quad (2)$$

Соответствие между многообразиями полных флагов и системами корней (формализованное, например, в [23]) обобщается до соответствия между многообразиями частичных флагов и *частичными системами корней* (см. [17], [18]). Назовем множество Π' *частичной флаговой системой корней*, если $\Pi' := \Pi \setminus \Pi''$, где Π – система корней, а Π'' – собственная подсистема корней в Π . Наряду с Π' будем рассматривать дополнительные множества $\Pi'^{\pm} = \Pi^{\pm} \setminus \Pi''^{\pm}$ и $\Sigma' = \Sigma \setminus \Sigma''$.

Хотя Π' в общем случае не является системой корней в строгом смысле из [23], тройка $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi')$ определяет однородное пространство (обозначаемое через $\mathbb{F}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi')$) способом, напоминающим конструкцию многообразия полных флагов $\mathbb{F}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$. Мы называем $\mathbb{F}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi')$ *общим флаговым многообразием* и обозначаем его просто через $\mathbb{F}$. Опишем две альтернативные конструкции многообразия $\mathbb{F}$, представляющие его как компактное однородное пространство.

Первая конструкция исходит из борелевской подалгебры $\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$. Подалгебра

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+ \cup \Pi''} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$$

является параболической. Поэтому если G – комплексная связная группа Ли, ассоциированная с $\mathfrak{g}$, а P – нормализатор подалгебры $\mathfrak{p}$ в G , то пространство G/P однородно. Положим $\mathbb{F} = G/P$.

Вторая конструкция многообразия $\mathbb{F}$ исходит из двумерных вещественных пространств

$$\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{R}} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, S_\alpha\} \subset \mathfrak{g}_\alpha, \quad A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}, \quad S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha}).$$

Пространство $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = i\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{R}}$ является компактной вещественной формой в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим вещественную подалгебру

$$\mathfrak{t}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} = i\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi''} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{R}}.$$

Обозначим через U и T связные подгруппы Ли в G , отвечающие подалгебрам $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ и $\mathfrak{t}^{\mathbb{R}}$. По построению, $K := U \cap P$ – централизатор тора $T \subset U$, а $\mathbb{F} = U/K$ является компактным пространством.

Смежный класс $b = [\mathfrak{h}]$ принимается за начало координат в $\mathbb{F}$. Если $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi''} \mathfrak{g}_\alpha$ – комплексификация подалгебры $\mathfrak{t}^{\mathbb{R}}$, то касательное пространство $T_b\mathbb{F}$ можно отождествить с $\mathfrak{q} = \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{t} = \sum_{\alpha \in \Pi'} \mathfrak{g}_\alpha$, рассматривая элементы $\mathfrak{q}$ как векторные поля и вычисляя значения этих полей в точке b . Заметим, что $\mathfrak{q}$ есть комплексификация вещественного векторного пространства

$$\mathfrak{q}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \ominus \mathfrak{t}^{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Pi'} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{R}}$$

(см. [24]).

В частном случае $\Pi'' = \emptyset$ мы получаем построение ассоциированного с Π многообразия *полных* (или *максимальных*) флагов. Дальнейшее обсуждение этой конструкции см. в [17], [25].

§ 3. Граф пересечений системы корней

Понятие графа пересечений играет важную роль в комбинаторике флагов и занимает центральное место в нашем подходе. Общее определение графа пересечений $\Omega(\mathcal{S})$ для данного набора множеств $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ таково: это неориентированный граф G (без петель и кратных ребер) с множеством вершин $\mathcal{S}$, причем вершины S_i, S_j соединены ребром в том и только в том случае, когда S_i и S_j пересекаются. Этому ребру приписывается в качестве метки множество $S_i \cap S_j$, так что разные ребра могут иметь одинаковые метки (см. [19]).

В частности, если задана система корней Π' , то под *графом пересечений, ассоциированным с Π'* , будем понимать граф пересечений $G := G(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\Pi')$ есть множество всех *троек с нулевой суммой* в Π' (т.е. таких троек $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, что $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi'$ и $\alpha + \beta + \gamma = 0$). Легко видеть, что пересечение двух различных троек с нулевой суммой либо пусто, либо состоит из одного корня. Поэтому метками ребер графа $G(\Pi')$ являются корни из Π' (причем два ребра могут иметь одну и ту же метку).

Рассмотрим любую *несимметричную четверку* $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ с *нулевой суммой* в Π' . (Это означает, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – четыре различных корня из Π' ,

причем $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ и не допускаются симметричные четверки вида $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$.) Если сложить два из четырех входящих в Q корней, то получится тройка с нулевой суммой. Такие тройки называются *выделенными* из Q . Например, тройка $T = \{\alpha, \beta, \gamma + \delta\}$ выделена из Q .

Сколько троек можно выделить из Q ? Хотя имеется ровно шесть выделенных из Q троек, некоторые из них могут не лежать в (неаддитивном) множестве Π' . (Из симметричности Π' вытекает, что число выделенных троек всегда четно.)

Следующее важное наблюдение содержательно даже для полных систем корней.

ЛЕММА 1. *Из каждой несимметричной четверки Q с нулевой суммой в произвольной частичной системе корней Π' выделяются ровно четыре тройки с нулевой суммой, содержащиеся в Π' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Сначала докажем лемму для случая, когда $\Pi' = \Pi$ есть полная система корней. Пусть $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ – несимметричная четверка с нулевой суммой в Π . Порожденная множеством Q система корней $\hat{\Pi} \subset \Pi$ полупроста и имеет ранг не выше 3. Чтобы исключить тривиальные случаи, допустим, что $\hat{\Pi}$ содержит несимметричные четверки с нулевой суммой. Согласно стандартной классификационной теории [17], это означает, что $\hat{\Pi}$ может быть системой G_2 ранга 2 или одной из следующих систем ранга 3: A_3, B_3, C_3 и $A_1 \oplus G_2$. Поскольку всякая выделенная из Q тройка лежит в $\hat{\Pi}$, мы можем заменить Π' на $\hat{\Pi}$. Рассмотрим каждый случай по отдельности.

