Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шевчишин, Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 4, 153–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:01:55

УДК 513.8+515.1

В. В. Шевчишин

Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений

Доказано отсутствие лагранжевых вложений бутылки Клейна K в $\mathbb{CP}^2$. Рассматриваются специальные вложения K в симплектический пучок Лефшеца $\text{rg}: X \rightarrow S^2$ и изучается его монодромия. В качестве основного технического средства используется развитая в работе комбинаторная теория групп классов отображений. Показано, что если гомологический класс $[K] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ тривиален, то монодромия семейства $\text{rg}: X \rightarrow S^2$ должна иметь специальный вид. Оказывается, что такая монодромия не может быть реализована в случае $X = \mathbb{CP}^2$.

Библиография: 42 наименования.

Ключевые слова: симплектическая геометрия, лагранжевы подмногообразия, пучок Лефшеца, монодромия, группы классов отображений, системы Кокстера, группы Артина–Брискорна.

Введение

Целью настоящей работы является доказательство несуществования лагранжевых вложений бутылки Клейна $K := \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ в пространство $\mathbb{R}^4$ со стандартной симплектической структурой $\omega_{\text{st}} := dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$. Это утверждение легко выводится из следующего результата.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если K – вложенная лагранжева бутылка Клейна в компактном линейчатом симплектическом четырехмерном многообразии (X, ω) , то ее класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[K] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ отличен от нуля.*

Напомним, что симплектическое 4-многообразие (X, ω) называется *линейчатым*, если оно содержит вложенную симплектическую сферу $\Sigma \subset (X, \omega)$ с нулевым индексом самопересечения. Согласно [36] линейчатое симплектическое 4-многообразие X симплектоморфно раздутию компактной комплексной линейчатой поверхности, причем ω соответствует кэлеровой форме.

Предположим, что существует вложенная лагранжева бутылка Клейна в $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}})$. Тогда она лежит в некотором шаре. Растягивая и сдвигая этот шар, мы получаем вложенную лагранжеву бутылку Клейна в симплектическом шаре любого радиуса. По теореме Дарбу всякое симплектическое 4-многообразие (X, ω) содержит малый симплектический шар B и, следовательно, вложенную лагранжеву бутылку Клейна K в этом шаре B . Поскольку группа $H_2(B, \mathbb{Z}_2)$ тривиальна, представленный бутылкой Клейна K гомологический класс в многообразии X тривиален. Применяя это построение к любому линейчатому

Работа выполнена при финансовой поддержке Гейзенберговской программы Немецкого исследовательского общества.

4-многообразию (X, ω) , мы получаем в нем вложенную лагранжеву бутылку Клейна с нулевым $\mathbb{Z}_2$ -гомологическим классом $[K]$. Это противоречит основной теореме и тем самым доказывает несуществование лагранжевых вложений бутылки Клейна в $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}})$.

Основная теорема имеет и другие интересные приложения.

ТЕОРЕМА 0.1. *Не существует лагранжева вложения бутылки Клейна K в комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$.*

Выбор симплектической структуры на $\mathbb{CP}^2$ несуществен, поскольку по теореме Таубса любая симплектическая структура на $\mathbb{CP}^2$ симплектоморфна некоторому кратному формы Фубини–Штуди.

Для доказательства теоремы 0.1 заметим, что $\mathbb{Z}_2$ -индекс самопересечения вложенной лагранжевой бутылки Клейна в любом симплектическом 4-многообразии (X, ω) равен ее $\mathbb{Z}_2$ -классу Эйлера и, значит, обращается в нуль, в то время как $h^2 \neq 0$ для *единственного* ненулевого класса $h \in H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2)$. Таким образом, гомологический класс $[K] \in H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2)$ лагранжево вложенной бутылки Клейна $K \subset \mathbb{CP}^2$ должен быть нулевым. С другой стороны, выполнив симплектическое раздутие $\mathbb{CP}^2$ в точке, не лежащей на K , мы получим поверхность Хирцебруха F_1 с какой-то симплектической структурой, содержащую лагранжеву бутылку Клейна K с нулевым классом гомологий $[K] \in H_2(F_1, \mathbb{Z}_2)$. Поскольку поверхности Хирцебруха линейчатые, это противоречит основной теореме.

Отметим, что лагранжевы вложения бутылки Клейна в раздутия $\mathbb{CP}^2$ существуют, как показывает следующий простой пример из [38]. Реализуем K как *вещественно-алгебраическое* раздутие вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ и комплексифицируем это построение, получив раздутую в одной точке комплексную проективную плоскость $\mathbb{CP}^2$.

ТЕОРЕМА 0.2. *Пусть X – либо $\mathbb{CP}^2$, либо компактное линейчатое симплектическое 4-многообразие. Тогда образы любых двух трансверсальных лагранжевых вложений $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{RP}^2 \rightarrow X$, представляющих один и тот же класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий, имеют как минимум три точки пересечения.*

В самом деле, $\mathbb{Z}_2$ -индекс самопересечения для лагранжева вложения $\mathbb{RP}^2 \rightarrow X$ совпадает с приведенной по модулю 2 эйлеровой характеристикой $\mathbb{RP}^2$. Значит, образы вложений φ_1 и φ_2 имеют нечетное число точек пересечения. Если точка пересечения одна, то в ней можно сделать лагранжеву хирургию и получить лагранжево вложение бутылки Клейна K (см. [4]). Класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий этой бутылки Клейна равен сумме классов гомологий образов φ_1 и φ_2 , т. е. тривиален, что противоречит основной теореме. Заметим, что в $\mathbb{CP}^2$ условие, налагаемое на класс гомологий, выполнено автоматически, поскольку в группе $H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2)$ есть всего один ненулевой элемент.

Отметим также, что последний результат обобщает гипотезу Арнольда, поскольку мы не предполагаем, что вложения $\varphi_1(\mathbb{RP}^2), \varphi_2(\mathbb{RP}^2)$ изотопны (даже в классе гладких вложений).

Еще одно интересное приложение – характеристика гомологических классов, представимых лагранжевыми бутылками Клейна в $S^2 \times S^2$.

ТЕОРЕМА 0.3. *Лагранжева бутылка Клейна K в $S^2 \times S^2$ с какой-либо симплектической структурой $\mathbb{Z}_2$ -гомологична либо вертикальному, либо горизонтальному слою.*

Во-первых, заметим, что всякая симплектическая структура на $S^2 \times S^2$ симплектоморфна структуре вида $\omega = p_1^* \omega_1 + p_2^* \omega_2$, где p_i – проекции на сомножители (см. [36]). Группа $H_2(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}_2)$ состоит из четырех элементов: нуля, $\mathbb{Z}_2$ -классов гомотопий слоев и $\mathbb{Z}_2$ -класса гомотопий диагонали $[\Delta]$. Поскольку $S^2 \times S^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, очевидно, является линейчатым многообразием, класс $[K]$ не может быть нулевым по основной теореме.

Класс диагонали $[\Delta]$ исключается с помощью следующего рассуждения. М. Оден [4] показала, что эйлерова характеристика $\chi(V)$ вложенной лагранжевой неориентируемой поверхности V в симплектическом четырехмерном многообразии X удовлетворяет сравнению

$$\chi(V) \equiv [V]^2 \pmod{4}, \quad (0.1)$$

где $[V]^2$ – квадрат Понтрягина (двойственного по Пуанкаре) класса $[V] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$. Значит, класс $[\Delta] \in H_2(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}_2)$ не может быть реализован, так как $\chi(K) = 0$, а квадрат Понтрягина диагонали $[\Delta]^2$ равен 2.

Существование лагранжевых вложений бутылки Клейна, представляющих класс гомотопий слоя проекции p_1 , доказывается следующим образом. Выберем вложенную окружность Γ в первом S^2 -сомножителе. Для каждого $y \in \Gamma$ пусть $\mathbf{m}_y$ – меридиан в сфере $\{y\} \times S^2$, т.е. большая окружность, проходящая через северный и южный полюсы. Пусть окружности $\mathbf{m}_y$ гладко зависят от $y \in \Gamma$ и поворачиваются на угол π , когда точка y делает полный оборот вдоль Γ . Тогда $K := \bigcup_{y \in \Gamma} \mathbf{m}_y$ – неориентируемое S^1 -расслоение над $\Gamma = S^1$, а значит, бутылка Клейна. По построению поверхность K лагранжева относительно любой симплектической структуры вида $\omega = p_1^* \omega_1 + p_2^* \omega_2$. Как будет показано в предложении 1.7, в этой ситуации K гомологична слою проекции p_1 .

Около 20 лет назад А. Б. Гивенталь [23] и М. Оден [4] показали, что любое лагранжево вложение замкнутой неориентируемой поверхности V в симплектическое 4-многообразие (X, ω) удовлетворяет сравнению (0.1). В частности, неориентируемая лагранжева поверхность V в $\mathbb{R}^4$ должна удовлетворять сравнению $\chi(V) \equiv 0 \pmod{4}$. А. Б. Гивенталь [23] построил явные примеры вложений всех допустимых поверхностей за исключением бутылки Клейна. М. Оден [4] предложила конструкцию лагранжева вложения бутылки Клейна K в $\mathbb{CP}^2$, которая, как было замечено в [21], оказалась неверной, поскольку была основана на предположении о существовании двух лагранжевых вложений $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ с единственной точкой трансверсального пересечения. (Как отмечалось выше, такие вложения должны представлять единственный ненулевой класс в $h \in H_2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z}_2)$. Значит, сделанное М. Оден предположение противоречит теореме 0.2.) Отметим также, что условие (0.1) выполняется для более широкого класса неориентируемых вполне вещественных поверхностей V в (почти) комплексных многообразиях, а пример вполне вещественной вложенной бутылки Клейна в $\mathbb{C}^2$ был построен В. Рудиным [41].

С. Ю. Немировский в работе [38] утверждал, что класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[K]$ отличен от нуля для лагранжева вложения бутылки Клейна в любую комплексную алгебраическую поверхность, и использовал это утверждение для доказательства несуществования лагранжевых вложений бутылки Клейна в $\mathbb{CP}^2$. Однако в такой общности это утверждение неверно: мы строим к нему контрпример в п. 1.6. Еще одна попытка доказать теорему 0.1 была сделана К. Монке [37]. Он использовал совершенно другую технику, но и его доказательство, по-видимому, неполно.

0.1. Схема доказательства основной теоремы. С. Ю. Немировский показал в работе [38], что для заданного лагранжева подмногообразия L в проективном многообразии X и S^1 -значной функции Морса $f: L \rightarrow S^1$ существуют изотопное L подмногообразие L' , раздутие $\hat{X} \rightarrow X$ многообразия X в комплексном подмногообразии $B \subset X$, $B \cap L' = \emptyset$, и голоморфное семейство Лефшеца $\text{pr}: \hat{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ такие, что $(\hat{X}, \text{pr}, L')$ – семейство Морса–Лефшеца (см. определение 1.1). Д. Ору, В. Муньос и Ф. Пресас [7] обобщили это утверждение на случай произвольного компактного симплектического объемлющего многообразия X (см. теорему 1.2). Нам понадобится небольшое уточнение их результата; оно доказывается в лемме 1.3.

В случае $\dim_{\mathbb{R}} X = 4$ группа гомологий $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ естественным образом вкладывается в группу $H_2(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$, и потому раздутие не влияет на (не)тривиальность класса гомологий поверхности, не пересекающей раздуваемое множество. Поэтому мы можем считать, что семейство Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow S^2$ задано сразу на X . В качестве функции Морса f на K возьмем (топологически единственное) расслоение $\text{pr}_K: K \rightarrow S^1$ со слоем окружность. В результате мы получаем достаточно простую геометрическую конфигурацию, описанную ниже в лемме 1.3.

Основная идея в нашем подходе состоит в описании условий, необходимых для тривиальности класса гомологий $[K]$, в терминах семейства Лефшеца и его монодромии. Сначала мы находим выражение для $[K]$, исходя из гомологической спектральной последовательности. Это позволяет нам указать пример лагранжева вложения бутылки Клейна в проективную комплексную поверхность с нулевым классом гомологий $[K]$ (см. п. 1.6). Затем мы детально изучаем комбинаторную структуру группы классов отображений Map_g . Развита техника (см. п. 0.3) позволяет показать, что если класс $[K]$ тривиален, то монодромия построенного нами семейства Лефшеца должна иметь весьма специальный вид (см. предложение 3.1). Оказывается, что “подкручивая” подходящим образом часть такой специальной монодромии, можно получить новое симплектическое многообразие X' , для которого

$$\text{rank } H_1(X', \mathbb{Z}_2) = \text{rank } H_1(X, \mathbb{Z}_2) + 1. \quad (0.2)$$

С другой стороны, используя классификацию линейчатых симплектических многообразий из работы [36], мы показываем, что в условиях основной теоремы многообразие X' также должно быть линейчатым, значит, ранги обеих групп $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ и $H_1(X', \mathbb{Z}_2)$ должны быть четными. Это противоречие завершает доказательство.

0.2. Хирургия Люттингера и вполне вещественные вложения бутылки Клейна. После того как в мае 2006 г. появился препринт настоящей работы, С. Ю. Немировский нашел другое доказательство основной теоремы (см. [39]). Он заметил, что наша “подкрутка” многообразия X есть *хирургия Люттингера* относительно бутылки Клейна K (хорошо известная в случае (лагранжевых) вложений тора T^2 ; см. [6], [20], [33]). Он показал также, что равенство (0.2) может быть получено с помощью *индекса Виро* для кривых на бутылке Клейна K и выполняется для любого вполне вещественного вложения K в почти комплексное четырехмерное многообразие (X, J) .

0.3. Комбинаторная структура группы классов отображений. Как было сказано выше, доказательство основной теоремы основано на изучении монодромии семейств Лефшеца в группе классов отображений замкнутой поверхности. Наш ключевой технический результат в этом направлении – построение $\mathbb{Z}_4$ -значных гомоморфизмов из некоторых “подфакторгрупп” $\widetilde{\text{Map}}_{g,\mu}$ (см. ниже) группы классов отображений $\text{Map}_{g,1}$ замкнутой поверхности Σ рода $g \geq 2$ с одной отмеченной точкой z_0 . Эти гомоморфизмы различают некоторые элементы в $\text{Map}_{g,1}$ и, в том числе, элементы, возникающие в монодромии (топологических) семейств Лефшеца, содержащих специальным образом вложенные бутылки Клейна. А именно, определим группу $\widetilde{\text{Map}}_g$ с помощью расширения

$$1 \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \widetilde{\text{Map}}_g \rightarrow \text{Map}_g \rightarrow 1,$$

так что $\widetilde{\text{Map}}_g$ – это фактор группы $\text{Map}_{g,1}$ по образу ядра $\text{Ker}(\pi_1(\Sigma, z_0) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2))$ при естественном вложении $\pi_1(\Sigma, z_0) \hookrightarrow \text{Map}_{g,1}$ (см. п. 1.3). Далее, пусть $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ – ненулевой элемент и $\widetilde{\text{Map}}_{g,\mu}$ – стабилизатор элемента μ в $\widetilde{\text{Map}}_g$.

