Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Почти представления и асимптотические представления дискретных групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 5, 159–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:51:10

УДК 517.98

В. М. Мануйлов

Почти представления и асимптотические представления дискретных групп

Для конечно представленных групп определяется новое свойство, связанное с их асимптотическими представлениями. Именно, говорим, что группа обладает свойством ППА, если каждое почти представление порождает асимптотическое представление. Приводятся примеры групп, обладающих и не обладающих этим свойством. В частности, свойством ППА обладают свободные, конечные и свободные абелевы группы. Для нашего примера группы Γ без свойства ППА группа $K^0(B\Gamma)$ содержит элементы, которые не покрываются асимптотическими представлениями Γ .

Библиография: 18 наименований.

Введение

Задача изучения так называемых почти представлений дискретных групп восходит к работам Халмоша [10] и Войкулеску [17], [18]. В работе Халмоша была поставлена естественная задача о паре почти коммутирующих унитарных матриц: можно ли утверждать, что для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если две унитарные матрицы U и V почти коммутируют, т.е. $\|UV - VU\| < \delta$, то эти матрицы близки к паре коммутирующих матриц (U', V') , т.е. $\|U - U'\| < \varepsilon$, $\|V - V'\| < \varepsilon$ и $U'V' = V'U'$. Если предполагать, что класс рассматриваемых матриц имеет ограниченную размерность, то такой вопрос решается положительно. Однако если искать $\delta = \delta(\varepsilon)$, не зависящее от размерности матриц, то задача Халмоша имеет отрицательный ответ. Именно, Войкулеску построил пример последовательности (U_n, V_n) двух унитарных операторов (так называемой *пары Войкулеску*), для которой норма коммутатора $\|U_n V_n - V_n U_n\|$ стремится к нулю, но матрицы (U_n, V_n) нельзя аппроксимировать сколь угодно близко парой коммутирующих матриц. Разумеется, размерности матриц (U_n, V_n) стремятся к бесконечности.

С точки зрения теории представлений групп пару коммутирующих матриц можно понимать как представление свободной абелевой группы с двумя образующими. Поэтому в теории представлений дискретных групп естественным образом возникает обобщенное понятие почти представления дискретной группы. По-видимому, наиболее эффектное приложение этого понятия впервые было рассмотрено в работе [4], где авторы рассмотрели класс почти плоских расслоений на многообразии M , точнее, класс таких элементов $\alpha \in K(M)$, которые для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ представимы в виде разности двух расслоений $\alpha = \xi - \eta$, которые допускают связности, тензор кривизны которых равномерно оценивается

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 99-01-01201) и ИНТАС (грант № 96-1099).

числом $\varepsilon > 0$ (так называемые *почти плоские связности*). В этом случае операция параллельного перенесения слоя порождает почти представление фундаментальной группы для каждого $\varepsilon > 0$.

Верно и обратное: почти представление фундаментальной группы многообразия M при достаточно малом значении числа $\varepsilon > 0$ естественным образом порождает векторное расслоение на многообразии M с почти плоской связностью [16].

Такой подход позволяет вычислять высшие сигнатуры неодносвязного многообразия, используя обобщенную формулу Хирцебруха. Однако в этом подходе возникает естественная трудность. Для вычисления высшей сигнатуры достаточно построить индивидуальное почти представление фундаментальной группы многообразия M для некоторого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$. Однако чтобы вычислить образ симметрической сигнатуры многообразия M и сравнить его с высшей сигнатурой, необходимо строить бесконечную последовательность почти представлений с условием $\varepsilon \rightarrow 0$ так, чтобы последовательные почти представления тоже мало отличались друг от друга. Другими словами, для корректного построения гомоморфизма из K -теории групповой алгебры фундаментальной группы в группу целых чисел необходимо рассматривать так называемые асимптотические представления в смысле Конна фундаментальной группы (см. [9], [11], [5], [4]). В случае асимптотических представлений получается связь уже с K -теорией классифицирующих пространств [5], [16]. Эта связь проявляется в том, что так же, как и в случае классических представлений [1], каждое асимптотическое представление дискретной группы порождает векторное расслоение, а точнее, элемент K -группы классифицирующего пространства ВГ, которое задается естественными функциями склейки.

Построенная в работе [4] последовательность почти представлений, вообще говоря, не является асимптотическим представлением в смысле Конна. Поэтому возникает естественный вопрос: когда почти представление с достаточно малым $\varepsilon > 0$ может быть дополнено до асимптотического представления?

В работе [16] было показано, что в случае, когда классифицирующее пространство ВГ группы Γ конечномерно, для построения расслоений над ним необязательно иметь асимптотическое представление группы, а достаточно лишь ε -почти представления Γ с достаточно малым ε . Конечно, ε -почти представления содержат меньше информации, чем асимптотические представления, однако часто информация, содержащаяся в ε -почти представлении, позволяет строить соответствующее асимптотическое представление. Если группа такова, что любое ее ε -почти представление при достаточно малых ε порождает асимптотическое представление, будем говорить, что *эта группа обладает свойством ППА*. Основной результат статьи – теорема 1.8, которая описывает некоторые классы групп со свойством ППА, и доказательству которой посвящены § 2 и § 3. По очевидным причинам свойством ППА обладают свободные группы, а из результатов [9] следует свойство ППА для конечных групп. Более сложным оказывается доказательство свойства ППА для абелевых групп и фундаментальных групп ориентированных поверхностей. Оба эти случая следуют из наличия свойства ППА у группы $\mathbb{Z}^2$. По существу задача сводится к изучению свойств группы унитарных матриц. Для тех классов групп, которые рассматриваются в настоящей работе, решающим соображением служит теорема 2.1 о свойствах почти коммутирующих пар унитарных матриц.

Наличие свойства ППА позволяет работать с почти представлениями группы вместо асимптотических представлений, что часто удобнее. В этом случае почти

представления порождают также точные представления группы в алгебру Калкина [15]. Кроме этого свойство ППА, по-видимому, позволяет строить семейства векторных расслоений над классифицирующим пространством группы, задающих один и тот же класс в K -теории, со стремящейся к нулю кривизной.

Не всякая группа обладает свойством ППА. В § 4 мы приводим пример группы Γ , не обладающей свойством ППА. Более того, этот пример интересен также тем, что является примером группы, не обладающей достаточным запасом асимптотических представлений в том смысле, что не все элементы группы $K^0(B\Gamma)$ могут быть получены с помощью асимптотических представлений.

§ 1. Основные определения

Пусть Γ – конечно представленная дискретная группа, $\Gamma = \langle F | R \rangle = \langle g_1, \dots, g_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ – ее копредставление, где g_i – образующие, а $r_j = r_j(g_1, \dots, g_n)$ – соотношения. Мы предполагаем, что множество образующих $F = \{g_1, \dots, g_n\}$ симметрично, т.е. наряду с каждым элементом g_i оно содержит также g_i^{-1} , а множество соотношений R содержит соотношения вида $g_i g_i^{-1}$, хотя в обозначениях обычно мы будем опускать эти дополнительные образующие и соотношения.

Через U_∞ мы обозначаем прямой предел унитарных групп U_n по отношению к естественному включению $U_n \longrightarrow U_{n+1}$, снабженный стандартной операторной нормой. Единичную матрицу мы обозначаем $I \in U_\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество унитарных матриц $\sigma = \{u_1, \dots, u_n\} \subset U_\infty$ называется ε -почти представлением группы Γ , если при подстановке u_i вместо g_i , $i = 1, \dots, n$, в соотношения r_j имеют место неравенства

$$\|r_j(u_1, \dots, u_n) - I\| \leq \varepsilon$$

для всех $j = 1, \dots, k$.

В этом случае мы будем писать $\sigma(g_i) = u_i$. Заметим, что это определение зависит от выбора копредставления группы Γ , но вскоре мы увидим, что эта зависимость несущественна. Пусть $\langle h_1, \dots, h_m | s_1, \dots, s_l \rangle$ – другое копредставление группы Γ . Для ε -почти представления σ по отношению к первому копредставлению мы можем определить множество унитарных матриц $v_1, \dots, v_m \in U_\infty$, $v_i = \bar{\sigma}(h_i)$, равенствами $\bar{\sigma}(h_i) = \sigma(g_{j_1}) \dots \sigma(g_{j_{n_i}})$, где $h_i = g_{j_1} \dots g_{j_{n_i}}$. Таким же образом по множеству $\{\bar{\sigma}(h_i)\}$ можно построить множество $\{\bar{\sigma}(g_i)\} \subset U_\infty$.