1) $\hat{\Pi} = A_3$. Стандартная реализация этой системы корней в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\Pi_1 = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 3\}. \quad (3)$$

С точностью до замены знака $T \rightarrow -T$ все четыре тройки с нулевой суммой задаются формулами¹

$$T_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}, \quad T_i = \{e_j - e_k, e_k + e_i, -e_j - e_i\}. \quad (4)$$

В то же время существует только одна (с точностью до общей знаковой перестановки² множества $\{1, 2, 3\}$) несимметричная четверка с нулевой суммой, а именно

$$Q_1 = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3 - e_1, -e_3 - e_1\}, \quad (5)$$

и все четыре выделенных из нее тройки описаны в (4).

2) $\hat{\Pi} = B_3$. Стандартная реализация этой системы корней в $\mathbb{R}^3$ есть $\Pi_1 \cup \Pi_2$, где множества Π_1 (см. (3)) и $\Pi_2 := \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 3\}$ описывают длинные и короткие корни. С точностью до знака минус тройки с нулевой суммой исчерпываются тройками (4) и еще шестью тройками

$$T'_i = \{e_j, e_k, -e_j - e_k\}, \quad T''_i = \{e_j, -e_k, e_k - e_j\}. \quad (6)$$

¹На протяжении всего доказательства мы считаем, что $i = 1, 2, 3$ и (циклически) полагаем $j = i + 1$ и $k = i + 2$.

²То есть перестановки с последующим приписыванием положительного или отрицательного знака каждому элементу. (Прим. перев.)

В то же время всякая несимметричная четверка с нулевой суммой есть (с точностью до знаковой перестановки) либо Q_1 из (5), либо

$$Q_2 = \{e_1, e_2, e_3 - e_1, -e_3 - e_2\}. \quad (7)$$

Четверка Q_2 имеет четыре выделенные тройки: T_3, T'_3, T'_2, T''_3 . Как и выше, Q_1 имеет четыре выделенных тройки (4). Однако тройки (6) имеют короткие корни и не являются выделенными из Q_1 .

3) $\hat{\Pi} = C_3$. Стандартная реализация этой системы корней в $\mathbb{R}^3$ есть $\Pi_1 \cup 2\Pi_2$, где короткие и длинные корни теперь поменялись местами. С точностью до знака множество троек с нулевой суммой состоит из (4) и еще шести троек

$$\hat{T}_i = \{2e_i, e_j - e_i, -e_j - e_i\}, \quad \tilde{T}_i = \{2e_i, e_k - e_i, -e_k - e_i\}. \quad (8)$$

В то же время с точностью до знаковой перестановки единственная несимметричная четверка с нулевой суммой есть

$$Q_3 = \{2e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_1, -(e_2 + e_3)\}. \quad (9)$$

Она имеет выделенные тройки $\hat{T}_1, \tilde{T}_1, T_2, T_3$.

4) $\hat{\Pi} = G_2$. Множества простых и положительных корней G_2 суть $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $\Pi_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$ соответственно. Запишем $\hat{\Pi}$ как объединение множества $\{\pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$ (короткие корни) и его дополнения (длинные корни), оба множества типа A_2 . С точностью до знака все тройки с нулевой суммой таковы:

$$\begin{aligned} \check{T}_1 &= \{\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 - \alpha_2\}, & \check{T}_2 &= \{\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_1 - 3\alpha_2\}, \\ \check{T}_3 &= \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -2\alpha_1 - 3\alpha_2\}, & \check{T}_4 &= \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -2\alpha_1 - 3\alpha_2\}, \\ & & \check{T}_5 &= \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 - 2\alpha_2\}. \end{aligned}$$

Единственная (с точностью до поворота на 180° и отражения) несимметричная четверка с нулевой суммой в G_2 такова:

$$Q_4 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -2\alpha_1 - 3\alpha_2\}.$$

Тройки $\check{T}_1, \check{T}_2, \check{T}_3, \check{T}_4$ являются выделенными из нее.

5) $\hat{\Pi} = A_1 \oplus G_2$. Система корней $A_1 \oplus G_2$ есть несвязное объединение двух систем корней G_2 . Всякая четверка с нулевой суммой, не содержащая пар повторяющихся или обратных корней, целиком содержится в одном из двух экземпляров G_2 , что сводит этот случай к предыдущему.

Π . Теперь докажем лемму для *частичных* систем корней ($\Pi' \neq \Pi$). Считая $\hat{\Pi}$ любой из систем, разобранных в части I, а $\hat{\Pi}''$ – подсистемой корней, можно показать перебором всех случаев, что $\hat{\Pi}' := \hat{\Pi} \setminus \hat{\Pi}''$ – полная система корней, следовательно, она может быть изучена, как в части I.

Вернемся к графу пересечений G , ассоциированному с частичной системой корней Π . Сначала рассмотрим систему корней A_3 , отвечающую флаговому многообразию $\mathbb{F}(4)$. Как показано на рис. 1, соответствующий граф пересечений – это куб C , двенадцать ребер которого суть корни из Π , а восемь вершин и

Рис. 1. Кубы для A_3

шесть граней отвечают тройкам и четверкам корней с нулевой суммой. Куб C является регулярным двудольным графом, состоящим из восьми вершин валентности 3.

Кубы являются также основными строительными блоками для больших частичных систем корней Π' . По лемме 1 всякая четверка с нулевой суммой в Π' порождает единственный куб C , гранью которого она является. При этом восемь ребер C суть тройки, выделенные из Q и $-Q$. Повторяя эту конструкцию, можно представить весь граф G как объединение кубов.

Рис. 2. Кубы для B_3

Графы пересечений меньших полупростых алгебр Ли показаны на рис. 2 и 3, причем на этих рисунках $\pm i \pm j$ означает $\pm e_i \pm e_j$. Некоторые системы корней (например, A_2) имеют тривиальный граф пересечений (без вершин).

