Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 91–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 05:28:31

УДК 511

М. А. Королёв

О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана

Получена новая оценка числа нулей $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ дзета-функции Римана, $14 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$, ординаты γ_n которых лежат на заданном промежутке и для которых разность $\gamma_{n+r} - \gamma_n$ является достаточно большой по сравнению со “средним” значением $2\pi r(\ln \frac{\gamma_n}{2\pi})^{-1}$.

Библиография: 15 наименований.

Введение

Одним из основных направлений в теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$ является изучение ее нулей, лежащих в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Количество $N(T)$ таких нулей с условием $0 < \operatorname{Im} s \leq T$ выражается следующей формулой Римана–Мангольдта:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T). \quad (1)$$

Входящая в (1) функция $S(T)$ называется *аргументом* дзета-функции $\zeta(s)$ на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. При T , отличных от ординаты нуля $\zeta(s)$, функция $S(T)$ определяется как приращение непрерывной ветви $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии с вершинами в точках 2 , $2 + iT$ и $\frac{1}{2} + iT$, деленное на π . В случае, когда T совпадает с ординатой нуля дзета-функции Римана, функции $N(T)$ и $S(T)$ определяются как полусуммы правого и левого пределов своих значений в точке T :

$$N(T) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (N(T + \varepsilon) + N(T - \varepsilon)), \quad S(T) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (S(T + \varepsilon) + S(T - \varepsilon)).$$

При неограниченном возрастании T справедлива оценка $S(T) = O(\ln T)$, так что формула (1) может быть записана в виде

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \quad (2)$$

Если $14 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$ – ординаты нулей дзета-функции Римана с положительной мнимой частью, занумерованные в порядке возрастания (а в случае совпадения нескольких ординат – в произвольном порядке), то из формулы (2) можно заключить, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\ln(\gamma_n/(2\pi))} \sim g_n = \frac{2\pi n}{\ln n}.$$

Несмотря на то, что в первом приближении ординаты γ_n ведут себя как члены последовательности g_n , поведение разностей между соседними ординатами подчинено гораздо более сложным закономерностям.

Приведем несколько результатов о распределении величин $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ при $n \rightarrow +\infty$. Для этого положим

$$\xi = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \frac{\ln(\gamma_n/(2\pi))}{2\pi}, \quad \eta = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \frac{\ln(\gamma_n/(2\pi))}{2\pi}.$$

Если бы ординаты нулей $\zeta(s)$ в точности совпадали с величинами g_n , то мы имели бы, очевидно, $\xi = \eta = 1$. Следующий факт, установленный впервые А. Сельбергом [1], указывает на нерегулярность в распределении γ_n . Именно, справедливы неравенства

$$\xi < 1 - b, \quad \eta > 1 + b,$$

где b – некоторая абсолютная постоянная, $0 < b < 1$.

В ряде более поздних работ эти неравенства неоднократно уточнялись различными авторами. Так, Х. Монтгомери [2] и Дж. Мюллер [3], опираясь на гипотезу Римана, доказали соответственно неравенства $\xi \leq 0.68$ и $\eta > 1.9$. Одни из последних результатов в этом направлении принадлежат Р. Холлу (см. [4], [5]), получившему без использования каких-либо гипотез оценки

$$\eta \geq \sqrt[4]{\frac{105}{4}} = 2.263 \dots \text{ (1999 г.)} \quad \text{и} \quad \eta \geq \sqrt{\frac{11}{2}} = 2.345 \dots \text{ (2002 г.)}.$$

Возможно, в действительности имеют место равенства $\xi = 0$, $\eta = +\infty$. Иными словами, предполагается, что существуют некоторая положительная функция $\Phi(x)$, неограниченно возрастающая при $x \rightarrow +\infty$, и две бесконечные последовательности номеров n_j и k_j , $j = 1, 2, \dots$, такие, что для любого $j \geq 1$ выполняются неравенства

$$\gamma_{n_j+1} - \gamma_{n_j} \leq \frac{2\pi\Phi^{-1}(j)}{\ln(\gamma_{n_j}/(2\pi))}, \quad \gamma_{k_j+1} - \gamma_{k_j} \geq \frac{2\pi\Phi(j)}{\ln(\gamma_{k_j}/(2\pi))}.$$

Наряду с задачей оценки величин ξ и η рассматривается ее обобщение – задача о нахождении соответственно верхней и нижней границ величин

$$\xi_r = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\gamma_{n+r} - \gamma_n) \ln(\gamma_n/(2\pi))}{r \cdot 2\pi}, \quad \eta_r = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\gamma_{n+r} - \gamma_n) \ln(\gamma_n/(2\pi))}{r \cdot 2\pi},$$

где $r \geq 2$ – целое число. В этом направлении А. Фуджи [6] получил оценки вида

$$\xi_r \leq 1 - \exp\{-b_1 r^2\}, \quad \eta_r \geq 1 + \exp\{-b_1 r^2\},$$

где b_1 – положительная абсолютная постоянная. Более сильный результат

$$\xi_r \leq 1 - \frac{b_2}{\sqrt{r}}, \quad \eta_r \geq 1 + \frac{b_2}{\sqrt{r}}, \quad b_2 > 0,$$

принадлежащий А. Сельбергу, процитирован (без доказательства) в упомянутой выше статье Дж. Мюллер.

