Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Геворкян, К. А. Керян, Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 69–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:01:10

УДК 517.51

Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по общей системе Франклина

Доказано, что для любой допустимой последовательности соответствующая общая система Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующим свойством: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ почти всюду абсолютно сходится на множестве E тогда и только тогда, когда этот ряд безусловно почти всюду сходится на E .

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: ряды, общая система Франклина, абсолютная сходимость, безусловная сходимость.

§ 1. Введение

Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$ называется *почти всюду (п. в.) безусловно сходящимся на множестве E* , если при любой перестановке натуральных чисел $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\sigma_n(x)}$ п. в. сходится на E . Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$ называется *п. в. абсолютно сходящимся на E* , если $\sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n(x)| < +\infty$ п. в. на E . Известно, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда этот ряд сходится безусловно. Для функциональных рядов понятия безусловной сходимости п. в. и абсолютной сходимости п. в. не эквивалентны, поскольку исключительное множество расходимости может меняться при перестановке. Например, если $\{R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Радемахера, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R_n(x)$ п. в. безусловно сходится (см. [1, с. 36]), но п. в. абсолютно расходится. Однако для системы Хаара верна следующая (см. [2]) теорема.

ТЕОРЕМА 1 (Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов). *Для безусловной сходимости п. в. на множестве $E \subset [0, 1]$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Хаара, необходимо и достаточно, чтобы для п. в. $x \in E$ была конечна сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|$.*

Первый автор настоящей статьи распространил (см. [3]) теорему 1 на ряды по классической системе Франклина (определения классической и общей систем Франклина приведены в § 3).

В работе [4] теорема 1 распространена на общую систему Франклина при условии, что система Франклина порождена квазидиадическим и сильно регулярным разбиением отрезка $[0, 1]$. Необходимые определения приведены в § 3.

В настоящей работе аналогичная теорема доказывается для общей системы Франклина без каких-либо ограничений. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Франклина, порожденная допустимой последовательностью T . Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ п. в. безусловно сходится на некотором множестве E , если и только если этот ряд абсолютно сходится п. в. на E .

Введем следующие обозначения: $c, C, c_1, C_1, \alpha, \alpha_0, \dots$ – постоянные, значения которых в разных формулах могут быть разными; $|I|$ – длина отрезка I ; $\text{dist}(t, I)$ – расстояние между точкой t и интервалом I ; $\chi_A(x)$ – характеристическая функция множества A , а $\mu(A)$ – лебегова мера множества A .

Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C такие, что $ca \leq b \leq Ca$.

§ 2. Определение функции Франклина и одна вспомогательная лемма

Пусть $\pi = \{0 = t_{-l} < t_{-l+1} \leq \dots \leq t_{-1} < t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} < t_k = 1\}$, где $t_i < t_{i+2}$, и $\pi^* = \pi \cup \{t^*\}$, где $t_{-1} \leq t^* = t_0 \leq t_1$. Через S_π обозначим пространство функций, которые непрерывны слева, линейны на (t_i, t_{i+1}) и непрерывны в t_i , если $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$. Ясно, что $\dim S_\pi = l + k$, $\dim S_{\pi^*} = l + k + 1$ и $S_\pi \subset S_{\pi^*}$. Поэтому существует единственная функция $f \in S_{\pi^*}$, которая ортогональна S_π , $\|f\|_2 = 1$ и $f(t_0) > 0$. Эту функцию называют *функцией Франклина*, соответствующей паре разбиений (π, π^*) . Очевидно, что f как функция из S_{π^*} имеет вид $f(x) = \sum_{i=-l}^k \xi_i N_{\pi^*, i}(x)$, где $N_{\pi^*, i}(x)$ – B -сплайн пространства S_{π^*} с “вершиной” в t_i , и $f(t_i) = \xi_i$. Для перечисления необходимых нам свойств функции Франклина определим “канонический” интервал J соответствующей функции Франклина. Обозначим через $I^* = [t_i^*, t_{i^*+2}]$ тот из отрезков $[t_{-2}, t_0]$, $[t_{-1}, t_1]$, $[t_0, t_2]$, который имеет наименьшую длину. Интервал J – один из интервалов $[t_i^*, t_{i^*+1}]$ и $[t_{i^*+1}, t_{i^*+2}]$ с таким условием, что $|J| = \max(|[t_i^*, t_{i^*+1}]|, |[t_{i^*+1}, t_{i^*+2}]|)$. Обозначим также $\lambda_i = |[t_{i-1}, t_i]| = t_i - t_{i-1}$ и будем считать, что $\lambda_{-l} = \lambda_{k+1} = 0$. Известно, что ξ_i удовлетворяют условиям (см. [5])

$$\xi_{i-1}\lambda_i + 2\xi_i(\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \xi_{i+1}\lambda_{i+1} = 0 \quad \text{при } i \leq -2 \text{ и } i \geq 2, \quad (1)$$

$$\xi_{-2}\lambda_{-1} + \xi_{-1}\left(2(\lambda_{-1} + \lambda_0) + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) + \xi_0(\lambda_0 + 2\lambda_1) + \xi_1\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 + \lambda_1} = 0, \quad (2)$$

$$\xi_{-1}\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \lambda_1} + \xi_0(2\lambda_0 + \lambda_1) + \xi_1\left(2(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) + \xi_2\lambda_2 = 0. \quad (3)$$

Кроме того,

$$2|\xi_{i+1}|\frac{\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} > |\xi_i| > \frac{2\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}}|\xi_{i+1}|, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

$$2|\xi_{i-1}|\frac{\lambda_i + \lambda_{i-1}}{\lambda_i} > |\xi_i| > \frac{2\lambda_i + 1.5\lambda_{i-1}}{\lambda_i}|\xi_{i-1}|, \quad i \leq -1, \quad (5)$$

$$\text{sign } \xi_i = (-1)^i, \quad (6)$$

$$|\xi_i| \sim \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}}, \quad i = -1, 0, 1, \quad (7)$$

$$\|f\|_p \sim |J|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (8)$$

$$|\xi_i| \leq C \left(\frac{2}{3} \right)^{|i|} \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{|J| + \text{dist}(t_i, J) + t_{i+1} - t_{i-1}} \quad \forall i. \quad (9)$$

Из условий (2) и (3), используя неравенства (4) и (5) для $i = 1$ и $i = -1$ соответственно, получим

$$\xi_{-1} \left(2\lambda_0 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) + \xi_0(\lambda_0 + 2\lambda_1) + \xi_1 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 + \lambda_1} > 0, \quad (10)$$

$$\xi_{-1} \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \lambda_1} + \xi_0(2\lambda_0 + \lambda_1) + \xi_1 \left(2\lambda_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) > 0. \quad (11)$$

Суммируя неравенства (10) и (11), получим $\xi_{-1}\lambda_0 + \xi_0(\lambda_0 + \lambda_1) + \xi_1\lambda_1 > 0$. Следовательно, $|\xi_0|(\lambda_0 + \lambda_1) > |\xi_1|\lambda_1 + |\xi_{-1}|\lambda_0$. Отсюда следует, что $|\xi_0| > \min(|\xi_{-1}|, |\xi_1|)$. Иными словами, $|\xi_0| \neq \min(|\xi_{-1}|, |\xi_0|, |\xi_1|)$.

Поскольку $\xi_i \xi_{i+1} < 0$, $-l \leq i \leq k-1$, существуют точки $\eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ такие, что $f(\eta_i) = 0$. Сначала докажем, что

$$\int_{t_i}^{\eta_i} |f(t)| dt > 1.5 \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} |f(t)| dt, \quad i \geq 1. \quad (12)$$

Действительно, для $i \geq 1$ из соотношения (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{\int_{t_i}^{\eta_i} |f(t)| dt}{\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} |f(t)| dt} &= \frac{\frac{1}{2} |\xi_i| \lambda_{i+1} \frac{|\xi_i|}{|\xi_i| + |\xi_{i+1}|}}{\frac{1}{2} |\xi_{i+1}| \left(\lambda_{i+1} \frac{|\xi_{i+1}|}{|\xi_i| + |\xi_{i+1}|} + \lambda_{i+2} \frac{|\xi_{i+1}|}{|\xi_{i+1}| + |\xi_{i+2}|} \right)} \\ &> \frac{\frac{2\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \frac{2\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2}}{3\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2}} \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{3\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2}} + \lambda_{i+2}} > \frac{(2\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2})^2}{(\lambda_{i+2} + \frac{\lambda_{i+1}}{3})(3\lambda_{i+1} + 1.5\lambda_{i+2})} \\ &= \frac{2.25 \left(\frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \right)^2 + 6 \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} + 4}{1.5 \left(\frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} \right)^2 + 3.5 \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} + 1} > 1.5. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} |f(t)| dt \geq \frac{1}{24} |\xi_i| \lambda_{i+1} \geq \frac{1}{12} \int_{t_i}^{\eta_i} |f(t)| dt, \quad i \geq 1. \quad (13)$$

