Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Асаи, Однородные уравнения с частными производными для суперпозиций неопределенных функций нескольких переменных, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 31–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:29:16

УДК 517.518.28+517.95

К. Асаи

Однородные уравнения с частными производными для суперпозиций неопределенных функций нескольких переменных

Изучаются однородные уравнения с частными производными, которым удовлетворяют некоторые суперпозиции неопределенных функций нескольких переменных. Найдены практически все такие уравнения, которым удовлетворяют суперпозиции типа дерева и еще одного специального типа. Эти уравнения являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы аналитическую функцию можно было локально представить как аналитическую суперпозицию указанного типа. Представимость вещественно-аналитической функции суперпозицией рассматриваемого типа не зависит от того, используются ли в этой суперпозиции вещественно-аналитические функции или функции класса C^p , где константа p определяется структурой суперпозиции. Доказано, что функция u , заданная формулой $u^n = xu^a + yu^b + zu^c + 1$, в общем случае не представима ни в какой вещественной области суперпозицией вида $f(g(x, y), h(y, z))$, где функция f дважды дифференцируема, а g, h дифференцируемы, а также не представима ни в какой комплексной области суперпозицией указанного вида с аналитическими f, g, h .

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: суперпозиции, практически все уравнения с частными производными, деревья с корнем, 13-я проблема Гильберта, миноры.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению уравнений с частными производными, которым удовлетворяют суперпозиции неопределенных функций нескольких переменных. Под неопределенной функцией мы понимаем символ $f = f(x_1, \dots, x_n)$, к которому можно применять коммутирующие дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x_i}$ любое число раз. Мы также используем эти уравнения для ответа на вопрос о представимости аналитических функций нескольких переменных некоторыми суперпозициями аналитических или C^r -гладких функций от меньшего числа переменных. Пусть f, g, h – неопределенные функции (далее, для краткости, просто функции). Простым примером их суперпозиции является функция $f(g(x, y), h(t, z))$, описываемая деревом T , как показано на рис. 1. Четыре нижние вершины дерева T (т.е. его листья) отвечают независимым переменным, а остальные вершины ω – функциям от тех переменных, соответствующие которым вершины “накрываются” вершиной ω (т.е. примыкают к ω снизу). Таким образом, имеем $u = f(v, w)$, $v = g(x, y)$, $w = h(t, z)$.

Любому конечному дереву T с корнем u (единственной верхней вершиной) отвечает некоторая суперпозиция функций, обозначаемая также через u .

Можно рассматривать суперпозиции, для которых вместо T берется произвольная диаграмма G , имеющая вид графа без горизонтальных ребер и обладающая хотя бы одним корнем. (Если самых высоких вершин несколько, то G задает целый набор связанных между собой суперпозиций.) Например, суперпозиции $u = f(g(x, y), h(y, z))$ отвечает диаграмма H на рис. 1.

Рис. 1. Диаграммы некоторых суперпозиций

Суперпозицию аналитических функций (или функций класса C^r), построенную по диаграмме G , будем также называть *аналитической* (или C^r -гладкой) *суперпозицией типа G* . Пусть T – конечное дерево с корнем. Мы найдем практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяют суперпозиции типа T . Эти уравнения являются квадратичными, имеют второй порядок и выражаются через 2-миноры некоторых матриц. Их выполнение необходимо и достаточно для того, чтобы данная аналитическая функция записывалась как аналитическая суперпозиция типа T . Мы выводим этот результат из теоремы о диаграммах вида K (см. рис. 1), которые уже не являются деревьями. Эта теорема похожа на результаты о деревьях, только теперь практически все уравнения выражаются через $(s_i + 1)$ -миноры некоторых матриц (числа s_i определены на рис. 1). Мы также покажем, что представимость вещественно-аналитической функции суперпозицией типа K не зависит от того, является эта суперпозиция вещественно-аналитической или C^ρ -гладкой, где константа ρ определяется структурой диаграммы K .

При выходе за пределы класса деревьев и специального класса K интересующие нас уравнения становятся крайне сложными, даже для простейшей диаграммы H . В настоящей работе изучаются только класс деревьев, класс K и класс H .

Наше исследование имеет отношение к 13-й проблеме Гильберта [1], [2]. Однако эта проблема касается суперпозиций непрерывных функций, чем значительно отличается от наших задач о суперпозициях неопределенных, комплексно- или вещественно-аналитических либо C^r -гладких функций. (Мы будем называть комплексно-аналитические функции просто *аналитическими*.)

Хорошо известно, что исходная 13-я проблема Гильберта была в общем виде решена В.И. Арнольдом и А.Н. Колмогоровым [3]–[6]. В.И. Арнольд показал, что любая непрерывная функция трех переменных на $[0, 1]^3$ представима суперпозицией непрерывных функций двух переменных:

$$f(x, y, z) = \sum_{q=1}^9 h_q(g_q(x, y), z)$$

(см. [3], [4]), а А. Н. Колмогоров показал, что любая непрерывная функция от n переменных на $[0, 1]^n$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left(\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right),$$

где функции χ_q , ψ^{pq} непрерывны, причем ψ^{pq} могут быть выбраны независимо от f (см. [6]).

Написано много работ по суперпозициям. Полезные библиографические комментарии содержатся в [7, с. 518–527] и [8].

Аналитический и алгебраический варианты 13-й проблемы Гильберта, т. е. вопросы о представимости решения уравнения

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0 \quad (1)$$

суперпозициями аналитических или алгебраических функций двух переменных, остаются открытыми.

Пусть функция u задана уравнением $u^n = xu^a + yu^b + zu^c + 1$. С помощью приведенной ниже теоремы 4 мы покажем непредставимость u в виде суперпозиции $f(g(x, y), h(y, z))$ с дважды дифференцируемой функцией f и дифференцируемыми g , h в любой вещественной области, а также ее непредставимость с аналитическими f , g , h в любой комплексной области. Таким образом, функция $f(x, y, z)$, заданная уравнением (1), имеет ту же степень непредставимости, что и u .

Мы использовали программу Mathematica для проведения некоторых очень сложных, но вполне механических вычислений в доказательствах предложения 2, теоремы 4, следствия 4 и для проверки утверждений о 9-минорах матрицы (38).

Сначала рассмотрим случай деревьев. Дадим определение термина “практически все уравнения”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть D – область голоморфности рассматриваемых функций. Если некоторое утверждение $P(x)$ справедливо для всех $x \in \Omega$, где $\Omega \subset D$ – подмножество, замыкание которого в D равно всему D , то скажем, что *утверждение $P(x)$ справедливо для почти всех точек*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть G – некоторая диаграмма, u – суперпозиция типа G . Обозначим через $\mathcal{R}$ дифференциальное кольцо всех дифференциальных полиномов от u с постоянными коэффициентами, а через $\mathcal{R}'$ – кольцо, полученное добавлением к $\mathcal{R}$ элементов $\{u_{x_i}^{-1}\}$, обратных к производным первого порядка. Скажем, что набор уравнений $\{F_\lambda = 0; \lambda \in \Lambda\}$ *исчерпывает практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u* , если дифференциальные полиномы $\{F_\lambda\}$ порождают такой дифференциальный идеал $\mathcal{J} = \{F_\mu; \mu \in M\}$ кольца $\mathcal{R}'$, что выполнение всех уравнений системы $\{F_\mu = 0; F_\mu \in \mathcal{J} \cap \mathcal{R}\}$ является необходимым и достаточным условием представимости аналитической функции в виде аналитической суперпозиции типа G в окрестности почти каждой точки.