ТЕОРЕМА 0.4 (см. предложение 2.29). *Существует гомоморфизм*

$$\tilde{\varphi}_\mu: \widetilde{\text{Map}}_{g,\mu} \rightarrow \mathbb{Z}_4$$

со следующими свойствами:

- ($\varphi 1$) $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta) \equiv 0 \pmod{4}$ для любого скручивания Дена T_δ , $\delta \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$;
- ($\varphi 2$) $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta^2) \equiv +1 \pmod{4}$ для любого скручивания Дена, $[\delta] \cap [\mu] \equiv 1 \pmod{2}$;
- ($\varphi 3$) $\tilde{\varphi}_\mu(\partial_\pi(\gamma)) \equiv (2g - 2)\varphi_\mu(\gamma) \pmod{4}$ для любого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$, где $\partial_\pi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Map}_{g,1}$ – стандартное вложение;
- (*) пусть α, β – простые замкнутые кривые на поверхности Σ , трансверсально пересекающиеся в единственной точке, причем $[\beta]_{\mathbb{Z}_2} = \mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$; тогда $\tilde{\varphi}_\mu((T_\alpha T_\beta)^3) \equiv 2 \pmod{4}$.

Отметим, что необращение в нуль значения $\tilde{\varphi}_\mu((T_\alpha T_\beta)^3) \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$ в условии (*) играет важную роль в доказательстве основной теоремы. Именно из этого свойства выводится соотношение (0.2), являющееся основным топологическим ингредиентом доказательства.

Для определения гомоморфизма φ_μ нам понадобятся эффективные методы вычислений в группе классов отображений Map_g поверхности Σ рода $g \geq 1$. Это потребует понимания комбинаторной структуры группы Map_g .

М. Ден [17] заметил, что группа Mar_g порождается простыми преобразованиями, называемыми теперь *скручиваниями Дена*. При попытке найти простое копредставление для группы Mar_g сразу обнаруживается, что “базовым” соотношением между скручиваниями Дена является соотношение группы кос. Поэтому естественно ожидать, что группа Mar_g должна напоминать группу кос, быть может, обобщенную. Действительно, копредставление Б. Вайнрыба [42] реализует группу Mar_g в качестве фактора некоторой группы кос Артина–Брискорна $\text{Br}(S_g)$ с простой системой образующих и соотношений. Недавно М. Мацумото [35] описал соотношения в копредставлении Вайнрыба в терминах так называемых *элементов Гарсайда* $\Delta(S)$, соответствующих некоторым подсистемам $S \subset S_g$. В § 2 мы получаем ряд комбинаторных свойств копредставления Вайнрыба–Мацумото, которые существенно используются в доказательстве основной теоремы.

Напомним, что всякая группа кос Артина–Брискорна $\text{Br}(S)$ строится по *системе Кокстера* (S, M_S) , где S – множество образующих группы $\text{Br}(S)$ и M_S – матрица на S , кодирующая комбинаторику соотношений. С каждой такой системой (S, M_S) ассоциирована также так называемая *группа Кокстера–Вейля* $W(S)$, получающаяся из группы $\text{Br}(S)$ добавлением соотношения $s^2 = 1$ для каждой образующей $s \in S$. В частности, имеется естественный сюръективный гомоморфизм $\text{Br}(S) \rightarrow W(S)$, взаимно однозначный на множествах образующих. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашенных кос*, ассоциированной с системой S , и обозначается $P(S)$. Напомним, что *квазиотражениями* в группе $W(S)$ и *квазиобразующими* в группе $\text{Br}(S)$ называются элементы, сопряженные в этих группах стандартным образующим $s \in S$. Обозначим через $T(S)$ множество квазиотражений в группе $W(S)$.

ТЕОРЕМА 0.5 (см. теорему 2.11). *Существуют естественные поднятия $W(S) \ni w \mapsto \hat{w} \in \text{Br}(S)$ и $T(S) \ni t \mapsto \tilde{t} \in \text{Br}(S)$, для которых множество $\tilde{T}^2(S) := \{\tilde{t}^2 : t \in T(S)\}$ является минимальным множеством образующих группы крашенных кос $P(S)$.*

Кроме того, абелианизация $P_{\text{ab}}(S)$ группы крашенных кос $P(S)$ является свободной абелевой группой с базисом $\{A_t : t \in T(S)\}$, элементы которого проиндексированы множеством квазиотражений $T(S)$, причем A_t есть образ элемента $\tilde{t}^2$ при проекции в $P_{\text{ab}}(S)$.

Эти результаты хорошо известны для обычной группы кос Br_d и соответствующей группы крашенных кос P_d . В частности, множество образующих в “стандартном” копредставлении группы P_d (см., например, [9]) есть в точности $\tilde{T}^2(A_{d-1})$ для системы Кокстера A_{d-1} , которая является системой Кокстера для группы Br_d . Далее, поскольку соотношения в этом копредставлении могут быть выражены как произведения коммутаторов, абелианизация $(P_d)_{\text{ab}}$ является свободной абелевой группой с естественным базисом $\tilde{T}^2(A_{d-1})$.

Подъемы в первой части теоремы 0.5 естественны в следующем смысле. В обоих случаях имеется естественное множество слов “простейшего типа,” выражающих данный элемент $w \in W(S)$ или, соответственно, $t \in T(S)$, и мы доказываем, что значение этого слова в группе $\text{Br}(S)$ зависит только от w или, соответственно, t . Это означает, что имеются корректно определенные сопоставления $W(S) \ni w \mapsto \hat{w} \in \text{Br}(S)$ и $T(S) \ni t \mapsto \tilde{t} \in \text{Br}(S)$. Простейшее слово

для элемента $w \in W(S)$ – это положительное слово минимально возможной длины. В случае квазиотражений $t \in T(S)$ мы ищем слова, представляющие t как элемент, сопряженный образующей, и имеющие простейший вид среди таких слов. Эти слова имеют вид $W = W' \cdot s \cdot (W')^{-1}$, где $s \in S$ и W' – положительное слово минимальной возможной длины. В частности, элементы $\hat{t} \in \text{Br}(S)$ являются квазиобразующими.

Если группа Кокстера–Вейля $W(S)$ конечна, то она может быть реализована как группа, порожденная отражениями. Соответствующие системы Кокстера S полностью классифицированы. Для таких систем П. Делинь [18] и Е. Брискорн, К. Саито [13] определили так называемый элемент Гарсайда $\Delta(S) \in \text{Br}(S)$. В действительности элемент $\Delta(S)$ есть подъем $\hat{w}_o$ (в смысле теоремы 0.5) единственного элемента наибольшей длины w_o в группе $W(S)$. Квадрат $\Delta^2(S)$ лежит в центре группы $P(S)$, и мы покажем в лемме 2.16, что проекция элемента $\Delta^2(S)$ в группу $P_{\text{ab}}(S)$ есть в точности сумма $\sum_{t \in T(S)} A_t$ всех базисных элементов в $P_{\text{ab}}(S)$. Отсюда немедленно находятся проекции соотношений Мацумото в группу $P_{\text{ab}}(S_g)$.

Сформулируем теперь следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 0.6 (см. теорему 2.13). *Всякое разложение $t = t_1 \cdot t_2 \cdots t_l$ единичного элемента $1 \in W(S)$ в произведение квазиотражений $t_i \in T(S)$ гурвиц-эквивалентно разложению в произведение квадратов квазиотражений, т. е. разложению вида $t' = t'_1 \cdot t'_2 \cdots t'_l$, где $t'_{2i-1} = t'^2_{2i} \in T(S)$.*

Теорема 0.6 обобщает классический результат Гурвица. А именно, группа Кокстера–Вейля, соответствующая обычной группе кос Br_d , есть симметрическая группа Sym_d , и в этом случае утверждение теоремы эквивалентно неприводимости пространства разветвленных накрытий $f: C \rightarrow \mathbb{CP}^1$ заданной степени с фиксированным родом кривой C . В случае конечных групп Вейля, соответствующих простым комплексным алгебрам Ли, этот результат был доказан В. Каневым [31].

В свою очередь, теорема 0.6 используется для описания тех элементов в $P(S)$, которые могут быть представлены в виде произведения квазиотражений t_i , проектирующихся в заданное подмножество $T' \subset T(S)$. Очевидно, что вместо подмножества T' можно рассматривать порожденную им подгруппу $G \subset W(S)$. Для такой подгруппы G мы обозначим через $P_{\text{ab}}(S)_G$ ее группу коинвариантов (см., например, [14]). Поскольку группа $W(S)$ действует на $P_{\text{ab}}(S)$, переставляя элементы базиса A_t , $t \in T(S)$, в абелевой группе $P_{\text{ab}}(S)_G$ имеется естественный базис, образованный множеством G -орбит в $T(S)$. Мы будем обозначать элементы этого базиса через $A_{G,t}$.

ТЕОРЕМА 0.7 (см. теорему 2.14). *Пусть G – подгруппа в $W(S)$ и x – элемент группы $P(S)$, представимый в виде произведения: $x = \prod_i \hat{t}_i^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [x_{2j-1}, x_{2j}]$, в котором $\hat{t}_i$ – квазиобразующие, $\epsilon_i = \pm 1$, а $[x_{2j-1}, x_{2j}]$ – коммутаторы элементов $x_j \in \text{Br}(S)$. Предположим, что образы элементов x_i и $\hat{t}_j$ в группе $W(S)$ лежат в G . Тогда образ $[x]_G$ элемента x в группе $P_{\text{ab}}(S)_G$ лежит в свободной абелевой группе, порожденной базисными элементами $A_{G,t}$ для $t \in G \cap T(S)$.*

Смысл утверждения теоремы 0.7 состоит в том, что базисные элементы $A_{G,t}$ при $t \notin G$ не появляются в разложении элемента $[x]_G \in P_{ab}(\mathcal{S})_G$.

Перейдем теперь к изучению структуры обобщенной группы кос $Br(\mathcal{S}_g)$, связанной с копредставлением Вайнрыба–Мацумото группы Map_g классов отображений замкнутой поверхности Σ рода g .

При $g \geq 4$ множество $\mathcal{T}(\mathcal{S}_g)$ бесконечно и не имеет внятного геометрического описания в терминах поверхности Σ . Мы показываем, что существует $W(\mathcal{S}_g)$ -эквивариантное отображение этого множества на множество ненулевых классов $v \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Обозначая последнее множество через $\mathcal{H}_g$, мы получим $W(\mathcal{S}_g)$ -эквивариантный гомоморфизм свободных абелевых групп $\mathbb{Z}\langle \mathcal{T}(\mathcal{S}_g) \rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$. Если представлять себе группу Map_g как обобщение группы кос, то соответствующей ей группой Кокстера–Вейля будет группа $Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$, а квазиотражениями будут элементы множества $\mathcal{H}_g$. Отметим, что в случаях $g = 1, 2, 3$ имеют место равенства $\mathcal{T}(\mathcal{S}_g) = \mathcal{H}_g$ и $W(\mathcal{S}_g) = Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$ (с точностью до изоморфного $\mathbb{Z}_2$ центра группы $W(\mathcal{S}_3)$ в случае $g = 3$).

Следующий результат описывает образующие ядра естественного гомоморфизма $Br(\mathcal{S}_g) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$. Это дает также образующие ядер гомоморфизмов $Map_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$ и $W(\mathcal{S}_g) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$. Ядро второго из них мы будем называть *группой Вейля–Торелли* поверхности Σ и обозначать WI_g .

ТЕОРЕМА 0.8 (см. следствие 2.23, предложение 2.26). *Справедливы следующие утверждения:*

- i) *ядро гомоморфизма $Map_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$ порождается квадратами T_δ^2 скручиваний Дена относительно неразбивающих кривых $\delta \subset \Sigma$;*
- ii) *абелианизация $WI_{g,ab}$ группы WI_g есть векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, изоморфное $\wedge^6 H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$;*
- iii) *существует естественное расширение*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \Lambda_g \rightarrow WI_{g,ab} \rightarrow 0,$$

в котором группа Λ_g может быть реализована как подрешетка в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$, а образ индуцированного вложения $WI_{g,ab} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle / \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \cong \mathbb{Z}_2\langle \mathcal{H}_g \rangle$ порождается суммами вида $L_V := \sum_{v \neq 0 \in V} A_v$, где V – произвольное симплектическое шестимерное $\mathbb{Z}_2$ -векторное подпространство в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$;

- iv) *существуют расширения групп*

$$0 \rightarrow \Lambda_g \rightarrow \widehat{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 1$$

и гомоморфизм из расширения $1 \rightarrow P(\mathcal{S}_g) \rightarrow Br(\mathcal{S}_g) \rightarrow W(\mathcal{S}_g) \rightarrow 1$ на это расширение, для которого гомоморфизм $W(\mathcal{S}_g) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$ имеет обычный смысл, а гомоморфизм $P(\mathcal{S}_g) \rightarrow \Lambda_g$ есть композиция $P(\mathcal{S}_g) \rightarrow P_{ab}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \subset \Lambda_g$.

В результате мы можем выполнять все вычисления в существенно меньших и геометрически более понятных группах Λ_g и $\widehat{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, а не в группе Map_g или $Br(\mathcal{S}_g)$. По существу это означает, что мы можем работать в группе Λ_g , рассматриваемой как $Sp(2g, \mathbb{Z}_2)$ -модуль.

Для любого класса $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ мы обозначаем через $\varphi_\mu: H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ гомоморфизм, задаваемый формулой $v \mapsto v \cap \mu$, и определяем гомоморфизм

$\widehat{\varphi}_\mu: \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$, положив $\widehat{\varphi}_\mu(A_v) := 1 \in \mathbb{Z}$, если $\varphi_\mu(v) \equiv 1 \in \mathbb{Z}_2$, и $\widehat{\varphi}_\mu(A_v) := 0$ в противном случае. Таким образом, $\widehat{\varphi}_\mu$ есть “считающая функция” для отображения множеств $\varphi_\mu: \mathcal{H}_g \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Наш результат касается группы классов отображений $\text{Map}_{g,1}$ поверхности Σ с одной отмеченной точкой. Известно, что при любом $g \geq 2$ ядро естественного гомоморфизма $\text{Map}_{g,1} \rightarrow \text{Map}_g$ изоморфно фундаментальной группе $\pi_1(\Sigma)$.

ТЕОРЕМА 0.9 (см. следствие 2.28). *Гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ естественным образом продолжается на стабилизатор $\text{Br}(\mathcal{S}_g)_\mu$ элемента μ . Это продолжение индуцирует гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \text{Map}_{g,1,\mu} \rightarrow \mathbb{Z}_4$. Кроме того, $\widehat{\varphi}_\mu(x_\gamma) \equiv (2g - 2)\varphi_\mu(\gamma) \pmod{4}$ для любого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ и соответствующего ему элемента $x_\gamma \in \text{Map}_{g,1}$.*

Этот результат используется при доказательстве ключевой теоремы 0.4. В качестве еще одного следствия мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 0.10. *Любое топологическое семейство Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$ со слоем $F := \text{pr}^{-1}(y)$ четного рода $g = 2g'$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -сечение, т. е. такой класс $[\sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$, что $[\sigma] \cap [F] \equiv 1 \pmod{2}$.*

Теорема 0.10 доказана в теореме 2.30 в форме задачи о разложении на множители в группе $\text{Map}_{g,1}$.

Кроме того, в следствии 2.25 доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.11. *При $g \geq 2$ существуют вложение*

$$H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow T^3(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)) =: T^3$$

в третью тензорную степень и гомоморфизм $\wp$ из $\text{Ker}(\text{Map}_{g,1} \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ в T^3 такие, что композиция гомоморфизма $\wp$ с вложением $\pi_1(\Sigma) \hookrightarrow \text{Map}_{g,1}$ равна композиции проекции $\pi_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ с вложением $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow T^3$.