Наряду с приведенными имеются несколько утверждений, указывающих на то, что случаи, когда расстояние между последовательными ординатами велико, встречаются достаточно редко: доля ординат γ_n с условием

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(\gamma_n/(2\pi))}$$

очень быстро убывает с ростом λ , обращаясь в нуль при

$$\lambda \gg \frac{\ln \gamma_n}{\ln \ln \ln \gamma_n}.$$

Последний факт является следствием теоремы Д. Литтлвуда [7] о том, что для любого t , большего некоторого значения $t_0 > 0$, найдется нуль $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана с условием

$$|t - \gamma| < \frac{16}{\ln \ln \ln t}.$$

Далее, если $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, а целое число r удовлетворяет условию $1 \leq r \leq \lambda^{-1} T \ln T$, то для числа ν_r пар γ_n, γ_{n+r} , удовлетворяющих условиям

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n, \gamma_{n+r} \leq 2T,$$

в работе [8] А. Фуджи получил следующую оценку:

$$\nu_r \leq c_1 N(T) \exp \{ -c(\lambda r)^{2/3} (\ln \lambda r)^{-1/3} \},$$

где c, c_1 – положительные абсолютные постоянные. Более слабый результат для случая $r = 1$, а именно оценка

$$\nu_1 \leq c_1 N(T) \exp \{ -c\lambda^{1/2} (\ln \lambda)^{-1/4} \},$$

приведен в комментариях Д. Хизбрауна в [9, гл. IX].

Наконец, в работе А. Ивича [10] доказано, что количество ординат γ_n с условиями $T < \gamma_n \leq T + H$, $H = T^{1/2+\varepsilon}$, $\gamma_{n+1} - \gamma_n > \lambda(\ln T)^{-1}$ не превосходит

$$c_1 (N(T + H) - N(T)) \exp \{ -c\lambda \},$$

где c, c_1 – некоторые абсолютные постоянные.

Одним из следствий теоремы Фуджи о верхней границе величины ν_r явилась оценка суммы

$$S_k(T) = \sum_{0.5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k$$

вида

$$S_k(T) \leq c(k) \frac{N(T)}{(\ln T)^k}, \quad c(k) = (c_2 k^{3/2} \ln(k+3))^k,$$

где k – целое число, $1 \leq k \leq c_3 (T \ln T)^{2/3}$, c_2, c_3 – абсолютные постоянные. Отметим также, что для случая $k = 2$ в 1990 г. в работе [11] была получена более точная оценка:

$$\sum_{T < \gamma_n \leq 2T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \leq 8.55 \frac{2\pi T}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T > T_0 > 0.$$

При фиксированном k оценки Фуджи являются правильными по порядку роста $S_k(T)$ как функции T . Действительно, возводя обе части равенства

$$T + o(1) = \sum_{T < \gamma_n \leq 2T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$$

в k -ю степень ($k > 1$) и пользуясь затем неравенством Гёльдера, получим

$$(T + o(1))^k \leq (N(2T) - N(T))^{k-1} S_k(T),$$

откуда

$$S_k(T) \gg \frac{T^k}{(T \ln T)^{k-1}} \gg \frac{N(T)}{(\ln T)^k}.$$

Однако при растущем k множитель $c(k)$ не является наилучшим.

Целью настоящей статьи является доказательство ряда утверждений, уточняющих теоремы Фуджи и Ивича. Именно, в работе получены:

- 1) новая оценка числа пар γ_n, γ_{n+r} с условием

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))},$$

лежащих на “коротком” промежутке $(T, T + T^\alpha]$, $0 < \alpha < \frac{1}{3}$;

- 2) новая оценка суммы $S_k(T)$, справедливая при произвольном (в том числе нецелом) $k > 0$.

Точные формулировки основных результатов статьи приведены в § 2.

Введем следующие обозначения: $N(\sigma, T)$ – количество нулей дзета-функции Римана в прямоугольнике $\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$; ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$; $T \geq T_0 > 0$; $H = T^{a+\varepsilon}$, где величина a принимает два значения: $a = \frac{27}{82}$ и $a = 0$; $x = T^{0.1\varepsilon}$, если $a = \frac{27}{82}$, и $x = T^{0.05\varepsilon}$, если $a = 0$; $\theta, \theta_1, \dots$ – некоторые комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы, в разных соотношениях, вообще говоря, различные.

При таком выборе параметров T , H и x для нулей дзета-функции Римана $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ плотностная теорема вида

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma} \quad (3)$$

справедлива для любого σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$:

- 1) при $H = T^{27/82+\varepsilon}$ для всех $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$;
- 2) при $H = T^\varepsilon$ для “почти всех” T .

Последнее означает, что при произвольном достаточно большом X , $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, мера множества $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ тех точек T , $X < T < 2X$, для которых неравенство (3) при $H = T^\varepsilon$ (или при $H = X^\varepsilon$) нарушается, не превосходит величины $O(X^{1-0.01\varepsilon})$. Поэтому везде далее в случае $H = T^\varepsilon$ будем предполагать, что T содержится в некотором промежутке $(X, 2X)$ и не принадлежит “исключительному” множеству $\mathcal{E}(X)$.

Доказательства соответствующих плотностных теорем см. в [12]–[14].