Действительно, из соотношений (4), (6) имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} |f(t)| dt &= |\xi_{i+1}| \left(\lambda_{i+1} \frac{|\xi_{i+1}|}{|\xi_i| + |\xi_{i+1}|} + \lambda_{i+2} \frac{|\xi_{i+1}|}{|\xi_{i+1}| + |\xi_{i+2}|} \right) \\ &> |\xi_{i+1}| \left(\lambda_{i+1} \frac{|\xi_{i+1}|}{|\xi_i| + |\xi_{i+1}|} + \frac{\lambda_{i+2}}{3} \right) \\ &> \frac{|\xi_i| \lambda_{i+1}}{2(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})} \left(\lambda_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{3\lambda_{i+1} + 2\lambda_{i+2}} + \frac{\lambda_{i+2}}{3} \right) \\ &= |\xi_i| \lambda_{i+1} \frac{3\lambda_{i+1}^2 + 3\lambda_{i+1}\lambda_{i+2} + 2\lambda_{i+2}^2}{6(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})(3\lambda_{i+1} + 2\lambda_{i+2})} > \frac{|\xi_i| \lambda_{i+1}}{12}. \end{aligned}$$

Каждой функции Франклина сопоставим также отрезок $I = [t_{-3}, t_3]$.

ЛЕММА 1. Пусть f – функция Франклина, соответствующая разбиениям (π, π^*) , и $\alpha, \beta \in \pi^*$ такие, что $I \subset [\alpha, \beta]$. Тогда существуют точки $\zeta_0, \zeta_1 \in I$ и абсолютная постоянная $c > 0$ такие, что

$$\int_{\zeta_0}^{\beta} f(t) dt > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt, \quad \int_{\zeta_1}^{\beta} f(t) dt < -c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если $\lambda_0 \geq \frac{\lambda_1}{3}$, то существует такая постоянная $c_1 > 0$, что

$$|\xi_0| > c_1 |\xi_{-1}|. \quad (14)$$

Действительно, из (7) имеем

$$|\xi_0| > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_0 + \lambda_1} > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{4\lambda_0}, \quad |\xi_{-1}| < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{-1} + \lambda_0} < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_0}.$$

Обозначим

$$c_0 = \min\left(\frac{1}{50}, \frac{1}{6} \frac{c_1}{c_1 + 1}\right), \quad (15)$$

где постоянная c_1 та же, что и в (14).

Для доказательства леммы рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $\lambda_2 \geq c_0 \lambda_1$. Из неравенства (12) имеем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\left(\int_{t_i}^{t_j} f(t) dt\right) &= \operatorname{sign}\left(\int_{t_i}^{\eta_i} f(t) dt\right) = \operatorname{sign} \xi_i \\ &= (-1)^i = \operatorname{sign}\left(\int_{\eta_{i-1}}^{t_j} f(t) dt\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^{\beta} f(t) dt &> \int_{t_2}^{\eta_2} f(t) dt - \frac{1}{1.5} \int_{t_2}^{\eta_2} f(t) dt + \int_{\eta_3}^{\beta} f(t) dt \\ &> \frac{1}{3} \int_{t_2}^{\eta_2} f(t) dt + \int_{t_4}^{\beta} f(t) dt > \frac{1}{3} \int_{t_2}^{\eta_2} f(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно, из соотношений (7), (13), (8) получим

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\beta} f(t) dt &> \int_{\eta_1}^{t_2} f(t) dt + \frac{1}{3} \int_{t_2}^{\eta_2} f(t) dt > \frac{1}{72} |\xi_1| \lambda_2 \\ &> c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2 > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \|f\|_1 > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned} \quad (17)$$

С другой стороны, в силу (12), (13), (16) имеем

$$\left| \int_{t_1}^{\beta} f(t) dt \right| > \frac{1}{3} \int_{t_1}^{\eta_1} |f(t)| dt > \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(t) dt > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \quad (18)$$

Поэтому, полагая $\zeta_0 = \eta_1$, $\zeta_1 = t_1$, из (17) и (18) получим утверждение леммы.

2) Пусть $\lambda_2 < c_0\lambda_1$ и $|\xi_1| = \max(|\xi_{-1}|, |\xi_0|, |\xi_1|)$. В этом случае из (7), (8) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt \right| &= - \int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt > - \int_{\eta_0}^{t_1} f(t) dt > \frac{1}{2} |\xi_1| \frac{\lambda_1}{2} \\ &> c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1 > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \|f\|_1 > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь покажем, что существует постоянная c' такая, что

$$\int_{\eta_{-1}}^{t_1} f(t) dt > c' \lambda_1 |\xi_1|. \quad (20)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{-1}}^{t_1} f(t) dt &= \frac{1}{2} \left(|\xi_0| \lambda_0 \frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} + |\xi_0| \lambda_1 \frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_1|} - |\xi_1| \lambda_1 \frac{|\xi_1|}{|\xi_0| + |\xi_1|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lambda_0 \frac{|\xi_0|^2}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} + \lambda_1 (|\xi_0| - |\xi_1|) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_1 |\xi_1| \left(\frac{|\xi_0|}{|\xi_1|} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} + 1 \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что величина удовлетворяет неравенству

$$A := \frac{|\xi_0|}{|\xi_1|} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} + 1 \right) > c,$$

где $c > 1$.

Обозначим $s = \frac{|\xi_{-1}|}{|\xi_0|}$. Учитывая, что $|\xi_0| > \min(|\xi_{-1}|, |\xi_1|)$, получим $s < 1$. Из соотношения (11) мы имеем, что

$$|\xi_0| \left(2\lambda_0 + \lambda_1 - s \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) > |\xi_1| \left(2\lambda_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right). \quad (21)$$

Рассмотрим три подслучая.

а) $0 < s < \frac{1}{3}$. Из неравенства (21) имеем

$$\begin{aligned} A &> \frac{2\lambda_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}}{2\lambda_0 + \lambda_1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + 1 \right) = \frac{(2\lambda_1^2 + 3\lambda_0 \lambda_1)(3\lambda_0 + 4\lambda_1)}{4\lambda_1(2\lambda_0 + \lambda_1)(\lambda_0 + \lambda_1)} \\ &= \frac{9\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 + 18\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + 8}{8\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 + 12\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + 4} \geq \frac{9}{8}. \end{aligned} \quad (22)$$

б) $\frac{1}{3} \leq s < \frac{2}{3}$. Тогда из неравенства (21) получим

$$\begin{aligned} A &> \frac{2\lambda_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}}{2\lambda_0 + \lambda_1 - \frac{1}{3} \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0 + \lambda_1}} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} + 1 \right) = \frac{3(2\lambda_1^2 + 3\lambda_0 \lambda_1)(3\lambda_0 + 5\lambda_1)}{5\lambda_1(5\lambda_0^2 + 9\lambda_0 \lambda_1 + 3\lambda_1^2)} \\ &= \frac{27\lambda_0^2 + 63\lambda_0 \lambda_1 + 30\lambda_1^2}{25\lambda_0^2 + 45\lambda_0 \lambda_1 + 15\lambda_1^2} > \frac{27}{25}. \end{aligned} \quad (23)$$

в) $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$. Как и в предыдущих случаях, применяя неравенство (21), получим

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{2\lambda_1 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}}{2\lambda_0 + \lambda_1 - \frac{2}{3}\frac{\lambda_0^2}{\lambda_0+\lambda_1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + 1 \right) = \frac{(2\lambda_1^2 + 3\lambda_0\lambda_1)(\lambda_0 + 2\lambda_1)}{2\lambda_1(\frac{4}{3}\lambda_0^2 + 3\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1^2)} \\ &= \frac{3\lambda_0^2 + 8\lambda_0\lambda_1 + 4\lambda_1^2}{\frac{8}{3}\lambda_0^2 + 6\lambda_0\lambda_1 + 2\lambda_1^2} \geq \frac{9}{8}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (22)–(24) следует, что $A > \frac{27}{25}$. Таким образом,

$$\int_{\eta_{-1}}^{\tau_1} f(t) dt > \frac{1}{25} \lambda_1 |\xi_1|.$$

Поскольку $c_0 \leq \frac{1}{50}$, получим $\int_{\eta_{-1}}^{\tau_1} f(t) dt > \frac{1}{50} \lambda_1 |\xi_1|$. Следовательно, используя соотношения (7), (8) и (16), получим

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt &> \int_{\eta_{-1}}^{\tau_1} f(t) dt > \frac{1}{50} \lambda_1 |\xi_1| > c|J|^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &> c\|f\|_1 > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Положив $\zeta_0 = \eta_{-1}$ и $\zeta_1 = \eta_0$, из (19) и (25) получим утверждение леммы в рассматриваемом случае.