ЛЕММА 1.2. *Существуют константы C и D (зависящие только от двух копредставлений) такие, что $\bar{\sigma}$ является $C\varepsilon$ -почти представлением по отношению ко второму копредставлению группы Γ и для всех g_i , $i = 1, \dots, n$, имеет место оценка*

$$\|\bar{\sigma}(g_i) - \sigma(g_i)\| \leq D\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно оценить нормы $\|s_q(v_1, \dots, v_m) - I\|$, $q = 1, \dots, l$. Для этого заметим, что каждое соотношение s_q может быть записано в виде

$$s_q = a_1^{-1} r_{j_1}^{\epsilon_1} a_1 \dots a_{m_q}^{-1} r_{j_{m_q}}^{\epsilon_{m_q}} a_{m_q} \quad (1.1)$$

при некоторых $a_i \in \Gamma$ (здесь $\epsilon_i = \pm 1$). Пусть M – максимальная длина слов $a_i = a_i(g_1, \dots, g_n)$, $a_i^{-1} = a_i^{-1}(g_1, \dots, g_n)$. Подставим в эти слова унитарные элементы $u_1, \dots, u_n$ и положим $b'_i = a_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) \in U_\infty$, $b_i = a_i(u_1, \dots, u_n) \in U_\infty$. Тогда

$$\|b'_i b_i - I\| \leq M\epsilon.$$

Из равенства (1.1) следует, что

$$s_q(v_1, \dots, v_m) = b'_1 r_{j_1}(u_1, \dots, u_n) b_1 \dots b'_{m_q} r_{j_{m_q}}(u_1, \dots, u_n) b_{m_q},$$

но так как для каждого i имеет место оценка

$$\|b'_i r_{j_i}^{\epsilon_i}(u_1, \dots, u_n) b_i - I\| \leq \|b'_i b_i - I\| + \|r_{j_i}^{\epsilon_i}(u_1, \dots, u_n) - I\| \leq (M + 1)\epsilon,$$

то

$$\|s_q(v_1, \dots, v_m) - I\| \leq m_q(M + 1)\epsilon,$$

что доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение доказывается аналогично.

Поскольку число образующих конечно, образ каждого почти представления лежит в множестве конечномерных матриц, т.е. $\sigma \in U_n \subset U_\infty$ для некоторого n . Наименьшее такое n назовем *размерностью* σ . Мы не будем обращать внимание на остающийся бесконечный хвост матриц $\sigma(g_i)$, состоящий из единиц, и будем писать $\sigma(g_i) \in U_n$ вместо U_∞ .

Поскольку прямая сумма двух ϵ -почти представлений группы Γ также является ϵ -почти представлением, можно определить группу Гротендика ϵ -почти представлений, которую мы обозначим $R_\epsilon(\Gamma)$. Отклонение почти представления от свойства “быть представлением” может быть измерено величиной

$$\|\sigma\| = \max_j \|r_j(u_1, \dots, u_n) - I\|.$$

Отметим, что эти понятия также зависят от выбора копредставления группы Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (ср. [5]). Множество непрерывных по норме унитарных путей $\sigma_t = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\} \subset U_\infty$, $t \in [0, \infty)$, называется *асимптотическим представлением* группы Γ , если $\|\sigma_t\|$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Из леммы 1.2 следует, что это определение не зависит от выбора копредставления группы Γ . Группу Гротендика всех асимптотических представлений группы Γ мы обозначаем $R_{\text{asym}}(\Gamma)$.

Напомним, что в работе [16] было построено отображение

$$R_{\text{asym}}(\Gamma) \longrightarrow \tilde{K}^0(\text{ВГ}) \quad (1.2)$$

в приведенную K -группу классифицирующего пространства ВГ группы Γ . В случае, когда ВГ конечномерно, для построения векторных расслоений над ВГ достаточно иметь ϵ -почти представление с достаточно малым ϵ [16], т.е. имеется отображение

$$R_\epsilon(\Gamma) \longrightarrow \tilde{K}^0(\text{ВГ}).$$

Эпиморфность отображения (1.2) влечет сильную гипотезу Новикова для группы Γ .

ПРИМЕР 1.4. Матрицы Войкулеску [18]

$$U = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega^2 & & \\ & & \omega^3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega^n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega = e^{2\pi i/n}$, задают ε -почти представление σ группы $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$, где $U = \sigma(a)$, $V = \sigma(b)$, $\varepsilon = |\omega - 1|$. Расслоение, построенное по почти представлению σ , задает образующую группы $\tilde{K}^0(\mathbb{T}^2)$ (см. [7], [16]).

ПРИМЕР 1.5. Пусть $H_3 = \langle a, b | aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1} \rangle$, где $c = aba^{-1}b^{-1}$, – дискретная группа Гейзенберга. Здесь $(n^2 \times n^2)$ -матрицы

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} 0 & & & & V^n \\ V & 0 & & & \\ & V^2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & V^{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(b) = \begin{pmatrix} U & & & \\ & U & & \\ & & \ddots & \\ & & & U \end{pmatrix}$$

определяют $|\omega - 1|$ -почти представление группы H_3 , задающее одну из образующих группы $\tilde{K}^0(\text{BH}_3) = \mathbb{Z}^2$. Легко проверяется, что $w(\sigma(a), \sigma(c)) = 1$, $w(\sigma(b), \sigma(c)) = 0$, где $w(u, v)$ – число вращения пары унитарных операторов u и v , определенное в [18], [7]. Меняя местами a и b , можно получить и вторую образующую.

Сформулируем теперь новое свойство конечно представленных групп, которое мы называем ППА (почти представления порождают асимптотические представления).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Будем говорить, что группа Γ обладает свойством ППА, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что:

- i) $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- ii) для каждого почти представления $\sigma \in R_\varepsilon(\Gamma)$ существует асимптотическое представление $\sigma_t \in R_{\text{asym}}(\Gamma)$ такое, что $\sigma_0 = \sigma$ и $\|\sigma_t\| \leq \delta(\varepsilon)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

ЛЕММА 1.7. Свойство ППА не зависит от выбора копредставления группы Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 1.2.

ТЕОРЕМА 1.8. Следующие группы обладают свойством ППА:

- i) свободные группы;
- ii) свободные произведения групп со свойством ППА;
- iii) конечные группы;
- iv) свободные абелевы группы;
- v) фундаментальные группы двумерных ориентированных многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два пункта очевидны, так как в этих группах отсутствуют соотношения. Случай конечных групп был доказан в работе [9], где показано, что рядом с каждым почти представлением конечной группы существует настоящее представление. Остальные случаи мы разбираем в следующих параграфах.

§ 2. Случай свободной абелевой группы

В этом параграфе мы показываем, что почти коммутирующие унитарные матрицы порождают асимптотически коммутирующие унитарные пути возрастающей размерности. Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}^k = \langle g_1, \dots, g_k | g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}, i, j = 1, \dots, k \rangle$ – свободная абелева группа. Тогда набор k унитарных почти коммутирующих матриц $\{u_1, \dots, u_k\}$, $\|[u_i, u_j]\| \leq \varepsilon$, $i, j = 1, \dots, k$, задает ε -почти представление σ группы $\mathbb{Z}^k$, $\|\sigma\| \leq \varepsilon$. Утверждение теоремы 1.8 для свободных абелевых групп будет вытекать из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что для любых k почти коммутирующих унитарных матриц $u_1, \dots, u_k \in U_n(\mathbb{C})$, $\|[u_i, u_j]\| < \varepsilon < \varepsilon_0$ (произвольной размерности n), существует размерность N и унитарные пути $u_i(t) \in U_N(\mathbb{C})$ такие, что:*

- i) $u_i(0) = u_i \oplus 1_{N-n}$;
- ii) $\|[u_i(t), u_j(t)]\| < C\varepsilon^{(1/4)^{k-1}}$;
- iii) $\|[u_i(1), u_j(1)]\| < \varepsilon/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы начнем доказывать теорему 2.1 для случая $k = 2$, т.е. для двух почти коммутирующих унитарных матриц $u = u_1$ и $v = u_2$. Доказательство основано на ряде технических лемм, которые мы разбираем в начале параграфа, а после них мы приводим явную конструкцию гомотопии $u(t) = u_1(t)$ и $v(t) = u_2(t)$. Идея доказательства состоит в том, что если одна из двух почти коммутирующих матриц диагональна, то другая имеет почти блочно-трехдиагональную форму (ср. [14]), а далее мы пользуемся вариантом техники Берга (ср. [13]). В конце параграфа мы покажем, что общий случай является простым следствием случая двух матриц.