§ 1. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $y > e^6$, $c > 0$, $\delta > 0$, $m \geq 1$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\mu + \nu = 2m$, и пусть $p_1, \dots, p_\mu, q_1, \dots, q_\nu$ принимают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \dots p_\mu \neq q_1 \dots q_\nu$. Если $a(n)$ – последовательность комплексных чисел, для которой $|a(n)| \leq \delta$ при всех $n \leq y$, то для интеграла

$$I = \int_0^c \sum_{p_1, \dots, p_\mu} \sum_{q_1, \dots, q_\nu} \frac{a(p_1) \dots a(p_\mu) \bar{a}(q_1) \dots \bar{a}(q_\nu)}{(p_1 \dots p_\mu q_1 \dots q_\nu)^{0.5}} \left(\frac{q_1 \dots q_\nu}{p_1 \dots p_\mu} \right)^{it} dt$$

справедлива оценка

$$|I| \leq (\delta^2 y^3)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения см. в [13].

ЛЕММА 2. Пусть m – целое число, $1 \leq m \leq \frac{1}{192} \ln x$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$, c – произвольное число с условием $0 < c \leq H(\ln T)^{-2}$, $H_1 = H + c$. Тогда имеет место оценка

$$\int_T^{T+H_1} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt < (Bm^2)^m H,$$

где $B = e^{37} \pi^{-2} \varepsilon^{-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения для $c = 0$ см. в [13]; те же рассуждения практически дословно переносятся на случай $0 < c \leq H(\ln T)^{-2}$.

ЛЕММА 3. Пусть m, B – те же, что и в лемме 2, r – целое число, $r \geq 1$, $\lambda > 0$, $0 < \lambda r \leq 18\sqrt{B}em$, $h = \frac{\pi}{2} \lambda r \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1}$, и пусть

$$I_m = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt.$$

Тогда справедливо неравенство $I_m < (9Bm^2)^m H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x^{1/m}$ и обозначим

$$U(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}}.$$

Пользуясь тождеством

$$S(t+2h) - S(t) = (S(t+2h) + U(t+2h)) - (S(t) + U(t)) - \pi^{-1}(V(t) + \bar{V}(t)),$$

в котором

$$V(t) = \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it}, \quad a(p) = p^{ih} \sin(h \ln p),$$

находим $I_m \leq 3^{2m-1} (2I_m^{(1)} + I_m^{(2)})$, где

$$I_m^{(1)} = \int_T^{T+H+2h} (S(t) + U(t))^{2m} dt, \quad I_m^{(2)} = \pi^{-2m} \int_T^{T+H} (V(t) + \bar{V}(t))^{2m} dt.$$

Согласно лемме 2 интеграл $I_m^{(1)}$ не превосходит $(Bm^2)^m H$ по абсолютной величине. Далее, нетрудно заметить, что

$$I_m^{(2)} = \pi^{-2m} \sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} j(\nu), \quad j(\nu) = \int_T^{T+H} V^\nu(t) \bar{V}^{2m-\nu}(t) dt.$$

Каждая из величин $a(p)$ при $p < y$ не превосходит по модулю $h \ln p < h \ln y = \delta$. Следовательно, по лемме 1 в случае $\nu \neq m$ интегралы $j(\nu)$ удовлетворяют неравенствам

$$|j(\nu)| = \left| \int_T^{T+H} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_\nu \leq y \\ q_1, \dots, q_\mu \leq y}} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_\mu)}{(p_1 \dots q_\mu)^{0.5}} \left(\frac{p_1 \dots p_\nu}{q_1 \dots q_\mu} \right)^{it} dt \right| \\ \leq (\delta^2 y^3)^m = x^3 \delta^{2m} \leq H^{0.15} \delta^{2m},$$

в которых $\mu = 2m - \nu$. Аналогично оценивается и вклад в $j(m)$ “внедиагональных” слагаемых:

$$\left| \int_T^{T+H} \sum_{p_1 \dots p_m \neq q_1 \dots q_m} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \dots q_m)^{0.5}} \left(\frac{p_1 \dots p_m}{q_1 \dots q_m} \right)^{it} dt \right| \leq H^{0.15} \delta^{2m}.$$

Таким образом, при некоторых θ_s с условием $|\theta_s| \leq 1$, $0 \leq s \leq 2m$, имеем

$$j(\nu) = \theta_\nu H^{0.15} \delta^{2m}, \quad \nu \neq m, \quad j(m) = HK(m) + \theta_m H^{0.15} \delta^{2m}, \\ K(m) = \sum_{p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_m} \frac{a(p_1) \dots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \dots q_m)^{0.5}} = \sum_{p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_m} \frac{|a(p_1)|^2 \dots |a(p_m)|^2}{p_1 \dots p_m}.$$

Так как числа $p_1, \dots, q_m$ простые, то при фиксированных $p_1, \dots, p_m$ все решения $q_1, \dots, q_m$ уравнения $p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_m$ могут быть получены из набора $p_1, \dots, p_m$ с помощью перестановок, общее число которых не превосходит $m!$. Таким образом,

$$K(m) \leq m! \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^m \leq m! \left(\delta h \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^m < m! (2\delta^2)^m, \\ I_m^{(2)} \leq \pi^{-2m} \left(m! \binom{2m}{m} (2\delta^2)^m H + H^{0.15} \delta^{2m} \sum_{\nu=0}^{2m} \binom{2m}{\nu} \right) \\ < \pi^{-2m} H \delta^{2m} \left(\sqrt{2} \left(\frac{8m}{e} \right)^m + 4^m \right) < 2\sqrt{2} \left(\frac{8\delta^2}{e\pi^2} m \right)^m H.$$