Рис. 3. Кубы для C_3

Граф пересечений любой системы корней является регулярным однородным двудольным графом валентности 3.

§ 4. Инвариантные f -структуры

Под f -многообразием понимается пара $(M, \mathcal{F})$, где M – риманово многообразие, а $\mathcal{F}$ – f -структура на M , т. е. тензорное поле типа $(1, 1)$ на M с $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Если $\mathcal{F} = J$ удовлетворяет более сильному ограничению $J^2 + I = 0$, то структура и многообразие называются *почти комплексными* (см. [4], [5]).

В настоящей работе M является общим флаговым многообразием $\mathbb{F} = U/K$, а $\mathcal{F}$ – U -инвариантной f -структурой. Хорошо известно следующее описание. Тензор $\mathcal{F}$ полностью задается эндоморфизмом $\mathcal{F}: \mathfrak{q}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{q}^{\mathbb{R}}$, коммутирующим с присоединенным действием группы K и удовлетворяющим $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. При комплексификации этот эндоморфизм единственным образом продолжается до диагонализуемого эндоморфизма $\mathcal{F}: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ с собственными значениями $i, 0, -i$. Обозначая соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^0, \mathfrak{q}^-$, имеем $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{q}^0 \oplus \mathfrak{q}^-$ и $\overline{\mathfrak{q}^+} = \mathfrak{q}^-$. В силу U -инвариантности эндоморфизм $\mathcal{F}$ диагонализуется в базисе Вейля [22], так что имеем

$$\mathcal{F}(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha X_\alpha, \quad \alpha \in \Pi', \quad (10)$$

где $\varepsilon_\alpha \in \{\pm 1, 0\}$ и $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$. Поскольку $\mathcal{F}$ однозначно задается своим сужением на Π' , можно отождествить $\mathcal{F}$ с антисимметрическим отображением $\varepsilon: \Pi' \rightarrow \{\pm 1, 0\}$. Структура $\mathcal{F}$ является почти комплексной, если $\varepsilon: \Pi' \rightarrow \{\pm 1\}$.

В дальнейшем мы рассматриваем обобщенное флаговое f -многообразие $(\mathbb{F}, \mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi'})$. Обозначим через Π' и G соответственно систему корней и граф пересечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (i) Для каждой тройки $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ с нулевой суммой в Π' определим сигнатуру $s(T) = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$.

(ii) Назовем тройку T *знакоопределенной*, если $|\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma\} \cap \{\pm 1\}| = 1$.

Если T не является знакоопределенной, то либо $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = 0$, либо $\mathcal{F}$ принимает противоположные значения на двух корнях из T .

ЛЕММА 2. Пусть тройка T выделена из несимметричной четверки Q с нулевой суммой, и пусть C – куб в G , содержащий Q в качестве грани. Тогда:

(I) сигнатура $s(T)$ равна сумме сигнатур трех соседних с T вершин из Q ;

(II) следующие свойства эквивалентны:

(i) в точности одна выделенная из Q тройка с нулевой суммой знакоопределена;

(ii) каждая из шести граней куба C допускает выделение в точности одной знакоопределенной тройки с нулевой суммой;

(iii) ровно две противоположные вершины $T, -T$ куба C знакоопределены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Шесть корней из C , не содержащихся в $\pm T$, образуют симметричное множество. Поэтому сумма их вкладов в сигнатуру равна нулю. Можно проверить, что только они и еще шесть нулей из T вносят вклад в сумму сигнатур трех троек, указанных в п. (I) леммы.

Рис. 4. К доказательству леммы 2

(II) Из рис. 4 видно, что если T – единственная знакоопределенная тройка, выделенная из Q , то каждая грань куба C содержит ровно одну знакоопределенную вершину: T или $-T$. Остальные шесть вершин C – это три законоопределенные вершины грани Q и их отрицательные образы в $-Q$.

§ 5. Свойство $(1, 1)$ -симплектичности

Свойство $(1, 2)$ -симплектичности инвариантных почти комплексных структур на многообразиях полных флагов хорошо отражено в литературе (см. [2], [5] и [23]). Существуют по крайней мере два разумных обобщения этого понятия на f -структуры: $(1, 2)$ -симплектичность и $(1, 1)$ -симплектичность. Нас больше интересует последнее из этих свойств. Оно было введено М. Блэком [1].

В этом параграфе определяются и обсуждаются оба свойства. Сначала мы описываем специальные свойства римановой геометрии *инвариантной* метрики ds^2 на общем флаговом многообразии $\mathbb{F}$. Среди инвариантных тензорных полей, ассоциированных с Λ и $\mathcal{F}$, особенно важны риманова связность, производная $d^\nabla \mathcal{F}$, келерова форма и ее внешняя производная. В силу инвариантности этих тензоров достаточно задать их на базисе Вейля X_α , $\alpha \in \Pi'$. Пользуясь этим, мы получим комбинаторные условия для свойства (1, 1)-симплектичности.

Метрика. Любая инвариантная метрика ds^2 однозначно задается своим сужением на касательное пространство $\mathfrak{q} = T_b \mathbb{F}$, т. е. скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{q}$, инвариантным относительно присоединенного действия группы K (см. [26]). Это скалярное произведение имеет вид

$$ds_\Lambda^2(X, Y) = (X, Y)_\Lambda := -\langle \Lambda X, Y \rangle$$

для некоторого линейного отображения $\Lambda: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$, которое симметрично и положительно определено относительно формы Картана–Киллинга. Инвариантность метрики означает, что

$$\Lambda X_\alpha = \lambda_\alpha X_\alpha, \quad \alpha \in \Pi', \quad (11)$$

а симметричность влечет равенство $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha} > 0$. Будем обозначать через Λ как указанное линейное отображение, так и задаваемую им метрику.