3) Пусть $\lambda_2 < c_0\lambda_1$ и $|\xi_0| = \max(|\xi_{-1}|, |\xi_0|, |\xi_1|)$. Рассмотрим два подслучая.

а) $\lambda_0 > \frac{\lambda_1}{20}$. Согласно (7), (8) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt &> \int_{\eta_{-1}}^{\tau_1} f(t) dt > \int_{\eta_{-1}}^{\tau_0} f(t) dt + \int_{\tau_1}^{\tau_1} f(t) dt > \frac{1}{2} |\xi_0| \frac{\lambda_0}{2} - \frac{1}{2} |\xi_1| \lambda_2 \\ &> |\xi_0| \lambda_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) > c|J|^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} > c\|f\|_1 > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned} \quad (26)$$

б) $\lambda_0 \leq \frac{\lambda_1}{20}$. Из неравенства (11) следует

$$\frac{11}{10} \lambda_1 |\xi_0| > |\xi_0| (2\lambda_0 + \lambda_1) > |\xi_1| \left(2\lambda_1 + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \right) > 2\lambda_1 |\xi_1|.$$

Таким образом, $|\xi_0| > \frac{20}{11} |\xi_1|$. Поэтому из (16), (7), (18) получим

$$\int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt > \int_{\eta_{-1}}^{\tau_1} f(t) dt > \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(t) dt > c|\xi_0|\lambda_1 > c|J|^{\frac{1}{2}} > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \quad (27)$$

Из соотношений (26), (27) вытекает, что

$$\int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \quad (28)$$

Теперь докажем, что $|\int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt| > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt$. Из (7) имеем

$$|\xi_1| > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1 + \lambda_2} > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}, \quad |\xi_0| < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_0 + \lambda_1} < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}.$$

Отсюда получаем, что $|\xi_1| > c|\xi_0|$. Следовательно (см. (7), (8) и (16)), выполнено

$$\left| \int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt \right| > \left| \int_{\eta_0}^{t_1} f(t) dt \right| = \frac{1}{2} |\xi_1| \lambda_1 \frac{|\xi_1|}{|\xi_0| + |\xi_1|} > c |\xi_1| \lambda_1 > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \quad (29)$$

Положив $\zeta_0 = \eta_{-1}$ и $\zeta_1 = \eta_0$, из (28) и (29) получим утверждение леммы.

4) Пусть $\lambda_2 < c_0 \lambda_1$ и $|\xi_{-1}| = \max(|\xi_{-1}|, |\xi_0|, |\xi_1|)$. Рассмотрим два подслучая.

а) $\lambda_0 < \frac{\lambda_1}{3}$. Из неравенства (11) имеем $|\xi_0| > |\xi_1| \frac{2\lambda_1}{2\lambda_0 + \lambda_1} > \frac{6}{5} |\xi_1|$. Поэтому из соотношений (7), (8), (16) получаем

$$\int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt > \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} f(t) dt > c \int_{\eta_{-1}}^{\eta_0} f(t) dt > c |\xi_0| \lambda_1 > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

б) $\lambda_0 \geq \frac{\lambda_1}{3}$. Учитывая, что $|\xi_0| > \min(|\xi_{-1}|, |\xi_1|) = |\xi_1|$, из (16) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt &> \int_{\eta_{-1}}^{\eta_1} f(t) dt > \int_{\eta_{-1}}^{t_0} |f(t)| dt - \int_{t_1}^{\eta_1} |f(t)| dt \\ &\geq \frac{1}{2} |\xi_0| \lambda_0 \frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} - \frac{1}{2} |\xi_0| c_0 \lambda_1 \geq \frac{1}{2} |\xi_0| \lambda_0 \left(\frac{|\xi_0|}{|\xi_0| + |\xi_{-1}|} - 3c_0 \right). \end{aligned}$$

В этом подслучае имеем (см. (14)), что $|\xi_0| > c_1 |\xi_{-1}|$. Отсюда, с применением (7), (8), (15), получим

$$\int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt > \frac{1}{2} |\xi_0| \lambda_0 \frac{c_1}{2(c_1 + 1)} > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt,$$

где c – абсолютная постоянная.

Объединив результаты этих подслучаев, получим

$$\int_{\eta_{-1}}^{\beta} f(t) dt > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \quad (30)$$

Теперь оценим $\int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt$. Для этого заметим, что в этом случае из соотношения (7) следуют неравенства

$$|\xi_1| > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1 + \lambda_2} > c \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}, \quad |\xi_0| < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_0 + \lambda_1} < C \frac{|J|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}.$$

Поэтому $|\xi_0| < C |\xi_1|$. Следовательно, из (7), (8), (12) и (16) получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta_0}^{\beta} f(t) dt \right| &> \left| \int_{\eta_0}^{\eta_2} f(t) dt \right| > \int_{\eta_0}^{t_1} |f(t)| dt > \frac{1}{2} |\xi_1| \lambda_1 \frac{|\xi_1|}{|\xi_0| + |\xi_1|} \\ &> \frac{1}{2(1+C)} \lambda_1 |\xi_1| > c |J|^{\frac{1}{2}} > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и из (30), полагая $\zeta_0 = \eta_{-1}$, $\zeta_1 = \eta_0$, получаем утверждение леммы. Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичным образом можно убедиться в том, что существуют точки $\zeta'_0, \zeta'_1 \in I$ и абсолютная постоянная $c > 0$ такие, что

$$\int_{\alpha}^{\zeta'_0} f(t) dt > c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt, \quad \int_{\alpha}^{\zeta'_1} f(t) dt < -c \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt.$$

§ 3. Определение системы Франклина и основные леммы

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность, т. е. $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0, 1)$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0, 1]$ и каждая точка $t \in (0, 1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более двух раз. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Пусть π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{t_{n,i} : t_{n,i} \leq t_{n,i+1}, 0 \leq i \leq n-1\} = \mathcal{T}_n$. Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$, определяется по следующему правилу: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$ и $f_n(x)$, $n \geq 2$, – функция Франклина, соответствующая паре разбиений (π_{n-1}, π_n) .

Как и для общей функции Франклина, для функции f_n также вводятся понятия интервалов I_n и J_n .

При последовательности $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, получается классическая система Франклина.

Последовательность $\mathcal{T}$ называется *квазидиадической*, если $t_{2^k+1} < t_{2^k+2} < \dots < t_{2^{k+1}}$ и между двумя соседними точками из $\{t_n : 0 \leq n \leq 2^k\}$ находится по одной точке из $\{t_n : 2^k < n \leq 2^{k+1}\}$.

Последовательность $\mathcal{T}$ называется *сильно регулярной*, если существует постоянная $\gamma > 1$ такая, что

$$\gamma^{-1} < \frac{t_{n,i+1} - t_{n,i}}{t_{n,i} - t_{n,i-1}} < \gamma, \quad n = 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Приводимые ниже свойства доказаны в [5].

СВОЙСТВО 1. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность и $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ – соответствующая общая система Франклина. Пусть $k, l \geq 0$ такие, что $t_k \leq t_l$ и не существует номера $i \leq \max(k, l)$ со свойством $t_i \in (t_k, t_l)$. Тогда

$$\#\left\{n : J_n \subset [t_k, t_l], |J_n| > \frac{|[t_k, t_l]|}{2}\right\} \leq 25.$$

СВОЙСТВО 2. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность и $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ – соответствующая общая система Франклина. Тогда существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{n : J_n \subset I} |J_n|^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1] \setminus I} |f_n(t)| dt < C|I|.$$

Далее нам понадобятся вспомогательные функции $\tilde{f}_n(t)$, которые определяются следующим образом:

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{1}{t_{n,i} - t_{n,i-1}} \int_{t_{n,i-1}}^{t_{n,i}} |f_n(\tau)| d\tau, \quad t \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}]. \quad (31)$$

В силу линейности функции $f_n(t)$ на $[t_{n,i-1}, t_{n,i}]$ имеем

$$|f_n(t)| \leq 3\tilde{f}_n(t). \quad (32)$$

Из соотношений (9) и (31) получаем

$$\tilde{f}_n(t) \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(t)} \frac{|J_n|^{\frac{1}{2}}}{|J_n| + \text{dist}(t, J_n)}, \quad (33)$$

где через $d_n(t)$ обозначено количество точек из π_n , находящихся между t и J_n .