Объясним теперь, как теорема 0.7 используется в доказательстве основного результата. Напомним, что согласно [22, теорема С] группа Map_g при $g \geq 3$ имеет универсальное центральное расширение $\widetilde{\text{Map}}_g^{\text{un}}$ с ядром $\mathbb{Z}$. Существует естественный подъем монодромии топологического семейства Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$ в расширение $\widetilde{\text{Map}}_g^{\text{un}}$, при котором полная монодромия есть элемент c в ядре, т. е. целое число. *Расширение Жерве* можно определить как прообраз универсального накрытия

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

и можно показать, что число c есть, по существу, число Черна c_1 пучка симплектических векторных пространств $R^1 \text{pr}_* \mathbb{R}_X$ – первого прямого образа постоянного пучка $\mathbb{R}_X$ над X (ср. с [1], [11], [12]). Напомним, что слой пучка $R^1 \text{pr}_* \mathbb{R}_X$ над регулярным значением $y \in Y$ есть просто группа когомологий $H^1(X_y, \mathbb{R})$ слоя $X_y := \text{pr}^{-1}(y) \cong \Sigma_g$, а симплектическая структура на $H^1(X_y, \mathbb{R})$ задается $\cup$ -умножением. Данное С. Жерве описание расширения $\widetilde{\text{Map}}_g^{\text{un}}$ показывает, что образующая ядра $\mathbb{Z}$ есть *цепной элемент* (см. п. 2.2), так что c_1

определяет, сколько раз с учетом знака цепное соотношение встречается в полной монодромии. Более того, универсальность расширения $\widehat{\text{Map}}_g^{\text{un}}$ означает, что никаких дальнейших инвариантов найти нельзя.

Пусть теперь G – подгруппа в Map_g . Тогда может существовать нетривиальное центральное расширение $0 \rightarrow A \rightarrow \widehat{G} \rightarrow G \rightarrow 0$ для “большой” абелевой группы A , не сводящееся к расширению $\widehat{\text{Map}}_g^{\text{un}}$. В этом случае подходящие гомоморфизмы $\psi: A \rightarrow \mathbb{Z}$ или $\psi: A \rightarrow \mathbb{Z}_m$ будут задавать (новые) “характеристические классы” для семейств Лефшеца с монодромией в группе G . Теорема 0.7 объясняет, как можно построить такое расширение $0 \rightarrow A \rightarrow \widehat{G} \rightarrow G \rightarrow 0$ в случае, когда группа G есть прообраз некоторой подгруппы $H < \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ при естественном гомоморфизме $\text{Map}_g \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. При этом гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu$ из теоремы 0.9 является, по существу, примером гомоморфизма ψ .

0.4. Обозначения. Пусть X – четырехмерное многообразие, а Y – ориентированная поверхность. Для отображения $\text{pr}: X \rightarrow Y$ и подмножества $U \subset Y$ мы обозначаем $X_U := \text{pr}^{-1}(U)$. Например, $X_y = \text{pr}^{-1}(y)$ – это слой над точкой $y \in Y$.

Пусть Σ – это CW -комплекс и $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ – непрерывное отображение. Тором отображения f называется факторпространство Z цилиндра $\Sigma \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности $(z, 1) \sim (f(z), 0)$. В дальнейшем Σ будет вещественной поверхностью, а отображение $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ – диффеоморфизмом. Заметим, что отображение $\text{pr}: [z, t] \in (\Sigma \times [0, 1]/\sim) \mapsto t \in S^1 = [0, 1]/(0 \sim 1)$ определяет проекцию $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$ расслоения с тотальным пространством Z и слоем Σ . Мы будем рассматривать это расслоение как часть структуры тора на Z . Однако, для всякого расслоения $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$ со слоем Σ существует непрерывное отображение $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$, для которого (Z, pr) является тором. В этом случае отображение $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ называется *отображением монодромии расслоения* $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$, или просто *монодромией* $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$. Монодромия определена с точностью до изотопии, и два расслоения $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$ и $\text{pr}': Z' \rightarrow S^1$ изоморфны тогда и только тогда, когда их монодромии изотопны. Более общим образом, пусть $\text{pr}: Z \rightarrow Y$ – расслоение со слоем Σ и $\gamma: S^1 \rightarrow Y$ – петля в его базе. Тогда монодромия индуцированного расслоения $\gamma^*Z := Z \times_{Y, \gamma} S^1$ называется *монодромией расслоения* $\text{pr}: Z \rightarrow Y$ *вдоль кривой* γ . Монодромия определяет *гомоморфизм монодромии* из фундаментальной группы $\pi_1(Y, y_0)$ в группу классов отображений слоя Σ .

Пусть $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$ – расслоение со слоем Σ , $y_0 \in S^1$ – отмеченная точка в его базе, а $\Gamma \subset Z$ – сечение расслоения pr (т. е. $\text{pr}: \Gamma \rightarrow S^1$ – гомеоморфизм). Положим $\Sigma = \text{pr}^{-1}(y_0)$ и $z_0 := \Gamma \cap \Sigma$. Тогда (Z, pr) может быть реализовано как тор отображения $f \in \mathcal{D}\text{iff}(\Sigma, z_0)$, для которого $\Gamma \subset Z$ является тором отображения $f: \{z_0\} \rightarrow \{z_0\}$. Такое отображение f единственно с точностью до изотопии в группе $\mathcal{D}\text{iff}(\Sigma, z_0)$, и мы называем $f \in \mathcal{D}\text{iff}(\Sigma, z_0)$ *монодромией* $\text{pr}: Z \rightarrow S^1$, *соответствующей сечению* Γ . Аналогичная терминология используется и в случае произвольного расслоения $\text{pr}: Z \rightarrow Y$ со слоем Σ . Поверхность Σ всегда будет ориентированной, а отображение f – сохраняющим ориентацию (т. е. $f \in \mathcal{D}\text{iff}_+(\Sigma, z_0)$).

Вложенная окружность δ на связной поверхности Σ называется *несущей*, если она ограничивает диск в Σ , и *существенной* в противном случае. Все окружности, встречающиеся в доказательствах, будут существенными. Вложенная окружность δ на поверхности Σ называется *разбивающей*, если $\Sigma \setminus \delta$ имеет две компоненты связности, и *неразбивающей* в противном случае. Если поверхность Σ замкнута и ориентируема, то окружность δ является неразбивающей тогда и только тогда, когда $[\delta] \neq 0 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, или, эквивалентным образом, $[\delta] \neq 0 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

Автор признателен С.Ю. Немировскому за многочисленные обсуждения. Д.Н. Ахиезер, Д. Ору, К. Цилибак, Я.М. Элиашберг, У. Хаменштэdt, С.М. Ивашкович, В.М. Харламов, Д. Котшик, С.Ю. Ореков, Л.В. Полтерович и В. Зёргель сделали много полезных замечаний к предыдущим вариантам работы.

§ 1. Топология семейств Лефшеца

1.1. Лагранжевы подмногообразия в семействах Лефшеца. Определение *топологического семейства Лефшеца* $\text{pr}: X \rightarrow Y$, *топологического пучка Лефшеца* $\text{pr}: X \rightarrow S^2$ и (*симплектического*) *раздутия* такого X можно найти в книге [24], а общая теория симплектических семейств Лефшеца и лагранжевых подмногообразий в них развивается в работах [7] и [19]. В статье [38] обсуждается случай лагранжевых подмногообразий в проективных алгебраических многообразиях. В настоящей работе рассматривается только случай, когда объемлющее многообразие *четырёхмерно*, а база семейства Лефшеца является ориентированной поверхностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть X – замкнутое четырёхмерное многообразие, а $L \subset X$ – замкнутая вложенная поверхность. *Семейство Морса–Лефшеца* на (X, L) – это семейство Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$ со следующими свойствами:

- i) образ $\text{pr}(L)$ есть гладкая вложенная кривая Γ в Y ;
- ii) ограничение проекции $\text{pr}_L := \text{pr}|_L: L \rightarrow \Gamma$ имеет только морсовские особые точки;
- iii) $x \in L$ является критической точкой для $\text{pr}_L: L \rightarrow \Gamma$ тогда и только тогда, когда она является критической точкой для $\text{pr}: X \rightarrow Y$.

Кривая Γ должна быть окружностью или дугой окружности. Оказывается, что для любого симплектического многообразия (X, ω) и вложенной в него лагранжевой замкнутой поверхности $L \subset X$ существует симплектическое семейство Морса–Лефшеца над двумерной сферой S^2 . А именно, следующий результат был доказан в работе [7].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть (X, ω) – замкнутое симплектическое четырёхмерное многообразие такое, что $[\omega] = c_1(\mathcal{L})$ для некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ на X , и пусть $L \subset X$ – замкнутое лагранжево подмногообразие, а $f: L \rightarrow S^1$ – функция Морса. Тогда существуют симплектическое раздутие $\hat{X} \rightarrow X$ в конечном множестве точек $B = \{b_1, \dots, b_N\} \subset X \setminus L$, семейство Морса–Лефшеца $\text{pr}: \hat{X} \rightarrow S^2$ для (X, ω, L) и вложение $\gamma: S^1 \hookrightarrow S^2$, для которых $\text{pr}|_L = \gamma \circ f$.

Заметим, что в случае обычной функции Морса $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ множество ее значений $f(L)$ является отрезком, который может быть вложен в окружность S^1 . Поэтому этот случай сводится к случаю функций Морса со значениями в окружности.

Установим теперь вариант теоремы 1.2, необходимый для наших целей.

ЛЕММА 1.3. *Для любого лагранжева вложения бутылки Клейна K в симплектическое четырехмерное многообразие (X, ω) существуют деформация $\tilde{\omega}$ симплектической формы ω , симплектическое раздутие $\hat{X}$ многообразия X в конечном числе точек $x_1, \dots, x_N \in X$ вне K и симплектическое семейство Лефшеца $\text{pr}: \hat{X} \rightarrow S^2$ со следующими свойствами:*

(ML1) *образ $\text{pr}(K)$ есть вложенная окружность $\Gamma \subset S^2$;*

(ML2) *никакое критическое значение $y \in S^2$ проекции $\text{pr}: X \rightarrow S^2$ не лежит на Γ ;*

(ML3) *все слои ограничения проекции $\text{pr}|_K: K \rightarrow \Gamma$ являются окружностями;*

(ML4) *существует сечение проекции $\text{pr}: X \rightarrow S^2$ (т.е. поверхность $S \subset X$, проекция которой $\text{pr}|_S: S \rightarrow S^2$ на базу есть диффеоморфизм), для которого $S \cap K = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Деформация симплектической формы ω необходима для того, чтобы сделать класс когомологий $[\omega]$ рациональным. Легко показать, что для всякой римановой метрики g_X на многообразии X и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая 2-форма $\tilde{\omega}$ такая, что класс $[\tilde{\omega}]$ рационален и $\|\tilde{\omega} - \omega\|_{C^0(X)} \leq \varepsilon$. Последнее условие гарантирует, что $\tilde{\omega}$ также является симплектической формой.

Поскольку $H^2(K, \mathbb{R}) = 0$, ограничение $\tilde{\omega}|_K$ будет точной формой. Кроме того, из теории Ходжа следует, что найдется 1-форма α на K , для которой $d\alpha = \tilde{\omega}|_K$ и

$$\|\alpha\|_{C^0(K)} \leq C \|\tilde{\omega}|_K\|_{C^0(K)} = C \|(\tilde{\omega} - \omega)|_K\|_{C^0(K)} \leq C\varepsilon,$$

где константа C зависит только от вложения $K \subset X$ и метрики g_X . В силу (обобщенной) теоремы Дарбу (см., например, [2]) найдется окрестность U бутылки Клейна K в многообразии X , которая симплектоморфна окрестности U' нулевого сечения кокасательного расслоения T^*K с канонической симплектической формой ω_{T^*K} , причем K переходит при этом симплектоморфизме в нулевое сечение. Условие $\|\alpha\|_{C^0(K)} \leq C\varepsilon$ гарантирует, что график $L_\alpha \subset T^*K$ формы α содержится в U' . Заметим, что $\omega_{T^*K}|_{L_\alpha} = d\alpha = \tilde{\omega}$. Следовательно, существует диффеоморфизм $\Phi: U \rightarrow U'$, тождественный вблизи границы ∂U и такой, что $\Phi^*\tilde{\omega}|_K = \omega|_K = 0$. Если теперь обозначить через $\tilde{\omega}$ форму $\Phi^*\tilde{\omega}$, то K будет лагранжева относительно этой формы с рациональным классом когомологий.

Теперь требуемое симплектическое семейство Лефшеца получается применением теоремы 1.2 к отображению $\varphi: K \rightarrow S^1$, реализующему бутылку Клейна K как нетривиальное S^1 -расслоение над окружностью S^1 . Общее число раздутий в $\hat{X} \rightarrow X$ должно быть большим по следующей причине. По построению симплектического семейства Лефшеца $\text{pr}: \hat{X} \rightarrow S^2$ в работе [7] центры этих

раздутий $x_1, \dots, x_N$ есть в точности общие нули пары сечений s_0, s_1 комплексного линейного расслоения $\mathcal{L}$ на многообразии X , для которого $c_1(\mathcal{L}) = k[\tilde{\omega}]$ при некотором $k \gg 0$. Кроме того, индекс пересечения поверхностей $s_0^{-1}(0)$ и $s_1^{-1}(0)$ равен $+1$ в каждой точке $x_1, \dots, x_N$, так что $N = k^2[\tilde{\omega}]^2 \gg 0$. Лемма доказана.

1.2. Топология семейства Лефшеца вблизи особого слоя. Пусть Σ – ориентированная поверхность, а $\delta \subset \Sigma$ – вложенная окружность. Зафиксируем кольцообразную окрестность U окружности δ и отождествим ее с кольцом $\{(\rho, \theta) : \frac{1}{2} < \rho < 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, на котором ориентация задана формой $d\rho \wedge d\theta$. Пусть $\chi = \chi(\rho)$ – неубывающая функция такая, что $\chi(\rho) \equiv 0$ при $\rho \leq \frac{1}{2}$ и $\chi(\rho) \equiv 2\pi$ при $\rho \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Положительным скручиванием Дена* поверхности Σ относительно кривой δ называется диффеоморфизм $T_\delta : \Sigma \rightarrow \Sigma$, тождественный вне окрестности U и задаваемый формулой

$$T_\delta(\rho, \theta) = (\rho, \theta - \chi(\rho))$$

внутри U . *Отрицательным скручиванием Дена* называется обратный диффеоморфизм; он задается формулой $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \chi(\rho))$.

Скручивание Дена заданного знака единственно с точностью до изотопии. Знак выбирается так, чтобы в монодромии симплектических (и обычных алгебраических) семейств Лефшеца встречались только *положительные* скручивания Дена.

Положительность скручиваний Дена в симплектических семействах Лефшеца не будет использоваться в доказательстве наших результатов о группе классов отображений. Поэтому они применимы к любым топологическим семействам Лефшеца. Примером такого приложения является сформулированная во введении теорема 0.10.

Обозначение T_δ будет использоваться как для скручивания Дена относительно конкретной вложенной окружности $\delta \subset \Sigma$ с заданной окрестностью U с координатами (ρ, θ) , так и для класса изотопии этого скручивания в соответствующей группе классов отображений (см. ниже п. 1.3).

Пусть Δ – диск с границей $\partial\Delta =: \gamma$, Z – четырехмерное многообразие, а $\text{rg} : Z \rightarrow \Delta$ – собственное семейство Лефшеца с единственной критической точкой z^* , лежащей над началом координат $0 \in \Delta$. Обозначим через Σ общий слой проекции $\text{rg} : Z \rightarrow \Delta$, скажем, над точкой $y_0 \in \gamma$.