Мы не пытались получить наилучшие оценки, и константы, очевидно, могут быть улучшены. Для удобства вычислений мы предполагаем, что все величины ε , δ_1 , δ_2 и т.д. принимают значения в интервале $(0, 1)$.

2.1. Технические леммы. Пусть $u, v \in U_n(\mathbb{C})$. Зафиксируем базис так, чтобы матрица u была диагональной с собственными значениями $\lambda_i = e^{2\pi i \varphi_i}$, $i = 1, \dots, n$, с упорядоченными значениями $\varphi_i \in [0, 1)$, $\varphi_{i+1} \geq \varphi_i$. Пусть число α таково, что $|e^{2\pi i \alpha} - 1| = \sqrt[4]{\varepsilon}$; тогда точки $e^{2\pi i k \alpha}$, $k = 0, 1, \dots$, делят единичную окружность на равные малые дуги $[e^{2\pi i k \alpha}, e^{2\pi i (k+1) \alpha})$ (в действительности последняя дуга $[e^{2\pi i K \alpha}, 1)$ может оказаться короче других, но без ограничения общности можно предположить, что ε таково, что эта последняя дуга имеет ту же длину). Пронумеруем против часовой стрелки те дуги, которые содержат хотя бы одно собственное значение λ_i , и обозначим указанные дуги через Δ_k . Число l таких дуг не превосходит $2\pi/\sqrt[4]{\varepsilon}$, и выполняются свойства:

- i) если $\lambda_i, \lambda_j \in \Delta_k$, то $|\lambda_i - \lambda_j| < \sqrt[4]{\varepsilon}$;
- ii) если $\lambda_i \in \Delta_{k-1}$ и $\lambda_j \in \Delta_{k+1}$, то $|\lambda_i - \lambda_j| \geq \sqrt[4]{\varepsilon}$.

Обозначим через p_k , $p_1 \oplus \dots \oplus p_l = 1$, взаимно ортогональные спектральные проекторы матрицы u , отвечающие дугам Δ_k . Тогда матричная алгебра M_n как модуль над собой может быть разложена в прямую сумму, соответствующую этим проекторам, $M_n = \bigoplus_{k=1}^l p_k M_n$, и мы можем представить матрицы из M_n в виде меньших (блочных) матриц по отношению к указанному разложению: $u = \text{diag}(\{u_k\})$, где $u_k = p_k u p_k$, и $v = (v_{km})$, где $v_{km} = p_k v p_m$.

Для матрицы $a = (a_{km})$ (записанной по отношению к разложению $\oplus_{k=1}^l p_k M_n$) положим

$$d(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{l-1,l} \\ a_{l1} & & a_{l,l-1} & a_{l,l} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где пустые места суть нули. Матрицы вида (2.1) мы называем *блочно-трехдиагональными* (угловые элементы a_{l1} и a_{1l} мы рассматриваем как продолжения диагоналей $(a_{12}, \dots, a_{l-1,l})$ и $(a_{21}, \dots, a_{l,l-1})$ соответственно).

Покажем, что матрица $v = (v_{km})$ является “почти” блочно-трехдиагональной. Отметим, что идея расщепления пространства спектральными проекторами одного из двух почти коммутирующих операторов и сведение другого к блочно-трехдиагональному виду появилась еще в работе [6].

ЛЕММА 2.2. Если

$$\|[u, v]\| < \varepsilon, \quad (2.2)$$

$$\text{то } \|v - d(v)\| < 4\sqrt{\pi}^4 \sqrt{\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹. Произведем еще одно разбиение спектра оператора u на более мелкие, чем Δ_k , равные дуги $\bar{\Delta}_s = [d_s, d_{s+1})$ такие, что $|d_s - \bar{\lambda}_s| = |\bar{\lambda}_s - d_{s+1}| = \varepsilon/2$, где $\bar{\lambda}_s$ – середины дуг $\bar{\Delta}_s$. Пусть $\bar{p}_s$ – спектральные проекторы матрицы u , отвечающие дугам $\bar{\Delta}_s$. Положим

$$\bar{u} = \sum_s \bar{\lambda}_s \bar{p}_s.$$

Очевидно, $\|u - \bar{u}\| < \varepsilon/2$, значит, в силу (2.2)

$$\|\bar{u}v - v\bar{u}\| \leq \|\bar{u}v - uv\| + \|uv - vu\| + \|vu - v\bar{u}\| < 2\varepsilon. \quad (2.3)$$

Пусть $M_n = \oplus_s \bar{p}_s M_n$ – разложение M_n , отвечающее спектральным проекторам $\bar{p}_s$ матрицы u . Оно является подразложением разложения $\oplus_{k=1}^l p_k M_n$, и матрица v может быть записана в виде $v = (w_{ij})$, $w_{ij} = \bar{p}_i v \bar{p}_j$. Матричные элементы v_{km} суть блоки элементов w_{ij} . Обозначим через M число столбцов матрицы (w_{ij}) . Тогда

$$M < \frac{4\pi}{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим матрицу $(\bar{u}v - v\bar{u})(\bar{u}v - v\bar{u})^*$. Из неравенства (2.3) следует, что норма этой матрицы меньше, чем $4\varepsilon^2$, следовательно, норма каждого элемента этой матрицы также меньше, чем $4\varepsilon^2$. Так как $\bar{\lambda}_j$ коммутируют с w_{ij} , получаем для каждого i

$$\left\| \sum_{j=1}^M (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 w_{ij} w_{ij}^* \right\| < 4\varepsilon^2. \quad (2.5)$$

¹К. Дэвидсон любезно сообщил мне, что, используя методы работ [2] и [6], можно получить лучшую оценку, чем в лемме 2.2.

Пусть $\bar{\lambda}_i \in \Delta_{k_i}$, $\bar{\lambda}_j \in \Delta_{k_j}$. Поскольку все слагаемые в (2.5) положительны, отбрасывание некоторых из них не увеличит норму суммы, значит,

$$\left\| \sum_j' (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 w_{ij} w_{ij}^* \right\| < 4\varepsilon^2,$$

где сумма $\sum'$ берется по тем значениям j , для которых $|k_j - k_i| \geq 2$, т.е. мы отбрасываем те матричные элементы w_{ij} , для которых $(v - d(v))_{ij} = 0$. Поскольку в сумме $\sum'$ имеет место оценка $|\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_j| \geq \sqrt[4]{\varepsilon}$, то

$$4\varepsilon^2 > \left\| \sum_j' (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)^2 w_{ij} w_{ij}^* \right\| \geq \sqrt{\varepsilon} \left\| \sum_j' w_{ij} w_{ij}^* \right\|,$$

следовательно,

$$\left\| \sum_j' w_{ij} w_{ij}^* \right\| < 4\varepsilon^{3/2}. \quad (2.6)$$

Для завершения доказательства нам нужна следующая

ЛЕММА 2.3. Пусть A — C^* -алгебра, и пусть $a = (a_{ij})$, $a_{ij} \in A$ — $(M \times M)$ -матрица такая, что для каждого i верно неравенство $\left\| \sum_j a_{ij} a_{ij}^* \right\| < \delta_1^2$. Тогда $\|a\| < \delta_1 \sqrt{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим строку $\xi = (\xi_k)$, $k = 1, \dots, M$, $\xi_i \in M_n$. Используя обобщенное неравенство Коши–Шварца [12], получаем

$$\begin{aligned} \|a\xi\|^2 &= \left\| \sum_{ijk} \xi_j^* a_{ij}^* a_{ik} \xi_k \right\| \leq \sum_i \left\| \sum_{kj} \xi_j^* a_{ij}^* a_{ik} \xi_k \right\| \\ &\leq \sum_i \left\| \sum_k a_{ik} a_{ik}^* \right\| \cdot \left\| \sum_k \xi_k^* \xi_k \right\| < M \delta_1^2 \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

откуда $\|a\xi\| < \sqrt{M} \delta_1 \|\xi\|$.