Имеем следующую теорему о деревьях глубиной 2.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим суперпозицию $u = f(g_1, g_2, \dots, g_s)$, где $g_i = g_i(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$, $i = 1, \dots, s$, а x_{ij} – независимые переменные. Тогда практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид*

$$u_{x_{ip}} u_{x_{iq} x_{jr}} - u_{x_{iq}} u_{x_{ip} x_{jr}} = 0, \quad p \neq q, \quad p, q = 1, \dots, l_i, \quad r = 1, \dots, l_j, \quad (2)$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, s.$$

Условие (2) означает, что все 2-миноры матриц вида $(u_{x_{ip} x_{jq}})_{pq}$, $p = 1, \dots, l_i$, $q = 0, \dots, l_j$, обращаются в нуль в кольце $\mathcal{R}'$, где по определению $u_{x_{ip} x_{j0}} = u_{x_{ip}}$.

Для общего случая деревьев справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть T – конечное дерево с корнем, u – суперпозиция типа T . Тогда практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид (2), где переменные x_{ip} и x_{iq} находятся ниже вершины v_i дерева T , накрываемой некоторой вершиной v , а переменная x_{jr} находится ниже или равна другой вершине v_j , также накрываемой вершиной v .*

Теорема 1 является частным случаем доказанной в следующем параграфе теоремы 3. Теорема 1' будет доказана в § 3.

§ 2. Суперпозиции типа K

В этом параграфе мы найдем практически все уравнения, которым удовлетворяют суперпозиции типа K для некоторой фиксированной диаграммы K , представленной на рис. 1. Этот случай содержит все суперпозиции типа деревьев глубиной 2, включая суперпозицию $u = f(g(x, y), h(t, z))$ типа T (см. рис. 1).

Наши результаты будут формулироваться в виде “все $(s + 1)$ -миноры некоторой матрицы M равны нулю”. Удобно записывать такие условия неравенством $r(M) \leq s$. Векторнозначную функцию, состоящую из производных функции $u = u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, будем обозначать через

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} u}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_m^{\alpha_m}} \right)_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0, \dots, s} = (u_{(y_1, \dots, y_m)^\alpha})_{0 \leq |\alpha| \leq s}.$$

Мы используем обозначение $\frac{D(v_1, \dots, v_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ для якобиевой матрицы отображения $(v_1, \dots, v_m)$ и полагаем

$$M_s^{x;y} = M_s^{x;y}(x, y) = \frac{D(u_{(y_1, \dots, y_m)^\alpha})_{0 \leq |\alpha| \leq s}}{D(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим суперпозицию $u = f(g_1, \dots, g_s, y_1, \dots, y_m)$, где $g_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, s$. Тогда практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид*

$$r(M_s^{x;y}) \leq s. \quad (4)$$

Для доказательства теоремы 2 установим следующие леммы.

ЛЕММА 1. Условие (4) эквивалентно условию

$$r(M_{\infty}^{x;y}) \leq s. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты запишем $M_s^{x;y} = M_s$ и $M_{\infty}^{x;y} = M_{\infty}$. Пусть выполнено (4). Обозначим строку $\frac{Du_{(y_1, \dots, y_m)}^{\alpha}}{D(x_1, \dots, x_n)}$ матрицы M_{∞} через J_{α} . Допустим, что матрица M_{s-1} имеет s независимых строк (над полем функций, порожденным производными функции u), и соберем эти строки в матрицу M , состоящую из s строк. Рассмотрим любую строку J_{α} , $|\alpha| = s+1$, и мультииндекс α' , $|\alpha'| = s$, накрываемый α в смысле обычного частичного порядка. Положим $(y_1, \dots, y_m)^{\alpha-\alpha'} = y_p$. Пусть матрицы M' и M'' получаются из M добавлением строк $J_{\alpha'}$ и J_{α} соответственно. Согласно (4) все $(s+1)$ -миноры матрицы M' равны нулю. Дифференцируя эти равенства по y_p , видим, что все $(s+1)$ -миноры матрицы M'' также равны нулю. Следовательно, J_{α} является линейной комбинацией строк матрицы M . Так как это верно для всех α , $|\alpha| = s+1$, имеем $r(M_{s+1}) \leq s$. По индукции получаем, что $r(M_k) \leq s$ для всех k , откуда и вытекает (5).

Если M_{s-1} не содержит s независимых строк, то $r(M_{s-1}) \leq s-1$. Тогда аналогичное рассуждение дает, что $r(M_{\infty}) \leq s-1$ или $r(M_{s-2}) \leq s-2$. За конечное число шагов получим доказательство (5).

ЛЕММА 2. Пусть $u_1, \dots, u_m$ – аналитические функции от $x_1, \dots, x_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $r\left(\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right) \leq s$;
- (b) для почти каждой точки c можно выбрать из $(u_1, \dots, u_m)$ функции $(v_1, \dots, v_s)$ так, что $(u_1, \dots, u_m)$ имеет в окрестности точки c вид

$$(u_1, \dots, u_m) = (f_1(v_1, \dots, v_s), \dots, f_m(v_1, \dots, v_s))$$

для некоторых аналитических функций $f_1, \dots, f_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость (a) для (b) вытекает из того, что

$$r\left(\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right) = r\left(\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(v_1, \dots, v_s)} \frac{D(v_1, \dots, v_s)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right) \leq s.$$

Чтобы доказать достаточность (a) для (b), возьмем произвольную точку c и допустим, что $r\left(\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right) = r\left(\frac{Du}{Dx}\right) = r \leq s$ в окрестности точки c для некоторой константы r . Это предположение выполняется для почти всех точек c . Действительно, если оно не выполнено, то ранг $r\left(\frac{Du}{Dx}\right)$ непостоянен в каждой окрестности U точки c , а точка $c' \in U$, в которой достигается максимальный ранг r в U , имеет окрестность, где ранг постоянен и равен r . Поэтому c является граничной точкой множества тех точек, для которых предположение выполнено.

Согласно этому предположению в окрестности точки c существует неособая $(r \times r)$ -подматрица $\frac{D(u_{i_1}, \dots, u_{i_r})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})}$, которую мы обозначим через $\frac{D(v_1, \dots, v_r)}{D(z_1, \dots, z_r)} = \frac{Dv}{Dz}$. Положим $\tilde{x} = (x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$. По теореме об обратной функции существует

локальный аналитический изоморфизм $g(v, \tilde{x}) = (z, \tilde{x})$ между наборами переменных $(v, \tilde{x})$ и $(z, \tilde{x})$. Тем самым имеет смысл локальное аналитическое отображение

$$u_k = f_k(v_1, \dots, v_r, x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}). \quad (6)$$

С другой стороны, так как $\frac{Dv}{Dx}$ состоит из независимых строк матрицы $\frac{Du}{Dx}$, то всякая строка $\frac{Du_k}{Dx}$ выражается линейной комбинацией

$$\frac{Du_k}{Dx} = \sum_{i=1}^r m_i(x) \frac{Dv_i}{Dx}, \quad (7)$$

где функции $m_i(x)$ однозначно находятся из уравнения $\frac{Du_k}{Dz} = \sum_{i=1}^r m_i(x) \frac{Dv_i}{Dz}$. Но дифференцирование (6) по z дает $\frac{Du_k}{Dz} = \frac{Df_k}{Dv} \frac{Dv}{Dz}$, откуда имеем $m_i(x) = \frac{\partial f_k}{\partial v_i}$. Тогда из (6) вытекает, что