Из (32) следует, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(t)| = +\infty, \quad t \in E, \quad (34)$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty, \quad t \in E.$$

ЛЕММА 2. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$ удовлетворяет условию (34). Тогда для любого N существуют полином $P(t) = \sum_{n=N}^M a_n f_n(t)$ и перестановка этого полинома $P^\sigma(t) = \sum_{n=N}^M a_{\sigma_n} f_{\sigma_n}(t)$ такая, что если

$$\mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}] \cap E) > \frac{1}{2} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]), \quad (35)$$

то

$$\mu\{t \in [t_{N,i-1}, t_{N,i}]: \delta(P^\sigma(t)) > c_0\} > c_0 \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]), \quad (36)$$

где $c_0 > 0$ – абсолютная постоянная, а $\delta(P^\sigma(t))$ – колебание полинома P^σ в точке t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения. Положим

$$E_n = \{t: |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\}, \quad n = N, N+1, \dots, \quad A = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n. \quad (37)$$

Далее, положим

$$G_1 = \{n \geq N: E_n \neq \emptyset\}, \quad G_2 = \{n \geq N: E_n = \emptyset\}.$$

Ясно, что $\|a_n f_n\|_\infty < 3$, когда $n \in G_2$. Обозначим

$$U = \left\{t \in E \setminus A: \sum_{n \in G_1} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty\right\},$$

$$V = \left\{t \in E \setminus A: \sum_{n \in G_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty\right\}.$$

Ясно, что $E = A \cup U \cup V$, и если отрезок $[t_{N,i-1}, t_{N,i}]$ удовлетворяет (35), то хотя бы одно из множеств A , U , V в этом отрезке имеет порцию больше $1/6$. Полином и перестановка будут выбраны в зависимости от того, порция какого множества больше $1/6$.

Случай 1. Рассмотрим те отрезки $[t_{N,i-1}, t_{N,i}]$, которые удовлетворяют условию (35) и неравенству

$$\mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}] \cap A) > \frac{1}{6} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]). \quad (38)$$

Тогда можно выбрать N_1 такое, что

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{n=N}^{N_1} E_n\right) < \frac{1}{12} \min_{1 \leq j \leq N} \mu([t_{N,j-1}, t_{N,j}]). \quad (39)$$

Из соотношений (38) и (39) получим

$$\mu\left([t_{N,i-1}, t_{N,i}] \cap \left(\bigcup_{n=N}^{N_1} E_n\right)\right) > \frac{1}{12} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]).$$

Следовательно, с учетом линейности $f_n(t)$ и определения множеств E_n получим

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{N_1} \left\{t \in [t_{N,i-1}, t_{N,i}]: |a_n f_n(t)| > \frac{1}{2}\right\}\right) > \frac{1}{36} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]). \quad (40)$$

Случай 2. Рассмотрим те отрезки $[t_{N,i-1}, t_{N,i}]$, которые удовлетворяют условию (35) и неравенству

$$\mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}] \cap U) > \frac{1}{6} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]). \quad (41)$$

Для краткости положим $I = [t_{N,i-1}, t_{N,i}]$, а также введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_1^I &= \{n \in G_1: I_n \subset I\}, \quad U_I = \left\{t \in I \setminus A: \sum_{n \in G_1^I} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty\right\}, \\ G_1^{I,l} &= \{n \in G_1: I_n \cap [0, t_{N,i-1}] \neq \emptyset\}, \quad U_{I,l} = \left\{t \in I \setminus A: \sum_{n \in G_1^{I,l}} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty\right\}, \\ G_1^{I,r} &= \{n \in G_1: I_n \cap (t_{N,i}, 1] \neq \emptyset\}, \quad U_{I,r} = \left\{t \in I \setminus A: \sum_{n \in G_1^{I,r}} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty\right\}. \end{aligned}$$

Из неравенства (41) вытекает, что верно хотя бы одно из трех: $\mu(U_I) > \frac{1}{18} \mu(I)$, $\mu(U_{I,l}) > \frac{1}{18} \mu(I)$, $\mu(U_{I,r}) > \frac{1}{18} \mu(I)$. Отдельно рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $\mu(U_I) > \frac{1}{18} \mu(I)$. Множество $[0, 1] \setminus E_n$ является объединением двух интервалов. Обозначим через $E_{n,l}$ левый из них, а через $E_{n,r}$ – правый. Без ограничения общности можем считать, что

$$\mu\left\{t \in I: \sum_{n \in G_1^I} |a_n f_n(t) \chi_{E_{n,r}}(t)| = +\infty\right\} > \frac{1}{36} \mu(I), \quad (42)$$

где χ_D – характеристическая функция множества D .

Пусть $t_n^- = \max\{t: t \in \pi_n, t < t_n\}$, $t_n^+ = \min\{t: t \in \pi_n, t > t_n\}$, $\lambda_{n,0} = t_n - t_n^-$ и $\lambda_{n,1} = t_n^+ - t_n$.

Для $n \in G_1^I$ определим множество $\tilde{E}_n^I$ следующим образом. В случае, когда $E_{n,r} = [t_n, 1]$, $|f_n(t_n^-)| = \max(|f_n(t_n^-)|, |f_n(t_n)|, |f_n(t_n^+)|)$ и $|f_n(t_n^-)| < C_1 f_n(t_n)$, полагаем $\tilde{E}_n^I = [t_n, t_n^+]$. При этом постоянная C_1 выбрана настолько большой, что из выполнения неравенства $|f_n(t_n^-)| > C_1 f_n(t_n)$ следует

$$\lambda_{n,0} < \frac{\lambda_{n,1}}{3}. \quad (43)$$

Существование такой постоянной следует из (7). В случае $E_{n,r} = [t_n, 1]$, $|f_n(t_n)| = \max(|f_n(t_n^-)|, |f_n(t_n)|, |f_n(t_n^+)|)$ также полагается $\tilde{E}_n^I = [t_n, t_n^+]$. Если $E_{n,r} = [t_n^-, 1]$ и имеет место (43), то $\tilde{E}_n^I = [t_n^-, t_n]$, а при невыполнении неравенства (43) полагаем $\tilde{E}_n^I = [t_n^-, t_n^+]$. В остальных случаях $\tilde{E}_n^I = \emptyset$. Нетрудно убедиться в том, что из определения $\tilde{E}_n^I$ вытекает существование абсолютной постоянной $c > 0$ такой, что $|a_n \tilde{f}_n(t)| \geq c$ для $t \in \tilde{E}_n^I$.

Обозначив $\tilde{A}_I = \bigcup_{n \in G_1^I} \tilde{E}_n^I$, аналогично предыдущему случаю получим, что если

$$\mu(\tilde{A}_I) > \frac{1}{72} \mu(I), \quad (44)$$

то существует N_2 такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{N_2} \left\{t \in I: |a_n f_n(t)| > \frac{c}{2}\right\}\right) > \frac{1}{216} \mu(I). \quad (45)$$

Если $\mu(\tilde{A}_I) < \frac{1}{72} \mu(I)$, то из (42) следует, что

$$\mu\left(\left\{t \in I: \sum_{n \in G_1^I} |a_n f_n(t) \chi_{E_{n,r}}(t)| = +\infty\right\} \setminus \tilde{A}_I\right) > \frac{1}{72} \mu(I). \quad (46)$$

Для $n \in G_1^I$ обозначим

$$g_n(t) = a_n f_n(t) \chi_{E_{n,r} \setminus \tilde{E}_n^I}(t), \quad \tilde{g}_n(t) = |a_n| \tilde{f}_n(t) \chi_{E_{n,r} \setminus \tilde{E}_n^I}(t).$$

Убедимся, что существуют точки $\zeta_{n,0}$ и $\zeta_{n,1}$ и постоянная $c > 0$ такие, что

$$\int_{\zeta_{n,0}}^{t_{N,i}} g_n(t) dt \geq c \int_{t_{N,i-1}}^{t_{N,i}} |g_n(t)| dt, \quad (47)$$

$$\int_{\zeta_{n,1}}^{t_{N,i}} g_n(t) dt \leq -c \int_{t_{N,i-1}}^{t_{N,i}} |g_n(t)| dt. \quad (48)$$

Заметим, что из определения $\tilde{E}_n^I$ вытекает, что $\text{supp } g_n = [\alpha_n^I, 1]$, где $\alpha_n^I \in \pi_n$ и $\alpha_n^I \geq t_n$.

Если $\alpha_n \geq t_n^+$, то из неравенств (12), (13) и определения функции $g_n(t)$ вытекает существование таких точек $\zeta_{n,0}$ и $\zeta_{n,1}$.