Связность. Риманова связность (или связность Леви-Чивита) $\nabla: \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$, ассоциированная с метрикой Λ , имеет вид

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_\mathfrak{q} + \Lambda^{-1}([X, \Lambda Y]_\mathfrak{q} - [\Lambda X, Y]_\mathfrak{q}). \quad (12)$$

В силу (11) имеем $\Lambda^{-1}X_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}X_\alpha$ для всех $\alpha \in \Pi'$. Вместе с соотношениями (1), (11) и (12) это дает следующие равенства для всех $\alpha, \beta \in \Pi'$:

$$\nabla_{X_\alpha} X_\beta = \begin{cases} m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\beta - \lambda_\alpha}{2\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \Pi', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (13)$$

Келерова форма. Келерова форма, рассматриваемая как 2-форма на $\mathfrak{q}$, определена равенством

$$\sigma(X, Y) = (X, \mathcal{F}Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, \mathcal{F}Y \rangle. \quad (14)$$

Из (1), (10), (12), (14) получаем

$$\sigma(X_\alpha, X_\beta) = \begin{cases} i\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha, & \beta = -\alpha, \quad \varepsilon_\alpha \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (15)$$

для всех $\alpha, \beta \in \Pi'$. При этом внешняя производная $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = \begin{cases} 0, & \alpha + \beta + \gamma \neq 0, \\ 0, & \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = 0, \\ -\frac{1}{3}im_{\alpha, \beta}t(\alpha, \beta, \gamma) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16)$$

где

$$t(\alpha, \beta, \gamma) := \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \Pi'. \quad (17)$$

Действительно, рассматривая $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ как векторные поля на $\mathbb{F}$ и пользуясь формулами (10), (13), мы получаем следующее выражение для $d\sigma$ в начале координат:

$$\begin{aligned} 3d\sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= -im_{\alpha,\beta}\sigma(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) + im_{\beta,\gamma}\sigma(X_\alpha, X_{\beta+\gamma}) \\ &\quad - im_{\alpha,\gamma}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\sigma(X_\beta, X_{\alpha+\gamma}) \\ &\quad - im_{\gamma,\alpha}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\alpha - \lambda_\gamma}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\sigma(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta). \end{aligned}$$

Применяя (15) к правой части, мы видим, что $d\sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ обращается в нуль, если $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ не является тройкой с нулевой суммой и с $\mathcal{F}(T) \neq (0, 0, 0)$. В последнем случае из (2) получаем $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$, что после сокращений дает (16).

Производная связности. Пусть $\mathcal{F}$ – инвариантная f -структура на $\mathbb{F}$. Следуя [27], определим производную $d^\nabla \mathcal{F}: \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ относительно римановой связности формулой

$$(d^\nabla \mathcal{F})(X, Y) = \nabla_X \mathcal{F}Y - \nabla_Y \mathcal{F}X - \mathcal{F}[X, Y]. \quad (18)$$

Из (1), (10) и (13) получаем

$$(d^\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = \begin{cases} \frac{i\eta(\alpha, \beta)[X_\alpha, X_\beta]}{2\lambda_{\alpha+\beta}}, & \alpha + \beta \in \Pi', \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\eta(\alpha, \beta) = \varepsilon_\beta(\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\beta - \lambda_\alpha) - \varepsilon_\alpha(\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\alpha - \lambda_\beta) - 2\varepsilon_{\alpha+\beta}\lambda_{\alpha+\beta}.$$

(1, 1)-симплектичность. Обозначим через $d^\nabla \mathcal{F}^{+-}$ сужение $d^\nabla \mathcal{F}: \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ на линейное подпространство $\mathfrak{q}^+ \times \mathfrak{q}^-$. Структура $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ называется *(1, 1)-симплектической*, если $(d^\nabla \mathcal{F})^{+-} = 0$, т. е. если $(d^\nabla \mathcal{F})(X, Y) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{q}^+$ и $Y \in \mathfrak{q}^-$.

Можно описать это свойство в терминах келеровой формы σ . Обозначим через $d\sigma^{+-*}$ сужение $d\sigma: \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \rightarrow \mathbb{C}$ на линейное подпространство $\mathfrak{q}^+ \times \mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}$.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие свойства тройки $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ эквивалентны:*

- (i) $d\sigma^{+-*} = 0$;
- (ii) $d^\nabla \mathcal{F}^{+-} = 0$;
- (iii) для всех $\alpha, \beta \in \Pi'$ с $\alpha + \beta \in \Pi$ и $1 = \varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$ имеем

$$\lambda_\alpha - \lambda_\beta = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{\alpha+\beta} = 0, \\ \lambda_{\alpha+\beta}, & \varepsilon_{\alpha+\beta} = 1; \end{cases} \quad (20)$$

(iv) в (17) имеем $t(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ для всех троек $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ с нулевой суммой таких, что $1 = \varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $\varepsilon_\alpha = 1$ и $\varepsilon_\beta = -1$ в (19), получаем

$$(d^\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_\beta - \lambda_\alpha - \varepsilon_{\alpha+\beta} \lambda_{\alpha+\beta}}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi'. \quad (21)$$

Эквивалентность (i) и (iii) непосредственно вытекает из (16), а эквивалентность (iii) и (iv) – из (17). Заметим, что “недостающий случай” $\varepsilon_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}^-$ равенства (20) получается заменой тройки $T = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$ на $-T$. Наконец, из (21) и несимметричности $\mathcal{F}$ вытекает эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(1, 2)-симплектичность. Рассмотрим тензор $d\sigma^{+-}$, полученный сужением $d\sigma$ на линейное подпространство $\mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{q}^- \oplus \mathfrak{q}^-$. Структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ называется (1, 2)-симплектической, если тензор $d\sigma^{+-}$ равен нулю.