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_{j_t}} = \sum_{i=1}^r m_i(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_{j_t}} + \frac{\partial f_k}{\partial x_{j_t}}, \quad t = r+1, \dots, n.$$

Сравнивая это с (7), имеем $\frac{\partial f_k}{\partial x_{j_t}} = 0$. Отсюда получаем локальное аналитическое выражение $u_k = f_k(v_1, \dots, v_r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $u = f(g_1, \dots, g_s, y_1, \dots, y_m)$ локально с аналитическими f, g_i . Для каждого α функция $u_{(y_1, \dots, y_m)^\alpha} = u_\alpha$ имеет вид $f_\alpha(g_1, \dots, g_s, y_1, \dots, y_m)$. Тогда по лемме 2 имеем $r\left(\frac{D(u, u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_t})}{D(x_1, \dots, x_n)}\right) \leq s$ для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ и любых фиксированных $(y_1, \dots, y_m)$. Этим доказана необходимость условия (4).

Обратно, пусть для некоторой аналитической функции u выполнено условие (4). По лемме 1 условие (4) эквивалентно условию (5). Фиксируем такое значение $y = c$, что функция u голоморфна в точке (x, c) для некоторого x . По лемме 2 для любого конечного набора A мультииндексов α и для почти любой точки x найдутся аналитические функции $g_1, \dots, g_s$ такие, что выполнены следующие аналитические уравнения в окрестности точки x :

$$[u_{(y_1, \dots, y_m)^\alpha}]_{y=c} = f_\alpha(g_1, \dots, g_s). \quad (8)$$

При этом из доказательства леммы 2 видно, что функции $g_1, \dots, g_s$ можно выбрать не зависящими от размеров набора A , так что уравнения (8) справедливы для всех α . Поскольку область определения функции f_α описывается изоморфизмом $(v, \tilde{x}) \rightarrow (z, \tilde{x})$ из доказательства леммы 2, все функции семейства $\{f_\alpha\}_\alpha$ имеют общую область определения. Следовательно, имеем разложение в ряд Тейлора:

$$u = \sum_{\alpha} f_\alpha(g_1, \dots, g_s) \frac{(y - c)^\alpha}{\alpha!}.$$

Таким образом, u выражается в виде $u = f(g_1, \dots, g_s, y_1, \dots, y_m)$ с аналитическими функциями f, g_i в окрестности почти каждой точки (x, c) .

Из теоремы 2 вытекает следующий общий результат о суперпозициях типа K .

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим суперпозицию $u = f(g_{11}, \dots, g_{1s_1}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{ns_n})$, где $g_{ij} = g_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, n$, а x_{ij} – независимые переменные. Тогда практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид

$$r(M_{s_i}^{x_i; \tilde{x}_i}) \leq s_i \quad (9)$$

для всех $i = 1, \dots, n$, где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{il_i})$ и $\tilde{x}_i = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее условие, налагаемое на произвольную аналитическую функцию u :

(i) в окрестности почти каждой точки функция u имеет вид $u = f(g_{11}, \dots, g_{1s_1}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{ns_n})$ для некоторых аналитических функций f и $g_{ij} = g_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, n$.

По теореме 2 условие (9) эквивалентно следующему условию:

(ii) при каждом i функция u в окрестности почти каждой точки имеет вид $u = f_i(g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{is_i}, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$ для некоторых аналитических функций f_i и $g_{ij} = g_{ij}(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$, $j = 1, \dots, s_i$.

Таким образом, нам надо доказать эквивалентность условий (i) и (ii). Ясно, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Поэтому остается доказать, что при выполнении (9) и условия (ii) имеет место условие (i).

Пусть выполнены условия (9) и (ii). Положим $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{is_i})$. В силу (ii) функция u выражается аналитической суперпозицией $f_1(g_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности U почти любой точки. Как и в доказательстве леммы 2, для почти каждой точки $(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_n)$ из U число $r(\frac{Dg_1}{Dx_1})$ постоянно в некоторой окрестности точки c_1 . Допустим, что $r(\frac{Dg_1}{Dx_1}) = s_1$ в точке c_1 . Тогда в некоторой окрестности V точки c_1 существует неособая $(s_1 \times s_1)$ -подматрица $\frac{Dg_1}{Dy}$, где $y = (y_1, \dots, y_{s_1})$ – некоторые переменные из набора x_1 . Обозначим через $\tilde{y}$ набор всех остальных переменных из x_1 (кроме y) и фиксируем значение $\tilde{y}$ в произвольной точке $\tilde{y}_0$ такой, что x_1 принадлежит V для некоторого y . Тогда по теореме об обратной функции существует локальный аналитический изоморфизм между y и g_1 , так что функцию u и ее производные можно локально считать аналитическими функциями от $(y, x_2, \dots, x_n)$, а также от $(g_1, x_2, \dots, x_n)$.

На множестве V имеем

$$r(M_{s_1}^{g_1; \tilde{x}_1}) \leq s_1, \quad (10)$$

$$r(M_{s_i}^{x_i; (g_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)}) \leq s_i, \quad i = 2, \dots, n. \quad (11)$$

Действительно, неравенство (10) очевидно из размеров матрицы. Чтобы доказать (11), заметим, что $\frac{D(u_{x_{i1}}, \dots, u_{x_{il_i}})}{Dy} = \frac{D(u_{x_{i1}}, \dots, u_{x_{il_i}})}{Dg_1} \frac{Dg_1}{Dy}$ в V . Поскольку матрица $\frac{Dg_1}{Dy}$ неособа в V , имеем

$$\frac{D(u_{x_{i1}}, \dots, u_{x_{il_i}})}{Dg_1} = \frac{D(u_{x_{i1}}, \dots, u_{x_{il_i}})}{Dy} \left(\frac{Dg_1}{Dy} \right)^{-1}.$$

Взяв строки, сопряженные к j -м столбцам правой и левой частей последнего равенства, получаем

$$\frac{Du_{g_{1j}}}{Dx_i} = (m) \frac{D(u_{y_1}, \dots, u_{y_{s_1}})}{Dx_i}, \quad (12)$$

где $(m) = (m_1, \dots, m_{s_1}) - j$ -я строка матрицы $((\frac{Dg_1}{Dy})^{-1})^t$. Дифференцируя это равенство по g_{1k} , имеем

$$\frac{Du_{g_{1j}g_{1k}}}{Dx_i} = (m) \frac{D(u_{y_1g_{1k}}, \dots, u_{y_{s_1}g_{1k}})}{Dx_i} + \frac{\partial(m)}{\partial g_{1k}} \frac{D(u_{y_1}, \dots, u_{y_{s_1}})}{Dx_i}. \quad (13)$$

Теперь продифференцируем равенство (12) по y_k . Получаем, что правая часть (13) является линейной комбинацией векторов-строк $\frac{Du_{y_jy_k}}{Dx_i}$ и $\frac{Du_{y_j}}{Dx_i}$. Повторное дифференцирование равенства (12) дает, что каждая строка матрицы $M_{s_i}^{x_i; (g_1, x_2, \dots, \tilde{x}_i, \dots, x_n)}$ есть линейная комбинация строк матрицы $M_{s_i}^{x_i; \tilde{x}_i}$. Отсюда в силу (9) получаем (11).