ЛЕММА 1.5. 1) *Особый слой $\Sigma^* := \text{rg}^{-1}(0)$ является деформационным ретрактом многообразия Z .*

2) *Монодромия вдоль граничной окружности $\partial\Delta$ действует на слое Σ как скручивание Дена относительно некоторой вложенной окружности $\delta \subset \Sigma$, и особый слой Σ^* получается из Σ стягиванием этой окружности δ в двойную точку на особом слое Σ^* .*

3) *Если окружность δ не разбивающая, то группа гомологий $H_2(\Sigma^*, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождается образом класса $[\Sigma] \in H_2(\Sigma, \mathbb{Z})$; в противном случае группа $H_2(\Sigma^*, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и порождается фундаментальными циклами двух неприводимых компонент слоя Σ^* .*

4) Группа гомологий $H_1(\Sigma^*, \mathbb{Z})$ является фактором группы $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ по подгруппе $\mathbb{Z}\langle[\delta]\rangle$, порожденной классом $[\delta]$, а группа когомологий $H^1(\Sigma^*, \mathbb{Z})$ есть ортогональный подмодуль $\mathbb{Z}\langle[\delta]\rangle^\perp \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ относительно естественного спаривания $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

5) Группы гомологий границы $\partial Z = Z_\gamma$ могут быть включены в точные последовательности

$$0 \longrightarrow H_0(\gamma, \mathcal{H}_1(Z_y, \mathbb{Z})) \longrightarrow H_1(Z_\gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\gamma, \mathcal{H}_0(Z_y, \mathbb{Z})) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H_0(\gamma, \mathcal{H}_2(Z_y, \mathbb{Z})) \longrightarrow H_2(Z_\gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\gamma, \mathcal{H}_1(Z_y, \mathbb{Z})) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{H}_p(Z_y, \mathbb{Z})$ обозначает локально постоянный пучок со слоем $H_p(Z_y, \mathbb{Z})$ над точкой $y \in \gamma$. В частности, имеются естественные изоморфизмы

$$H_1(\gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(\gamma, \mathcal{H}_0(Z_y, \mathbb{Z})), \quad H_0(\gamma, \mathcal{H}_2(Z_y, \mathbb{Z})) \xrightarrow{\cong} H_2(\Sigma, \mathbb{Z}),$$

группа $H_1(\gamma, \mathcal{H}_1(Z_y, \mathbb{Z}))$ есть в точности подгруппа $[\delta]^\perp$ в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, т. е. подгруппа, состоящая из таких $\lambda \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, что $\lambda \cap [\delta] = 0$, а $H_0(\gamma, \mathcal{H}_1(Z_y, \mathbb{Z}))$ есть факторгруппа группы $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ по подгруппе $\mathbb{Z}\langle[\delta]\rangle$, порожденной классом $[\delta]$.

Доказательства утверждений 1)–5) леммы 1.5 можно найти в [3]. Точные последовательности в части 5) получаются из спектральной последовательности Лерэ проекции $\text{pr}: Z_\gamma \rightarrow \gamma$. Окружность δ называется *исчезающим циклом* монодромии в точке z^* , а ее класс гомологий $[\delta] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ называется *исчезающим классом*.

1.3. Гомотопический тип групп диффеоморфизмов поверхностей.

Пусть Σ – замкнутая ориентированная поверхность рода $g = g(\Sigma)$ с отмеченной точкой $z_0 \in \Sigma$. Обозначим через $\mathcal{D}iff_+(\Sigma)$ группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхности Σ , через $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$ подгруппу диффеоморфизмов, сохраняющих отмеченную точку z_0 , а через $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, [z_0])$ подгруппу диффеоморфизмов, сохраняющих точку z_0 и действующих тривиально в касательной плоскости $T_{z_0}\Sigma$. Обозначим через Map_g , $\text{Map}_{g,1}$ и $\text{Map}_{g,[1]}$ соответствующие группы классов отображений, т. е. группы связных компонент групп $\mathcal{D}iff_+(\Sigma)$, $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$ и $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, [z_0])$ соответственно. Заметим, что естественное действие группы $\mathcal{D}iff_+(\Sigma)$ на поверхности Σ определяет главное расслоение $\text{ev}_{z_0}: \mathcal{D}iff_+(\Sigma) \rightarrow \Sigma$, задаваемое формулой $f \in \mathcal{D}iff_+(\Sigma) \mapsto f(z_0) \in \Sigma$, со структурной группой $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$. Таким образом, мы получаем длинную точную последовательность гомотопических групп

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)) \rightarrow \pi_k(\mathcal{D}iff_+(\Sigma)) \rightarrow \pi_k(\Sigma) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\partial_\pi} \pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma)) \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Аналогично, естественное действие группы $\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$ на плоскости $T_{z_0}\Sigma$ дифференциалами $D_{z_0}f: T_{z_0} \rightarrow T_{z_0}$ отображений $f \in \mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$ задает главное расслоение $D_{z_0}: \mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0) \rightarrow \text{GL}_+(T_{z_0}\Sigma)$ со структурной группой

$\mathcal{D}iff_+(\Sigma, [z_0])$. Отсюда получается еще одна длинная точная последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{k+1}(\mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, [z_0])) \rightarrow \pi_k(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(\mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, [z_0])) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)) \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Следующие утверждения о группах классов отображений хорошо известны (см. [9] или [28]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. i) Если $g = 0$ или $g = 1$, то $\pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}iff_+(\Sigma))$ является изоморфизмом.

ii) Если $g \geq 2$, то связная компонента единицы $\mathcal{D}iff_0(\Sigma)$ в группе $\mathcal{D}iff_+(\Sigma)$ стягиваема и последовательность (1.1) индуцирует точную последовательность групп

$$1 \rightarrow \pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\partial_\pi} \text{Map}_{g,1} \rightarrow \text{Map}_g \rightarrow 1. \quad (1.3)$$

При этом группа $\text{Map}_{g,1}$ изоморфна подгруппе индекса 2 в группе $\text{Aut}(\pi_1(\Sigma))$, состоящей из тех автоморфизмов $\pi_1(\Sigma)$, которые тривиально действуют на группе $H_2(\pi_1(\Sigma), \mathbb{Z})$; отображение $\pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\partial_\pi} \text{Map}_{g,1}$ сопоставляет каждому элементу $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ внутренний автоморфизм $i_\gamma: \alpha \in \pi_1(\Sigma) \mapsto \gamma\alpha\gamma^{-1} \in \pi_1(\Sigma)$, а группа Map_g есть соответствующая группа внешних автоморфизмов группы $\pi_1(\Sigma)$.

iii) Если $g \geq 1$, то точная последовательность (1.2) задает центральное расширение

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbf{GL}_+(2, \mathbb{R})) \xrightarrow{\partial} \text{Map}_{g,[1]} \rightarrow \text{Map}_{g,1} \rightarrow 1. \quad (1.4)$$

iv) Имеются изоморфизмы $\pi_1(\mathcal{D}iff_+(S^2)) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(\mathcal{D}iff_+(T^2)) \cong \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

Вложение $\pi_1(\Sigma, z_0) \xrightarrow{\partial_\pi} \text{Map}_{g,1}$ (при $g \geq 2$) легко описать геометрически. А именно, для любого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$ выберем изотопию $F_t: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $t \in [0, 1]$, такую, что $F_0 \equiv \text{id}_\Sigma$ и петля $[0, 1] \ni t \mapsto F_t(z_0)$ представляет элемент $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$. Из этого определения немедленно следует, что F_1 представляет образ $\partial_\pi(\gamma) \in \text{Map}_{g,1}$. В специальном случае, когда элемент $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$ представлен гладко вложенной кривой, которую мы также обозначим через γ , можно дать еще более явное описание $\partial_\pi(\gamma)$. Для этого рассмотрим кривые γ_+ и γ_- , образующие границу трубчатой окрестности U_γ кривой γ на поверхности Σ . Тогда скручивания Дена $T_{\gamma_\pm}$ поверхности Σ относительно кривых $\gamma_\pm$ задают корректно определенные элементы группы $\text{Map}_{g,1}$ и, как нетрудно проверить, выполнено соотношение

$$\partial_\pi(\gamma) = T_{\gamma_+} \circ T_{\gamma_-}^{-1}. \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что группа $\text{Map}_{g,1}$ порождается скручиваниями Дена относительно гладко вложенных кривых γ на поверхности Σ , не проходящих через точку z_0 .

1.4. Гомологии семейств Лефшеца. Здесь мы рассматриваем условия, необходимые для гомологической тривиальности бутылки Клейна, вложенной в семейство Морса–Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$. Будем рассматривать ситуацию, несколько более общую, чем возникающая при применении леммы 1.3.

Пусть $\text{pr}: X \rightarrow Y$ – топологическое семейство Лефшеца с общим слоем Σ над ориентированной поверхностью Y . Предположим, что $K \subset X$ – вложенная бутылка Клейна, удовлетворяющая следующим условиям:

(T1) образ $\text{pr}(K)$ – вложенная окружность $\Gamma \subset Y$, на которой нет критических значений проекции pr ;

(T2) ограничение проекции $\text{pr}|_K: K \rightarrow \Gamma$ – расслоение со слоем S^1 .

Условия (T1), (T2) означают, что $(X, \text{pr}, K, \Gamma)$ – семейство Морса–Лефшеца специального вида.

Отождествим поверхность Σ со слоем $\text{pr}^{-1}(y_0)$ над фиксированной точкой $y_0 \in \Gamma$. Пусть $\mathbf{m}$ – слой K над y_0 , т.е. $\mathbf{m} = \Sigma \cap K$. Будем называть окружность $\mathbf{m}$ *меридианом* бутылки Клейна K , но рассматривать ее будем, в основном, как кривую на поверхности Σ . Пусть $F_\Gamma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ – монодромия проекции $\text{pr}: X_\Gamma \rightarrow \Gamma$. Напомним, что диффеоморфизм F_Γ определен с точностью до изотопии. Выберем его так, что $F_\Gamma(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$.

Рассмотрим сначала один простой случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть $[\mathbf{m}] = 0 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, т.е. окружность $\mathbf{m}$ разбивает Σ . Тогда род g слоя Σ четен и бутылка Клейна K гомологична слою $\Sigma = \text{pr}^{-1}(y_0)$.

В условиях основной теоремы (после применения леммы 1.3) слой семейства Лефшеца заведомо не гомологичен нулю (над $\mathbb{Z}_2$), так как имеет индекс пересечения 1 с любым исключительным сечением. Тем самым, предложение 1.7 дает доказательство основной теоремы в (простом) частном случае, когда меридиан $\mathbf{m}$ гомологически тривиален в слое семейства Морса–Лефшеца для (X, K) . На самом деле, как будет показано в п. 2.3, слой не гомологичен нулю над $\mathbb{Z}_2$ для любого топологического семейства Лефшеца со слоем четного рода (см. теорему 2.30 и теорему 0.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.7. По условию меридиан $\mathbf{m}$ разбивает слой Σ на две части, $\Sigma \setminus \mathbf{m} = \Sigma' \sqcup \Sigma''$. Поскольку монодромия F_Γ сохраняет ориентацию на Σ и обращает ориентацию на $\mathbf{m}$, отображение F_Γ должно менять местами Σ' и Σ'' . Представляя X_Γ как тор диффеоморфизма $F_\Gamma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, мы видим, что граница $\mathbb{Z}_2$ -цепи $\Sigma' \times [0, 1]$ в X_Γ есть $[K] + [\Sigma]$. Кроме того, поверхности с краями Σ' и Σ'' имеют одинаковый род g' , и потому род поверхности Σ должен быть четным. Предложение доказано.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда меридиан не гомологичен нулю в слое семейства Лефшеца. Обозначим через $\mu := [\mathbf{m}] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ гомологический класс меридиана и через y_i^* , $i = 1, \dots, n$, критические значения проекции $\text{pr}: X \rightarrow Y$ (их может и не быть). Для каждой точки y_i^* зафиксируем маленький диск D_i , содержащий y_i^* , и положим $\Gamma_i := \partial D_i$. (Это вложенная кривая, обходящая вокруг точку y_i^* .) Обозначим $Y^\circ := Y \setminus (\bigcup_i D_i)$. Ясно, что область Y° гомотопически эквивалентна дополнению к множеству критических значений. Напомним, что для любого подмножества $A \subset Y$ мы

обозначаем через $X_A := \text{pr}^{-1}(A)$ часть многообразия X , лежащую над A . Множество $X_{Y^\circ} := \text{pr}^{-1}(Y^\circ)$ обозначим через X° . В случае разбивающей кривой Γ обозначим через Y_+ и Y_- соответствующие части базы Y , а через g_Y^+ и g_Y^- их рода. Положим $Y_\pm^\circ := Y_\pm \cap Y^\circ$ и $X_\pm^\circ := X_{Y_\pm^\circ} = \text{pr}^{-1}(Y_\pm^\circ)$.

Гомологическая спектральная последовательность расслоения $\text{pr}: X^\circ \rightarrow Y^\circ$ вырождается в члене $E_{p,q}^2$ и порождает точную последовательность

$$0 \rightarrow H_0(Y^\circ, \mathcal{H}_2(X_Y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_2(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_Y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{H}_p(X_Y, \mathbb{Z}_2)$ – локально постоянный пучок со слоем $H_p(X_Y, \mathbb{Z}_2)$ в точке $y \in Y^\circ$. Поскольку отображение монодромии F_Γ обращает ориентацию на кривой $\mathbf{m}$, случай $Y^\circ = S^2$ невозможен. Следовательно, поверхность Y° является π_1 -пространством Эйленберга–Маклейна, и $H_p(Y^\circ, \mathcal{H}_q(X_Y, \mathbb{Z}_2)) = H_p(\pi_1(Y^\circ), \mathcal{H}_q(X_Y, \mathbb{Z}_2))$.

Для вычисления групп гомологий $H_p(\pi_1(Y^\circ), M)$ с коэффициентами в заданном $\pi_1(Y^\circ)$ -модуле M мы воспользуемся специальным клеточным разбиением поверхности Y° и соответствующим ему копредставлением группы $\pi_1(Y^\circ)$. Пусть g_Y – род поверхности Y . Наше построение зависит от того, разбивает кривая Γ поверхность Y или не разбивает.

В случае неразбивающей кривой Γ рассмотрим многоугольник C_Y с $2g_Y + n$ сторонами, где n – число критических значений проекции $\text{pr}: X \rightarrow Y$, т. е. число дыр в Y° . Отметим и ориентируем стороны многоугольника C_Y согласно соотношению

$$R := [\xi_1, \eta_1] \cdots [\xi_{g_Y}, \eta_{g_Y}] \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_n. \quad (1.6)$$

Попарно склеивая первые $2g_Y$ сторон многоугольника C_Y согласно этой разметке и ориентациям, мы получаем поверхность Y' рода g_Y с единственной граничной окружностью, разделенной на отрезки $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Для того чтобы получить поверхность Y° , мы делим каждый отрезок Γ_i на три части, скажем Γ'_i , Γ''_i и Γ'''_i , и склеиваем отрезки Γ'_i и Γ'''_i с обращением ориентации.

На построенной таким образом поверхности Y° все концы сторон ξ_i, η_i, Γ_j отождествлены в одну точку. Возьмем эту точку в качестве базовой точки y_0 на Y° и получим нужное нам копредставление группы $\pi_1(Y^\circ, y_0)$:

$$\pi_1(Y^\circ, y_0) = \langle \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_{g_Y}, \eta_{g_Y}; \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \mid [\xi_1, \eta_1] \cdots [\xi_{g_Y}, \eta_{g_Y}] \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_n = 1 \rangle. \quad (1.7)$$

Здесь кривые ξ_i, η_i, Γ_j отождествляются с соответствующими им элементами группы $\pi_1(Y^\circ, y_0)$. Кроме того, мы будем считать, что кривая Γ – это кривая ξ_1 .