Из леммы 2.3 ввиду оценок (2.4) и (2.6) получаем (при $\delta_1 = 2\varepsilon^{3/4}$)

$$\|v - d(v)\| < \sqrt{M} 2\varepsilon^{3/4} \leq \sqrt{4\pi\varepsilon}^{-1/2} 2\varepsilon^{3/4} = 4\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon},$$

что завершает доказательство леммы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если спектр матрицы u имеет лауну длины более, чем $\sqrt[4]{\varepsilon}$, то без ограничения общности можно предполагать, что серединой этой лауны является единичная точка. В этом случае нормы элементов v_{1l} и v_{l1} также малы и верно неравенство

$$\left\| v - \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & & \\ v_{21} & v_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & v_{l-1,l} \\ & & v_{l,l-1} & v_{l,l} \end{pmatrix} \right\| < 4\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Если в спектре матрицы u имеется еще одна лауна длины больше, чем $\sqrt[4]{\varepsilon}$ (между дугами Δ_r и Δ_{r+1}), то матрица $d(v)$ близка к прямой сумме меньших трехдиагональных матриц, так как норма элементов $v_{r+1,r}$ и $v_{r,r+1}$ также мала.

Отметим, что матрица $w^*w - 1$ является 9-диагональной (или 5-диагональной, если считать правый верхний и левый нижний углы продолжениями диагоналей, соседних с главной), поэтому норма каждой диагонали меньше $15\delta_2$.

Обратимся к матрице $w^*(t)w(t) - 1$. Она 13-диагональна, и легко видеть, что каждая диагональ этой матрицы есть прямая сумма соответствующих диагоналей матрицы $w^*w - 1$ (иногда с коэффициентами $c(t)$ и $s(t)$), поэтому верна оценка

$$\|w^*(t)w(t) - 1\| < 13 \cdot 15\delta_2 = 195\delta_2,$$

т.е. $\|h^2(t) - 1\| < 195\delta_2$. Тогда $\|h(t) - 1\| < 100\delta_2$ и, окончательно,

$$\|w(t) - \tilde{w}(t)\| = \|\tilde{w}^*(t)w(t) - 1\| = \|h(t) - 1\| < 100\delta_2.$$

Теперь нам следует оценить норму коммутатора $[u \oplus 1_{N-n}, w(t)]$. Но легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|[u \oplus 1_{N-n}, w(t)]\| &\leq \|[u, w]\| + \|v_{l1} - v_{l1}u_l\| + \|u_1v_{l1} - v_{l1}\| \\ &\quad + \|v_{1l} - v_{1l}u_1\| + \|u_lv_{1l} - v_{1l}\| < \delta_3 + 2\|u_1 - 1\| + 2\|u_l - 1\| < \delta_3 + 4\sqrt[4]{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где u_1 и u_l – первый и последний диагональные элементы матрицы u .

ЛЕММА 2.6. Пусть $w_1, w_2 \in U_n(\mathbb{C})$ – почти коммутирующие блочно-трех-диагональные матрицы вида (2.7), $\|[w_1, w_2]\| < \delta_4$. Для обеих матриц определим пути $w_1(t)$ и $w_2(t)$, как в (2.8). Тогда

$$\|[w_1(t), w_2(t)]\| < 13\delta_4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что коммутатор $[w_1(t), w_2(t)]$ можно разложить в сумму прямых сумм коммутаторов меньшей размерности $[w_1, w_2]$ и 12-диагональной матрицы с диагоналями, совпадающими с прямыми суммами некоторых диагоналей матрицы $[w_1, w_2]$.

ЛЕММА 2.7. Пусть

$$w' = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & & & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & w_{N-1,N} \\ w_{N1} & & w_{N,N-1} & & w_{N,N} \end{pmatrix}$$

– трехдиагональная матрица и $w' = \tilde{w}'h'$ – полярное разложение такие, что

$$\|w' - \tilde{w}'\| < \delta_5. \quad (2.11)$$

Тогда для любого $\delta_6 > 0$ найдутся натуральное число r (не зависящее от N) и разложение

$$\tilde{w}' = w_0 + w_1$$

такие, что матрица w_0 является $(2r + 3)$ -диагональной и $\|w_1\| < \delta_6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\tilde{w}' &= w'((w')^*w')^{-1/2} = w'(1 + ((w')^*w' - 1))^{-1/2} \\ &= w'(1 + a_1((w')^*w' - 1) + a_2((w')^*w' - 1)^2 + \dots + a_r((w')^*w' - 1)^r + R_r),\end{aligned}$$

где в силу (2.11) имеем

$$\|R_r\| < \|((w')^*w' - 1)\|^r = \|(h')^2 - 1\|^r < (3\delta_5)^r.$$

Выберем r так, чтобы выполнялось неравенство

$$(3\delta_5)^r < \delta_6, \quad (2.12)$$

и положим

$$\begin{aligned}w_0 &= w'(1 + a_1((w')^*w' - 1) + a_2((w')^*w' - 1)^2 + \dots + a_r((w')^*w' - 1)^r), \\ w_1 &= w'R_r.\end{aligned}$$

Тогда, поскольку матрицы w' и $((w')^*w' - 1)$ 3-диагональна и $(2r+1)$ -диагональна соответственно, матрица w_0 является $(2r+3)$ -диагональной.

ЛЕММА 2.8. Пусть $v'(t)$ – путь в матричной алгебре $M_N(\mathbb{C})$ такой, что

$$\text{dist}(v'(t), U_N(\mathbb{C})) < \delta_7.$$

Тогда существует унитарный путь $v(t)$ такой, что для всех t выполняется неравенство

$$\|v(t) - v'(t)\| < 3\delta_7.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v' \in M_N(\mathbb{C})$ – такая матрица, что

$$\text{dist}(v', U_N(\mathbb{C})) < \delta_7,$$

и пусть $v' = vh$ – ее полярное разложение. По предположению существует унитарная матрица w такая, что $\|v' - w\| < \delta_7$. Тогда $\|vh - w\| < \delta_7$, поэтому (как в доказательстве леммы 2.5) мы получаем оценки

$$\|h - v^{-1}w\| < \delta_7, \quad (2.13)$$

$$\|h - (v^{-1}w)^*\| < \delta_7. \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что $\|v^{-1}w - (v^{-1}w)^*\| < 2\delta_7$, следовательно,

$$\|v^{-1}w - 1\| < 2\delta_7. \quad (2.15)$$

Из оценок (2.13) и (2.15) вытекает, что $\|h - 1\| < 3\delta_7$, и, окончательно,

$$\|v' - v\| = \|h - 1\| < 3\delta_7.$$

Таким образом, если нам дан путь $v'(t)$ с полярным разложением $v'(t) = v(t)h(t)$, то путь $v(t)$ непрерывен и $\|v(t) - v'(t)\| < 3\delta_7$.

2.2. Построение гомотопии. Случай двух унитарных матриц. Перейдем к конструкции путей $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющих теореме 2.1. Эта конструкция состоит из четырех шагов.

Пусть $u, v \in U_n(\mathbb{C})$ – унитарные матрицы такие, что $\|[u, v]\| < \varepsilon$, и матрица u уже приведена к диагональному виду с упорядоченными собственными значениями (ср. п. 2.1.) Пусть $N = nm$, где число m мы зададим позднее. Гомотопия, которую мы хотим построить, должна начинаться на паре унитарных матриц $u \oplus 1_{N-n}$ и $v \oplus 1_{N-n}$. На самом деле мы сначала построим пути $u(t)$ и $v'(t)$, где путь $v'(t)$ не унитарен, но лежит вблизи унитарной группы, $\text{dist}(v'(t), U_N) < C \sqrt[4]{\varepsilon}$ для некоторой константы C . По лемме 2.8 это будет означать наличие унитарного пути $v(t)$ с требуемыми свойствами. На каждом шаге гомотопии нам будет необходимо контролировать две оценки: коммутаторную норму $\|[u(t), v'(t)]\|$ и расстояние до унитарной группы $\text{dist}(v'(t), U_N(\mathbb{C}))$.