Условия (10) и (11) можно рассматривать как условие (9) для функции $u = f_1(g_1, x_2, \dots, x_n)$ от независимых переменных $g_1, x_2, \dots, x_n$. Поэтому по теореме 2 имеем аналитическое выражение

$$u = f(g_1, g_2, x_3, \dots, x_n) \quad (14)$$

в окрестности W почти каждой точки из U . Поскольку U – окрестность почти каждой точки, то W также является окрестностью почти каждой точки.

Если оказалось, что $r(\frac{Dg_1}{Dx_1}) = r < s_1$ в V , то по лемме 2 все функции g_i выражаются через некоторые $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$, откуда локально имеем равенство $u = f(g_{i_1}, \dots, g_{i_r}, x_2, \dots, x_n)$. Этот случай рассматривается аналогично с помощью неособой подматрицы $\frac{D(g_{i_1}, \dots, g_{i_r})}{D(y_1, \dots, y_r)}$.

Повторяя приведенное выше рассуждение, приходим к условию (i).

Заметим, что если в теореме 3 взять $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 1$, то диаграмма суперпозиции u становится деревом глубиной 2, а теорема 3 превращается в теорему 1.

В теоремах 1–3 используется термин “практически все уравнения”, определяемый с помощью понятия “для почти каждой точки”. Дело в том, что это понятие содержится в лемме 2, из которой выводятся указанные теоремы. Конечно, если условие (a) леммы 2 выполняется с равенством, то заключение (b) имеет место и без слова “почти”.

Поэтому если условие (4) выполняется с равенством на некоторой области D , то функция u представима указанной в теореме суперпозицией в окрестности каждой точки из D . Проверим, что то же самое верно и для теоремы 3.

Пусть условие (9) выполняется с равенством в области D . Тогда по сказанному выше мы имеем $u = f(g_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности каждой точки из D . Замечая, что $M_{s_1}^{x_1; \tilde{x}_1} = M_{s_1}^{g_1; \tilde{x}_1} \frac{Dg_1}{Dx_1}$, мы видим, что неравенство (10) из доказательства теоремы 3 выполнено с равенством. Обозначим для простоты $g_1 = (h_1, \dots, h_r)$, $x_1 = (z_1, \dots, z_m)$. Многократно дифференцируя функцию u по переменным z_j , имеем

$$u_{z^\alpha} = \sum_{\gamma, \tau} q_{\gamma\tau} u_{h^\gamma} h^{(\tau)}, \quad (15)$$

где γ пробегает все мультииндексы с $|\gamma| \leq |\alpha|$, τ пробегает конечное множество, числа $q_{\gamma\tau}$ целые, h^γ обозначает $h_1^{\gamma_1} \dots h_r^{\gamma_r}$, а $h^{(\tau)}$ есть произведение некоторых

производных от $h_1, \dots, h_r$. Следовательно, при каждом $i = 2, \dots, n$ имеем

$$\frac{Du_{z^\alpha}}{Dx_i} = \sum_{\gamma} \frac{Du_{h^\gamma}}{Dx_i} \sum_{\tau} q_{\gamma\tau} h^{(\tau)}. \quad (16)$$

Многokrратно дифференцируя равенство (16) по $x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$, получаем, что каждая строка матрицы $M_{s_i}^{x_i; \hat{x}_i}$ является линейной комбинацией строк матрицы $M_{s_i}^{x_i; (g_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)}$. Объединяя это с обратным утверждением, установленным при доказательстве теоремы 3, имеем

$$r(M_{s_i}^{x_i; \hat{x}_i}) = r(M_{s_i}^{x_i; (g_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)}).$$

Поэтому условия (10), (11) из указанного доказательства выполняются с равенством. Рассуждая, как в этом доказательстве, заключаем, что условие (i) выполняется без слова “почти”. Эти рассуждения суммирует

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u = u(x_1, \dots, x_n)$ – аналитическая функция, где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{i l_i})$. Допустим, что в области D выполнены равенства $r(M_{s_i}^{x_i; \hat{x}_i}) = s_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда функция u представима в окрестности каждой точки из D суперпозицией $u = f(g_{11}, \dots, g_{1s_1}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{ns_n})$ аналитических функций $f, g_{ij} = g_{ij}(x_i), j = 1, \dots, s_i, i = 1, \dots, n$.

Приведем аналогичное следствие из теоремы 1’.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть T – конечное дерево с корнем. Обозначим через $W(T)$ множество всех не нижних вершин дерева T . Пусть $u = u(x_{u_1}, \dots, x_{u_{l_u}})$ – аналитическая функция, где $x_v = (x_{v1}, \dots, x_{v l_v})$, $v \in W(T)$, v покрывает v_i . Допустим, что в области D выполняются равенства $r(M_1^{x_{v_i}; \hat{x}_{v_i}}) = 1$ при каждом $v \in W(T)$, где $\hat{x}_{v_i}$ – переменные, расположенные ниже v , но не ниже v_i . Тогда функция u представима аналитической суперпозицией типа T в окрестности каждой точки из D .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если условия, налагаемые на ранг, в теоремах 2 и 3 не являются равенствами ни в какой окрестности точки x , то нельзя гарантировать представимость функции указанной суперпозицией ни в какой окрестности точки x . Положим $u = x^2 y$, $v = y z^2$, $w = x y^2 z^3$ и рассмотрим функцию $\tilde{u} = u + vt + wt^2$. Тогда ранг $r\left(\frac{D(\tilde{u}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{tt})}{D(x, y, z)}\right) \leq 2$ не постоянен вдоль множества $S_1 = \{(x, y, z, t); yz = 0\}$. По теореме 2 функция $\tilde{u}$ представима аналитической суперпозицией вида $f(g(x, y, z), h(x, y, z), t)$ в окрестности почти каждой точки, и, на самом деле, вне S_1 ее можно записать в виде $\tilde{u} = w^2/v^3 + vt + wt^2$. Однако в этом случае можно представить $\tilde{u}$ вне множества $S_2 = \{(x, y, z, t); x = y = z = 0\}$ следующим образом. Если $x \neq 0$, то $\tilde{u} = u + u h^2 t + u^2 h^3 t^2$ для $h = z/x$; если $z \neq 0$, то $\tilde{u} = v h^2 + vt + v^2 h t^2$ для $h = x/z$; если $y \neq 0$, то $\tilde{u} = g^2 + h^2 t + g h^3 t^2$ для $g = x\sqrt{y}$, $h = z\sqrt{y}$. Тогда, проводя вычисление со степенными рядами, можно показать, что функция $\tilde{u}$ не представима аналитической суперпозицией $f(g(x, y, z), h(x, y, z), t)$ ни в какой окрестности какой-либо точки из S_2 .