Если $\alpha_n^I = t_n$, то из определений функции $g_n(t)$ и множества $\tilde{E}_n^I$ следует, что или $|f_n(t_n)| = \max(|f_n(t_n^-)|, |f_n(t_n)|, |f_n(t_n^+)|)$ и выполняется (43), или $|f_n(t_n^-)| = \max(|f_n(t_n^-)|, |f_n(t_n)|, |f_n(t_n^+)|)$ и выполняется (43). Из доказательства леммы 1 следует, что в обоих случаях существуют точки $\zeta_{n,0}$ и $\zeta_{n,1}$, удовлетворяющие условиям (47) и (48).

Из определения функций $\tilde{g}_n(t)$ и неравенства (46) следует, что

$$\mu\left\{t \in I: \sum_{n \in G_1^I} \tilde{g}_n(t) = +\infty\right\} > \frac{1}{72} \mu(I).$$

Следовательно, существует N_3 такое, что

$$\mu\left\{t \in I: \sum_{n \in G_1^I, n \leq N_3} \tilde{g}_n(t) \geq 1\right\} > \frac{1}{100} \mu(I). \quad (49)$$

Положим $J_n^I = \bigcap_{t \in \pi_n, t > \alpha_n^I} [\alpha_n^I, t]$.

Пусть $\{n_k\}_{k=0}^l$ – возрастающая последовательность такая, что $\{n_k\}_{k=0}^l = \{n \in G_1^I : n \leq N_3\}$. Через l_1 обозначим минимальный индекс, для которого $\{t \in I : \sum_{k=0}^{l_1} \tilde{g}_{n_k}(t) \geq 1\} \neq \emptyset$, и положим $\Delta_1 = \{t \in I : \sum_{k=0}^{l_1} \tilde{g}_{n_k}(t) \geq 1\}$. По индукции определим числа l_i и множества Δ_i : l_i – минимальный индекс, для которого $\{t \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j : \sum_{k=0}^{l_i} \tilde{g}_{n_k}(t) \geq 1\} \neq \emptyset$, и $\Delta_i = \{t \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j : \sum_{k=0}^{l_i} \tilde{g}_{n_k}(t) \geq 1\}$.

Через s обозначим максимальный номер, для которого выполняется неравенство $l_s \leq l$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^s \Delta_i = \left\{ t \in I : \sum_{k=0}^l \tilde{g}_{n_k}(t) \geq 1 \right\}. \quad (50)$$

Для $l_{i-1} < k \leq l_i$, где $i \leq s$, определим функции $h_{n_k}(t)$ и $\tilde{h}_{n_k}(t)$ следующим образом:

$$h_{n_k}(t) = g_{n_k}(t), \quad \tilde{h}_{n_k}(t) = \tilde{g}_{n_k}(t),$$

если $J_{n_k}^I \not\subset \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j$, и

$$h_{n_k}(t) = g_{n_k}(t) \chi_{[0,1] \setminus \tilde{\Delta}_j}(t), \quad \tilde{h}_{n_k}(t) = \tilde{g}_{n_k}(t) \chi_{[0,1] \setminus \tilde{\Delta}_j}(t),$$

если $J_{n_k}^I \subset \tilde{\Delta}_j$, для некоторого $j \leq i-1$, где $\tilde{\Delta}_j$ – максимальный из интервалов Δ , удовлетворяющих условиям $J_{n_k}^I \subset \Delta \subset \bigcup_{k=1}^j \Delta_k$. Из определения функций h_{n_k} , g_{n_k} и неравенств (47), (48) нетрудно убедиться в том, что существует точка ζ_{n_k} такая, что

$$\int_{\zeta_{n_k}}^{t_{N,i}} h_{n_k}(t) dt \geq c \int_{t_{N,i-1}}^{t_{N,i}} |h_{n_k}(t)| dt, \quad (51)$$

где c – абсолютная постоянная.

Из (50) также следует равенство

$$\left\{ t \in I : \sum_{k=0}^l \tilde{h}_{n_k}(t) \geq 1 \right\} = \bigcup_{i=1}^s \Delta_i. \quad (52)$$

Пусть σ – такая перестановка натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^l$, что последовательность $\{\zeta_{\sigma(n_k)}\}_{k=0}^l$ является возрастающей. Тогда очевидно, что

$$\delta(P^\sigma(t)) \geq \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} a_{n_k} f_{n_k}(t). \quad (53)$$

Применяя неравенства (49)–(52), получим

$$\begin{aligned} \int_I \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} a_{n_k} f_{n_k}(t) dt &= \sum_{k=0}^l \int_{\zeta_{n_k}}^{t_{N,i}} a_{n_k} f_{n_k}(t) dt = \sum_{k=0}^l \int_{\zeta_{n_k}}^{t_{N,i}} h_{n_k}(t) dt \\ &\geq c \sum_{k=0}^l \int_I |h_{n_k}(t)| dt = c \sum_{k=0}^l \int_I \tilde{h}_{n_k}(t) dt \geq c \mu(I). \end{aligned} \quad (54)$$

Докажем, что

$$\sum_{k: \zeta_{n_k} < t} |a_{n_k} f_{n_k}(t)| \leq C, \quad t \in I. \quad (55)$$

Поскольку $\sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} |a_{n_k} f_{n_k}(t)| \leq 3 \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} |a_{n_k} \tilde{f}_{n_k}(t)| \leq 3 \sum_{k=0}^l \tilde{h}_{n_k}(t)$, достаточно доказать, что

$$\sum_{k=0}^l \tilde{h}_{n_k}(t) \leq C, \quad t \in I. \quad (56)$$

Из (52) следует, что достаточно доказать (56) для $t \in \bigcup_{i=1}^s \Delta_i$. Допустим, что $\bar{\Delta}_j = \bigcup_m I_{j,m} = \bigcup_m [\alpha_{j,m}, \beta_{j,m}]$ для $1 \leq j \leq s$. Фиксируем некое I_{j_0, m_0} . Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{l_{j_0}} \tilde{h}_{n_k}(t) \leq 2, \quad t \in I_{j_0, m_0}. \quad (57)$$

Тогда возьмем максимальную последовательность $\{(j_k, m_k)\}_{k=0}^p$ такую, что $\alpha_{j_k, m_k} = \beta_{j_{k+1}, m_{k+1}}$ для $0 \leq k \leq p-1$. Если $\beta_{j, m} \neq \alpha_{j_0, m_0}$ для каждого m и $1 \leq j \leq s$, то $p = 0$. Из последовательности $\{j_k\}_{k=0}^p$ выделим подпоследовательность $\{j_{k_s}\}_{s=0}^q$ такую, что:

- 1) $j_{k_0} = j_0$;
- 2) $j_{k_s} < j_{k_{s+1}}$ для $0 \leq s \leq q-1$;
- 3) $j_k < j_{k_s}$ для $k_s < k < k_{s+1}$ и $0 \leq s \leq q$.

Из этого следует, что если $\text{supp } \tilde{h}_{n_k} \cap \Delta_{j_0} \neq \emptyset$ и $k_s < k \leq k_{s+1}$, то $J_{n_k}^I \not\subset \bigcup_{k=0}^{k_s} \Delta_{j_k}$. Следовательно, $\text{supp } \tilde{h}_{n_k} \supset \bigcup_{k=0}^{k_s} I_{j_k, m_k}$. Отсюда, используя определение функций $\tilde{h}_{n_k}$ и $\tilde{f}_n$, получим

$$\max_{t \in I_{j_0, m_0}} \sum_{k=l_{j_{k_s}}+1}^{l_{j_{k_{s+1}}}} \tilde{h}_{n_k}(t) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k_s} \max_{t \in I_{j_s, m_s}} \sum_{k=l_{j_{k_s}}+1}^{l_{j_{k_{s+1}}}} \tilde{h}_{n_k}(t) \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k_s}. \quad (58)$$

Суммируя (58) по s и прибавляя результат к (57), получим

$$\max_{t \in \Delta_{j_0}} \sum_{k=0}^l \tilde{h}_{n_k}(t) \leq 8.$$

Следовательно, оценка (56) верна с постоянной $C = 8$.