ШАГ 1. Пусть $w = d(v)$ – матрица, определенная в (2.1). Не меняя первую матрицу $u \oplus 1_{N-n}$, соединим матрицу $v \oplus 1_{N-n}$ линейным путем с блочно-трехдиагональной матрицей $w \oplus 1_{N-n}$. Вдоль указанного пути выполнены оценки

$$\|[u(t), v'(t)]\| < 4\sqrt[4]{\varepsilon}, \quad \text{dist}(v'(t), U_N(\mathbb{C})) < \|v - w\| < 4\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

ШАГ 2. Соединим единичную матрицу 1_{N-n} с прямой суммой $w \oplus \dots \oplus w$ $m - 1$ экземпляров матрицы w . Матрица $u \oplus 1_{N-n}$ на этом шаге гомотопии по-прежнему не меняется, и так же не меняются коммутаторная норма $\|[u(t), v'(t)]\|$ и расстояние до унитарной группы $\text{dist}(v'(t), U_N(\mathbb{C}))$.

ШАГ 3. И на этом шаге матрица $u \oplus 1_{N-n}$ не меняется. Определим путь $v'(t)$ равенством $v'(t) = w(t)$, где матрица $w(t)$ задана формулой (2.8). Тогда по лемме 2.5 (взяв там $\delta_1 = 4\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon}$ и $\delta_2 = 4\sqrt[4]{\varepsilon}$) получаем оценки

$$\|u \oplus 1_{N-n}, v'(t)\| < 8\sqrt[4]{\varepsilon}, \quad \text{dist}(v'(t), U_N(\mathbb{C})) \leq \|v'(t) - v(t)\| < 400\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon},$$

где $v(t) = v'(t)(v'^*(t)v'(t))^{-1/2}$.

ШАГ 4. На этом, последнем, шаге мы не будем менять вторую матрицу $v(1)$. Матрица $v'(1)$ блочно-трехдиагональна, и $\|v'(t) - v(t)\| < 400\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon} = \delta_5$, поэтому из леммы 2.5 при $\delta_6 = \varepsilon/8$ следует наличие разложения $v(t) = w_0 + w_1$, в котором $\|w_1\| < \varepsilon/8$, а матрица w_0 $(2r + 3)$ -диагональна при r , удовлетворяющем неравенству (2.12) т.е.

$$(1200 \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon})^r < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Выбор такого r возможен, если $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 удовлетворяет неравенству

$$1200 \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\varepsilon_0} \leq 1.$$

Тогда $\|[u(t), v(1)]\| \leq \|[u(t), w_0]\| + \varepsilon/4$ и будет достаточно найти путь $u(t)$, начинающийся в матрице $u \oplus 1_{N-n}$, такой, что $\|[u(1), w_0]\| < \varepsilon/4$.

Для $t \in [0, 1]$ определим диагональные пути $u_j(t) \in U_n(\mathbb{C})$ равенствами

$$u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i((1-t)\varphi_1 + t\varphi_1/m)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i((1-t)\varphi_n + t\varphi_n/m)} \end{pmatrix},$$

$$u^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i t \varphi_1 j/m} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i t \varphi_n j/m} \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, m.$$

Положим $u(t) = u^{(1)}(t) \oplus \dots \oplus u^{(m)}(t) \in U_N(\mathbb{C})$. Тогда диагональная матрица $u(1)$ будет содержать все упорядоченные корни степени m из собственных значений $e^{2\pi i \varphi_i}$ матрицы u .

Обозначим через $d_k(w_0)$ диагональ матрицы w_0 , находящуюся на k диагоналей над (или под, если k отрицательно) главной диагональю $d_0(w_0)$. Тогда

$$w_0 = \sum_{k=-r-1}^{r+1} d_k(w_0)$$

и $\|d_k(w_0)\| < 1 + \varepsilon/8$. Легко видеть (ср. замечание 2.4 в случае наличия лакун в спектре u), что

$$\|[u(t), d_k(w_0)]\| < \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) \cdot 2k \sqrt[4]{\varepsilon} \left(1 - t + \frac{t}{m}\right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|[u(t), w_0]\| &< 2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) \left(\sum_{k=1}^{r+1} k\right) \sqrt[4]{\varepsilon} \left(1 - t + \frac{t}{m}\right) \\ &< 2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) (r+1)^2 \sqrt[4]{\varepsilon} \left(1 - t + \frac{t}{m}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, вдоль всего пути выполняется необходимая оценка

$$\|[u(t), v(t)]\| < 3(r+1)^2 \sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Для завершения конструкции гомотопии нам надо выбрать число m таким образом, чтобы оно удовлетворяло неравенству

$$2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) (r+1)^2 \sqrt[4]{\varepsilon} \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4},$$

тогда будет выполняться оценка $\|[u(1), w_0]\| < \varepsilon/4$, и, значит, $\|[u(1), v(1)]\| < \varepsilon/2$, что завершает доказательство для случая двух почти коммутирующих унитарных матриц.

2.3. Конструкция гомотопии. Общий случай. Теперь мы можем перейти к общему случаю k почти коммутирующих унитарных матриц $u_1, \dots, u_k$, $\|[u_i, u_j]\| < \varepsilon$. Так же как и в случае двух матриц, приведем к диагональному виду первую матрицу u_1 и повторим предыдущую конструкцию для остальных матриц $u_2, \dots, u_k$ (пользуясь леммой 2.6, мы сможем контролировать норму коммутаторов для этих матриц). В результате мы получим унитарные пути $u_i(t)$ такие, что $u_i(0) = u_i \oplus 1_{N-n}$, $u_i(1) = u_i^{(1)}$, для которых имеют место оценки:

$$\text{i) } \|[u_1^{(1)}, u_j^{(1)}]\| < \varepsilon', \quad j \neq 1,$$

$$\text{ii) } \|[u_i^{(1)}, u_j^{(1)}]\| < C \sqrt[4]{\varepsilon},$$

$$\text{iii) } \|[u_i(t), u_j(t)]\| < C \sqrt[4]{\varepsilon}$$

для достаточно малого значения $\varepsilon' > 0$, которое мы определим позднее, и для некоторой константы C . Затем на втором шаге мы диагонализировать матрицу $u_2^{(1)}$ и применим указанную конструкцию к матрицам $u_1^{(1)}, u_3^{(1)}, \dots, u_k^{(1)}$. В результате получим матрицы $u_1^{(2)}, \dots, u_k^{(2)}$, удовлетворяющие оценкам:

- i) $\| [u_2^{(2)}, u_j^{(1)}] \| < \varepsilon', \quad j \neq 2,$
- ii) $\| [u_1^{(2)}, u_j^{(2)}] \| < C \sqrt[4]{\varepsilon'}, \quad j \neq 1, 2,$
- iii) $\| [u_i^{(2)}, u_j^{(2)}] \| < C^2 \sqrt[16]{\varepsilon}, \quad i, j \neq 1, 2,$
- iv) $\| [u_i(t), u_j(t)] \| < C^2 \sqrt[16]{\varepsilon}.$

Повторяя указанную процедуру $k-1$ раз, мы получим матрицы $u_1^{(k-1)}, \dots, u_k^{(k-1)}$, для которых имеют место оценки:

- i) $\| [u_1^{(k-1)}, u_j^{(k-1)}] \| < C^{k-2} (\varepsilon')^{(1/4)^{k-2}}, \quad j > 1,$
- ii) $\| [u_2^{(k-1)}, u_j^{(k-1)}] \| < C^{k-3} (\varepsilon')^{(1/4)^{k-3}}, \quad j > 2, \text{ и т.д.,}$
- iii) $\| [u_{k-1}^{(k-1)}, u_k^{(k-1)}] \| < \varepsilon',$
- iv) $\| [u_i(t), u_j(t)] \| < C^{k-1} \varepsilon^{(1/4)^{k-1}}.$

Окончательно получаем, что $\| [u_i^{(k-1)}, u_j^{(k-1)}] \| < C^{k-2} (\varepsilon')^{(1/4)^{k-2}}$ для всех i, j . Выбирая ε' таким образом, чтобы удовлетворить неравенству $C^{k-2} (\varepsilon')^{(1/4)^{k-2}} < \varepsilon/2$, получаем утверждение теоремы.