Дж. Ронсли и С. Саламон [5], [7] показали, что для почти комплексных структур свойства (1, 1)-симплектичности и (1, 2)-симплектичности совпадают. Мы получим их результат в качестве простого следствия теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Следующие свойства почти комплексной структуры $\mathcal{F} = J$ эквивалентны:

- (i) $d\sigma^{+-} = 0$;
- (ii) $d^\nabla J^{+-} = 0$;
- (iii) $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$ всякий раз, когда $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha+\beta} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, проектируя вектор $Z \in \mathfrak{q}$ в выражении $d\sigma^{+-}(X, Y, Z)$ на три собственных подпространства $\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^0, \mathfrak{q}^-$, получим разложение в прямую сумму:

$$d\sigma^{+-} = d\sigma^{++} + d\sigma^{+-0} + d\sigma^{--}.$$

Тензоры $d\sigma^{++}$ и $d\sigma^{--}$ изометричны друг другу в силу антисимметричности $d\sigma$. Поэтому равенство нулю одного из них влечет равенство нулю другого. Третий тензор $d\sigma^{+-0}$ для почти комплексных структур J тривиален.

Для общих f -структур (1, 2)-симплектичность необходима (но не достаточна) для (1, 1)-симплектичности в условиях теоремы 1. Это объясняется тем, что тензор $d\sigma^{+-0}$ может быть нетривиален.

§ 6. Локальная транзитивность

По теореме 1 свойство (1, 1)-симплектичности можно охарактеризовать в терминах троек с нулевой суммой, т. е. в терминах графа пересечений. Это открывает возможность описания допустимости в терминах теории графов. Начнем с определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (i) Назовем множество $\Omega \subset \Pi'$ положительным (относительно данной f -структуры $\mathcal{F}$), если $\varepsilon_\alpha = 1$ для всех $\alpha \in \Omega$.

(ii) Обозначим через $\Omega - \Omega$ множество $\{\alpha - \beta: \alpha, \beta \in \Omega\}$.

(iii) Назовем структуру $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ локально транзитивной, если для всякого положительного множества $\Omega \in \Pi'$ с $\widehat{\Omega} := (\Omega - \Omega) \setminus \{0\} \subset \Pi'$ множество $\widehat{\Omega}$ не содержит знакоопределенных троек с нулевой суммой.

Ясно, что локальная транзитивность является наследственным свойством в том смысле, что если $\mathcal{F}$ локально транзитивна на Π' , то она локально транзитивна на любом подмножестве Π' . Мы также покажем, что локальная транзитивность является локальным свойством в том смысле, что ее достаточно проверять только на кубах ассоциированного графа пересечений G .

ЛЕММА 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ локально транзитивна;
- (ii) в Π не существует четверки с нулевой суммой, из которой выделялась бы единственная знакоопределенная тройка;
- (iii) в G не существует кубов с единственной положительной вершиной.

(Поскольку в симметричной четверке число повторяющихся выделенных троек четно, в утверждении (ii) достаточно рассматривать только несимметричные четверки.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (ii) и (iii) очевидна. Докажем от противного, что (i) влечет (iii). Допустим, что в G существует куб C , содержащий единственную положительную тройку $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Легкое упражнение показывает, что $\mathcal{F}$ не может обращаться в нуль ни на каком из шести ребер C , не лежащих в $\pm T$. Поскольку эти ребра образуют альтернирующий 6-цикл для $\mathcal{F}$, имеем $\mathcal{F} = 1$ в точности на трех из них. Обозначая эти три корня через $\delta, \varphi, \psi \in \Pi$ и полагая $\Omega = \{\delta, \varphi, \psi\}$, можно проверить, что $\hat{\Omega}$ содержит T (исходную положительную тройку с нулевой суммой), что невозможно.

Теперь докажем от противного, что (iii) влечет (i). Допустим, что структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ не является локально транзитивной, и возьмем минимальное $\mathcal{F}$ -положительное множество $\Omega = \{\delta, \varphi, \psi\} \subset \Pi'$ такое, что множество $\hat{\Omega} = \{\pm(\delta - \varphi), \pm(\varphi - \psi), \pm(\psi - \delta)\}$ содержит знакоопределенную тройку. С точностью до перестановки элементов Ω эта знакоопределенная тройка есть $T = \{\delta - \varphi, \varphi - \psi, \psi - \delta\}$. Прямая проверка показывает, что куб $Q = \{\delta, \psi, \varphi - \psi, \delta - \varphi\}$ с нулевой суммой содержит единственную положительную тройку с нулевой суммой, а именно T .

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathcal{F}$ – f -структура на общем флаговом многообразии $\mathbb{F}$, а G – ассоциированный граф пересечений. Тогда необходимым и достаточным условием для $(1, 1)$ -допустимости структуры $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ является локальная транзитивность графа G .*

Сравним этот результат с его аналогом для $\mathbb{F}(n)$ и диграфов [6], [10]. Хотя определения локальной транзитивности в этих случаях разные, даваемые ими описания допустимости f -структур совпадают (см. также [9], [13], [15]). Для всех остальных флаговых многообразий (полных или частичных) в настоящее время не существует никакой конструкции диграфа, зато хорошо известна конструкция графа пересечений. В этом отношении настоящая работа представляет собой ценное обобщение работы [6].

Доказательство необходимости в теореме 3 использует шаги доказательства, данного в [15] для частного случая структуры $(\mathbb{F}(n), J, \Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. *Необходимость.* Пусть структура $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ является (1, 1)-симплектической. Рассмотрим четверку корней $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ и разложим $d^2\sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)$ на простые слагаемые. Некоторые из этих слагаемых имеют вид $d\sigma([X_{\hat{\alpha}}, X_{\hat{\beta}}], X_{\hat{\gamma}}, X_{\hat{\delta}})$ или $d\sigma(X_{\hat{\alpha}}, X_{\hat{\gamma}}, \nabla_{X_{\hat{\beta}}} X_{\hat{\delta}})$, где $Q = \{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}\}$ после некоторой перестановки. Предположение $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ влечет, что эти слагаемые обращаются в нуль и в сумме остается только шесть слагаемых вида $\pm im_{\hat{\alpha}+\hat{\beta}} m_{\hat{\gamma}+\hat{\delta}} t(\hat{\alpha} + \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta})$. Из (1, 1)-симплектичности тройки $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ вытекает, что $t = 0$ на закононеопределенных тройках в (17). Так как общая сумма равна нулю, множество оставшихся выделенных троек не может состоять только из одного элемента.