В случае разбивающей кривой Γ построение нужно модифицировать следующим образом. Занумеруем критические значения y_i^* так, что первые n^+ из них лежат в Y_+ , а остальные $n^- := n - n^+$ – в Y_- . Положим

$$R^+ := [\xi_1, \eta_1] \cdots [\xi_{g_Y^+}, \eta_{g_Y^+}] \cdot \Gamma_1 \cdots \Gamma_{n^+}, \\ R^- := [\xi_{g_Y^++1}, \eta_{g_Y^++1}] \cdots [\xi_{g_Y}, \eta_{g_Y}] \cdot \Gamma_{n^++1} \cdots \Gamma_n.$$

Возьмем многоугольники C_Y^+ и C_Y^- с $2g_Y^\pm + n^\pm + 1$ сторонами, отмеченными и ориентированными согласно соотношениям $R^+ \cdot \Gamma^+$ и $R^- \cdot \Gamma^-$ соответственно. Склеим многоугольники C_Y^+ и C_Y^- вдоль сторон Γ^+ и Γ^- и обозначим через Γ образованный этими сторонами отрезок. Получится многоугольник C_Y

с $2g_Y + n$ сторонами, отмеченными и ориентированными согласно соотношению $R^+ \cdot R^-$. Склеим поверхность Y° из многоугольника C_Y , как это было сделано выше. В качестве копредставления группы $\pi_1(Y^\circ)$ рассмотрим образующие и соотношения

$$\pi_1(Y^\circ, y_0) = \langle \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_{g_Y}, \eta_{g_Y}; \Gamma_1, \dots, \Gamma_n; \Gamma \mid R^+ = \Gamma^{-1}, R^- = \Gamma \rangle.$$

Заметим, что образы многоугольников C_Y^+ и C_Y^- в поверхности Y° суть области Y_+° и Y_-° , склеенные согласно соотношениям $R^+ \cdot \Gamma^+$ и $R^- \cdot \Gamma^-$ соответственно. Мы видим, что фундаментальные группы $\pi_1(Y_\pm^\circ)$ вкладываются в группу $\pi_1(Y^\circ)$ с помощью отождествления образующих.

Пусть теперь π – произвольная группа, заданная копредставлением $\pi = \langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R} \rangle$, с множеством образующих $\mathcal{X}$ и множеством соотношений $\mathcal{R}$, и пусть M – π -модуль. Обозначим через $\text{Fr}(\mathcal{X})$ свободную группу с образующими $\mathcal{X}$. Обозначим через $\mathcal{X} \otimes M$ прямую сумму “ $\mathcal{X}$ экземпляров” M , так что элементы $\mathcal{X} \otimes M$ – это конечные формальные суммы вида $\sum_i x_i \otimes m_i$, где $x_i \in \mathcal{X}$ и $m_i \in M$, дистрибутивные по первому аргументу. Аналогичным образом определим $\mathcal{R} \otimes M$ и $\text{Fr}(\mathcal{X}) \otimes M$. Будем рассматривать $\mathcal{X} \otimes M$ и $\mathcal{R} \otimes M$ как подгруппы в $\text{Fr}(\mathcal{X}) \otimes M$, а чтобы различать два экземпляра $\text{Fr}(\mathcal{X}) \otimes M$, будем использовать обозначения $x \otimes_1 m$ и $x \otimes_2 m$ соответственно. Положим $\mathcal{R}_0 := M$, $\mathcal{R}_1 := \mathcal{X} \otimes M$, $\mathcal{R}_2 := \mathcal{R} \otimes M$ и определим цепные гомоморфизмы $\partial_1: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_0$ и $\partial_2: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1$ формулой $\partial_1(x \otimes_1 m) := xm - m$ в первом случае и свойствами дифференцирования во втором:

- 1) $\partial_2(x \otimes_2 m) = x \otimes_1 m$, если $x \in \mathcal{X}$;
- 2) $\partial_2(ab \otimes_2 m) = \partial_2(a \otimes_2 bm) + \partial_2(b \otimes_2 m)$ для любых $a, b \in \text{Fr}(\mathcal{X})$.

Существует единственный гомоморфизм $\partial_2: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1$, удовлетворяющий этим условиям. В частности, $\partial_2(1 \otimes_2 m) = \partial_2(1 \cdot 1 \otimes_2 m) = 2\partial_2(1 \otimes_2 m)$, и потому $\partial_2(1 \otimes_2 m) = 0$ для единичного элемента $1 \in \text{Fr}(\mathcal{X})$. Аналогично, $\partial_2(a^{-1} \otimes_2 m) = -\partial_2(a \otimes_2 a^{-1}m)$.

Геометрический смысл этих гомоморфизмов состоит в следующем. Представление $\pi = \langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R} \rangle$ позволяет построить ассоциированный двумерный клеточный комплекс Z с единственной 0-мерной клеткой $*$ и одно- и двумерными клетками, пронумерованными элементами множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{R}$. Построение комплекса Z совпадает с построением поверхности Y° , проведенным выше. Тогда $\mathcal{R}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{R}_0 \rightarrow 0$ – цепной комплекс, ассоциированный с локально постоянной системой коэффициентов на Z , соответствующей модулю M . В частности, $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$. Кроме того, комплекс Z будет 2-эквивалентен пространству Эйленберга–Маклейна $B(\pi, 1)$, и, следовательно, p -мерные группы гомологий цепного комплекса $(\mathcal{R}_\bullet, \partial_\bullet)$ изоморфны группам гомологий $H_p(\pi, M)$ при $p = 0$ и $p = 1$.

По построению поверхность Y° гомотопически эквивалентна двумерному клеточному комплексу Z , ассоциированному с двумя вышеуказанными копредставлениями группы $\pi_1(Y^\circ)$. В качестве модуля коэффициентов мы рассмотрим группу гомологий $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Образ класса гомологий $[K]$ при проекции $H_2(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ описать легко: он представляется цепью $\Gamma \otimes_1 \mu \in \mathcal{R}_1$.

Опишем теперь образ группы $H_2(X^\circ, \mathbb{Z}_2)$ в группе $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$. Для этого используем последовательность Майера–Вьеториса для разложения многообразия X в объединение X° и $\bigsqcup_i X_{D_i}$. (Напомним, что $X_{D_i} = \text{pr}^{-1}(D_i)$ и $X^\circ \cap X_{D_i} = X_{\Gamma_i} = \text{pr}^{-1}(\Gamma_i)$.) Интересующий нас участок этой точной последовательности таков:

$$\cdots \rightarrow H_2\left(\bigsqcup_i X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2\right) \rightarrow H_2(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \oplus H_2\left(\bigsqcup_i X_{D_i}, \mathbb{Z}_2\right) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots. \quad (1.8)$$

ЛЕММА 1.8. Ядро гомоморфизма $H_2(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ порождается классами Λ_i , проекции которых на $H_1(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ суть классы вида $\Gamma_i \otimes_1 \lambda_i$, где $\lambda_i \in H_1(X_y, \mathbb{Z}_2) \cap$ -ортогональны исчезающим циклам δ_i .

Условие, налагаемое на λ_i , тривиально в случае $[\delta_i] = 0 \in H_1(X_y, \mathbb{Z}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.8. Очевидно, $H_2(\bigsqcup_i X_{\Gamma_i}) = \bigoplus_i H_2(X_{\Gamma_i})$. Для каждого из прямых слагаемых, как и в случае X° , гомологическая спектральная последовательность сводится к точной последовательности

$$0 \rightarrow H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_2(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_2(X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

Группа $H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_2(X_y, \mathbb{Z}_2))$ есть просто группа $\mathbb{Z}_2$, порожденная классом $[\Sigma]$. Поскольку $\pi_1(\Gamma_i) = \mathbb{Z}$, группа $H_1(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ изоморфна $H_1(\mathbb{Z}, M_i)$, где M_i – группа $H_1(X_y, \mathbb{Z}_2)$ с действием $\pi_1(\Gamma_i) = \mathbb{Z}$, заданным монодрией вдоль окружности Γ_i , которая есть скручивание Дена T_{δ_i} относительно исчезающего цикла δ_i . Таким образом, $H_1(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ – подпространство $[\delta_i]^\perp$, состоящее из классов $\lambda \in H_1(X_y, \mathbb{Z}_2)$, которые $\cap$ -ортогональны классу $[\delta_i]$. С другой стороны, группа $H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_2(X_y, \mathbb{Z}_2))$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и порождена классом слоя, и потому композиция отображений

$$H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_2(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_2(X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(X_{D_i}, \mathbb{Z}_2)$$

является вложением. Следовательно, последовательность (1.9) расщепляется, и группу $H_1(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ можно рассматривать как подгруппу в $H_2(X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2)$. Более того, образ группы $H_1(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ в группе $H_2(X_{D_i}, \mathbb{Z}_2)$ тривиален. Отсюда следует утверждение леммы.

Установим теперь необходимые условия для тривиальности класса $[K] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Предположим, что класс $\mu = [\mathbf{m}]$ нетривиален, но проекция класса $[K]$ в группе $H_1(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ обращается в нуль.

i) В случае разбивающей кривой Γ существует такое разложение $\mu = \mu_+ + \mu_- \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, что действие фундаментальной группы $\pi_1(Y_+^\circ)$ (соответственно, $\pi_1(Y_-^\circ)$) преобразованиями монодромии сохраняет класс μ_+ (соответственно, μ_-). В частности, оба класса μ_+ и μ_- инвариантны относительно F_Γ .

ii) В случае неразбивающей кривой Γ группа монодромии проекции $\text{pr}: X^\circ \rightarrow Y^\circ$ сохраняет класс $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Более того, существует такой класс $\nu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, что $\mu = (1 + F_{\eta_1}^{-1})\nu$ для преобразования монодромии F_{η_1} вдоль кривой η_1 , причем класс ν инвариантен при монодромном действии остальных выбранных нами образующих группы $\pi_1(Y^\circ)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения формул будем обозначать через ξ_i, η_i, Γ_j и кривые на Y° , и соответствующие элементы группы $\pi_1(Y^\circ)$, и образующие свободной группы, и преобразования монодромии вдоль этих кривых.

и) Из леммы 1.8 следует, что элемент $\Gamma \otimes_1 \mu$ может быть представлен в виде

$$\Gamma \otimes_1 \mu = \partial_2(R^+ \cdot \Gamma \otimes_2 \mu_+) + \partial_2(R^- \cdot \Gamma^{-1} \otimes_2 \mu_-) + \sum_i \Gamma_i \otimes_1 \lambda_i,$$

где $\mu_\pm, \lambda_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, причем $\lambda_i \cap$ -ортогональны циклам δ_i . Распишем $\partial_2(R^+ \cdot \Gamma \otimes_2 \mu_+)$, сохраняя коммутаторы $[\xi_i, \eta_i]$, и обозначим через w_i^Γ конечный фрагмент слова $R^+ \cdot \Gamma$ после буквы Γ_i , а через $w_i^{[\cdot]}$ – конечный фрагмент слова $R^+ \cdot \Gamma$ после коммутатора $[\xi_i, \eta_i]$. В частности, $w_{n^+}^\Gamma = \Gamma, w_{n^+-1}^\Gamma = \Gamma_{n^+} \cdot \Gamma, w_1^\Gamma = \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n^+} \cdot \Gamma$, и аналогичное выражение имеется для $w_i^{[\cdot]}$. Отсюда получается, что

$$\begin{aligned} \partial_2(R^+ \cdot \Gamma \otimes_2 \mu_+) &= \partial_2([\xi_1, \eta_1] \cdots \Gamma_{n^+-1} \cdot \Gamma_{n^+} \cdot \Gamma \otimes_2 \mu_+) \\ &= \Gamma \otimes_1 \mu_+ + \Gamma_{n^+} \otimes_1 \Gamma \mu_+ + \Gamma_{n^+-1} \otimes_1 \Gamma_{n^+} \cdot \Gamma \mu_+ + \cdots + \Gamma_1 \otimes_1 w_1^\Gamma \cdot \mu_+ \\ &\quad + \partial_2([\xi_{g_Y^+}, \eta_{g_Y^+}] \otimes_2 w_{g_Y^+}^{[\cdot]} \mu_+) + \partial_2([\xi_{g_Y^+-1}, \eta_{g_Y^+-1}] \otimes_2 w_{g_Y^+-1}^{[\cdot]} \mu_+) + \cdots \\ &\quad \cdots + \partial_2([\xi_1, \eta_1] \otimes_2 w_1^{[\cdot]} \mu_+). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получается и для $\partial_2(R^- \cdot \Gamma^{-1} \otimes_2 \mu_-)$, с тем отличием, что первое слагаемое равно $-\Gamma \otimes_2 \Gamma^{-1} \mu_-$. Разложение коммутаторов дает формулу

$$\begin{aligned} \partial_2([\xi, \eta] \otimes_2 \nu) &= \partial_2(\xi \eta \xi^{-1} \eta^{-1} \otimes_2 \nu) \\ &= \xi \otimes_1 \eta \xi^{-1} \eta^{-1} \nu + \eta \otimes_1 \xi^{-1} \eta^{-1} \nu - \xi \otimes_1 \xi^{-1} \eta^{-1} \nu - \eta \otimes_1 \eta^{-1} \nu \\ &= \xi \otimes_1 (\eta - 1) \xi^{-1} \eta^{-1} \nu + \eta \otimes_1 (1 - \xi) \xi^{-1} \eta^{-1} \nu. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Приводя подобные члены (и игнорируя знаки, так как мы работаем над $\mathbb{Z}_2$), мы получаем требуемое разложение $\mu = \mu_+ + \Gamma^{-1} \mu_-$ из коэффициента при Γ , равенство $\lambda_i = w_i^\Gamma \mu_\pm$ из коэффициента при Γ_i , а равенства $(\eta_i - 1) \xi_i^{-1} \eta_i^{-1} w_i^{[\cdot]} \mu_\pm = 0$ и $(1 - \xi_i) \xi_i^{-1} \eta_i^{-1} w_i^{[\cdot]} \mu_\pm = 0$ из коэффициентов при ξ_i и η_i . Заметим теперь, что равенство $\lambda_i = w_i^\Gamma \mu_\pm$ вместе с $\cap$ -ортогональностью $\lambda_i \cap \delta_i \equiv 0 \pmod 2$ влечет инвариантность класса $w_i^\Gamma \mu_\pm$ при действии скручивания Дена T_{δ_i} , т. е. при действии Γ_i . Отсюда следует тождество $w_0^\Gamma \mu_+ = w_1^\Gamma \mu_+ = \cdots = \Gamma \mu_+$ для всех $i = 0; 1, \dots, n^+$. (Мы положили $w_0^\Gamma := \Gamma_1 \cdot \Gamma_1^\Gamma$; этот элемент совпадает с последним из $w_{g_Y^+}^{[\cdot]}$.)