Теорема 3 дает условие представимости аналитической функции локальной аналитической суперпозицией типа K . Поскольку доказательства лемм 1, 2

и теорем 2, 3 проходят без изменений и для вещественно-аналитического случая, теорема 3 дает также условие представимости вещественно-аналитической функции вещественно-аналитической суперпозицией типа K . Но если для данной вещественно-аналитической функции это условие не выполнено в некоторой точке, то по теореме единственности оно не выполнено ни в какой окрестности какой-либо другой точки, так что при $\rho = \max(s_1, \dots, s_n) + 1$ исходная функция не представима C^ρ -гладкой суперпозицией типа K ни на каком непустом открытом подмножестве. Действительно, условия (9) обращаются в тождества на суперпозициях типа K независимо от гладкости составляющих суперпозицию функций, если только эта гладкость не ниже, чем порядок уравнения. Поэтому справедлива диаграмма

Подобно этому, уравнения из теоремы 1' дают необходимое и достаточное условие представимости вещественно-аналитической функции C^2 -гладкой суперпозицией, отвечающей данному конечному дереву с корнем. Но в этом случае мы видим, что (2) выполняется, если участвующие в суперпозиции функции только дважды дифференцируемы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть u – вещественно-аналитическая функция, T – конечное дерево с корнем и K – диаграмма, изображенная на рис. 1. Положим $\rho = \max(s_1, \dots, s_n) + 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) функция u представима вещественно-аналитической суперпозицией типа K в окрестности почти каждой точки;
- (i') функция u представима C^ρ -гладкой суперпозицией типа K на непустом открытом множестве.

При этом следующие условия также эквивалентны:

- (ii) функция u представима вещественно-аналитической суперпозицией типа T в окрестности почти каждой точки;
- (ii') функция u представима дважды дифференцируемой суперпозицией типа T на непустом открытом множестве.

Следующая лемма полезна для приложений теорем 2 и 3 к конкретным примерам.

ЛЕММА 3. Для аналитической функции u условие (4) из теоремы 2 (или леммы 1) эквивалентно условию

$$r(M_\infty^{x;y}(x, c)) \leq s, \quad (17)$$

где точка $y = c$ фиксирована так, что функция u голоморфна в точке $(x, y) = (x^0, c)$ для некоторого x^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 вытекает, что (4) $\Rightarrow$ (17). Обратно, пусть выполнено условие (17). Пусть N_L – произвольная $((s+1) \times (s+1))$ -подматрица матрицы $M_\infty^{x;y}$. Из условия (17) имеем $|N_L|(x, c) = 0$. Отсюда

$$\frac{\partial^{|\alpha|} |N_L|}{\partial y^\alpha}(x, c) = \sum_{L'} a_{L'} |N_{L'}|(x, c) = 0. \quad (18)$$

Тогда из тейлоровского разложения видим, что

$$|N_L|(x, y) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} |N_L|}{\partial y^\alpha}(x, c) \frac{(y - c)^\alpha}{\alpha!} = 0. \quad (19)$$

Отсюда следует выполнение условия (4) в некоторой окрестности точки (x^0, c) . Тогда по теореме единственности условие (4) выполнено в каждой точке голоморфности функции u .

ПРИМЕР 1. Пусть $u = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Легко видеть, что u не удовлетворяет ни одному из неравенств $r(M_\infty^{x;y}(x, 0)) \leq n - 1$, $r(M_\infty^{y;x}(0, y)) \leq n - 1$ при всех x, y . Поэтому из теоремы 2, леммы 3 и следствия 3 получаем, что функция u не представима локальной C^n -гладкой суперпозицией вида $f(g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), y)$ или $f(g_1(y), \dots, g_{n-1}(y), x)$.

Вообще, пусть $A = (a_{ij})$ есть $(n \times n)$ -матрица ранга r , а $u = x^t A y$ – билинейная форма от x и y . Ясно, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = a_{ij}$, все производные порядка 3 и выше равны нулю, $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ при $y = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial y_j} = 0$ при $x = 0$. Поэтому $r(M_\infty^{x;y}(x, 0)) = r(M_\infty^{y;x}(0, y)) = r(A) = r$. Легко видеть, что $r(M_r^{x;y}), r(M_r^{y;x}) \geq r$. Отсюда по лемме 3 имеем $r(M_r^{x;y}) = r(M_r^{y;x}) = r$. Значит, по теореме 2 и следствиям 1, 3 функция u в каждой точке представима локальной аналитической суперпозицией вида $f(g_1(x), \dots, g_r(x), h_1(y), \dots, h_r(y))$, но не представима локальной C^r -гладкой суперпозицией вида $f(g_1(x), \dots, g_{r-1}(x), y)$ или $f(g_1(y), \dots, g_{r-1}(y), x)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – константы, причем $a_1 \neq 0$. Следующая формула задает некоторый полином u от $x, y, \dots, z$:

$$u = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix}, \quad (20)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и т. д. Тогда имеем

$$r(M_\infty^{x;(y, \dots, z)}(x, 0, \dots, 0)) = n - 1, \quad r(M_\infty^{y;(x, \hat{y}, \dots, z)}(0, y, 0, \dots, 0)) = n - 1$$

и т. д. Например, в первом равенстве ненулевые строки матрицы – это в точности строки $\pm \frac{D(a_i x_j - a_j x_i)}{D(x_1, \dots, x_n)}$, дающие ранг в точности $n - 1$, тогда как ясно, что

$$r(M_{n-1}^{x;(y, \dots, z)}), r(M_{n-1}^{y;(x, \hat{y}, \dots, z)}), \dots \geq n - 1.$$

Следовательно, по лемме 3 имеем

$$r(M_{n-1}^{x;(y,\dots,z)}) = r(M_{n-1}^{y;(x,\hat{y},\dots,z)}) = \dots = n-1.$$

Тогда по следствию 1 в каждой точке существует локальное аналитическое представление

$$u = f(g_2(x), \dots, g_n(x), h_2(y), \dots, h_n(y), \dots, k_2(z), \dots, k_n(z)). \quad (21)$$

На самом деле элементарными преобразованиями матрицы можно построить явное выражение

$$u = \frac{1}{a_1^{n-2}} \begin{vmatrix} g_2 & g_3 & \dots & g_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{vmatrix}, \quad (22)$$

где $g_i = -a_i x_1 + a_1 x_i$, $h_i = -a_i y_1 + a_1 y_i$, $i = 2, \dots, n$, и т. д.

Из теоремы 2 и следствия 3 вытекает также, что u не записывается локально ни одной из формул вида $u = f(g_1(x), \dots, g_{n-2}(x), y, \dots, z)$, $u = f(h_1(y), \dots, h_{n-2}(y), x, \hat{y}, \dots, z)$, ... с функциями класса C^{n-1} .

§ 3. Доказательство теоремы 1'

Это доказательство состоит в многократном применении теоремы 1. Пусть T – конечное дерево с корнем, а u – суперпозиция типа T . Сначала мы не будем рассматривать структуру дерева T глубже уровня 1, т. е. пусть $u = f(u_1, \dots, u_s)$, где $u_i = u_i(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$, $i = 1, \dots, s$, а x_{ij} – независимые переменные. Из теоремы 1 следует, что практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид (2).

Не теряя общности, можно считать, что $\frac{\partial g_u}{\partial u_i} \neq 0$ для всех i . Разобьем переменные $(x_{i1}, \dots, x_{il_i})$ функции u_i на группы $(x_{ij1}, \dots, x_{ijl_{ij}})_{j=1, \dots, s_i}$ согласно структуре дерева. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} u_{x_{ijp}} u_{x_{ijq} x_{ikr}} - u_{x_{ijq}} u_{x_{ijp} x_{ikr}} &= 0 \\ \iff (u_i)_{x_{ijp}} (u_i)_{x_{ijq} x_{ikr}} - (u_i)_{x_{ijq}} (u_i)_{x_{ijp} x_{ikr}} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, по теореме 1 первое условие (23) необходимо и достаточно для локальной представимости u_i в виде аналитической суперпозиции $g_i(u_{i1}, \dots, u_{is_i})$, где $u_{ij} = u_{ij}(x_{ij1}, \dots, x_{ijl_{ij}})$.