Обозначим $F_I = \{t \in I: \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} a_{n_k} f_{n_k}(t) > \frac{c}{2}\}$, где c – та же постоянная, что и в неравенстве (54). Очевидно, что

$$\int_{F_I} \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} a_{n_k} f_{n_k}(t) dt > \frac{c}{2} \mu(I). \quad (59)$$

С другой стороны, из неравенства (55) имеем

$$\int_{F_I} \sum_{k: \zeta_{n_k} \leq t} a_{n_k} f_{n_k}(t) dt < C \mu(F_I).$$

Отсюда и из определения F_I , применяя (53) и (59), получим, что существуют абсолютные постоянные $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что

$$\mu\{t \in I: \delta(P_I^\sigma(t)) > \alpha_1\} > \alpha_2 \mu(I). \quad (60)$$

Из неравенств (45) и (60) следует, что в рассматриваемом случае (когда выполняется неравенство $\mu(U_I) > \frac{1}{18}\mu(I)$) существуют абсолютные постоянные $\alpha_{1,a}, \alpha_{2,a} > 0$, номер N_a и перестановка полинома $P_I(t) = \sum_{n=N}^{N_a} a_n f_n(t)$ такие, что

$$\mu\{t \in I: \delta(P_I^{\sigma_a}(t)) > \alpha_{1,a}\} > \alpha_{2,a} \mu(I). \quad (61)$$

б) $\mu(U_{I,l}) > \frac{1}{18}\mu(I)$. Существуют номера $N_3, N_4 \geq N$ и отрезок $\tilde{I} \subset I$ с концами из $\mathcal{T}$ такие, что выполняются следующие соотношения:

$$\mu\left\{t \in \tilde{I}: \sum_{n \in G_1^{I,l}, N_3 < n \leq N_4} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\right\} > \frac{1}{20} \mu(I), \quad (62)$$

$$I_n \cap \tilde{I} = \emptyset, \quad E_n \cap \tilde{I} = \emptyset \quad \text{при } N_3 < n \leq N_4, \quad n \in G_1^{I,l}. \quad (63)$$

Следовательно, $|a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1$ для $t \in \tilde{I}$, $n \in G_1^{I,l}$.

Аналогично подслучаю а) введем следующие обозначения. Для удобства будем считать, что $l_0 = N_3$. Через l_1 обозначим минимальный номер, для которого

$$\left\{t \in \tilde{I}: \sum_{n \in G_1^{I,l}, N_3 < n \leq l_1} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\right\} \neq \emptyset,$$

а последнее множество обозначим через Δ_1 .

Определив $l_1, \dots, l_{i-1}$ и $\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}$, положим

$$l_i = \min\left\{j \leq N_4: \left\{t \in \tilde{I} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \Delta_k: \sum_{n \in G_1^{I,l}, N_3 < n \leq j} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\right\} \neq \emptyset\right\},$$

$$\Delta_i = \left\{t \in \tilde{I} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \Delta_k: \sum_{n \in G_1^{I,l}, N_3 < n \leq l_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\right\}.$$

Допустим, что k – первый номер, для которого невозможно определить l_{k+1} . Следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^k \Delta_i = \left\{t \in \tilde{I}: \sum_{n \in G_1^{I,l}, N_3 < n \leq N_4} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1\right\}. \quad (64)$$

Из (63) следует, что для $n \in G_1^{I,l}$ и $N_3 \leq n \leq N_4$ функции $|a_n \tilde{f}_n(t)|$ убывают на $\tilde{I}$. Из этого вытекает, что отрезки Δ_i и Δ_{i+1} имеют общий конец, а отрезки Δ_1 и $\tilde{I}$ имеют общий левый конец. Следовательно, из (64) имеем

$$\bigcup_{i=1}^k \Delta_i = \left\{t \in \tilde{I}: \sum_{i=1}^k \sum_{n \in G_1^{I,l}, l_{i-1} < n \leq l_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| \chi_{\tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j}(t) \geq 1\right\}. \quad (65)$$

Из (12), (13) и (63) следует, что для $n \in G_1^{I,l}$, $l_{i-1} < n \leq l_i$, существуют точка $\zeta_n \in \tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j$ и абсолютная постоянная $c > 0$ такие, что

$$\int_{\zeta_n}^{\tilde{\beta}} a_n f_n(t) dt \geq c \int_{\tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j} |a_n f_n(t)| dt, \quad (66)$$

где $\tilde{\beta}$ – правый конец интервала $\tilde{I}$.

Пусть σ_b – такая перестановка чисел $n \in G_1^{I,l}$, $l_0 < n \leq l_k$, что числа $\zeta_{\sigma_b(n)}$ возрастают. Тогда для переставленного полинома

$$P_I^{\sigma_b}(t) = \sum_{l_0 < n \leq l_k} a_{\sigma_b(n)} f_{\sigma_b(n)}(t)$$

имеет место

$$\delta(P_I^{\sigma_b}(t)) \geq F(t), \quad \text{где } F(t) = \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l}, \zeta_n \leq t \\ l_0 < n \leq l_k}} a_n f_n(t). \quad (67)$$

Заметим, что из (66) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{I}} F(t) dt &= \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_0 < n \leq l_k}} \int_{\zeta_n}^{\tilde{\beta}} a_n f_n(t) dt \geq c \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_{i-1} < n \leq l_i}} \int_{\tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j} |a_n f_n(t)| dt \\ &= c \int_{\tilde{I}} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_{i-1} < n \leq l_i}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \chi_{\tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j}(t) dt. \end{aligned}$$

Из последнего, применяя соотношения (62), (64), (65), получим

$$\int_{\tilde{I}} F(t) dt \geq c \mu \left(\bigcup_{i=1}^k \Delta_i \right) \geq \frac{c}{20} \mu(I). \quad (68)$$

Докажем, что

$$F(t) \leq 6 \quad \text{для } t \in \tilde{I}. \quad (69)$$

Поскольку

$$F(t) \leq 3 \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_{i-1} < n \leq l_i}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \chi_{\tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j}(t),$$

из равенства (65) получим

$$F(t) \leq 3 \quad \text{для } t \in \tilde{I} \setminus \bigcup_{j=1}^k \Delta_j.$$

Следовательно, достаточно доказать (69) для $t \in \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$. Учитывая, что $|a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1$ для $t \in \tilde{I}$, $n \in G_1^{I,l}$, из определения l_i для $t \in \Delta_i$ получим

$$F(t) \leq 3 \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_0 < n \leq l_i}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 3 + 3 \sum_{\substack{n \in G_1^{I,l} \\ l_0 < n < l_i}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 6.$$

Обозначим $F_I = \{t \in \tilde{I}: F(t) > \frac{c}{40}\}$, где постоянная c та же, что и в неравенстве (68). Из неравенств (68) и (69) следует, что $\mu(F_I) > \frac{c}{240}\mu(I)$. Отсюда, учитывая (67), получим

$$\mu\left\{t \in I: \delta(P_I^{\sigma_b}(t)) > \frac{c}{40}\right\} > \frac{c}{240}\mu(I). \quad (70)$$

с) $\mu(U_{I,r}) > \frac{1}{18}\mu(I)$. Аналогично подслучаю b) найдем числа $N_5, N_6 > N_4$ и такую перестановку σ_c чисел $N_5, N_5 + 1, \dots, N_6$, что

$$\mu\left\{t \in I: \delta(P_I^{\sigma_c}(t)) > \frac{c}{40}\right\} > \frac{c}{240}\mu(I). \quad (71)$$

Запишем переставленные полиномы $P_I^{\sigma_a}(t)$, $P_I^{\sigma_b}(t)$, $P_I^{\sigma_c}(t)$ один за другим, а затем припишем оставшиеся $a_n f_n(t)$ до $n \leq N_6$. Указанную перестановку обозначим через $P_I^{\sigma_1}(t)$. Ясно, что

$$\delta(P_I^{\sigma_1}(t)) \geq \max(\delta(P_I^{\sigma_a}(t)), \delta(P_I^{\sigma_b}(t)), \delta(P_I^{\sigma_c}(t))).$$

Следовательно, существуют абсолютные постоянные $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что (см. (61), (70), (71) и (41))

$$\mu\{t \in I: \delta(P_I^{\sigma_1}(t)) > \alpha_1\} > \alpha_2\mu(I). \quad (72)$$

Для рассмотрения следующего случая (когда $\mu(V \cap I) > \frac{1}{6}\mu(I)$) нам понадобятся две приведенные ниже леммы. Обозначим $G_2^I = \{n \in G_2: I_n \subset I\}$, где $I = [\alpha, \beta]$ – отрезок с концами из $\mathcal{T}$. При этих обозначениях имеют место следующие леммы.

ЛЕММА 3. На интервале $I^0 = (\alpha, \beta)$ ряд $\sum_{n \in G_2 \setminus G_2^I} |a_n \tilde{f}_n(t)|$ всюду сходится.