Тривиальность действий ξ_i и η_i доказывается аналогично. Действительно, полученные выше равенства означают, что ξ_i и η_i тривиально действуют на $\xi_i^{-1} \eta_i^{-1} w_i^{[\cdot]} \mu_+$, так что $w_i^{[\cdot]} \mu_+$ также остается инвариантным, откуда мы заключаем, что $w_{i-1}^{[\cdot]} \mu_+ = w_i^{[\cdot]} \mu_+$. В итоге мы получаем $\pi_1(Y_+^\circ)$ -инвариантность класса $\Gamma \mu_+$. Наконец, поскольку элемент Γ в группе $\pi_1(Y_+^\circ)$ может быть представлен в виде произведения уже рассмотренных элементов, то $\Gamma \mu_+ = \mu_+$. Доказательство для μ_- точно такое же.

ii) В этом случае $\Gamma = \xi_1$ в группе $\pi_1(Y^\circ)$ и неразложенное выражение имеет вид

$$\xi_1 \otimes_1 \mu = \partial_2(R \otimes_2 \nu) + \sum_i \Gamma_i \otimes_1 \lambda_i.$$

Из него получаются те же формулы, что и в предыдущем случае, за исключением выражения для коэффициента при ξ_1 , который равен $\mu + (\eta_i - 1)\xi_i^{-1}\eta_i^{-1}w_1^{[1]}\nu$. Точно так же получается инвариантность класса ν при действиях ξ_i, η_i для всех $i = 2, \dots, n$ и при действиях всех Γ_i . Остается использовать равенства $\xi_1^{-1}\eta_1^{-1}\nu = \eta_1^{-1}\nu$ и $(1 + \eta_1)\xi_1^{-1}\eta_1^{-1}\nu = \mu$. Поскольку коммутатор $[\xi_1, \eta_1]$ в группе $\pi_1(Y^\circ)$ равен выражению от прочих образующих, действия ξ_1 и η_1 на класс ν перестановочны. Поэтому первое равенство эквивалентно ξ_1 -инвариантности класса ν , а из второго следует формула $(1 + \eta_1^{-1})\nu = \mu$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 1.10. *Первая группа гомологий многообразия X включается в точную последовательность*

$$0 \rightarrow H_0(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально в случае, когда $Y = S^2$ и проекция $\text{pr}: X \rightarrow Y = S^2$ не имеет критических значений. Рассмотрим гомологии многообразия X° в остальных случаях. Спектральная последовательность Лерэ сводится к точной последовательности

$$0 \rightarrow H_0(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_1(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(Y^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Чтобы получить (1.11), используем последовательность Майера–Вьеториса, соответствующую покрытию $X = X^\circ \cup (\bigsqcup_i X_{D_i})$, где $X^\circ \cap (\bigsqcup_i X_{D_i}) = \bigsqcup_i X_{\Gamma_i}$. Это дает отождествление группы $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ с коядром гомоморфизма

$$\bigoplus_i H_1(X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \oplus \bigoplus_i H_1(X_{D_i}, \mathbb{Z}_2). \quad (1.13)$$

В свою очередь, для каждого X_{Γ_i} мы имеем последовательность

$$0 \rightarrow H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_1(X_{\Gamma_i}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

Заметим теперь, что вложение $X_{\Gamma_i} \subset X_{D_i}$ индуцирует изоморфизм

$$H_0(\Gamma_i, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \xrightarrow{\cong} H_1(X_{D_i}, \mathbb{Z}_2)$$

и, значит, дает естественное расщепление последовательности (1.14). “Подставляя” это расщепление в (1.13), мы видим, что каждая группа $H_1(\Gamma_i, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ “убивает” тот класс в группе $H_1(Y^\circ, \mathbb{Z}_2)$ из последовательности (1.12), который представлен соответствующей кривой $\Gamma_i \subset Y$.

1.5. $\mathbb{Z}_2$ -сечения семейств Лефшеца. Если в условиях предложения 1.9 бутылка Клейна K гомологически нетривиальна, то она должна быть $\mathbb{Z}_2$ -гомологична слою $\text{pr}^{-1}(y_0)$. (Эта же ситуация возникала выше в предложении 1.7.) В свою очередь, гомологическая нетривиальность слоя эквивалентна существованию класса $[\sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$, для которого $[\sigma] \cap [K] \neq 0$. В настоящем пункте мы изучаем свойства таких классов $[\sigma]$. Эти результаты используются в доказательстве сформулированной во введении теоремы 0.10.

Сохраним обозначения из п. 1.4 с небольшим изменением. В частности, Y – компактная поверхность с границей ∂Y , возможно, пустой или несвязной, а $\text{pr}: X \rightarrow Y$ – семейство Лефшеца со слоем $\Sigma = \text{pr}^{-1}(y_0)$ рода g такое, что критические значения y_i^* не лежат на границе ∂Y . Обозначим через Y° поверхность, полученную из Y° удалением попарно непересекающихся дисков D_i с центрами в точках y_i^* . Тогда ограничение проекции $\text{pr}: \partial X \rightarrow \partial Y$ будет расслоением со слоем Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. $\mathbb{Z}_2$ -сечением семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$ называется относительный класс гомологий $\sigma \in H_2(X, \partial X; \mathbb{Z}_2)$, имеющий ненулевой $\mathbb{Z}_2$ -индекс пересечения с классом $[\Sigma]$. Обозначим через $\partial\sigma \in H_1(\partial X, \mathbb{Z}_2)$ класс границы σ , а через $\sigma^\vee \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ двойственный по Пуанкаре класс когомологий. Для открытого множества $U \subset Y$ с гладкой границей ∂U , на которой нет критических значений y_i^* , определим *ограничение* σ на прообраз $X_U = \text{pr}^{-1}(U)$ с помощью ограничения класса $\sigma^\vee$, т.е. $(\sigma|_{X_U})^\vee := \sigma^\vee|_{X_U}$.

Последнее определение можно также использовать для определения $\partial\sigma$, поскольку $(\partial\sigma)^\vee = \sigma^\vee|_{\partial X}$.

Группа когомологий $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$, в которой лежит $\sigma^\vee$, имеет описание, двойственное к описанию группы гомологий $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$. В частности, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(Y^\circ, \mathcal{H}^1(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H^2(X^\circ, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^0(Y^\circ, \mathcal{H}^2(X_y, \mathbb{Z}_2)) \rightarrow 0,$$

где через $\mathcal{H}^p(X_y, \mathbb{Z}_2)$ обозначен локально постоянный пучок со слоем $H^p(X_y, \mathbb{Z}_2)$ в точке $y \in Y^\circ$, группа $H^0(Y^\circ, \mathcal{H}^2(X_y, \mathbb{Z}_2))$ естественно изоморфна $\mathbb{Z}_2\langle[\Sigma]\rangle$, а группа $H^1(Y^\circ, \mathcal{H}^1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ равна $H^1(\pi_1(Y^\circ), \mathcal{H}^1(X_y, \mathbb{Z}_2))$. Кроме того, для любого $\pi_1(Y^\circ)$ -модуля M мы можем вычислить группы $H^1(\pi_1(Y^\circ), M)$, используя резольвенту $0 \rightarrow \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d^{(1)}} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d^{(2)}} \mathcal{R}^2 \rightarrow 0$, двойственную резольвенте $(\mathcal{R}_\bullet, \partial_\bullet)$ из п. 1.4. В случае конечного копредставления $\langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R} \rangle$ группы $\pi_1(Y^\circ)$ группы коцепей $\mathcal{R}^\bullet$ совпадают с соответствующими группами цепей, так что $\mathcal{R}^0 = M$, $\mathcal{R}^1 = \mathcal{X} \otimes^1 M$ и $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \otimes^2 M$, где индекс в обозначении $\otimes^k$ указывает, что элемент лежит в $\mathcal{R}^k$. Дифференциалы $d^\bullet$ двойственны дифференциалам $\partial_\bullet$ и задаются транспонированными матрицами. Немедленно получается формула $d^{(1)}: m \mapsto \sum_i x_i \otimes^1 (x_i - 1)m$ для дифференциала $d^{(1)}: \mathcal{R}^0 = M \rightarrow \mathcal{R}^1$. Формальное выражение для $d^{(2)}: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^2$ имеет вид

$$d^{(2)}\left(\sum_i x_i \otimes^1 m_i\right) = \sum_{i,j} R_j \otimes^2 \frac{\partial R_j}{\partial x_i} m_i,$$

где суммирование ведется по всем $x_i \in \mathcal{X}$ и $R_j \in \mathcal{R}$, а $\frac{\partial R_j}{\partial x_i}$ обозначает производную Фокса слова R_j в свободной группе $\text{Fr}(\mathcal{X})$, порожденной $\mathcal{X}$ (см. [9]). Для

данного соотношения R_j коэффициент $\sum_i \frac{\partial R_j}{\partial x_i} m_i$ равен значению на $R_j \in \text{Fr}(\mathcal{X})$ единственного скрещенного гомоморфизма $\phi: \text{Fr}(\mathcal{X}) \rightarrow M$ такого, что $\phi(x_i) = m_i$. Напомним, что скрещенные гомоморфизмы характеризуются свойством $\phi(a \cdot b) = \phi(a) + a \cdot \phi(b)$ для всех $a, b \in \text{Fr}(\mathcal{X})$, которое двойственно правилу Лейбница для дифференциала ∂_2 .

При $g \geq 2$ обозначим через $\widetilde{\text{Map}}_g$ группу в расширении

$$1 \rightarrow \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \widetilde{\text{Map}}_g \rightarrow \text{Map}_g \rightarrow 1, \quad (1.15)$$

так что $\widetilde{\text{Map}}_g$ есть фактор группы $\text{Map}_{g,1}$ по образу ядра гомоморфизма $\pi_1(\Sigma, z_0) \rightarrow \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ при отображении ∂_π . Скручиванием Дена в группе $\widetilde{\text{Map}}_g$ называется образ скручивания Дена $T_\delta \in \text{Map}_{g,1}$.

ЛЕММА 1.12. Пусть $\text{pr}: X \rightarrow Y$ – семейство Лефшеца на замкнутом многообразии X и $\langle \xi_j, \eta_j, \Gamma_i \mid R \rangle$ – рассматривавшееся выше копредставление фундаментальной группы $\pi_1(Y^\circ)$ с единственным соотношением.

i) Образ гомоморфизма $\text{H}^2(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{H}^2(X^\circ, \mathbb{Z}_2)$ порождается классом $\mathbb{Z}_2$ -сечения (если такое существует) и классами из $\text{H}^1(Y^\circ, \mathcal{H}^1(X_y, \mathbb{Z}_2))$, представленными коциклами $\lambda^\vee$ вида

$$\lambda^\vee = \sum_j (\xi_j \otimes^1 \lambda_j^\vee + \eta_j \otimes^1 \mu_j^\vee) + \sum_i \Gamma_i \otimes^1 n_i \delta_i^\vee \in \text{H}^1(Y^\circ, \mathcal{H}^1(X_y, \mathbb{Z}_2)), \quad (1.16)$$

где $n_i \in \mathbb{Z}_2$, $\lambda_j^\vee, \mu_j^\vee \in \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, а $\delta_i^\vee$ – класс, двойственный по Пуанкаре классу $[\delta_i]$.

ii) Препятствие к существованию $\mathbb{Z}_2$ -сечения семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$ есть смежный класс $[\vartheta^\vee]$ в факторе группы $\mathcal{H}^2$ по подгруппе всех кограниц $d^{(2)}(\lambda^\vee)$, где $\lambda^\vee$ имеет вид (1.16).

iii) В случае $g \geq 2$ препятствие $[\vartheta^\vee] \in \mathcal{H}^2 / \{d^{(2)}(\lambda^\vee)\}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда монодромия $\mathcal{F}: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Map}_g$ расслоения $\text{pr}: X \rightarrow Y^\circ$ поднимается до гомоморфизма $\tilde{\mathcal{F}}: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \widetilde{\text{Map}}_g$, при котором $\tilde{\mathcal{F}}(\Gamma_i)$ – скручивание Дена в группе $\widetilde{\text{Map}}_g$. Два таких подъема $\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \widetilde{\text{Map}}_g$ отличаются на скрещенный гомоморфизм $\phi: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{H}_1(\Sigma_1)$, ассоциированный с единственной коцепью $\lambda_\phi^\vee$ вида (1.16), для которой двойственный по Пуанкаре класс λ_ϕ имеет коэффициенты $\lambda_j = \phi(\xi_j)$, $\mu_j = \phi(\eta_j)$ и $n_i \delta_i = \phi(\Gamma_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения i), ii) двойственны лемме 1.8, так что доказательство получается дуализацией гомоморфизма с учетом соотношений между образами и ядрами. Утверждение iii) следует из того, что естественное вложение $\partial_\pi: \pi_1(\Sigma, z_0) \hookrightarrow \text{Map}(\Sigma, z_0)$ при $g \geq 2$ индуцирует вложение $\text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow \widetilde{\text{Map}}_g$. Остается заметить, что на уровне гомологий групп оба построения эквивалентны.

Следует иметь в виду, что при $g = 1$ препятствие $[\vartheta^\vee]$ к существованию $\mathbb{Z}_2$ -сечения не определяется монодромией в группе $\text{Map}_1 = \text{Map}_{1,1}$. Это отражает тот факт, что гомоморфизм $\partial_\pi: \pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2 \rightarrow \pi_0(\mathcal{D}iff_+(T^2))$ в последовательности (1.1) в этом случае тривиален.

1.6. Пример. Здесь мы построим лагранжево вложение бутылки Клейна в проективную алгебраическую поверхность X с кэлеровой формой ω , для которого гомологический класс $[K]$ тривиален. В этом примере бутылка Клейна K расслоена над неразбивающей кривой в торе T^2 .

Пусть Y – это тор T^2 . Снабдим Y плоской метрикой. Это задаст комплексную структуру и кэлерову форму ω_Y на торе Y . Будем предполагать, что объем Y относительно формы ω_Y равен 1. Зафиксируем геометрический базис тора Y , состоящий из вложенных окружностей ξ и η , трансверсально пересекающихся в единственной точке.

Пусть Σ – другой тор T^2 , представленный как фактор комплексной прямой $\mathbb{C}$ по решетке Λ , натянутой на векторы $\alpha := 1$ и $\beta := e^{2\pi i/3}$. Пусть ω_Σ – плоская кэлерова форма на Σ объема 1. Рассмотрим $\mathbb{C}$ -линейные гомоморфизмы $F_\xi := -\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $F_\eta := e^{\pi i/3} \text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Ясно, что они определяют автоморфизмы тора Σ , оставляющие неподвижной базисную точку $z_0 := 0 \in \Sigma$.

Пусть $\text{pr}: X \rightarrow Y$ – расслоение с базой Y и слоем Σ , монодромия которого вдоль ξ и η равна F_ξ и F_η соответственно. Тогда существует плоская кэлерова структура на комплексной поверхности X с кэлеровой формой ω , которая в окрестности каждого слоя есть произведение $(Y, \omega_Y) \times (\Sigma, \omega_\Sigma)$.

Мы утверждаем, что ω задает поляризацию поверхности X , соответствующую некоторому голоморфному линейному расслоению $\mathcal{L}$. Действительно, поскольку монодромия сохраняет точку $z_0 \in \Sigma$, мы получаем голоморфное сечение σ_0 , тождественно равное z_0 . Нетрудно видеть, что форма ω представляет первый класс Черна $c_1(\mathcal{L})$ голоморфного линейного расслоения $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(\sigma_0 + X_y)$, соответствующего дивизору $\sigma_0 + X_y$, где X_y – вертикальный слой над какой-либо точкой $y \in Y$. По теореме Кодаиры о вложении (см., например, [26]) расслоение $\mathcal{L}$ обильно и поверхность X проективна.

Теперь вычислим группу $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ с помощью спектральной последовательности. Ее член $E_{p,q}^2$ состоит из групп $H_p(Y, \mathcal{H}_q(X_y, \mathbb{Z}_2))$. Обе группы $H_0(Y, \mathcal{H}_2(X_y, \mathbb{Z}_2))$ и $H_2(Y, \mathcal{H}_0(X_y, \mathbb{Z}_2))$ изоморфны $\mathbb{Z}_2$ и порождены классом слоя X_y и сечения σ_0 соответственно. Для вычисления $H_1(Y, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ заметим, что эта группа есть *модуль коинвариантов* монодромии, т.е. фактор группы гомологий $\mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2)$ по сумме образов гомоморфизмов $F_\xi - \text{id}$ и $F_\eta - \text{id}$. Поскольку F_η задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с элементами из $\mathbb{Z}_2$, гомоморфизм $F_\eta - \text{id}$ сюръективен, и группа $H_1(Y, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ тривиальна. Ясно, что классы слоя и сечения выживают в $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ (это означает, что спектральная последовательность вырождается в члене $E_{p,q}^2$), откуда мы получаем, что $H_2(X, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \langle [X_y], [\sigma_0] \rangle$.