§ 3. Случай фундаментальной группы ориентированной поверхности

Пусть $\Gamma = \langle a_1, b_1, \dots, a_m, b_m | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} \rangle$, $\sigma - \varepsilon$ -почти представление группы Γ , $u_i = \sigma(a_i)$, $v_i = \sigma(b_i)$, $u_i, v_i \in U_n$, $i = 1, \dots, m$. Введем обозначение $\gamma(u, v) = uvu^{-1}v^{-1}$. Тогда

$$\| \gamma(u_1, v_1) \dots \gamma(u_m, v_m) - I \| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим отображение

$$\gamma: U_n \times U_n \longrightarrow \text{SU}_n. \quad (3.1)$$

Для доказательства свойства ППА для фундаментальных групп ориентированных двумерных многообразий нам нужно будет следующее элементарное утверждение об отображении (3.1).

ЛЕММА 3.1. Пусть $(u_0, v_0) \in U_n \times U_n$, и пусть $c(t) \in \text{SU}_n$, $t \in [0, 1]$, — такой путь, что $\gamma(u_0, v_0) = c(0)$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует путь $(u_t, v_t) \in U_n \times U_n$ такой, что $\| \gamma(u_t, v_t) - c(t) \| < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что пара $(u, v) \in U_n \times U_n$ называется *неприводимой*, если не существует общих инвариантных подпространств для u и v . В работе [8] показано, что множество регулярных точек отображения γ (3.1) совпадает с множеством неприводимых пар. Обозначим множество приводимых пар $(u, v) \in U_n \times U_n$ через S . Для каждого $k = 1, \dots, n-1$ через $\Sigma_k \subset \text{SU}_n$ обозначим множество блочно-диагональных матриц $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ по отношению к некоторому инвариантному подпространству V , $\dim V = k$, таких, что $c_1 \in \text{SU}_k$, $c_2 \in \text{SU}_{n-k}$. Положим $\Sigma = \cup_k \Sigma_k \subset \text{SU}_n$. Тогда, очевидно, $\gamma(S) \subset \Sigma$. Отметим, что каждое Σ_k является подмногообразием в SU_n коразмерности один. Поэтому Σ разбивает SU_n на конечное число замкнутых компонент связности M_j , $\cup_j M_j = \text{SU}_n$, и для каждой точки $c \in M_j$ множество $\gamma^{-1}(c)$ состоит только из регулярных точек. Следовательно, каждый путь в M_j , трансверсальный к его границе, может быть поднят до пути в $U_n \times U_n$ с фиксированной начальной точкой.

Без ограничения общности можно считать, что путь $c(t)$ трансверсален каждому Σ_k . Пусть $t_0 \in \{c(t)\} \cap \Sigma_k$. Нам остается показать, что путь $c(t)$ может быть поднят в некоторой окрестности точки $c_0 = c(t_0)$. Пусть $(u_0, v_0) \in U_n \times U_n$ – такая точка, что $\gamma(u_0, v_0) = c_0$. Если точка (u_0, v_0) регулярна, то утверждение очевидно. В противном случае матрицы

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

блочны-диагональны по отношению к некоторому базису, и можно считать матрицы v_1 и v_2 диагональными. Пусть

$$e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_k} \text{ и } e^{2\pi i \varphi_{k+1}}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}$$

– собственные значения матриц v_1 и v_2 соответственно. Сколь угодно малым шевелением v_0 можно добиться того, чтобы для всех $i = 2, \dots, k$, $j = k+2, \dots, n$ значения $\varphi_i - \varphi_1$, $\varphi_j - \varphi_{k+1}$ были бы попарно различны. Умножая v_1 на $e^{-2\pi i \varphi_1 t}$, а v_2 на $e^{-2\pi i \varphi_{k+1} t}$, $t \in [0, 1]$, соединим матрицу v_0 с матрицей

$$v'_0 = \begin{pmatrix} v'_1 & 0 \\ 0 & v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i \varphi_1 t} v_1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \varphi_{k+1} t} v_2 \end{pmatrix},$$

у которой ровно два собственных значения равны единице, а все остальные попарно различны. Очевидно, значение $\gamma(u_0, v_0) = \gamma(u_0, v'_0) = c_0$ не меняется вдоль указанного пути. Через $e_1, \dots, e_n$ обозначим базис, состоящий из собственных векторов v'_0 . Пусть $w(t) \in U_n$, $t \in [0, 1]$, – вращение в плоскости векторов e_1 и e_{k+1} :

$$\begin{aligned} w(t)e_1 &= e_1 \cos t - e_{k+1} \sin t, & w(t)e_{k+1} &= e_1 \sin t + e_{k+1} \cos t, \\ w(t)e_j &= e_j \text{ для } j \neq 1, k+1. \end{aligned}$$

Очевидно, $w(t)$ коммутирует с v'_0 . Положим $u_t = u_0 w(t)$. Тогда

$$\gamma(u_t, v'_0) = u_0 w(t) v'_0 w^{-1}(t) u_0^{-1} (v'_0)^{-1} = \gamma(u_0, v'_0) = c_0,$$

и при $\sin t \neq 0$ пара (u_t, v'_0) является *неприводимой* (так как матрица v'_0 диагональна и все точки спектра, кроме единицы, являются простыми, ее инвариантные подпространства легко описываются, и несложно проверить, что они не могут быть инвариантными также для матрицы u_t) с прежним значением γ . Тогда можно продолжить путь (u_t, v_t) через точку c_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Любое ε -почти представление группы Γ гомотопически эквивалентно в $R_{2\varepsilon}(\Gamma)$ 2ε -почти представлению, в котором $u_2 = v_2 = \dots = u_m = v_m = I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим матрицу $\gamma(u_m, v_m)$ с I путем $c_m(t)$. Тогда по лемме 3.1 мы можем найти такой путь $(u_m(t), v_m(t)) \in U_n \times U_n$, что

$$\|\gamma(u_m(t), v_m(t)) - c_m(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Заметим, что множество $\gamma^{-1}(I) = \{(u, v) : uv = vu\}$ является связным, поэтому мы можем считать, что конечной точкой пути $(u_m(t), v_m(t))$ является (I, I) . Положим

$$c_{m-1}(t) = \gamma(u_{m-1}, v_{m-1}) c_m^{-1}(t).$$

Снова по лемме 3.1 можно найти путь $(u_{m-1}(t), v_{m-1}(t)) \in U_n \times U_n$ такой, что

$$\|\gamma(u_{m-1}(t), v_{m-1}(t)) - c_{m-1}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Тогда

$$\|\gamma(u_1, v_1) \dots \gamma(u_{m-1}(t), v_{m-1}(t)) \gamma(u_m(t), v_m(t)) - I\| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{m},$$

и в конечной точке пути имеем $(u_m(t), v_m(t)) = (I, I)$. Действуя по индукции, получаем утверждение предложения.

Из предложения 3.2 следует, что свойство ППА для группы Γ вытекает из этого же свойства для группы $\mathbb{Z}^2$ с образующими u_1, v_1 .

§ 4. Пример группы без свойства ППА

Рассмотрим группу $\Gamma = \langle a, b, c | aca^{-1}c^{-1}, b^2, (ab)^2 \rangle$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Группа Γ не обладает свойством ППА.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\omega = e^{2\pi i/n}$ и определим семейство почти представлений σ_n , принимающих значения в U_n формулами

$$\sigma_n(a) = \begin{pmatrix} \omega & & & \\ & \omega^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^n \end{pmatrix}, \quad \sigma_n(c) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_n(b) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы $\sigma_n(a)$ и $\sigma_n(c)$ – матрицы Войкулеску [18] с числом вращения (см. [7]), равным единице, и

$$\sigma_n(a)\sigma_n(c)\sigma_n(a)^{-1}\sigma_n(c)^{-1} = \omega \cdot I, \quad \sigma_n(b)^2 = I, \quad (\sigma_n(a)\sigma_n(b))^2 = \omega \cdot I,$$

поэтому

$$\varepsilon_n = \|\sigma_n\| = |\omega - 1| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует ε -почти представление σ группы Γ такое, что число вращения для пары $(\sigma(a), \sigma(c))$ равно единице.

Предположим противное, т.е. что группа Γ обладает свойством ППА. Тогда найдется такое ε , что $\delta(\varepsilon) \leq 1$. Возьмем такое ε и рассмотрим ε -почти представление σ_0 с ненулевым числом вращения для пары $(\sigma_0(a), \sigma_0(c))$.