ЛЕММА 4. Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\int_{[0,1] \setminus I} \sum_{n \in G_2, J_n \subset I} |a_n \tilde{f}_n(t)| dt \leq C\mu(I). \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Фиксируем некоторое $t \in I^0$. Тогда существуют номер N' и отрезок $I' = [\alpha', \beta'] \subset I$ такие, что $t \in (I')^0$ и $J_n \cap I' = \emptyset$ для любого $n \geq N'$, $n \in G_2 \setminus G_2^I$. Сумму $\sum_{n \in G_2 \setminus G_2^I} |a_n \tilde{f}_n(t)|$ разобьем на две части. В одну сумму войдут слагаемые, для которых J_n находится левее отрезка I' , в другую – слагаемые, для которых J_n находится правее отрезка I' . Мы оценим первую сумму. Вторая оценивается аналогично. Обозначим $L = \{n \in G_2 \setminus G_2^I: n \geq N', J_n \subset [0, \alpha']\}$. Из определения множества G_2 следует, что если $n \in G_2$, то $|a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1$ для любого $t \in [0, 1]$. Поскольку $|f_n(t)| \leq 3\tilde{f}_n(t)$, то $|a_n f_n(t)| \leq 3$. С другой стороны, из (8) вытекает, что $\max_{t \in [0,1]} |f_n(t)| \geq C|J_n|^{-\frac{1}{2}}$, где $C > 0$ – абсолютная постоянная. Следовательно, $|a_n| < \frac{3}{C}|J_n|^{\frac{1}{2}}$. Поэтому достаточно доказать, что $\sum_{n \in L} |J_n|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_n(t) < +\infty$. Из оценки (9) и определения функций $\tilde{f}_n(t)$ вытекает

$$\tilde{f}_n(t) \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(t)} \frac{|J_n|^{\frac{1}{2}}}{|J_n| + \text{dist}(t, J_n)}, \quad (74)$$

где $d_n(t)$ – количество точек из π_n , находящихся между t и J_n , а C – положительная постоянная. Рассмотрим те $n \in L$, для которых $d_n(\alpha') = k$, где k – фиксированное число. Интервалы J_n с индексами $n \in L$, $d_n(\alpha') = k$, сгруппируем в пачки так, чтобы интервалы из одной пачки имели бы общий правый конец, а максимальные интервалы из разных пачек не пересекались. Обозначив через J_n^l левую половину J_n , из свойства 1 получим, что каждое $u \in [0, \alpha']$ не может принадлежать более чем 25 интервалам J_n^l . Учитывая это и неравенство $t - u < |J_n| + \text{dist}(t, J_n)$ для всех $u \in J_n^l$, из (74) получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in L \\ d_n(\alpha')=k}} |J_n|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_n(t) &\leq C \sum_{\substack{n \in L \\ d_n(\alpha')=k}} \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(t)} \frac{|J_n|}{|J_n| + \text{dist}(t, J_n)} \\ &\leq C \sum_{\substack{n \in L \\ d_n(\alpha')=k}} \left(\frac{2}{3}\right)^k \int_{J_n^l} \frac{1}{t-u} du \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^k \int_0^{\alpha'} \frac{1}{t-u} du \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^k \ln \frac{t}{t-\alpha'}. \end{aligned}$$

Суммируя последнее по k , получим

$$\sum_{n \in L} |J_n|^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_n(t) \leq C \ln \frac{t}{t-\alpha'}.$$

Лемма доказана.

Выше мы получили, что при $n \in G_2$ выполняется $|a_n| < C|J_n|^{\frac{1}{2}}$. Применяя это, из свойства 2 получим оценку (73).

Случай 3. Фиксируем один из отрезков $[t_{N,i-1}, t_{N,i}]$, для которого имеет место (35) и выполнено неравенство

$$\mu(V \cap [t_{N,i-1}, t_{N,i}]) > \frac{1}{6} \mu([t_{N,i-1}, t_{N,i}]). \quad (75)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I &= [t_{N,i-1}, t_{N,i}], \quad n_1 = \min \left\{ k : \left\{ t \in I : \sum_{n \in G_2^I, n \leq k} |a_n \tilde{f}_n(t)| > 1 \right\} \neq \emptyset \right\}, \\ \Delta_1 &= \left\{ t \in I : \sum_{n \in G_2^I, n \leq n_1} |a_n \tilde{f}_n(t)| > 1 \right\}, \\ G_{2,1}^I &= \{n \in G_2 : J_n \not\subset \Delta_1 \text{ при } n > n_1\}. \end{aligned}$$

Далее по индукции определим

$$\begin{aligned} n_i &= \min \left\{ k : \left\{ t \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j : \sum_{n \in G_{2,i-1}^I, n \leq k} |a_n \tilde{f}_n(t)| > 1 \right\} \neq \emptyset \right\}, \\ \Delta_i &= \left\{ t \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j : \sum_{n \in G_{2,i-1}^I, n \leq n_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| > 1 \right\}, \\ G_{2,i}^I &= \{n \in G_{2,i-1}^I : J_n \not\subset \Delta_i \text{ при } n > n_i\}. \end{aligned}$$

Отметим, что, возможно, при некотором i выполнено $\sum_{n \in G_{2,i-1}^I} |a_n f_n(t)| \leq 1$ для всех $t \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \Delta_j$. Обозначим $G'_2 = \bigcap_i G_{2,i}^I$. Убедимся в том, что тогда

$$\sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1 \quad \text{п. в. на } I \cap V. \quad (76)$$

Заметим, что

$$\left\{ t \in I : \sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| > 1 \right\} = \bigcup_i \Delta_i. \quad (77)$$

Поскольку для всех $n \in G'_2$ выполняется $J_n \subset \bigcup_i \Delta_i$ или $n \in G'_2$, то имеет место неравенство

$$\sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq \sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| + \sum_i \sum_{n, J_n \subset \Delta_i} |a_n \tilde{f}_n(t)|. \quad (78)$$

Применяя лемму 4, получим

$$\begin{aligned} \int_{I \setminus \bigcup_i \Delta_i} \sum_i \sum_{n, J_n \subset \Delta_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| dt &\leq \sum_i \int_{[0,1] \setminus \Delta_i} \sum_{n, J_n \subset \Delta_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| dt \\ &\leq C \sum_i \mu(\Delta_i) \leq C \mu(I). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_i \sum_{n, J_n \subset \Delta_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| < +\infty \quad \text{п. в. на } I \setminus \bigcup_i \Delta_i. \quad (79)$$

Из леммы 3 вытекает, что $\sum_{n \in G_2 \setminus G_2^I} |a_n \tilde{f}_n(t)| < +\infty$, когда $t \in I$. Таким образом,

$$\sum_{n \in G_2^I} |a_n \tilde{f}_n(t)| = +\infty, \quad \text{когда } t \in I \cap V. \quad (80)$$

Из соотношений (79) и (77) вытекает, что

$$\sum_i \sum_{n, J_n \subset \Delta_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| < +\infty \quad \text{п. в. на } \left\{ t \in I : \sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1 \right\}. \quad (81)$$

Из (81) и (78) получаем

$$\sum_{n \in G_2^I} |a_n \tilde{f}_n(t)| < +\infty \quad \text{п. в. на } \left\{ t \in I : \sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1 \right\}. \quad (82)$$

Из (82) и (80) следует (76).

Теперь убедимся в том, что существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C \quad \text{всюду на } I. \quad (83)$$

Неравенство (83) достаточно доказать на отрезках Δ_i , так как

$$\sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1 \quad \text{всюду на } I \setminus \bigcup_i \Delta_i.$$

Фиксируем некоторое Δ_i . Тогда из определений G'_2 , n_i и того факта, что $|a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 1$ при $n \in G'_2$, получим

$$\sum_{n \in G'_2, n \leq n_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq 2 \quad \text{на } \Delta_i. \quad (84)$$

Пусть $R_i = \{n \in G'_2 : n > n_i \text{ и } J_n \text{ находится правее } \Delta_i\}$, $L_i = \{n \in G'_2 : n > n_i \text{ и } J_n \text{ находится левее } \Delta_i\}$. Докажем, что

$$\sum_{n \in R_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C \quad \text{на } \Delta_i. \quad (85)$$

Пусть $\Delta_i = [\alpha_i, \beta_i]$. Тогда существуют подпоследовательности n'_k , i_k , $0 \leq i_k \leq n'_k$ (возможно, конечные), такие, что $[\beta_i, t_{n'_1, i_1}] = \Delta_{k_1}$ и $[t_{n'_{j-1}, i_{j-1}}, t_{n'_j, i_j}] = \Delta_{k_j}$ при $j \geq 2$. Будем считать, что $k_0 = i$. Из последовательности $\{k_i\}$ выберем подпоследовательность k_{m_j} так, чтобы:

- 1) $m_0 = 0$;
- 2) $k_{m_{j+1}} > k_{m_j}$ для $j \geq 0$;
- 3) $k_i < k_{m_j}$ при $m_j < i < m_{j+1}$.