Поскольку

$$\delta = \frac{1}{2} \pi \lambda r \frac{\varepsilon}{10m} \frac{\ln T}{\ln(T/(2\pi))} \leq \frac{9}{10} \pi e \varepsilon \sqrt{B} \frac{\ln T}{\ln(T/(2\pi))} < \pi e \varepsilon \sqrt{B},$$

то

$$I_m^{(2)} < 2\sqrt{2} \left(\frac{8}{e\pi^2} \pi^2 e^2 \varepsilon^2 B m \right)^m H = 2\sqrt{2} (8e\varepsilon^2 B m)^m H < (Bm)^m H.$$

Следовательно, исходный интеграл не превосходит

$$3^{2m} \left(\frac{2}{3} (Bm^2)^m H + \frac{1}{3} (Bm)^m H \right) \leq (9Bm^2)^m H.$$

Лемма доказана.

§ 2. Основные утверждения

ТЕОРЕМА 1. Пусть для чисел ε , T , H , x справедлива плотностная теорема вида (3), и пусть r – произвольное целое число с условием $1 \leq r \leq \varepsilon(16 \cdot 3000)^{-1} \ln \ln \ln T$, $\lambda \geq 6(1 - 1/r)$. Тогда для количества $\nu_r = \nu_r(\lambda; T, H)$ ординат γ_n нулей дзета-функции Римана, удовлетворяющих условиям

$$T < \gamma_n, \gamma_{n+r} \leq T + H, \quad \frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/2(\pi))},$$

справедлива оценка

$$\nu_r \leq e^4 (N(T+H) - N(T)) \exp\{-\kappa_1 \lambda r\}, \quad \kappa_1 = \frac{2\pi}{9} e^{-19.5} \varepsilon^{1.5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $c = 9\sqrt{B}$, $\kappa_1 = 2(ce)^{-1}$, где B – постоянная из леммы 2. Если $0 < \lambda r \leq 2ce = 4\kappa_1^{-1}$, то искомое неравенство следует из тривиальной оценки

$$\nu_r \leq N(T+H) - N(T) \leq \exp\{4 - \kappa_1 \lambda r\} (N(T+H) - N(T)).$$

Далее, если γ_n – произвольная ордината из промежутка $(T, T+H]$, то в силу теоремы Литтлвуда каждый из интервалов

$$(\gamma_n + (3s-2)h_1, \gamma_n + 3sh_1), \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad h_1 = 16(\ln \ln \ln T)^{-1},$$

содержит по меньшей мере одну ординату нуля $\zeta(s)$. Поэтому расстояние между γ_n и γ_{n+r} не превосходит

$$3rh_1 \leq \frac{3\varepsilon \ln \ln \ln T}{16 \cdot 3000} 16(\ln \ln \ln T)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1000}.$$

Но тогда при λ и r , удовлетворяющих условию

$$\lambda r > \frac{\varepsilon}{2000\pi} \ln \frac{T}{2\pi},$$

величина ν_r тождественно равна нулю. Действительно, в противном случае нашлась бы пара ординат γ_n, γ_{n+r} , расстояние между которыми превышает

$$\frac{2\pi\lambda r}{\ln(T/(2\pi))} > \frac{2\pi\varepsilon}{2000\pi} = \frac{\varepsilon}{1000},$$

что невозможно. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь случай, когда

$$2ce < \lambda r \leq \frac{\varepsilon}{2000\pi} \ln \frac{T}{2\pi}.$$

Положим тогда

$$h = \frac{\pi}{2} \lambda r \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1}, \quad L(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + \frac{7}{8}.$$

Пусть для некоторой пары ординат γ_n, γ_{n+r} из промежутка $(T, T+H]$ выполнено неравенство

$$\gamma_{n+r} - \gamma_n \geq 4h = \frac{2\pi\lambda r}{\ln(T/(2\pi))}.$$

Тогда нетрудно заметить, что при любом t из промежутка $(\gamma_n, \gamma_n + 2h)$ разность $N(t+2h) - N(t)$ не превышает $r-1$, в то время как соответствующее приращение функции $L(t)$ имеет вид

$$L(t+2h) - L(t) = 2hL'(t) + 2h^2L''(t+2\theta h) = \frac{h}{\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + \frac{h^2}{\pi(t+2\theta h)} > \frac{h}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} = \frac{\lambda r}{2}.$$

Из формулы Римана–Мангольдта и условия $\lambda \geq 6(1 - 1/r)$ находим

$$|S(t+2h) - S(t)| = |L(t+2h) - L(t) - (N(t+2h) - N(t))| \geq \frac{\lambda r}{2} - (r-1) \geq \frac{\lambda r}{3}.$$