Поскольку это рассуждение справедливо для любой четверки Q с нулевой суммой, мы заключаем по лемме 3, что структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ локально транзитивна.

Доказательство достаточности в теореме 3 довольно длинно и включает в себя ряд определений и лемм. Начнем с рассмотрения специального класса f -структур, для которых достаточность очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{F}$ – f -структура на флаговом многообразии $\mathbb{F}$, а G – соответствующий ей граф пересечений.

(i) Тройка с нулевой суммой называется *транзитивной* (относительно $\mathcal{F}$), если она закононеопределена и имеет сигнатуру 1.

(ii) Граф G называется *вполне нетранзитивным*, если он не содержит транзитивных троек с нулевой суммой.

ЛЕММА 4. *Всякая f -структура $\mathcal{F}$ со вполне нетранзитивным графом пересечений G является как локально транзитивной, так и допустимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{F}$ вполне нетранзитивна, то метрика Картана–Киллинга $\Lambda_\alpha \equiv 1$ ($\alpha \in \Pi'$) является (1, 1)-симплектической. Действительно, в отсутствие транзитивных троек второе уравнение (20) (из определения (1, 1)-симплектичности) становится пустым, а первое выполняется автоматически.

Из необходимости условия теоремы 3 вытекает локальная транзитивность G . Этот же вывод можно сделать непосредственно из определений 2, 3 и леммы 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. (i) Последовательность $\hat{\Sigma} := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ попарно различных элементов $\alpha_i \in \Pi'$ называется *транзитивным базисом*, если для всех i, j , $1 \leq i \leq j \leq k$, элемент $\alpha_{ij} := \alpha_i + \dots + \alpha_j$ лежит в Π' и $\varepsilon(\alpha_{ij}) = 1$.

(ii) *Транзитивной оболочкой* множества $\hat{\Sigma}$ называется множество $\hat{\Pi} := \{\pm\alpha_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq k\}$. Оно является аффинным образом некоторой транзитивной системы A_l .

(iii) Пусть $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ – транзитивная тройка с нулевой суммой, скажем $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma \neq 0$. Тогда элемент γ называется *базой* тройки T , а α, β – ее *сторонами*. Поддиграф, соответствующий транзитивной тройке с нулевой суммой, будем называть *транзитивным треугольником*.

Мы будем использовать редукцию к вполне нетранзитивному случаю. Опишем процесс этой редукции, который последовательно удаляет все транзитивные треугольники.

ЛЕММА 5. Пусть граф пересечений инвариантной f -структуры $\mathcal{F}^q$ локально транзитивен, но не является вполне нетранзитивным. Тогда:

- (i) $\mathcal{F}^q$ допускает корень $\gamma^q \in \Pi'$, являющийся базой некоторой транзитивной тройки, но не являющийся стороной никакой транзитивной тройки;
- (ii) инвариантная f -структура $\mathcal{F}^{q+1}$, заданная формулой

$$\varepsilon_{\beta}^{q+1} = \begin{cases} 0, & \beta = \pm\gamma^q, \\ \varepsilon_{\beta}^q & \text{иначе,} \end{cases} \quad \beta \in \Pi',$$

является локально транзитивной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эту лемму по индукции с помощью определения 4. Две стороны транзитивной тройки, упорядоченные всеми способами, образуют транзитивный базис ранга 2.

(i) По предположению об отсутствии вполне нетранзитивности и по определению множество Π' содержит транзитивные базисы ранга по меньшей мере 2 для $\mathcal{F}^q$. Пусть $\hat{\Sigma} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ – максимальный транзитивный базис такого вида, и пусть $\hat{\Pi}$ – его транзитивная оболочка. Выберем в качестве γ^q старший корень $\alpha_{1k} := \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ в $\hat{\Pi}^+$. Тогда γ^q является базой в $\hat{\Pi}$, поскольку $\gamma^q = \alpha_{1,j-1} + \alpha_{j,k}$ для всех j .

Покажем, что элемент γ^q не является стороной в $\hat{\Pi}$. Действительно, если бы он был стороной в какой-либо тройке $\{\alpha, \beta, \gamma^q\} \subset \hat{\Pi}$ с нулевой суммой, то мы имели бы $1 = \varepsilon_{\gamma^q}^q = \varepsilon_{\beta}^q = -\varepsilon_{\alpha}^q$, откуда $\beta \in \hat{\Pi}_+$ и $-\alpha = \beta + \gamma^q \in \hat{\Pi}_+$ вопреки максимальной γ^q .

Покажем от противного, что γ^q не является стороной в Π' . Пусть ψ – база в некоторой тройке $\{\varphi, \gamma^q, \psi\}$ с нулевой суммой. Допустим, что $\gamma^q = \alpha + \beta \in \hat{\Pi}_+$ с $\alpha, \beta \in \hat{\Pi}^+$ (например, $\alpha = \alpha_{1,j-1}$, $\beta = \alpha_{j,k}$, или наоборот). Рассмотрим куб C , порожденный элементами α, β, φ (рис. 5).

Рис. 5. Куб, порожденный элементами α, β, φ

Корень $\sigma := \beta + \varphi$ лежит в Π' , поскольку он принадлежит C . Рассмотрим четверку $\{\alpha, \beta, \varphi, \rho\}$. Согласно выбору знаков у $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \rho$ три выделенные тройки $\{\gamma, \varphi, \rho\}$, $\{\sigma, \rho, \alpha\}$ и $\{\alpha, \beta, -\gamma\}$ являются закононеопределенными. Поскольку $\mathcal{F}^q$ предполагаем локально транзитивной, из леммы 3 вытекает, что тройка $\{-\sigma, \varphi, \beta\}$ закононеопределена, так что $\varepsilon_{\sigma} = 1$.