В итоге мы видим, что теорема верна для деревьев глубиной 3. Повторяя аналогичные шаги, получим доказательство для суперпозиций u типа T .

§ 4. Суперпозиции типа H

Пусть T , H – такие, как на рис. 1. В этом параграфе мы изучаем условия представимости функций суперпозициями типа H и доказываем неприведимость некоторых алгебраических функций суперпозициями такого типа. Пусть

функция u представима суперпозицией типа T . По теореме 1 практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет u , имеют вид

$$\begin{aligned} u_x u_{yt} - u_y u_{xt} &= 0, \\ u_x u_{yz} - u_y u_{xz} &= 0, \\ u_t u_{xz} - u_z u_{xt} &= 0, \\ u_t u_{yz} - u_z u_{yt} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В $\mathcal{R}'$ эти уравнения эквивалентны условию обращения в нуль всех 2-миноров матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 0 & u_t & u_z \\ u_x & u_{xt} & u_{xz} \\ u_y & u_{yt} & u_{yz} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Мы видим, что уравнения (24) не являются алгебраически независимыми в $\mathcal{R}'$: любые три из четырех достаточны.

Рассмотрим замену переменных $y = \tilde{y} + \tilde{t}$, $t = \tilde{y} - \tilde{t}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}})$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{t}})$. Практически все уравнения с частными производными, которым удовлетворяет функция

$$u = f(g(x, \tilde{y} + \tilde{t}), h(\tilde{y} - \tilde{t}, z)), \quad (26)$$

задаются первыми тремя уравнениями (24), переписанными в переменных x , $\tilde{y}$, $\tilde{t}$, z :

$$\begin{aligned} u_x(u_{\tilde{y}\tilde{y}} - u_{\tilde{t}\tilde{t}}) &= (u_{\tilde{y}} + u_{\tilde{t}})(u_{x\tilde{y}} - u_{\tilde{t}x}), \\ u_x u_{\tilde{t}z} - u_{\tilde{t}} u_{xz} &= -u_x u_{\tilde{y}z} + u_{\tilde{y}} u_{xz}, \\ u_z u_{\tilde{t}x} - u_{\tilde{t}} u_{xz} &= u_z u_{x\tilde{y}} - u_{\tilde{y}} u_{xz}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для простоты обозначений заменим в этих уравнениях $\tilde{y}$ и $\tilde{t}$ на y и t соответственно.

В общем случае (27) есть необходимое и достаточное условие представимости аналитической функции в виде (26) в окрестности почти каждой точки. Но если известно, что u_x и u_z не обращаются в нуль в области D , то имеем $r(M) \geq 1$ и, следовательно, (27) $\Leftrightarrow$ (24) $\Leftrightarrow r(M) = 1$. В этом случае согласно следствию 2 представление (26) существует в окрестности каждой точки области D тогда и только тогда, когда выполнено условие (27). Поэтому следующая задача с начальными условиями дает нам условие представимости аналитической функции суперпозицией типа H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u^0(x, y, z)$ – такая аналитическая функция, что $u_x^0 u_z^0 \neq 0$ в области D . Для представимости u^0 аналитической суперпозицией вида $f(g(x, y), h(y, z))$ в окрестности каждой точки области D необходимо и достаточно, чтобы система (27) имела аналитическое решение $u = u(x, y, z, t)$ с начальным условием $u(x, y, z, 0) = u^0(x, y, z)$.

Рассмотрим теперь последние два уравнения из (27). Дифференцируя второе уравнение по x , а третье – по z и собирая их вместе, имеем

$$\begin{aligned} u_x u_{tz} - u_t u_{xz} &= -u_x u_{yz} + u_y u_{xz}, \\ u_{xx} u_{tz} + u_x u_{txz} - u_{tx} u_{xz} - u_t u_{xxz} &= -u_{xx} u_{yz} - u_x u_{xyz} + u_{xy} u_{xz} + u_y u_{xxz}, \\ u_z u_{tx} - u_t u_{xz} &= u_z u_{xy} - u_y u_{xz}, \\ u_{zz} u_{tx} + u_z u_{txz} - u_{tz} u_{xz} - u_t u_{zzz} &= u_{zz} u_{xy} + u_z u_{xyz} - u_{yz} u_{xz} - u_y u_{zzz}. \end{aligned} \quad (28)$$

Эти уравнения разрешаются относительно u_t , u_{tx} , u_{tz} , u_{txz} формулами, приведенными в следующем предложении, если указанный ниже знаменатель не равен нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всякой суперпозиции вида $u = f(g(x, y+t), h(y-t, z))$ имеем

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{2u_x u_{xz}^2 u_y u_z - u_x^2 u_{xzz} u_y u_z - 2u_x^2 u_{xz} u_{yz} u_z + 2u_x^2 u_{xyz} u_z^2 - 2u_x u_{xy} u_{xz} u_z^2 - u_x u_{xxz} u_y u_z^2 + u_{xx} u_{xz} u_y u_z^2 + u_x^2 u_{xz} u_y u_{zz}}{-u_x^2 u_{xzz} u_z + u_x u_{xxz} u_z^2 - u_{xx} u_{xz} u_z^2 + u_x^2 u_{xz} u_{zz}} \equiv F_1, \\ u_{tx} &= \frac{2u_x u_{xz}^3 u_y - 2u_x u_{xxz} u_{xz} u_y u_z - 2u_x u_{xy} u_{xz}^2 u_z + u_x u_{xxz} u_{xy} u_z^2 + 2u_x^2 u_{xyz} u_{xz} u_z - 2u_x^2 u_{xz}^2 u_y u_z - u_x^2 u_{xy} u_{xzz} u_z + u_x^2 u_{xy} u_{xz} u_{zz} + 2u_{xx} u_{xz}^2 u_y u_z - u_{xx} u_{xy} u_{xz} u_z^2}{-u_x^2 u_{xzz} u_z + u_x u_{xxz} u_z^2 - u_{xx} u_{xz} u_z^2 + u_x^2 u_{xz} u_{zz}} \equiv F_2, \\ u_{tz} &= \frac{2u_{xz}^3 u_y u_z - 2u_x u_{xz} u_{xzz} u_y u_z - 2u_x u_{xz}^2 u_{yz} u_z + u_x^2 u_{xzz} u_{yz} u_z + 2u_x u_{xyz} u_{xz} u_z^2 - 2u_{xy} u_{xz}^2 u_z^2 - u_x u_{xxz} u_{yz} u_z^2 + u_{xx} u_{xz} u_{yz} u_z^2 + 2u_x u_{xz}^2 u_y u_{zz} - u_x^2 u_{xz} u_y u_{zz}}{-u_x^2 u_{xzz} u_z + u_x u_{xxz} u_z^2 - u_{xx} u_{xz} u_z^2 + u_x^2 u_{xz} u_{zz}} \equiv F_3, \\ u_{txz} &= \frac{2u_{xz}^4 u_y - 2u_x u_{xz}^3 u_y u_z + 2u_x u_{xyz} u_{xz}^2 u_z - 2u_{xy} u_{xz}^3 u_z + u_x^2 u_{xyz} u_{xzz} u_z - 2u_x u_{xy} u_{xz} u_{xzz} u_z - 2u_x u_{xxz} u_{xzz} u_y u_z + 2u_{xx} u_{xz} u_{xzz} u_y u_z - 2u_x u_{xxz} u_{xz} u_{yz} u_z + 2u_{xx} u_{xz}^2 u_{yz} u_z + u_x u_{xxz} u_{xyz} u_z^2 - u_{xx} u_{xyz} u_{xz} u_z^2 - u_x^2 u_{xyz} u_{xz} u_{zz} + 2u_x u_{xy} u_{xz}^2 u_{zz} + 2u_x u_{xxz} u_{xz} u_y u_{zz} - 2u_{xx} u_{xz}^2 u_y u_{zz}}{-u_x^2 u_{xzz} u_z + u_x u_{xxz} u_z^2 - u_{xx} u_{xz} u_z^2 + u_x^2 u_{xz} u_{zz}} \equiv F_4. \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно этим уравнениям получаем три уравнения, не содержащие ни функции u_t , ни ее производных:

- (i) $\partial F_1 / \partial x = F_2$;
- (ii) $\partial F_1 / \partial z = F_3$;
- (iii) $\partial^2 F_1 / \partial x \partial z = F_4$.

Уравнение (iii) можно заменить на одно из следующих:

- (iv) $\partial F_3 / \partial x = F_4$;
- (v) $\partial F_2 / \partial z = F_4$.

Ясно, что (ii) получается формальной перестановкой индексов x и z в (i). Далее, вычисление показывает, что уравнения (i) и (iv) (а также (ii) и (v)) эквивалентны друг другу. Поэтому остаются два уравнения (i), (ii) для u , не содержащие переменную t и потому справедливые также и для начального условия $u^0 = f(g(x, y), h(y, z))$ функции u . Для простоты заменим теперь u^0 на u .

ТЕОРЕМА 4. Для всякой суперпозиции вида $u = f(g(x, y), h(y, z))$ имеем

$$\begin{aligned}
& u_x^2 u_{xxxz} u_{xz}^2 u_y - 2u_x u_{xxxz} u_{xz}^3 u_y + 2u_{xx} u_{xz}^4 u_y - u_x^2 u_{xxxz} u_{xz} u_{xxz} u_y \\
& - u_x^3 u_{xxxz} u_{xz} u_{yz} + 2u_x^2 u_{xxxz} u_{xz}^2 u_{yz} - 2u_x u_{xx} u_{xz}^3 u_{yz} + u_x^3 u_{xxxz} u_{xxz} u_{yz} \\
& + u_x^3 u_{xxxz} u_{xyz} u_z - u_x^2 u_{xxxz} u_{xy} u_{xz} u_z - 2u_x^2 u_{xxxz} u_{xyz} u_{xz} u_z + 2u_x u_{xxxz} u_{xy} u_{xz}^2 u_z \\
& + 2u_x u_{xx} u_{xyz} u_{xz}^2 u_z - 2u_{xx} u_{xy} u_{xz}^3 u_z - u_x^3 u_{xxxz} u_{xxz} u_z + 2u_x^2 u_{xxxz} u_{xy} u_{xz} u_z \\
& + u_x^2 u_{xxxz} u_{xz} u_{xxz} u_z - 2u_x u_{xx} u_{xy} u_{xz} u_{xxz} u_z - u_x^2 u_{xxxz} u_{xxxz} u_y u_z \\
& + 3u_x u_{xz}^2 u_{xz} u_y u_z + u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xz} u_y u_z - u_x u_{xxxz} u_{xz}^2 u_y u_z \\
& - 3u_{xx} u_{xxxz} u_{xz}^2 u_y u_z + u_{xxx} u_{xz}^3 u_y u_z + u_x^2 u_{xxxz} u_{xxxz} u_y u_z \\
& - 2u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xxz} u_y u_z + 2u_{xx}^2 u_{xz} u_{xxxz} u_y u_z - u_x u_{xxxz} u_{xz} u_{xxz} u_y u_z \\
& - u_x^2 u_{xxxz}^2 u_{yz} u_z + u_x^2 u_{xxxz} u_{xz} u_{yz} u_z - u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xz} u_{yz} u_z + 2u_{xx}^2 u_{xz}^2 u_{yz} u_z \\
& - u_x u_{xxxz} u_{xz}^2 u_{yz} u_z + u_x^2 u_{xxxz} u_{xxxz} u_z^2 - 2u_x u_{xz}^2 u_{xy} u_z^2 - u_x^2 u_{xxxz} u_{xyz} u_z^2 \\
& + 2u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xyz} u_z^2 - u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xz} u_z^2 - u_x u_{xxxz} u_{xxxz} u_{xz} u_z^2 \\
& + u_x u_{xxxz} u_{xy} u_{xz} u_z^2 + 2u_{xx} u_{xxxz} u_{xy} u_{xz} u_z^2 - 2u_{xx}^2 u_{xyz} u_{xz} u_z^2 + u_x u_{xxxz} u_{xyz} u_{xz} u_z^2 \\
& + u_{xx} u_{xxxz} u_{xz}^2 u_z^2 - u_{xxx} u_{xy} u_{xz}^2 u_z^2 - u_x^3 u_{xxxz} u_{xyz} u_{zz} + u_x^3 u_{xxxz} u_{xz} u_{zz} \\
& - u_x^2 u_{xxxz} u_{xy} u_{xz} u_{zz} - u_x^2 u_{xxxz} u_{xz}^2 u_{zz} + 2u_x u_{xx} u_{xy} u_{xz}^2 u_{zz} + u_x^2 u_{xxxz}^2 u_y u_{zz} \\
& - u_x^2 u_{xxxz} u_{xz} u_y u_{zz} + u_x u_{xx} u_{xxxz} u_{xz} u_y u_{zz} \\
& - 2u_{xx}^2 u_{xz}^2 u_y u_{zz} + u_x u_{xxxz} u_{xz}^2 u_y u_{zz} \equiv F(u; x, y, z) = 0, \tag{30}
\end{aligned}$$

$$F(u; z, y, x) = 0. \tag{31}$$

Эти важные уравнения представляют собой необходимое условие локальной представимости C^4 -гладкой функции u в виде

$$u = f(g(x, y), h(y, z)) \tag{32}$$

с дважды дифференцируемой функцией f и дифференцируемыми g, h , так как мы вывели (30) и (31) из уравнений (24), которые необходимы для представимости u в указанном виде, если f дважды дифференцируема, а g, h дифференцируемы.

Пусть u – аналитическая функция. Если она не удовлетворяет (30) или (31) в некоторой точке c , то по теореме о единственности не существует локального представления вида (32) с аналитическими f, g, h . Если вещественно-аналитическая функция u не удовлетворяет (30) или (31) хотя бы в одной точке, то u не допускает локального представления вида (32) с дважды дифференцируемой функцией f и дифференцируемыми g, h .