Возведем обе части неравенства

$$|S(t+2h) - S(t)| \geq \frac{\lambda r}{3}$$

в степень $2m$ (где $m \geq 1$ – целое число) и проинтегрируем по промежутку $(\gamma_n, \gamma_n + 2h)$; получим

$$2h \left(\frac{\lambda r}{3} \right)^{2m} \leq \int_{\gamma_n}^{\gamma_n + 2h} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt \leq \int_{\gamma_n}^{\gamma_n + r} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt.$$

Сложим такие неравенства, отвечающие всем рассматриваемым парам γ_n, γ_{n+r} . Левая часть полученного таким образом соотношения будет равна $2h\nu_r(\lambda r/3)^{2m}$, а правая представится суммой интегралов по промежуткам, объединение которых содержится в $(T, T+H]$. Промежутки $(\gamma_n, \gamma_{n+r}]$, по которым берутся интегралы, могут пересекаться, однако любая точка t , $T \leq t \leq T+H$, может принадлежать не более чем r таким промежуткам; например, если $\gamma_k < t \leq \gamma_{k+1}$, то это могут быть лишь промежутки

$$(\gamma_{k-r+1}, \gamma_{k+1}], (\gamma_{k-r+2}, \gamma_{k+2}], \dots, (\gamma_{k-1}, \gamma_{k+r-1}], (\gamma_k, \gamma_{k+r}].$$

Учитывая это, находим

$$2h\nu_r \left(\frac{\lambda r}{3} \right)^{2m} \leq rI_m, \quad I_m = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2m} dt.$$

Положим теперь $m = [\lambda r(ce)^{-1}]$ и заметим, что

$$m \geq \frac{\lambda r}{ce} - 1 > 2 - 1 = 1,$$

$$m \leq \frac{\lambda r}{ce} \leq \frac{1}{ce} \frac{\varepsilon}{2000\pi} \ln \frac{T}{2\pi} = \frac{1}{9\pi e\sqrt{B}} \frac{\varepsilon}{2000} \ln \frac{T}{2\pi} < \frac{\varepsilon}{20 \cdot 192} \ln \frac{T}{2\pi} \leq \frac{1}{192} \ln x,$$

$$\lambda r \leq 2\lambda r - ce = 2ce \left(\frac{\lambda r}{ce} - 1 \right) \leq 2cem = 18me\sqrt{B}.$$

Таким образом, интеграл I_m удовлетворяет условиям леммы 3 и, следовательно, не превосходит $(9Bm^2)^m H$. Переходя к оценке величины ν_r , получим

$$\begin{aligned} \nu_r &\leq \frac{1}{2} H h^{-1} r \left(\frac{81Bm^2}{\lambda^2 r^2} \right)^m = \frac{1}{2} H h^{-1} r \left(\frac{cm}{\lambda r} \right)^{2m} \leq \frac{1}{2} H h^{-1} r e^{-2m} \\ &\leq \frac{e^2}{2} H h^{-1} r \exp \left\{ -\frac{2\lambda r}{ce} \right\} = 2e^2 \frac{H}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} \lambda^{-1} \exp \{ -\varkappa_1 \lambda r \} \\ &< e^4 (N(T+H) - N(T)) \exp \{ -\varkappa_1 \lambda r \}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, и пусть числа λ и r удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда количество пар ординат γ_n, γ_{n+r} нулей дзета-функции Римана, лежащих на промежутке $(T, T+H]$ и удовлетворяющих неравенству

$$\gamma_{n+r} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda r}{\ln(T/(2\pi))},$$

не превосходит $e^4(N(T+H) - N(T)) \exp\{-\kappa_1\lambda r\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, $H = X^\varepsilon$, и пусть числа λ и r удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда неравенство

$$\nu_r(\lambda; T, H) \leq e^4(N(T+H) - N(T)) \exp\{-\kappa_1\lambda r\}$$

справедливо для всех T из промежутка $X < T < 2X$, за исключением значений, образующих множество с мерой $O(X^{1-0.01\varepsilon})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T \geq T_0 > 0$, r — целое число, $1 \leq r \leq 10^{-8} \ln \ln \ln T$, $\lambda \geq \frac{20}{3}(1 - \frac{1}{r})$. Тогда для количества $\nu_r = \nu_r(\lambda; T)$ ординат γ_n нулей $\zeta(s)$, лежащих на промежутке $0 < \gamma_n \leq T$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(\gamma_n/(2\pi))},$$

справедлива оценка

$$\nu_r \leq e^{4.1} N(T) \exp\{-\kappa\lambda r\}, \quad \kappa = e^{-31.4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Литтлвуда достаточно рассмотреть случай, когда

$$\lambda \leq \frac{16}{\pi} \frac{\ln T}{\ln \ln \ln T}.$$

Возьмем $\varepsilon = (2000)^{-1}$, $\alpha = \frac{27}{82} + \varepsilon$ в следствии 1 и определим числа T_s, H_s , $s = 1, 2, \dots, l$, равенствами

$$T_1 + H_1 = T_1 + T_1^\alpha = T, \quad T_s + H_s = T_s + T_s^\alpha = T_{s-1},$$

причем l положим равным наименьшему значению s с условием $T_{s+1} \leq T^{1-\alpha}$.