Мы заключаем, что все k корней σ , построенных в предыдущем абзаце, имеют вид либо $\sigma_j = \varphi + \alpha_1^j$, $j = 1, \dots, k$, либо $\sigma_j = \alpha_j^k + \varphi$, $j = 1, \dots, k$. Определим $\widehat{\Sigma}_*$ как последовательность $(\varphi, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ в первом случае и $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \varphi)$ во втором случае. Пусть $\widehat{\Pi}_*$ – транзитивная оболочка множества $\widehat{\Sigma}_*$. В обоих случаях имеем $\widehat{\Pi}_* = \widehat{\Pi} \cup \{\sigma_j\}_{j=1, \dots, k}$. Поскольку $\varepsilon_{\sigma_j} = 1$ для всех j , отсюда следует, что $\widehat{\Sigma}_*$ есть транзитивный базис, больший чем $\widehat{\Sigma}$, вопреки предположению о максимальности. Таким образом, γ^q не может быть стороной в Π' .

(ii) По лемме 3 достаточно показать, что в G нет кубов, содержащих только одну положительную выделенную тройку для $\mathcal{F}^{q+1}$. Если такой куб не содержит γ^q , то доказательство очевидно, так как $\mathcal{F}^q = \mathcal{F}^{q+1}$ на этом кубе.

Напомним, что $\varepsilon_\gamma^q = 1$. Пусть $\{\alpha, \beta, \gamma^q\}$, $\{\gamma^q, \delta, \rho\}$ – это обе тройки с нулевой суммой из C , содержащие γ^q . Тот факт, что γ^q не является стороной в $\mathcal{F}^q$, означает, что не может быть $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta \neq 0$ и $\varepsilon_\delta = -\varepsilon_\rho \neq 0$. Если $|\varepsilon_\alpha| + |\varepsilon_\beta| > 0$ и $|\varepsilon_\delta| + |\varepsilon_\rho| > 0$, то мы заключаем, что $\pm\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\pm\{\gamma, \delta, \rho\}$ – знакоопределенные тройки из C , откуда следует локальная транзитивность $\mathcal{F}^q$. В противном случае для вектора $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\delta, \varepsilon_\rho)$ остаются по существу три возможности: $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$ или $(0, 0, 0, 0)$. Оставляем читателю в качестве легкого упражнения проверку локальной транзитивности C во всех трех случаях, независимо от значений $\mathcal{F}^q$ на остальных корнях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточность. Допустим, что граф пересечений структуры $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ локально транзитивен. Начиная с $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$, устраним все транзитивные треугольники с помощью серии “удалений” $\mathcal{F}^1 \rightarrow \mathcal{F}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}^m$ по лемме 5. Получим вполне нетранзитивную структуру $\mathcal{F}^m$. По лемме 4 структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F}^m)$ допустима. Пусть Λ^m – такая метрика, что структура $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F}^m)$ является $(1, 1)$ -симплектической (например, метрика Картана–Киллинга). Определим по индукции метрики Λ^q такие, что структура $(\mathbb{F}, \Lambda^q, \mathcal{F}^q)$ является $(1, 1)$ -симплектической для всех $q = m, m-1, \dots, 1$. Чтобы сделать шаг индукции, допустим, что структура $(\mathbb{F}, \Lambda^{q+1}, \mathcal{F}^{q+1})$ является $(1, 1)$ -симплектической. Пусть $\gamma := \gamma^q$ – база для $\mathcal{F}^q$ в тройке $T_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ с $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma \neq 0$. Положим $\lambda_\gamma^q := \lambda_\alpha^{q+1} + \lambda_\beta^{q+1}$. Проверим корректность этого определения, т. е. тот факт, что для любых двух троек с нулевой суммой вида $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\{\gamma, \delta, \rho\}$ найдется значение λ_γ , подходящее для обеих троек. Этот факт очевиден, если обе тройки знакоопределены или обращаются в нуль относительно $\mathcal{F}$. Остается рассмотреть следующие случаи.

Случай 1: $\varepsilon_\alpha^q = \varepsilon_\beta^q = \varepsilon_\delta^q = \varepsilon_\rho^q = 1$ и $\varepsilon_\gamma^q = -1$. Тогда $\{\alpha, \beta, -\delta, -\rho\}$ есть четверка с нулевой суммой. Порожденный ею куб изображен на рис. 6.

Рассмотрим $\sigma = -(\alpha + \gamma + \delta)$ в этом кубе. Существуют три возможности.

1) Если $\varepsilon_\sigma^q = 1$, то на рис. 6 имеем $\lambda_\beta = \lambda_\delta + \lambda_\gamma$ и $\lambda_\rho = \lambda_\alpha + \lambda_\sigma$. Отсюда

$$\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_\rho + \lambda_\sigma, \quad (22)$$

так что определение $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_\rho + \lambda_\delta$ не создает противоречия.

2) Если $\varepsilon_\sigma^q = -1$, то аналогичное рассуждение снова дает (22).

3) Если $\varepsilon_\sigma^q = 0$, то мы заключаем, что $\lambda_\delta = \lambda_\beta$ и $\lambda_\rho = \lambda_\alpha$, откуда немедленно следует (22).

Рис. 6. Куб для случая 1

Рис. 7. Куб для случая 2

Случай 2: $\varepsilon_\alpha^q = \varepsilon_\beta^q = \varepsilon_\delta^q = 1$, $\varepsilon_\gamma^q = -1$ и $\varepsilon_\rho^q = 0$. Как и в случае 1, заключаем, что куб, порожденный четверкой $\{\alpha, \beta, -\delta, -\rho\}$ с нулевой суммой, имеет вид, изображенный на рис. 7.

В силу локальной транзитивности $\mathcal{F}^q$ мы должны иметь $\varepsilon_\sigma = -1$, откуда $\lambda_\delta = \lambda_\beta + \lambda_\sigma$ и $\lambda_\sigma = \lambda_\alpha$. Следовательно, $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_\delta$, и опять не создается никаких противоречий.