Заметим, что из условия 3) при $j = 0$ можно получить, что если $n \in R_i$ и $n > n_i$, то $J_n \subset [t_{n'_{m_1-1}, i_{m_1-1}}, 1]$. Следовательно,

$$\max_{t \in \Delta_i} \sum_{\substack{n \in R_i \\ n_{k_0} < n \leq n_{k_{m_1}}}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{m_1} \max_{t \in \Delta_{k_{m_1}}} \sum_{\substack{n \in G'_2 \\ n \leq n_{k_{m_1}}}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{m_1}. \quad (86)$$

Из определения чисел k_{m_j} следует, что при $n \in R_i$ и $n > n_{k_{m_j}}$ выполняется также неравенство $n > n_{k_i}$ для всех $i < m_{j+1}$, которое означает, что $J_n \cap \Delta_{k_i} = \emptyset$ при $i < m_{j+1}$. Поскольку $n \in R_i$, то $J_n \subset [t_{n'_{m_{j+1}-1}, i_{m_{j+1}-1}}, 1]$ и $\#\{\pi_n \cap [\beta_i, t_{n'_{m_{j+1}-1}, i_{m_{j+1}-1}}]\} \geq m_{j+1}$. Следовательно, для $j \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \max_{t \in \Delta_i} \sum_{\substack{n \in R_i \\ n_{k_{m_j}} < n \leq n_{k_{m_{j+1}}}}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \\ & \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{m_{j+1}} \max_{t \in \Delta_{k_{m_{j+1}}}} \sum_{\substack{n \in G'_2 \\ n \leq n_{k_{m_{j+1}}}}} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{m_{j+1}}. \end{aligned}$$

Суммируя последнее по j , вместе с (86) получим (85).

Аналогично доказывается, что $\sum_{n \in L_i} |a_n \tilde{f}_n(t)| \leq C$, $t \in \Delta_i$. Используя это неравенство вместе с (84) и (85), получаем

$$\sum_{n \in G'_2} |a_n \tilde{f}_n(t)| < C, \quad t \in \Delta_i.$$

Отсюда вытекает (83).

Выберем N_7 настолько большим, чтобы выполнялось (см. (76))

$$\mu \left\{ t \in I \cap V : \sum_{n \in G'_2, n \leq N_7} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1 \right\} > \frac{1}{2} \mu(I \cap V). \quad (87)$$

Из леммы 1 следует, что можно выбрать точку $\zeta_n \in I_n$ такую, что

$$\int_{\zeta_n}^{\beta} a_n f_n(t) dt \geq C \int_{\alpha}^{\beta} |a_n f_n(t)| dt,$$

где $[\alpha, \beta] \supset I_n$ и $\alpha, \beta \in T$.

Переставим полином $P_I(t) = \sum_{n \in G'_2, N \leq n \leq N_7} a_n f_n(t)$ так, чтобы числа ζ_n следовали по возрастанию, и обозначим переставленный полином через $P_I^{\sigma_2}(t)$. Очевидно, что

$$\delta(P_I^{\sigma_2}(t)) \geq \sum_{\substack{n \in G'_2, n \leq N_7 \\ \zeta_n < t}} a_n f_n(t).$$

Применяя лемму 1, получим (напомним, что $I = [t_{N,i-1}, t_{N,i}]$) следующее:

$$\begin{aligned} \int_I \delta(P_I^{\sigma_2}(t)) dt &\geq \int_I \sum_{\substack{n \in G'_2, n \leq N_7 \\ \zeta_n < t}} a_n f_n(t) dt = \sum_{\substack{n \in G'_2 \\ n \leq N_7}} \int_{\zeta_n}^{t_{N,i}} a_n f_n(t) dt \\ &\geq c \sum_{\substack{n \in G'_2 \\ n \leq N_7}} \int_I |a_n f_n(t)| dt. \end{aligned} \quad (88)$$

Из соотношений (75) и (87) следует, что

$$\mu \left\{ t \in I : \sum_{n \in G'_2, n \leq N_7} |a_n \tilde{f}_n(t)| \geq 1 \right\} > \frac{1}{12} \mu(I). \quad (89)$$

Используя определение функций $\tilde{f}_n(t)$, а также (88), (89), получим

$$\int_I \delta(P_I^{\sigma_2}(t)) dt \geq c \sum_{n \in G'_2, n \leq N_7} \int_I |a_n \tilde{f}_n(t)| dt > c' \mu(I). \quad (90)$$

С учетом $|f_n(t)| \leq 3\tilde{f}_n(t)$ из (83) получим $\sum_{n \in G'_2, n \leq N_7} |a_n f_n(t)| \leq C'$. Отсюда в силу (90) нетрудно видеть, что

$$\mu \left\{ t \in I : \delta(P_I^{\sigma_2}(t)) > \frac{c'}{2} \right\} > \frac{c'}{2C'} \mu(I). \quad (91)$$

Перестановка σ_2 определена на некотором подмножестве множества $\{n : N \leq n \leq N_7\}$, но нетрудно заметить, что для любого номера M можно тем же способом получить перестановку, определенную на конечном подмножестве натуральных чисел больше M , для которого также из (75) вытекает условие, аналогичное (91). Итак, мы будем считать, что перестановка σ_2 именно такая при $M = N_6$. Следовательно, полиномы $P_I^{\sigma_1}, P_I^{\sigma_2}$ не будут иметь общих членов, и мы запишем их друг за другом, а затем припишем оставшиеся $a_n f_n(t)$

до $n \leq \max(N_1, N_7)$. Тогда из (40), (72) и (91) получим, что указанная перестановка является требуемой (так как из (35) вытекает выполнение хотя бы одного из условий (38), (41) или (75), что и влечет за собой выполнение одного из условий (40), (72) или (91)). Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$ п. в. на E абсолютно расходится. Применяя лемму 2, можно найти N_k такие, что полиномы

$$P_k(t) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n f_n(t)$$

можно переставить и получить полиномы $P_k^{\sigma_k}(t)$, для которых, как только выполняется неравенство

$$\mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}] \cap E) > \frac{1}{2} \mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]), \quad (92)$$

имеет место

$$\mu\{t \in [t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]: \delta(P_k^{\sigma_k}(t)) > \alpha_0\} > \alpha_0 \mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]). \quad (93)$$

Поочередно суммируя полиномы $P_k^{\sigma_k}(t)$, получим переставленный ряд

$$(\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\sigma_k}(t). \quad (94)$$

Докажем, что ряд (94) п. в. на E расходится. Допустим противное. Тогда существует множество $F \subset E$, $\mu(F) > 0$, на котором ряд (94) равномерно сходится. Тем самым, найдется M такое, что для всех $k > M$ имеет место

$$\delta(P_k^{\sigma_k}(t)) < \alpha_0, \quad t \in F. \quad (95)$$

Найдется отрезок вида $[t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]$, $k > M$, для которого

$$\mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}] \cap F) > \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]). \quad (96)$$

Тогда для $[t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]$ выполняется (92), и поэтому выполняется (93). Из соотношений (93) и (96) следует неравенство

$$\mu\{t \in F: \delta(P_k^{\sigma_k}(t)) > \alpha_0\} > \frac{\alpha_0}{2} \mu([t_{N_k, i-1}, t_{N_k, i}]),$$

которое противоречит (95), что доказывает теорему.

Список литературы

1. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
2. Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, "Об абсолютной и безусловной сходимости", *УМН*, **22:3** (1967), 240–242.

3. Г. Г. Геворкян, “Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина”, *Матем. заметки*, **45**:3 (1989), 30–42; англ. пер.: G. G. Gevorkyan, “Absolute and unconditional convergence of series in Franklin systems”, *Math. Notes*, **45**:3 (1989), 200–210.
4. Г. Г. Геворкян, Г. Л. Микаелян, “Об абсолютной и безусловной сходимости почти всюду рядов по общей системе Франклина”, *Изв. НАН Армении. Сер. матем.*, **34**:3 (1999), 14–28; англ. пер.: G. G. Gevorkyan, H. L. Mikayelyan, “Unconditional and absolute almost everywhere convergence of series by the general Franklin system”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **34**:3 (1999), 10–25.
5. G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “Unconditionality of general Franklin systems in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ”, *Studia Math.*, **164**:2 (2004), 161–204.

Г. Г. ГЕВОРКЯН (G. G. GEVORKYAN)
Ереванский государственный университет
E-mail: ggg@ysu.am

Поступило в редакцию
15.02.2007

К. А. КЕРЯН (K. A. KERIAN)
Ереванский государственный университет
E-mail: karenkeryan@yahoo.com