Если ординаты γ_n, γ_{n+r} , попавшие на промежуток $(T_s, T_s + H_s]$, удовлетворяют неравенству

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(\gamma_n/(2\pi))},$$

то они, тем более, удовлетворяют и неравенству

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda_1}{\ln(T_s/(2\pi))}, \quad \lambda_1 = \frac{9}{10}\lambda.$$

Поскольку числа λ и r таковы, что

$$\lambda_1 = \frac{9}{10}\lambda \geq \frac{9}{10} \cdot \frac{20}{3} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = 6 \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leq r \leq \varepsilon(16 \cdot 3000)^{-1} \ln \ln \ln T_s,$$

то для количества n_s таких ординат справедлива оценка

$$n_s \leq e^4 (N(T_s + H_s) - N(T_s)) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\} + r,$$

где последнее слагаемое отвечает возможному случаю, когда одновременно выполняются следующие условия:

$$T_s < \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots \leq \gamma_{n+r-1} \leq T_s + H_s < \gamma_{n+r} \leq \gamma_{n+r+1} \leq \dots \leq \gamma_{n+2r-1},$$

$$\frac{\gamma_{n+j-r} - \gamma_{n+j}}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(\gamma_{n+j}/(2\pi))}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1.$$

Величину n_{l+1} , равную числу искоемых ординат из промежутка $(0, T_l]$, оценим тривиально: $n_{l+1} \leq N(T_l) + r$.

Суммируя полученные неравенства и учитывая, что

$$T_l = T_{l+1} + T_{l+1}^\alpha < 2T_{l+1} \leq 2T^{1-\alpha},$$

будем иметь

$$\nu_r(\lambda; T) \leq n_1 + n_2 + \dots + n_l + n_{l+1}$$

$$\leq e^4 (N(T_1 + H_1) - N(T_l)) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\} + (l+1)r + N(2T^{1-\alpha}).$$

Чтобы оценить число l сверху, заметим следующее. Поскольку величины H_s , $s = 1, 2, \dots, l$, образуют монотонно убывающую последовательность, то из условия $T_l > T^{1-\alpha}$ заключаем:

$$H_1 > H_2 > \dots > H_l = T_l^\alpha > T^{\alpha(1-\alpha)}.$$

Следовательно, общее число промежутков не превосходит

$$\frac{T - T^{1-\alpha}}{T^{\alpha(1-\alpha)}} + 1 < T^{1-\alpha(1-\alpha)} + 1 < T^{1-\alpha/2}.$$

Пользуясь тем, что

$$\varkappa_1 \lambda_1 r \leq \frac{9}{10} \varkappa_1 \frac{16}{\pi} \frac{\ln T}{\ln \ln \ln T} \cdot 10^{-8} \ln \ln \ln T < \frac{\alpha}{6} \ln T,$$

находим

$$\begin{aligned} \nu_r(\lambda; T) &\leq e^4 N(T) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\} + 2T^{1-\alpha/2} r + N(2T^{1-\alpha}) \\ &= e^4 N(T) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\} \left(1 + 2e^{-4} r \frac{T^{1-\alpha/2+\alpha/6}}{N(T)} + e^{-4} \frac{N(2T^{1-\alpha})}{N(T)} \right) \\ &< e^4 N(T) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\} (1 + T^{-\alpha/3}) < e^{4.1} N(T) \exp\{-\varkappa_1 \lambda_1 r\}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\varkappa_1 \lambda_1 = \frac{\pi}{5} e^{-19.5} (2000)^{-1.5} \lambda > e^{-31.4} \lambda = \varkappa \lambda.$$

Теорема доказана.

§ 3. Верхние и нижние границы сумм $S_\kappa(T)$

Оценка теоремы 2 может быть использована для нахождения новой, более точной верхней границы сумм $S_\kappa(T)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $T \geq T_0 > 0$, κ – произвольное положительное число. Тогда имеет место оценка

$$S_\kappa(T) < c_1 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa N(T),$$

где $c_1 = e^{37}$, $c = e^{31.4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все ординаты γ_n , лежащие на промежутке $(\frac{1}{2}T, T]$, распределим по классам $E_0, E_1, \dots, E_r, \dots$, относя к классу E_r те из них, которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi r}{\ln(T/(2\pi))} \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{2\pi(r+1)}{\ln(T/(2\pi))}.$$

В силу теоремы 2 количество элементов в классе E_r не превосходит

$$e^{4.1} N(T) \exp\{-\varkappa r\} \leq e^{4.2} N(T) \exp\{-\varkappa(r+1)\} = n_r, \quad \varkappa = e^{-31.4}.$$

Для ординат γ_n , попавших в класс E_r , слагаемое $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^\kappa$ оценим сверху величиной $(2\pi(r+1) \ln^{-1} \frac{T}{2\pi})^\kappa$; получим

$$\begin{aligned} S_\kappa(T) &\leq n_0 \left(\frac{2\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa + n_1 \left(\frac{4\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa + \dots + n_r \left(\frac{2\pi(r+1)}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa + \dots \\ &\leq e^{4.2} N(T) \sum_{r=1}^{+\infty} \left(\frac{2\pi r}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa e^{-\kappa r} = e^{4.2} N(T) \left(\frac{2\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa \sum_{r=1}^{+\infty} r^\kappa e^{-\kappa r}. \end{aligned}$$