Случай 3: $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\delta = 1$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\rho = 0$, $\varepsilon_\gamma = -1$. Мы знаем, что γ есть база некоторой транзитивной тройки, скажем $\{\gamma, \varphi, \psi\}$. Применяя случай 2 дважды, получаем

$$\lambda_\alpha = \lambda_\varphi + \lambda_\psi, \quad \lambda_\delta = \lambda_\varphi + \lambda_\psi.$$

Отсюда $\lambda_\alpha = \lambda_\delta$ и также нет противоречия.

Итак, структура $(\mathbb{F}, \mathcal{F}^q, \Lambda)$ является $(1, 1)$ -симплектической, поскольку она удовлетворяет (20) в каждой вершине любого куба.

В заключение, пользуясь результатами о гармонических отображениях из [1], [2] и понятием $(1, 1)$ -симплектичности, установим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (M, g, J) – косимплектическое почти комплексное риманово многообразие четной размерности, а $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ – многообразие частичных флагов, снабженное вполне нетранзитивной f -структурой. Тогда всякое $(J, \mathcal{F})$ -голоморфное отображение $\varphi: (M, J) \rightarrow (\mathbb{F}, \mathcal{F})$ является гармоническим относительно метрики Картана–Киллинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Блэк [1] показал, что всякое $(J, \mathcal{F})$ -голоморфное отображение $\varphi: (M, g, J) \rightarrow (N, h, F)$ между косимплектическим многообразием M и $(1, 1)$ -симплектическим многообразием N (т.е. отображение с $d\varphi J = \mathcal{F} d\varphi$) является гармоническим. Объединяя этот факт с леммой 4, получаем утверждение теоремы.

Второй автор благодарит факультет математики Государственного университета в Кампинасе (IMECC-UNICAMP) за гостеприимство во время работы над статьей.

Список литературы

1. M. Black, *Harmonic maps into homogeneous spaces*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **255**, Longman, Harlow; Wiley, New York, 1991.
2. A. Lichnerowicz, "Applications harmoniques et variétés kähleriennes", *Symposia Mathematica* (Indam, Rome, 1968/69), **III**, Academic Press, London, 1970, 341–402.
3. J. Bolton, F. Pedit, L. Woodward, "Minimal surfaces and the affine Toda field model", *J. Reine Angew. Math.*, **459** (1995), 119–150.
4. K. Yano, "On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$ ", *Tensor (N.S.)*, **14** (1963), 99–109.
5. J. H. Rawnsley, " F -structures, F -twistor spaces and harmonic maps", *Geometry seminar "Luigi Bianchi" II* (Pisa, 1984), Lecture Notes in Math., **1164**, Springer, Berlin, 1985, 85–159.
6. N. Cohen, C. J. C. Negreiros, M. Paredes, S. Pinsón, L. A. B. San Martin, " f -structures on the classical flag manifold which admit $(1, 2)$ -symplectic metrics", *Tohoku Math. J. (2)*, **57:2** (2005), 261–271.
7. S. Salamon, "Harmonic and holomorphic maps", *Geometry seminar "Luigi Bianchi" II* (Pisa, 1984), Lecture Notes in Math., **1164**, Springer, Berlin, 1985, 161–224.
8. F. E. Burstall, S. M. Salamon, "Tournaments, flags and harmonic maps", *Math. Ann.*, **277:2** (1987), 249–265.
9. X. Mo, C. J. C. Negreiros, " $(1, 2)$ -symplectic structure on flag manifolds", *Tohoku Math. J. (2)*, **52:2** (2000), 271–282.
10. A. E. Brouwer, "The enumeration of locally transitive tournaments", *Afdeling Zuivere Wiskunde*, **138**, Math. Centrum, Amsterdam, 1980.
11. M. Paredes, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*, Ph.D. Thesis, State University of Campinas, 2000.
12. N. Cohen, C. J. C. Negreiros, L. A. B. San Martin, "Description of $(1, 2)$ -symplectic metrics on flag manifolds", *Contemp. Math.*, **288** (2001), 300–304.
13. N. Cohen, C. J. C. Negreiros, L. A. B. San Martin, " $(1, 2)$ -symplectic metrics, flag manifolds and tournaments", *Bull. London Math. Soc.*, **34:6** (2002), 641–649.
14. N. Cohen, M. Paredes, S. Pinzón, "Locally transitive tournaments and the classification of $(1, 2)$ -symplectic metrics on maximal flag manifolds", *Illinois J. Math.*, **48:4** (2004), 1405–1415.
15. N. Cohen, C. J. C. Negreiros, L. A. B. San Martin, "A rank-three condition for invariant $(1, 2)$ -symplectic almost Hermitian structures on flag manifolds", *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, **33:1** (2002), 49–73.
16. S. Pinzón, *Variedades bandeira, f -structures e métricas $(1, 2)$ -simpléticas*, Ph.D. Thesis, State University of Campinas, 2003.
17. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2006; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, **80**, Academic Press, New York–London, 1978.
18. R. de C. de J. Silva, *Estruturas quase Hermitianas invariantes em espaços homogêneos de grupos semi-simples*, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2003.
19. T. A. McKee, F. R. McMorris, *Topics in intersection graph theory*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
20. L. A. B. San Martin, C. J. C. Negreiros, "Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds", *Adv. Math.*, **178:2** (2003), 277–310.
21. A. Gray, L. M. Hervella, "The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants", *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **123** (1980), 35–58.
22. G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **188**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972.

23. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, **9**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
24. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1981; пер. с англ.: S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **15**, Wiley, New York–London–Sydney, 1969.
25. L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, S. P. Campinas, Editora da Unicamp, 1999.
26. A. Borel, “Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **40**:12 (1954), 1147–1151.
27. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, Наука, М., 1981; пер. с англ.: S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Wiley, New York–London, 1963.

Н. КОЭН (N. COHEN)
Instituto de Matematica,
Estatística e Computação Científica
E-mail: nir@ime.unicamp.br

С. ПИНЗОН (S. PINZÓN)
Universidad Industrial de Santander
E-mail: spinzon@uis.edu.co

Поступило в редакцию
29.12.2006

Перевод с английского
А. В. Домрина