По предположению существует асимптотическое представление $\sigma_t \in R_{\text{asym}}(\Gamma)$, продолжающее σ_0 и такое, что $\|\sigma_t\| \leq 1$ для всех $t \in [0, \infty)$, и для каждого $\varepsilon' > 0$ существует t_0 такое, что $\|\sigma_{t_0}\| \leq \varepsilon'$. Зафиксируем такое t_0 и обозначим σ_{t_0} через σ . Пусть n и $n + m$ – размерности почти представлений σ_0 и σ соответственно. Тогда

$$\|\sigma(a)\sigma(c) - \sigma(c)\sigma(a)\| \leq \varepsilon', \quad \|\sigma(b)^2 - I\| \leq \varepsilon', \quad \|\sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b) - I\| \leq \varepsilon'.$$

Отметим, что вдоль всего пути σ_t имеет место неравенство

$$\|\sigma_t(b)^2 - I\| \leq \|\sigma_t\| \leq \delta(\varepsilon) \leq 1,$$

поэтому собственные значения матрицы $\sigma_t(b)$ удовлетворяют оценке $|\lambda^2 - 1| \leq 1$, следовательно, число собственных значений $\lambda \in \text{Sp } \sigma_t(b)$, удовлетворяющих условию $\text{Re } \lambda < 0$, не изменяется вдоль всего пути σ_t в U_∞ , и, значит, число собственных значений $\lambda \in \text{Sp } \sigma(b)$, удовлетворяющих условию $|\lambda + 1| \leq \varepsilon'$, не превосходит n (максимального числа собственных значений матрицы $\sigma_0(b)$, удовлетворяющих условию $\text{Re } \lambda < 0$), а число собственных значений, удовлетворяющих условию $|\lambda - 1| \leq \varepsilon'$, не менее чем m . Поэтому существует матрица $\sigma(b)' \in U_{n+m}$ такая, что $\|\sigma(b) - \sigma(b)'\| \leq \varepsilon'$, и не более чем n собственных значений $\sigma(b)'$ равно -1 , и не менее чем m собственных значений равно 1 . Тогда имеем

$$\|\sigma(a)\sigma(b)'\sigma(a)\sigma(b)' - I\| \leq 3\varepsilon'. \quad (4.1)$$

Заметим, что $(\sigma(b)')^2 = I$ и

$$|\text{tr}(\sigma(b)')| \geq m - n. \quad (4.2)$$

Пусть

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_{n+m} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора $\sigma(a)$ в базисе, состоящем из ее собственных векторов. В работах [14], [3] было показано, что если число вращения пары $(\sigma(a), \sigma(c))$ отлично от нуля, то для любого $\varepsilon' > 0$ существует $\delta'(\varepsilon')$ такое, что $\delta'(\varepsilon') \rightarrow 0$ при $\varepsilon' \rightarrow 0$ и длина лакун в $\text{Sp } \sigma(a)$ не превосходит $\delta'(\varepsilon')$. Обозначим число собственных значений матрицы $\sigma(a)$ таких, что $|\text{Im } \omega_j| > 2\varepsilon'$, через N . Тогда верна оценка

$$N \geq \frac{2\pi - 10\varepsilon'}{\delta'(\varepsilon')}. \quad (4.3)$$

Так как $(\sigma(b)')^2 = I$, то из (4.1) следует, что

$$\|\sigma(a)\sigma(b)' - \sigma(b)'\sigma(a)^*\| \leq 3\varepsilon'. \quad (4.4)$$

Через b_{ij} обозначим матричные элементы матрицы $\sigma(b)'$. Из (4.4) следует, что все матричные элементы матрицы $\sigma(a)\sigma(b)' - \sigma(b)'\sigma(a)^*$ не превосходят $3\varepsilon'$, т.е.

$$|b_{ii}(\omega_i - \bar{\omega}_i)| \leq 3\varepsilon', \quad i = 1, \dots, n + m. \quad (4.5)$$

Оценим величину $\text{tr}(\sigma(b)').$ Имеем

$$|\text{tr}(\sigma(b)')| = \left| \sum_{i=1}^{n+m} b_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^{n+m} |b_{ii}| = \sum' |b_{ii}| + \sum'' |b_{ii}|,$$

где $\sum'$ обозначает сумму по тем номерам i , для которых $|\text{Im } \omega_i| > 2\varepsilon'$, а $\sum''$ – сумма по остальным номерам. Поскольку для всех i выполняется неравенство $|b_{ii}| \leq 1$, последняя сумма не превосходит число слагаемых:

$$\sum'' |b_{ii}| \leq n + m - N.$$

Из (4.5) следует, что для тех номеров i , которые включены в первую сумму, верна оценка $|\omega_i - \bar{\omega}_i| > 4\varepsilon'$, значит, соответствующие b_{ii} удовлетворяют неравенству

$$|b_{ii}| < \frac{3}{4},$$

поэтому $\sum' |b_{ii}| < (3/4)N$, следовательно, имеем

$$|\operatorname{tr}(\sigma(b)')| < \frac{3}{4}N + n + m - N = n + m - \frac{N}{4},$$

и из (4.3) вытекает, что

$$|\operatorname{tr}(\sigma(b)')| < n + m - \frac{\pi - 5\varepsilon'}{2\delta'(\varepsilon')}. \quad (4.6)$$

Если число ε' выбрать достаточно малым, то число $\delta'(\varepsilon')$ также достаточно мало, и тогда мы получаем оценку $(\pi - 5\varepsilon')/(2\delta'(\varepsilon')) > 2n$, и неравенства (4.3) и (4.6) противоречат друг другу.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\sigma_t \in R_{\text{asym}}(\Gamma)$ – асимптотическое представление. Тогда число вращения пары $(\sigma_t(a), \sigma_t(c))$ равно нулю при достаточно больших t . В частности, это означает, что σ_t гомотопически эквивалентно (в классе асимптотических представлений) асимптотическому представлению $\rho_t \in R_{\text{asym}}(\Gamma)$, для которого $\rho_t(c) = I$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{\text{asym}}(\Gamma)$ группу Гротендика классов гомотопической эквивалентности асимптотических представлений группы Γ . Пусть H обозначает подгруппу $\langle a, b|b^2, (ab)^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Тогда $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2 *_{\mathbb{Z}} H$, поэтому $B\Gamma = \mathbb{T}^2 \cup BH$, $S^1 = \mathbb{T}^2 \cap BH$, где $B\Gamma$, BH , S^1 и $\mathbb{T}^2$ – классифицирующие пространства групп Γ , H , $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ соответственно, а включение $S^1 \subset \mathbb{T}^2$ – стандартное вложение по первой координате. Тогда имеет место точная последовательность

$$\begin{array}{ccccc} K^0(B\Gamma) & \longrightarrow & K^0(BH) \oplus K^0(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & K^0(S^1) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(S^1) & \longleftarrow & K^1(BH) \oplus K^1(\mathbb{T}^2) & \longleftarrow & K^1(B\Gamma) \end{array} \quad (4.7)$$

и поскольку гомоморфизмы $K^*(\mathbb{T}^2) \rightarrow K^*(S^1)$ являются сюръективными, вертикальные стрелки в (4.7) суть нулевые отображения, откуда следует, что группа $K^0(B\Gamma)$ содержит элемент β , который накрывает образующую Ботта в $K^0(\mathbb{T}^2)$.

Напомним, что в работе [16] было построено отображение

$$\psi: \mathcal{R}_{\text{asym}}(\Gamma) \longrightarrow K^0(B\Gamma), \quad (4.8)$$

которое пропускается (см. [15]) через отображение, дуальное к отображению сборки,

$$\alpha: \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\Gamma \times \mathbb{Z}) \longrightarrow K^0(B\Gamma), \quad (4.9)$$

где $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\Gamma \times \mathbb{Z})$ обозначает группу Гротендика представлений группы $\Gamma \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина $\mathcal{Q}$.

Из следствия 4.2 вытекает, что $\mathcal{R}_{\text{asym}}(\Gamma) = \mathcal{R}_{\text{asym}}(H)$, поэтому элемент $\beta \in K^0(B\Gamma)$ и все его кратные не лежат в образе отображения (4.8). Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Отображение ψ (4.8) не является рациональным эпиморфизмом для группы Γ .