Теперь укажем два лагранжевых вложения бутылки Клейна в X . Рассмотрим следующие кривые в слое Σ :

$$\beta_0 := \{te^{2\pi i/3} \in \Sigma = \mathbb{C}/\Lambda : t \in \mathbb{R}\}, \quad \beta_1 := \left\{ \frac{1}{2}e^{\pi i/3} + te^{2\pi i/3} \in \Sigma = \mathbb{C}/\Lambda : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Обе кривые являются замкнутыми геодезическими на Σ , представляющими один и тот же гомологический класс, соответствующий $\beta = e^{2\pi i/3} \in \Lambda \cong H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Кроме того, обе эти кривые инвариантны относительно преобразования $F_\xi = -\text{id}$. В случае кривой β_1 это следует из того, что вектор $2 \cdot \frac{1}{2}e^{\pi i/3} = e^{\pi i/3} = e^{2\pi i/3} + 1$ принадлежит решетке Λ .

Рассмотрим вещественные поверхности K_0 и K_1 в комплексной поверхности X , образованные точками $(y, z) \in X$, первая компонента y которых лежит на кривой ξ , а вторая компонента z – на кривой β_0 или β_1 соответственно. Другими словами, мы выбираем точку $y_0 \in \xi$, реализуем кривые β_0 и β_1 в слое $\text{pr}^{-1}(y_0)$ и обносим их вокруг кривой ξ с помощью параллельного переноса. Поскольку $F_\xi(\beta_i) = \beta_i$, поверхности K_0 и K_1 замкнуты. Из того что преобразование F_ξ обращает ориентацию на каждой из кривых β_i , мы получаем, что эти поверхности являются бутылками Клейна. Тот факт, что симплектическая форма ω локально (по базе) является прямым произведением форм на базе и слое, обеспечивает лагранжевость K_i относительно ω .

Для вычисления гомологических классов $[K_i] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ заметим следующее. Поскольку поверхности K_i не пересекают общий слой расслоения $\text{pr}: X \rightarrow Y$, каждая из них должна быть либо гомологична слою, либо гомологически тривиальна. Поскольку K_1 не пересекает сечение σ_0 , мы получаем $[K_1] = 0 \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$. С другой стороны, так как пара β_0, β_1 разбивает тор Σ , рассуждение из доказательства предложения 1.7 с заменой меридиана m на объединение $\beta_0 \cup \beta_1$ показывает, что сумма $[K_0] + [K_1]$ гомологична слою. Таким образом, $[K_0] = [X_y] \neq 0 \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$.

§ 2. Комбинаторная структура групп классов отображений

2.1. Группы Кокстера–Вейля и группы кос. Напомним стандартные определения и факты о группах Кокстера–Вейля и группах кос Артина–Брискорна.

Пусть $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_r\}$ – конечное множество. Матрицей Кокстера над $\mathcal{S}$ называется симметрическая $(r \times r)$ -матрица $M = (m_{ij})$ с элементами из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, у которой $m_{ii} = 1$ и $m_{ij} \geq 2$ при $i \neq j$. Пара $(\mathcal{S}, M)$ называется системой Кокстера. Зачастую мы будем обозначать систему Кокстера просто $\mathcal{S}$ и считать M структурой на системе $\mathcal{S}$, обозначая ее $M_{\mathcal{S}}$. Для пары элементов $s = s_i$, $s' = s_j \in \mathcal{S}$ будем использовать обозначение $m_{s,s'} := m_{ij}$.

Граф Кокстера $\Delta = \Delta(\mathcal{S}, M)$, ассоциированный с системой $(\mathcal{S}, M)$, имеет множество $\mathcal{S}$ вершин; вершины s_i и s_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $m_{ij} \geq 3$; если $m_{ij} \geq 4$, то ребру приписывается вес $m_{ij} = m_{ji}$. Взвешенный граф Кокстера Δ однозначно определяет соответствующую матрицу Кокстера.

Для всякого подмножества $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ индуцированная матрица Кокстера M' есть ограничение $M = M_{\mathcal{S}}$ на $\mathcal{S}'$. Ассоциированный граф $\Delta' := \Delta(\mathcal{S}', M')$ является полным подграфом в Δ , т. е. две вершины $s_1, s_2 \in \mathcal{S}'$ соединены в Δ' так же, как и в Δ (с учетом весов).

Для любых двух букв a, b и неотрицательного целого m обозначим через $\langle ab \rangle^m$ слово $abab \dots$ длины m , состоящее из чередующихся букв a и b . Если a и b лежат в группе G , то $\langle ab \rangle^m$ обозначает соответствующее произведение в группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Группа кос Артина–Брискорна $\text{Br}(\mathcal{S}) = \text{Br}(\mathcal{S}, M)$ системы Кокстера $(\mathcal{S}, M)$ – это группа, порожденная элементами множества $\mathcal{S}$

с (обобщенными) соотношениями группы кос

$$\langle s_i s_j \rangle^{m_{ij}} = \langle s_j s_i \rangle^{m_{ij}}$$

для всех $i \neq j$ таких, что $m_{ij} < \infty$.

Группа Кокстера–Вейля $W(S) = W(S, M)$ получается из группы кос $\text{Br}(S)$ добавлением соотношения идемпотентности $s^2 = 1$ для каждого $s \in S$.

Ядро естественной проекции $\pi: \text{Br}(S) \rightarrow W(S)$ называется группой краше-ных кос системы Кокстера (S, M) и обозначается $P(S)$. Ее абелианизация обозначается $P_{\text{ab}}(S)$.

Для того чтобы отличать тождества в различных группах, мы будем использовать запись $w \equiv w'$ для равенства в группе $W(S)$ и $w = w'$ для равенства в группе $\text{Br}(S)$. Выражение элемента w из группы $W(S)$ или $\text{Br}(S)$ – это слово $s = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_q^{\epsilon_q}$ в алфавите S с показателями $\epsilon_i = \pm 1$, значение которого в $W(S)$ или, соответственно, в $\text{Br}(S)$ равно w . Такое выражение s называется положительным, если все показатели ϵ_i равны $+1$. С учетом соотношения $s_i^{-1} = s_i$ мы будем рассматривать только положительные выражения в группе $w \in W(S)$. Элемент $w \in \text{Br}(S)$ называется положительным, если у него существует положительное выражение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Длиной $\ell(w)$ элемента w из группы $W(S)$ называется минимально возможная длина выражения $s = s_1 \cdots s_l$ этого элемента. W -длина элемента $x \in \text{Br}(S)$ – это длина $\ell_W(\bar{x})$ его проекции $\bar{x} := \pi(x)$ в $W(S)$. Выражение s называется приведенным (или W -приведенным), если оно положительно и его длина равна его W -длине.

Квазиотражением в группе Кокстера–Вейля $W(S)$ называется элемент t , сопряженный какой-то образующей $s \in S$. Обозначим через $T(S)$ множество всех квазиотражений в группе $W(S)$.

Отметим, что квазиотражения являются обычными отражениями в конечных группах Кокстера–Вейля и транспозициями в симметрических группах Sym_n . Нам понадобятся следующие стандартные свойства групп Кокстера–Вейля (см., например, [15] или [27]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. 1. Сильное свойство замены. Пусть $s = s_1 \cdots s_q \in W(S)$ – положительное выражение элемента $w \in W(S)$, $s \in S$ – образующая, а $t \in T(S, M)$ – квазиотражение. Тогда $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$, а $\ell(wt) - \ell(w)$ нечетно. Кроме того, если $\ell(wt) < \ell(w)$, то найдется индекс $j = 1, \dots, q$ такой, что $w \equiv s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_q t$. Аналогичные утверждения выполнены и для умножения на элемент w справа.

2. Соотношения между образующими. Порядок элемента $s_i s_j$ в группе $W(S)$ равен m_{ij} . Далее, для любого подмножества $S' \subset S$ естественный гомоморфизм $W(S') \rightarrow W(S)$ инъективен, т. е. в группе $W(S)$ нет никаких дополнительных соотношений между образующими группы $W(S')$.

3. Единственность множества сомножителей. Для любого элемента $w \in W(S)$ множество сомножителей $S_w := \{s_1, \dots, s_l\}$ в приведенном выражении $w = s_1 \cdots s_l$ не зависит от выбора приведенного выражения; таким образом, множество S_w порождает единственную минимальную подсистему $S' \subset S$, для которой элемент w лежит в группе $W(S')$.

4. Классы сопряженности образующих. Две образующие $s', s'' \in \mathcal{S}$ сопряжены тогда и только тогда, когда их можно соединить цепочкой $s_0 = s', s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = s''$, в которой все индексы m_{s_{i-1}, s_i} нечетны. В частности, для связного графа $\Delta(\mathcal{S})$ без весов (т.е. такого, что все m_{ij} равны 2 или 3) множество квазиотражений $T(\mathcal{S})$ состоит из элементов, сопряженных любой заданной образующей $s \in \mathcal{S}$.

ЛЕММА 2.4. Пусть элемент $w \in W(\mathcal{S})$ имеет два разложения: $w \equiv s_1 w_1 \equiv s_2 w_2$, причем $s_1 \neq s_2 \in \mathcal{S}$, $w_1, w_2 \in W(\mathcal{S})$ и $\ell(w_1) = \ell(w_2) = \ell(w) - 1$. Положим $m := m_{s_1 s_2}$. Тогда элемент w имеет разложение $w \equiv \langle s_1 s_2 \rangle^m w_0 \equiv \langle s_2 s_1 \rangle^m w_0$ при $\ell(w_0) = \ell(w) - m$. Аналогичное утверждение выполнено и для разложений вида $w \equiv w'_1 s_1 \equiv w'_2 s_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем разложения $w \equiv \langle s_1 s_2 \rangle^{n_1} v_1$ и $w \equiv \langle s_2 s_1 \rangle^{n_2} v_2$ так, что $\ell(v_i) = \ell(w) - n_i$ и длины n_i являются максимально возможными. Тогда $1 \leq n_i \leq m$. В самом деле, если $n_1 > m$, то элемент w имеет приведенное выражение, начинающееся с $\langle s_1 s_2 \rangle^{m+1}$. Но тогда

$$\langle s_1 s_2 \rangle^{m+1} = s_1 \langle s_2 s_1 \rangle^m \equiv s_1 \langle s_1 s_2 \rangle^m = s_1^2 \langle s_2 s_1 \rangle^{m-1} \equiv \langle s_2 s_1 \rangle^{m-1}$$

имеет меньшую W -длину, что противоречит условию $\ell(v_1) = \ell(w) - n_1$.

Если хотя бы одно из чисел n_1, n_2 равно m , то доказательство очевидно, поэтому предположим, что $n_1, n_2 < m$. Выберем приведенные выражения v_i элементов v_i так, что $\langle s_1 s_2 \rangle^{n_1} v_1$ и $\langle s_2 s_1 \rangle^{n_2} v_2$ являются приведенными выражениями элемента w . Тогда, применяя сильное свойство замены и соотношение $\ell(s_2 w) = \ell(w) - 1$, мы получаем, что элемент w имеет выражение $s_2 w_2$, в котором w_2 получается удалением одной образующей s^* из выражения $\langle s_1 s_2 \rangle^{n_1} v_1$. Эта образующая не может быть первой буквой s_1 , так как $s_1 \neq s_2$. Она не может быть и последней буквой в подслове $\langle s_1 s_2 \rangle^{n_1}$, так как тогда $\langle s_1 s_2 \rangle^{n_1} \equiv \langle s_2 s_1 \rangle^{n_1}$, что противоречит неравенству $n_1 < m = m_{s_1 s_2}$. Наконец, она не может быть внутренней буквой в подслове $\langle s_1 s_2 \rangle^{n_1}$, поскольку тогда мы получили бы квадрат образующей в качестве подслова в $s_2 w_2$, откуда следовало бы, что $\ell(s_2 w_2) < \ell(w)$. Итак, буква s^* удаляется из слова v_1 . Обозначив полученное таким образом слово через v'_2 , мы имеем приведенное выражение $\langle s_2 s_1 \rangle^{n_1+1} v'_2$. Отсюда следует, что $n_2 > n_1$. В силу симметрии должно быть выполнено и обратное неравенство $n_1 > n_2$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $n_1 = n_2 = m$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.5. Для любых двух приведенных выражений $s = s_1 \cdots s_l$ и $s' = s'_1 \cdots s'_l$ элемента $w \in W(\mathcal{S})$ их значения в группе $\text{Br}(\mathcal{S})$ определяют один и тот же элемент $\hat{w} \in \text{Br}(\mathcal{S})$. В частности, соответствие $w \in W(\mathcal{S}) \mapsto \hat{w} \in \text{Br}(\mathcal{S})$ является теоретико-множественным сечением проекции $\pi: \text{Br}(\mathcal{S}) \rightarrow W(\mathcal{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя индукцию по длине элемента w , мы можем считать, что утверждение справедливо для всех элементов $v \in W(\mathcal{S})$ длины $\ell(v) < \ell(w)$. Отсюда немедленно следует утверждение леммы при $s_1 = s'_1$, поэтому рассмотрим случай $s_1 \neq s'_1$. Положим $m := m_{s_1 s'_1}$. По лемме 2.4 элемент w имеет приведенные выражения $\langle s_1 s'_1 \rangle^m w_0 \equiv \langle s'_1 s_1 \rangle^m w_0$. По предположению индукции подъем $\hat{w}_0 \in \text{Br}(\mathcal{S})$ корректно определен. Поскольку

$\langle s_1 s'_1 \rangle^m = \langle s'_1 s_1 \rangle^m$ в группе $\text{Br}(\mathcal{S})$, последние два разложения определяют один и тот же элемент $\langle s_1 s'_1 \rangle^m \hat{w}_0 = \langle s'_1 s_1 \rangle^m \hat{w}_0 \in \text{Br}(\mathcal{S})$. С другой стороны, элемент $\hat{s} := s_1 \cdots s_l \in \text{Br}(\mathcal{S})$ равен элементу $\langle s_1 s'_1 \rangle^m \hat{w}_0$ в группе $\text{Br}(\mathcal{S})$, поскольку они имеют одинаковые первые буквы s_1 . Повторяя это рассуждение для $\hat{s}' := s'_1 \cdots s'_l$, мы завершаем доказательство леммы.

Применяя теорему Райдемайстера–Шрайера (см., например, [16] или [34]), мы получаем копредставление группы $P(\mathcal{S})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. i) Чистая группа кос $P(\mathcal{S})$ порождается элементами $(s_1 \cdots s_l) \cdot s_0^2 \cdot (s_1 \cdots s_l)^{-1}$, для которых произведение $s_1 \cdots s_l s_0$ является W -приведенным.

ii) Определяющее множество соотношений Райдемайстера–Шрайера в группе $P(\mathcal{S})$ состоит из произведений $\hat{w} \cdot R \cdot \hat{w}^{-1}$, в которых w пробегает группу Кокстера–Вейля $W(\mathcal{S})$, R пробегает определяющее множество соотношений в группе кос $\text{Br}(\mathcal{S})$, а $\hat{w} \cdot R \cdot \hat{w}^{-1}$ записывается как произведение указанных выше образующих $(s_1 \cdots s_l) \cdot s_0^2 \cdot (s_1 \cdots s_l)^{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Полученные таким образом элементы называются образующими и соотношениями Райдемайстера–Шрайера, или просто RS-элементами. Кроме того, если обозначить через $a * b$ сопряжение элемента b элементом a , так что $a * b := aba^{-1}$, то все RS-образующие имеют вид $\hat{w} * s_0^2$.