Например, зададим алгебраическую функцию u уравнением

$$u^n = xu^a + yu^b + zu^c + 1, \tag{33}$$

где a, b, c – целые, а n – положительное целое число. Производные от всех ветвей функции u в точке $(x, y, z) = 0$ вычисляются следующим образом [9], [10]:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} (0, 0, 0) = \frac{1}{n^m} \left(\prod_{s=1}^{m-1} (ai + bj + ck - sn + 1) \right) \omega^{ai+bj+ck+1}. \tag{34}$$

Здесь $\omega = u(0, 0, 0)$ – любой корень n -й степени из 1. Тогда вычисление показывает, что значение левой части (30) равно

$$\frac{1}{n^{11}}(a-b)(b-c)(c-a)(n^2 - (a+b+c)n + ab + bc + ca)\omega^{6a+b+4c+6}, \quad (35)$$

а значение (31) получается из (35) перестановкой (a, c) . Если эти значения не равны нулю, то u локально не представима в виде (32). Учитывая симметрии функции u по своим переменным, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть функция u определена уравнением (33) для различных целых a, b, c и положительного целого n таких, что $n^2 - (a+b+c)n + ab + bc + ca \neq 0$. Тогда u ни в какой вещественной области не представима в виде $u = f(g(x, y), h(y, z))$, $u = f(g(x, y), h(x, z))$ или $u = f(g(x, z), h(y, z))$ с дважды дифференцируемой функцией f и дифференцируемыми g, h и ни в какой комплексной области не представима в указанном виде с аналитическими функциями f, g, h .

Ясно, что функция $f = -u(-x, y, -z)$ при $(n, a, b, c) = (7, 3, 2, 1)$ имеет те же свойства, что и u из следствия 4. Функция f , заданная уравнением $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$, возникает в 13-й проблеме Гильберта [1], [2].

Совокупность последних двух уравнений (27) эквивалентна системе (28) и, следовательно, системе (29). Но эти четыре уравнения восстанавливаются по первому из них ($u_t = F_1$) и уравнениям (30), (31). Тем самым, последние два уравнения из (27)

$$\begin{aligned} u_x(u_t)_z - u_t u_{xz} &= -u_x u_{yz} + u_y u_{xz}, \\ u_z(u_t)_x - u_t u_{xz} &= u_z u_{xy} - u_y u_{xz} \end{aligned} \quad (36)$$

становятся при подстановке $u_t = F_1$ тождествами, если выполнены условия (30), (31). Далее, из $u_t = F_1$ получаем, что $u_{tt} = (F_1)_t$. Пользуясь уравнениями, полученными из равенства $u_t = F_1$ дифференцированием, мы можем выразить $(F_1)_t$ через производные функции u так, что это выражение не содержит ни функции u_t , ни ее производных. Запишем этот результат в виде $u_{tt} = F_5$ и подставим $u_t = F_1$ и $u_{tt} = F_5$ в первое уравнение (27). Получим одно чрезвычайно сложное уравнение с частными производными относительно функции u от переменных x, y, z :

$$G(u; x, y, z) = 0. \quad (37)$$

Из построения (37) вытекает, что условия $u_t = F_1$ и (37) влекут первое уравнение (27). Подводит итог

СЛЕДСТВИЕ 5. Практически все уравнения, которым удовлетворяет $u = f(g(x, y + t), h(y - t, z))$, имеют вид (30), (31), $u_t = F_1$ и (37). Первые три из этих уравнений эквивалентны системе (36).

Пусть A есть следующая (10×9) -матрица:

$$A = \begin{pmatrix} -u_{xz} & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ -u_{xxx} & -u_{xz} & u_{xx} & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & v_x \\ -u_{xxxz} & -2u_{xxz} & u_{xxx} & -u_{xz} & 2u_{xx} & 0 & u_x & 0 & v_{xx} \\ -u_{xzz} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & v_z \\ -u_{xxxz} & -u_{xzz} & 0 & 0 & 0 & u_{xx} & 0 & u_x & v_{xz} \\ -u_{xz} & u_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \\ -u_{xzz} & u_{zz} & -u_{xz} & 0 & u_z & 0 & 0 & 0 & w_z \\ -u_{xxxz} & u_{zzz} & -2u_{xxz} & 0 & 2u_{zz} & -u_{xz} & 0 & u_z & w_{zz} \\ -u_{xxz} & 0 & 0 & u_z & 0 & 0 & 0 & 0 & w_x \\ -u_{xxxz} & 0 & -u_{xxz} & u_{zz} & 0 & 0 & u_z & 0 & w_{xz} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где обозначено $v = u_x u_{yz} - u_y u_{xz}$ и $w = -u_z u_{xy} + u_y u_{xz}$. Определим вектор ξ формулой

$$\xi = (u_t, u_{tx}, u_{tz}, u_{txx}, u_{txz}, u_{tzz}, u_{txxz}, u_{txzz}, 1)^t. \quad (39)$$

Дифференцируя первое уравнение (36) по x , а затем по x, z, x и z , а второе – по z , а затем по z, x, x и z , получаем уравнение $A\xi = 0$. Однако, так как вектор ξ не равен нулю, все 9-миноры матрицы A должны обращаться в нуль. Отсюда получаются десять уравнений. Оказывается, что минор, полученный вычеркиванием 8-й строки из A , отвечает уравнению (30), а минор, полученный вычеркиванием 3-й строки, – уравнению (31). Остальные миноры также имеют очень сложный вид. Между тем, согласно следствию 5 все они порождены только двумя уравнениями: (30) и (31). Действительно, после подстановки $u_t = F_1$ в вектор ξ уравнения (30) и (31) влекут, что $A\xi = 0$, а отсюда вытекают все десять уравнений для миноров.

Список литературы

1. П. С. Александров (ред.), *Проблемы Гильберта*, Наука, М., 1969; нем. пер.: P. S. Alexandrov (ed.), *Die Hilbertschen Probleme*, Second edition, Ostwalds Klassiker Exakt. Wiss., **252**, Geest & Portig, Leipzig, 1979.
2. D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen. Bd. III: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte*, Springer-Verlag, Berlin, 1935.
3. В. И. Арнольд, “О функциях трех переменных”, *Докл. АН СССР*, **114**:4 (1957), 679–681; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “On functions of three variables”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **28** (1963), 51–54.
4. В. И. Арнольд, “О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных”, *Матем. сб.*, **48(90)**:1 (1959), 3–74; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “On the representation of continuous functions of three variables by superpositions of continuous functions of two variables”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **28** (1963), 61–147.
5. А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных”, *Докл. АН СССР*, **108**:2 (1956), 179–182; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, “On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **17** (1961), 369–373.

6. А. Н. Колмогоров, “О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций одного переменного и сложения”, *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, “On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **28** (1963), 55–59.
7. А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, *Selected works of A. N. Kolmogorov. Vol. I. Mathematics and mechanics*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **25**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
8. V. I. Arnol’d, “From Hilbert’s superposition problem to dynamical systems”, *Amer. Math. Monthly*, **111**:7 (2004), 608–624.
9. К. Asai, “Taylor expansion of implicit functions defined by linear equations of variables”, *Kodai Math. J.*, **24**:1 (2001), 31–35.
10. Hj. Mellin, “Résolution de l’équation algébrique générale à l’aide de la fonction gamma”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **172** (1921), 658–661.

К. АСАИ (K. ASAI)
University of Aizu, Japan
E-mail: k-asai@u-aizu.ac.jp

Поступило в редакцию
05.02.2007

Перевод с англ.
А. В. Домрина