Следует отметить, что элемент $\beta \in K^0(B\Gamma)$ может быть получен как образ некоторого представления группы $\Gamma \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина при отображении α (4.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Существует представление $\rho \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\Gamma \times \mathbb{Z})$ такое, что $\alpha(\rho) = \beta \in K^0(B\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем конструкцию представления ρ . Обозначим через I_2 единичную (2×2) -матрицу, а через J_2 – матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим последовательность $\{\sigma_n\}$ почти представлений группы Γ , указанную в доказательстве теоремы 4.1 и положим при $n \geq 3$

$$\sigma'_n(a) = \sigma_{n-2}(a) \oplus I_2, \quad \sigma'_n(c) = \sigma_{n-2}(c) \oplus I_2, \quad \sigma'_n(b) = \sigma_{n-2}(b) \oplus J_2.$$

ЛЕММА 4.5. *Существует гомотопия $\{\sigma_n^t\}_{t \in [0,1]}$ почти представлений группы Γ , соединяющая σ_n с σ'_n и такая, что $\|\sigma_n^t\| \leq 3\varepsilon_n = 3|e^{2\pi i/n} - 1|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в $\mathbb{C}^n$, в котором почти представление σ_n имеет указанный выше вид. Пусть $u \in M_n(\mathbb{C})$ – унитарная матрица, переставляющая векторы e_1 и e_{n-1} и оставляющая неподвижными остальные базисные векторы, а $u_t \in M_n(\mathbb{C})$ – унитарный путь, соединяющий единичную матрицу с матрицей u и также оставляющий неподвижными остальные базисные векторы. Тогда путь $\sigma_n^t(b) = u_t^* \sigma_n(b) u_t$ соединяет матрицы $\sigma_n(b)$ и $\sigma'_n(b)$. Непосредственно проверяется, что $\|(\sigma_n^t(b))^2 - I\| \leq \varepsilon_n$ и $\|(\sigma'_n(a)\sigma_n^t(b))^2 - I\| \leq 3\varepsilon_n$. В работе [16] показано, что матрицы Войкулеску $\sigma_n(a)$ и $\sigma_n(c)$ можно соединить путем σ_n^t с матрицами $\sigma'_n(a)$ и $\sigma'_n(c)$ так, что $\|\sigma_n^t(a)\sigma_n^t(c)\sigma_n^t(a)^{-1}\sigma_n^t(c)^{-1} - I\| \leq \varepsilon_n$. Доказательство завершается непосредственной проверкой оценки $\|(\sigma_n^t(a)\sigma_n(b))^2 - I\| \leq \varepsilon_n$.

Продолжим конструкцию представления ρ . В гильбертовом пространстве H рассмотрим операторы, заданные матрицами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n(a) &= \sigma_n(a) \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_2 \oplus \dots, & \bar{\sigma}_n(c) &= \sigma_n(c) \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_2 \oplus \dots, \\ \bar{\sigma}_n(b) &= \sigma_n(b) \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_2 \oplus \dots \end{aligned}$$

Обозначим через F множество $\{a, b, c\}$ образующих группы Γ . Согласно лемме 4.5 последовательности операторов $\bar{\sigma}_n(g)$, $g \in F$, могут быть включены в непрерывные пути $\bar{\sigma}_t(g)$, $t \in [1, \infty)$, такие, что при $t \geq n$ все соотношения группы Γ выполняются с точностью до $3\varepsilon_n$. Тогда так же, как в [16], можно выбрать возрастающую последовательность $\{t_k\}$ значений параметра t таким образом, чтобы операторы $\bar{\sigma}_{t_k}(g) = \bar{\sigma}_k(g)$ удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{\sigma}_{k+1}(g) - \bar{\sigma}_k(g)\| &= 0, & g &\in F, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|r(\bar{\sigma}_k(a), \bar{\sigma}_k(b), \bar{\sigma}_k(c)) - I\| &= 0 \end{aligned}$$

для каждого соотношения $r = r(a, b, c)$ группы Γ . Без ограничения общности можно считать, что последовательность операторов $\{\bar{\sigma}_k(g)\}$ содержит $\{\bar{\sigma}_n(g)\}$ в качестве подпоследовательности.

Положим $\mathcal{H} = \oplus_k H_k$, где $H_k = H$, и для отрицательных k положим $\bar{\sigma}_k(g) = I$, $g \in F$. Пусть T – оператор сдвига в $\mathcal{H}$, $T(H_k) = H_{k-1}$. Обозначим через d образующую группы $\mathbb{Z}$. Определим представление ρ на образующих группы $\Gamma \times \mathbb{Z}$ равенствами

$$\rho(g) = \oplus_k \bar{\sigma}_k(g), \quad g \in F; \quad \rho(d) = T.$$

Непосредственно проверяется, что все соотношения группы $\Gamma \times \mathbb{Z}$ выполняются в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по модулю компактных операторов, что показывает корректность определения представления ρ в алгебру Калкина (ср. [15]). Так как ограничение этого представления на подгруппу $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \subset \Gamma \times \mathbb{Z}$ получено

из матриц Войкулеску, это представление определяет образующую Ботта в группе $\tilde{K}^0(B\mathbb{Z}^2)$, следовательно, представление ρ группы $\Gamma \times \mathbb{Z}$ в алгебру Калкина задает элемент $\beta \in K^0(B\Gamma)$.

Заметим, что в нашем примере отсутствие свойства ППА связано с наличием кручения. Интересно выяснить, обладает ли свойством ППА произвольная группа без кручения.

Автор благодарен А. С. Мищенко и Г. К. Педерсену за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Atiyah M. F., Hirzebruch F.* Vector bundles and homogeneous spaces in differential geometry // Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 1961. V. 3. P. 7–38. (Русский перевод: *Атья М. Ф., Хирцеbruch Ф.* Векторные пучки и однородные пространства в дифференциальной геометрии // Математика. 1962. Т. 6. № 2. С. 3–39.)
2. *Bhatia R., Davis C., McIntosh A.* Perturbation of spectral subspaces and solution of linear operator equations // Linear Algebra Appl. 1983. V. 52/53. P. 47–67.
3. *Bratteli O., Elliott G. A., Evans D. E., Kishimoto A.* Homotopy of a pair of approximately commuting unitaries in a simple C^* -algebra // Univ. of Oslo. Preprint Series. Preprint, 1997. № 11.
4. *Connes A., Gromov M., Moscovici H.* Conjecture de Novikov et fibrés presque plats // C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. 1990. V. 310. P. 273–277.
5. *Connes A., Higson N.* Deformations, morphismes asymptotiques et K -theorie bivariente // C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. 1990. V. 311. P. 101–106.
6. *Davidson K. R.* Almost commuting Hermitian matrices // Math. Scand. 1985. V. 56. P. 222–240.
7. *Exel R., Loring T. A.* Invariants of almost commuting unitaries // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 364–376.
8. *Exel R.* The soft torus. II. A variational analysis of commutator norms // J. Funct. Anal. 1994. V. 126. P. 259–273.
9. *Grove K., Karcher H., Ruh E. A.* Group actions and curvature // Invent. Math. 1974. V. 23. P. 31–48.
10. *Halmos P. R.* Some unsolved problems of unknown depth about operators on Hilbert space // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1976. V. 76. P. 67–76.
11. *De la Harpe P., Karoubi M.* Représentations approchées d'un groupe dans une algèbre de Banach // Manuscripta Math. 1977. V. 22. P. 293–310.
12. *Lance E. C.* Hilbert C^* -modules – a toolkit for operator algebraists // Lecture Notes. Leeds: University of Leeds 1993.
13. *Loring T. A.* Berg's technique for pseudo-actions with applications to AF embeddings // Canad. J. Math. 1991. V. 43. P. 119–157.
14. *Мануйлов В. М.* О почти коммутирующих операторах // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 3. С. 80–82.
15. *Мануйлов В. М., Мищенко А. С.* Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 53–72.
16. *Mishchenko A. S., Noor Mohammad.* Asymptotic representations of discrete groups // "Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications." Mathematics and its Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. V. 433. P. 299–312.
17. *Voiculescu D.* Remarks on the singular extension in the C^* -algebra of the Heisenberg group // J. Operator Theory. 1981. V. 5. P. 147–170.
18. *Voiculescu D.* Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 429–431.

Поступило в редакцию
28.V.1998