Слагаемые в сумме по r монотонно возрастают, достигая при $r = \kappa \varkappa^{-1} = \kappa c$ максимального значения

$$\left(\frac{\kappa}{e\varkappa} \right)^\kappa = \left(\frac{\kappa c}{e} \right)^\kappa,$$

после чего монотонно убывают. Следовательно, их сумма не превосходит

$$2 \left(\int_0^{\kappa c} y^\kappa e^{-\kappa y} dy + \left(\frac{\kappa c}{e} \right)^\kappa + \int_{\kappa c}^{+\infty} y^\kappa e^{-\kappa y} dy \right) < 4\Gamma(\kappa + 1) c^{\kappa+1}$$

(множитель 2 необходим для того, чтобы учесть наибольшее слагаемое в сумме по $r \leq \kappa c$ и наибольшее слагаемое в сумме по $r > \kappa c$). Возвращаясь к оценке $S_\kappa(T)$, будем иметь

$$S_\kappa(T) \leq 4ce^{4.2} N(T) \left(\frac{2\pi c}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa \Gamma(\kappa + 1) \leq c_1 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c}{\ln(T/(2\pi))} \right)^\kappa N(T),$$

где $c_1 = e^{37}$, $c = \varkappa^{-1} = e^{31.4}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С ростом κ правая часть оценки из теоремы 3 растет как

$$c_2 \sqrt{\kappa} (c_3 \kappa)^\kappa N(T) \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-\kappa},$$

где $c_2 = c_1 \sqrt{2\pi}$, $c_3 = 2\pi c e^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подобным образом может быть получена верхняя оценка суммы

$$S_{\kappa,r}(T, H) = \sum_{T < \gamma_n \leq T+H} \left(\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \right)^\kappa.$$

Выше было показано, что при фиксированном $\kappa \geq 1$ оценка Фуджи, а также и оценка из теоремы 3 суммы $S_\kappa(T)$ являются правильными по порядку. Следующая теорема утверждает, что эти оценки остаются правильными по порядку и для случая фиксированного κ с условием $0 < \kappa < 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $T \geq T_0 > 0$, κ – произвольное число с условием $0 < \kappa < 1$. Тогда справедливо неравенство

$$S_\kappa(T) > c_2 \kappa \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))}, \quad c_2 = e^{-170}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\alpha = \left(\frac{45}{2^{11} \pi^3} \right)^{1/2} \frac{1}{c^2 \sqrt{c_1}},$$

где c, c_1 – постоянные из теоремы 3, и определим суммы $V_\kappa(T)$ равенствами

$$V_\kappa(T) = \sum_{0.5T < \gamma_n \leq T} \Delta_n^\kappa, \quad \Delta_n = \alpha(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \ln \frac{T}{2\pi}.$$

Из теоремы 3 следует, что при целом $k \geq 1$ и $\kappa = 4k$ верна оценка $V_\kappa(T) < c_1(2\pi\alpha c)^{4k}(4k)!N(T)$. Возводя в квадрат обе части равенства

$$\frac{1}{2}T + O(1) = \sum_{0.5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$$

и пользуясь неравенством Коши, находим

$$\frac{1}{4}T^2 + O(T) \leq \left(N(T) - N\left(\frac{1}{2}T\right) \right) S_2(T) < \frac{T}{4\pi} (\ln T) S_2(T).$$

Следовательно,

$$S_2(T) > \frac{3T}{\ln T}, \quad V_2(T) = \left(\alpha \ln \frac{T}{2\pi} \right)^2 S_2(T) > 2\alpha^2 T \ln T.$$

Далее воспользуемся тождеством

$$|z|^\kappa = c(\kappa) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(|z|u)}{u^{1+\kappa}} du,$$

в котором z – произвольное комплексное число,

$$c^{-1}(\kappa) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{1+\kappa}} du = \frac{2^{\kappa-1}}{\kappa} \Gamma(1-\kappa) \cos \frac{\pi\kappa}{2}, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Положив в этом тождестве $z = \Delta_n$ и заменив несобственный интеграл интегралом по отрезку $0 \leq u \leq 1$, получим

$$\begin{aligned}\Delta_n^\kappa &\geq c(\kappa) \int_0^1 \frac{\sin^2(\Delta_n u)}{u^{1+\kappa}} du = \frac{1}{2} c(\kappa) \int_0^1 \frac{1}{u^{1+\kappa}} \left(\sum_{\nu=1}^{+\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(2\Delta_n u)^{2\nu}}{(2\nu)!} \right) du \\ &= \frac{1}{2} c(\kappa) \int_0^1 \frac{1}{u^{1+\kappa}} \left(2\Delta_n^2 u^2 - \frac{1}{4!} (2\Delta_n u)^4 + \frac{1}{6!} (2\Delta_n u)^6 - \dots \right) du.\end{aligned}$$

В знакопеременной сумме, стоящей под знаком интеграла, все слагаемые со знаком “плюс”, начиная со второго, заменим нулями; получим

$$\begin{aligned}\Delta_n^\kappa &\geq \frac{1}{2} c(\kappa) \int_0^1 \frac{1}{u^{1+\kappa}} \left(2\Delta_n^2 u^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{4k} \Delta_n^{4k} u^{4k}}{(4k)!} \right) du \\ &= \frac{1}{2} c(\kappa) \left(\frac{2}{2-\lambda} \Delta_n^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{4k} \Delta_n^{4k}}{(4k-\lambda)(4k)!} \right) \geq \frac{1}{2} c(\kappa) \left(\Delta_n^2 - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{4k} \Delta_n^{4k}}{(4k)!} \right).\end{aligned}$$

Просуммируем правую и левую части последнего неравенства по n , отвечающим условию $\frac{1}{2}T < \gamma_n \leq T$, и воспользуемся оценками сумм $V_2(T)$, $V_{4k}(T)$, полученными выше. Таким образом, находим

$$\begin{aligned}V_\kappa(T) &\geq \frac{1}{2} c(\kappa) \left(V_2(T) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{4k}}{(4k)!} V_{4k}(T) \right) \\ &> \frac{1}{2} c(\kappa) \left(2\alpha^2 T \ln T - \frac{c_1}{3} N(T) \sum_{k=1}^{+\infty} (4\pi\alpha c)^{4k} \right) \\ &\geq c(\kappa) \left(2\pi\alpha^2 - \frac{c_1}{6} (4\pi\alpha c)^4 \sum_{k=0}^{+\infty} (4\pi\alpha c)^{4k} \right) N(T).\end{aligned}$$

Из определения α следует, что $4\pi\alpha c \leq \frac{1}{2}$, так что

$$V_\kappa(T) \geq c(\kappa) \left(2\pi\alpha^2 - \frac{8c_1}{45} (4\pi\alpha c)^4 \right) N(T) = c(\kappa) (2\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2) N(T) = \pi\alpha^2 c(\kappa) N(T).$$

Переходя к оценке суммы $S_\kappa(T)$, найдем

$$S_\kappa(T) = \left(\alpha \ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-\kappa} V_\kappa(T) > \pi\alpha^{2-\kappa} c(\kappa) \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))} \geq \pi\alpha^2 c(\kappa) \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))}.$$

Преобразуем явное выражение для $c(\kappa)$:

$$c(\kappa) = \frac{2\kappa}{\pi} 2^{1-\kappa} \frac{1}{\Gamma(2-\kappa)} \frac{\frac{\pi}{2}(1-\kappa)}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-\kappa))} \geq \frac{2\kappa}{\pi}.$$

Следовательно,

$$S_\kappa(T) \geq \pi\alpha^2 \frac{2\kappa}{\pi} \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))} = \frac{\kappa}{706c_1 c^4} \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))} > e^{-170} \kappa \frac{N(T)}{\ln^\kappa(T/(2\pi))}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Примененный при доказательстве теоремы 4 способ выражения суммы дробных степеней некоторых величин через суммы их четных степеней был использован А. Гошем [15] при решении задачи о числе перемен знака функции $S(t)$ на заданном промежутке.

Список литературы

1. A. Selberg, "The zeta function and the Riemann hypothesis", *C. R. Dixieme Congres Math. Scandinaves* (1946), **10**, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200.
2. H. L. Montgomery, "The pair correlation of zeros of the zeta function", *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. XXIV (St. Louis Univ., MO, 1972), Analytic Number Theory, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 181–193.
3. J. Mueller, "On the difference between consecutive zeros of the Riemann zeta function", *J. Number Theory*, **14**:3 (1982), 327–331.
4. R. R. Hall, "The behaviour of the Riemann zeta-function on the critical line", *Mathematika*, **46**:2 (1999), 281–313.
5. R. R. Hall, "A Wirtinger type inequality and the spacing of the zeros of the Riemann zeta-function", *J. Number Theory*, **93**:2 (2002), 235–245.
6. A. Fujii, "On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1975), 139–142.
7. J. E. Littlewood, "On the zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **22** (1924), 295–318.
8. A. Fujii, "On the difference between r consecutive ordinates of the zeros of the Riemann zeta function", *Proc. Japan Acad.*, **51**:10 (1975), 741–743.
9. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edition, revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford, 1986.
10. A. Ivić, "On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros", *Liet. Mat. Rink.*, **42**:1 (2002), 31–45; англ.пер.: A. Ivić, "On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros", *Lithuanian Math. J.*, **42**:1 (2002), 25–36.
11. A. Fujii, "On the gaps between consecutive zeros of the Riemann zeta function", *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **66**:4 (1990), 97–100.
12. А. А. Карацуба, "О функции $S(t)$ ", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56; англ. пер.: A. A. Karatsuba, "On the function $S(t)$ ", *Izv. Math.*, **60**:5 (1996), 901–931.
13. М. А. Королёв, "Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 21–60; англ. пер.: M. A. Korolev, "The argument of the Riemann zeta-function on the critical line", *Izv. Math.*, **67**:2 (2003), 225–264.
14. А. А. Карацуба, М. А. Королёв, "Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой", *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92; англ. пер.: A. A. Karatsuba, M. A. Korolev, "Behaviour of the argument of the Riemann zeta function on the critical line", *Russian Math. Surveys*, **61**:3 (2006), 389–482.
15. A. Ghosh, "On Riemann's zeta-function – sign changes of $S(T)$ ", *Recent progress in analytic number theory*, vol. 1 (Durham, 1979), Academic Press, London–New York, 1981, 25–46.

М. А. КОРОЛЁВ (M. A. KOROLEV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило в редакцию

20.03.2007