Полученные с помощью теоремы Райдемайстера–Шрайера образующие являются элементами свободной группы $\text{Fr}(\mathcal{S})$, и их явный вид зависит от конкретного выражения $s_1 \cdots s_l$. Однако в силу леммы 2.5 нам достаточно знать соответствующий элемент в группе $W(\mathcal{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.6. Мы ограничимся указанием алгоритма, представляющего всякий элемент $f \in P(\mathcal{S})$ в виде произведения образующих. Пусть $f = f_1 \cdot \hat{w} \cdot s^\epsilon \cdot f_2$, где f_1 – произведение RS-образующих, $\hat{w}$ – W -приведенный элемент в $\text{Br}(\mathcal{S})$, $s^\epsilon = s^{\pm 1}$ – буква $s \in \mathcal{S}$, а f_2 – произвольный элемент группы $\text{Br}(\mathcal{S})$. Найдем такой элемент $w_1 \in W(\mathcal{S})$, что $w_1 \equiv w \cdot s$. Тогда $f = f_1 \cdot (\hat{w} \cdot s^\epsilon \cdot \hat{w}_1^{-1}) \cdot \hat{w}_1 \cdot f_2$. Значит, нам достаточно представить элемент $\hat{w} \cdot s^\epsilon \cdot \hat{w}_1^{-1}$ в виде произведения RS-образующих. Необходимо рассмотреть четыре случая в зависимости от возможной W -длины элемента w_1 и знака $\epsilon = \pm 1$. Напомним, что $\ell_W(w_1) = \ell_W(w) \pm 1$. Имеем:

- 1) случай $\ell(w_1) = \ell(w) + 1$ и $\epsilon = +1$: $\hat{w}_1 = \hat{w} \cdot s$ и $\hat{w} \cdot s \cdot \hat{w}_1^{-1} = 1$;
- 2) случай $\ell(w_1) = \ell(w) + 1$ и $\epsilon = -1$: $\hat{w}_1 = \hat{w} \cdot s$ и $\hat{w} \cdot s^{-1} \cdot \hat{w}_1^{-1} = (\hat{w} * s^2)^{-1}$;
- 3) случай $\ell(w_1) = \ell(w) - 1$ и $\epsilon = +1$: $\hat{w} = \hat{w}_1 \cdot s$ и $\hat{w} \cdot s \cdot \hat{w}_1^{-1} = \hat{w}_1 * s^2$;
- 4) случай $\ell(w_1) = \ell(w) - 1$ и $\epsilon = -1$: $\hat{w} = \hat{w}_1 \cdot s$ и $\hat{w} \cdot s^{-1} \cdot \hat{w}_1^{-1} = 1$.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. i) Абелианизация $P_{\text{ab}}(\mathcal{S})$ группы крашенных кос $P(\mathcal{S})$ является свободной абелевой группой с базисом, порожденным RS-элементами $\hat{w} * s^2 \in P(\mathcal{S})$.

ii) Проекция элемента $x * s^2$ при $x \in \text{Br}(\mathcal{S})$ и $s \in \mathcal{S}$ в группу $P_{\text{ab}}(\mathcal{S})$ является образующей вида $[\hat{w} * \tilde{s}^2]_{\text{ab}}$ для некоторых $w \in W(\mathcal{S})$ и $\tilde{s} \in \mathcal{S}$, вообще говоря, не единственных. Кроме того, элемент $\hat{w} * \tilde{s}$ может быть получен применением последовательности следующих преобразований:

(A0) замена $x * s^2$ при $x \in \text{Br}(\mathcal{S})$ на $x' * s^2$ для такого $x' \in \text{Br}(\mathcal{S})$, что x и x' имеют одинаковые проекции в группу $W(\mathcal{S})$, $x \equiv x' \in W(\mathcal{S})$;

(A1) замена $(x \cdot \langle s_1 s_2 \rangle^k) * s_3^2$ на $(x \cdot \langle s_2 s_1 \rangle^{m-k-1}) * (s'_3)^2$, где:

- a) $x \in \text{Br}(\mathcal{S})$, $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, $m := m_{s_1 s_2} < \infty$, $k = 0, \dots, m-1$,
- b) $s_3 = s_1$, если k чётно, и $s_3 = s_2$, если k нечётно,
- c) $s'_3 = s_3$, если m чётно, и s'_3 – недостающий элемент s_1 или s_2 , если m нечётно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что преобразования (A0) и (A1) тождественны в группе $P_{ab}(\mathcal{S})$. Первое следует из равенства

$$(x s_1^2 y) * s_2^2 = (x s_1^2 y) s_2^2 (x s_1^2 y)^{-1} = x s_1^2 x^{-1} \cdot (xy) s_2^2 (xy)^{-1} \cdot (x s_1^2 x^{-1})^{-1}.$$

Для доказательства второго заметим, что достаточно рассмотреть случай $x = 1$. Представим соотношение группы кос $\langle s_1 s_2 \rangle^m = \langle s_2 s_1 \rangle^m$ в виде $\langle s_1 s_2 \rangle^{m-1} s_3 = s_2 \langle s_1 s_2 \rangle^{m-1}$. Отсюда алгебраическими преобразованиями мы получаем соотношение

$$\langle s_1 s_2 \rangle^{m-1} s_3 (\langle s_1 s_2 \rangle^{m-1})^{-1} = s_2,$$

из которого возведением в квадрат получается требуемое соотношение при $k = m-1$. Сопряжение элементом $(\langle s_1 s_2 \rangle^l)^{-1}$ и применение преобразования (A0) завершают доказательство. В специальном случае $s_1 = s_2 =: s$ должно быть выполнено $m = 1$ и $k = 0$, так что $m-k-1 = 0$, и единственное соотношение вида (A1) – это тривиальное тождество $(x \cdot s) * s^2 = x * s^2$.

Выберем элемент $a \neq b \in \mathcal{S}$ так, что $m := m_{ab} \neq \infty$. Пусть $w_0 \in W(\mathcal{S})$ – произвольный элемент. Положим $a_{2i-1} := b_{2i} := a$, $a_{2i} := b_{2i-1} := b$, $w_i := w_i \cdot \langle ab \rangle^i$ и $w'_i := w_i \cdot \langle ba \rangle^i$. Заметим, что $\langle ab \rangle^{2m} \equiv 1 \in W(\mathcal{S})$, так что элементы w_i и w'_i повторяются с периодом $2m$, т.е. $w_{i+2m} \equiv w_i$ и $w'_{i+2m} \equiv w'_i$. Кроме того, $b_i = a_{2m-i}$ и $w'_i \equiv w_{2m-i}$. Индуцированное RS-соотношение имеет вид

$$\prod_{i=1}^m (\hat{w}_{i-1} \cdot a_i \cdot \hat{w}_i^{-1}) = \prod_{i=1}^m (\hat{w}'_{i-1} \cdot b_i \cdot (\hat{w}'_i)^{-1}).$$

Пусть w_k – элемент наибольшей W -длины. Тогда $\ell(w_{k-1}) = \ell(w_{k+1}) = \ell(w_k) - 1$. В этой ситуации лемма 2.4 гарантирует, что $v := w_{k \pm m}$ – самый короткий элемент для $\ell(v) = \ell(w_k) - m$, и для любого $i = 0, \dots, 2m$ выполнено $w_{k \pm m \pm i} \equiv v \langle ab \rangle^i$ или $w_{k \pm m \pm i} \equiv v \langle ba \rangle^i$. Следовательно, $w_i \equiv v \cdot v_i$, где $\ell(w_i) = \ell(v) + \ell(v_i)$, и v_0 есть либо $\langle ab \rangle^l$, либо $\langle ba \rangle^l$ для какого-то $l = 0, \dots, m$. Это означает, что рассматриваемое нами соотношение получается сопряжением элементом v из соотношения

$$\prod_{i=1}^m (\hat{v}_{i-1} \cdot a_i \cdot \hat{v}_i^{-1}) = \prod_{i=1}^m (\hat{v}'_{i-1} \cdot b_i \cdot (\hat{v}'_i)^{-1}), \quad (2.1)$$

в котором v_i и v'_i определяются так же, как w_i и w'_i .

Учитывая симметрию $a \leftrightarrow b$, предположим, что $v_0 = \langle ab \rangle^l$ при $l \leq m$. В случае четного l мы получаем следующую последовательность слов v_i и v'_i :

$$v_i \equiv \begin{cases} \langle ab \rangle^{l+i}, & i = 0, \dots, m-l, \\ \langle ab \rangle^m \equiv \langle ba \rangle^m, & i = m-l, \\ \langle ba \rangle^{m+l-i}, & i = m-l, \dots, m, \end{cases} \quad v'_i \equiv \begin{cases} \langle ab \rangle^{l-i}, & i = 0, \dots, l, \\ \langle ab \rangle^0 \equiv \langle ba \rangle^0 \equiv 1, & i = m-l, \\ \langle ba \rangle^{i-l}, & i = l, \dots, m. \end{cases}$$

В случае нечетного l эти последовательности меняются местами. Элемент $\hat{v}_{i-1} \cdot a_i \cdot \hat{v}_i^{-1}$ нетривиален тогда и только тогда, когда $\ell(v_{i-1}) > \ell(v_i)$; аналогичное утверждение верно и для элемента $\hat{v}'_{i-1} \cdot b_i \cdot (\hat{v}'_i)^{-1}$. Соответствующие значения i суть $i = m-l+1, \dots, m$ для v_i и $i = 1, \dots, l$ для v'_i . Сравнивая соответствующие сомножители, мы видим, что индуцированное соотношение в группе $P_{ab}(\mathcal{S})$ есть сумма соотношений вида (A1) по всем $k = 1, \dots, l$.

ТЕОРЕМА 2.9. *Два квазиотражения $t = w * s$ и $t' = w' * s'$ в группе $W(\mathcal{S})$ для $w, w' \in W(\mathcal{S})$ и $s, s' \in \mathcal{S}$ равны тогда и только тогда, когда второе может быть получено из первого последовательностью преобразований следующего вида:*

(Т) замена $(x \cdot \langle s_1 s_2 \rangle^k) * s_3$ на $(x \cdot \langle s_2 s_1 \rangle^{m-k-1}) * s'_3$, где $x \in W(\mathcal{S})$, а обозначения s_1, s_2, s_3, s'_3 имеют тот же смысл, что и в части (A1) предложения 2.8.

В частности, сопоставление $t \equiv w * s \in \mathcal{T}(\mathcal{S}) \leftrightarrow A_t := \hat{w} * s^2 \in P_{ab}(\mathcal{S})$ для $w \in W(\mathcal{S})$ и $s \in \mathcal{S}$ задает биективное соответствие между множеством квазиотражений в группе $W(\mathcal{S})$ и RS-базисом группы $P_{ab}(\mathcal{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ построенный выше RS-базис группы $P_{ab}(\Delta)$ и через $[\hat{w} * s^2]_{ab}$ образ элемента $\hat{w} * s^2 = \hat{w} \cdot s^2 \cdot \hat{w}^{-1}$ в группе $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Заметим, что преобразование (A1) из предложения 2.8 получается возведением преобразования (Т) в квадрат, а аналогичное преобразованию (A0) преобразование в $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ тождественно. Таким образом, второе утверждение теоремы следует из первого.

В любом случае мы получаем корректно определенное сюръективное отображение $\mathbf{t}: \mathcal{A}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S})$, задаваемое формулой $\mathbf{t}: [\hat{w} * s^2]_{ab} \mapsto w * s$, и первое утверждение теоремы эквивалентно инъективности отображения $\mathbf{t}$. Поскольку отображение $\mathbf{t}$ заведомо $W(\mathcal{S})$ -инвариантно, достаточно доказать, что для любых $s \in \mathcal{S}$ и $w \in W(\mathcal{S})$ из условия $w * s \equiv s$ вытекает равенство $[\hat{w} * s^2]_{ab} = [s^2]_{ab}$. Проведем индукцию по длине $\ell(w)$. Случай $\ell(w) = 0$ тривиален. Зафиксируем пару (w, s) , для которой $w * s \equiv s$. Пусть $\ell(ws) = \ell(w) - 1$. Тогда по сильному свойству замены имеем $w = w's$, где $\ell(w') = \ell(w) - 1$. Но тогда

$$w * s \equiv (w's) * s \equiv (w's) \cdot s \cdot (s(w')^{-1}) \equiv w' \cdot s \cdot (w')^{-1} \equiv w' * s,$$

следовательно, $[\hat{w} * s^2]_{ab} = [\hat{w}' * s^2]_{ab} = [s^2]_{ab}$ по предположению индукции. Если $\ell(ws) = \ell(w) + 1$, то из леммы 2.5 следует равенство $\hat{w}s = \hat{w}s$ в группе $\text{Br}(\mathcal{S})$. С другой стороны, равенство $w * s \equiv s$ означает, что элементы w и s коммутируют в группе $W(\mathcal{S})$, и потому $\ell(sw) = \ell(ws) = \ell(w) + 1$. Как и выше, мы получаем, что $\widehat{sw} = s\hat{w}$, следовательно, $\hat{w}s = s\hat{w}$. Отсюда вытекает нужное равенство $[\hat{w} * s^2]_{ab} = [s^2]_{ab}$. Теорема доказана.

Заметим, что естественный подъем $w \in W(S) \mapsto \hat{w} \in \text{Br}(S)$, построенный в лемме 2.5, не совместим с сопряжением и, в частности, подъем $\hat{t}$ квазиотражения t не сопряжен никакой образующей $s \in S$, если только само t не является образующей. Для приложений желательно найти естественное поднятие $t \in \mathcal{T}(S) \mapsto \tilde{t} \in \text{Br}(S)$, для которого всякий элемент $\tilde{t}$ имеет вид $\tilde{t} = x * s$ и проецируется в элемент t группы $W(S)$. В этом случае множество $\{\tilde{t}^2 : t \in \mathcal{T}(S)\}$ будет естественной системой образующих группы $P(S)$. Наивное определение такого поднятия состоит в том, чтобы найти выражение вида $t \equiv w * s \in W(S)$ при $s \in S$ и $w \in W(S)$ и положить $\tilde{t} := \hat{w} * s \in \text{Br}(S)$. Оказывается, однако, что это определение некорректно. Например, в симметрической группе Sym_3 со стандартными образующими a, b , удовлетворяющими стандартному соотношению $aba = bab$, квазиотражение $t := aba \equiv bab \in \text{Sym}_3$ имеет два различных естественных поднятия в соответствующую группу кос Br_3 : $aba^{-1} = b^{-1}ab$ и $bab^{-1} = a^{-1}ba$.

Тем не менее, ситуация не так уж плоха, и поднятие $t \in \mathcal{T}(S) \mapsto \tilde{t} \in \text{Br}(S)$, обладающее вышеуказанными свойствами, существует, хотя оно и не единственно. Для его описания нам понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Определим *ширину* $\text{wd}(t)$ квазиотражения $t \in \mathcal{T}(S)$ как наименьшее такое k , что квазиотражение t может быть представлено в виде $t \equiv w * s$, где $w \in W(S)$, $s \in S$ и $k = \ell(w)$. Квазиотражения ширины 0 суть в точности образующие $s \in S$.

ТЕОРЕМА 2.11. i) Если $\ell(sts) = \ell(t)$ для квазиотражения $t \in \mathcal{T}(S)$ и образующей $s \in S$, то они коммутируют в $W(S)$, т. е. $sts \equiv t$.

ii) Для любого квазиотражения $t \in \mathcal{T}(S)$ выполнено $\ell(t) = 2\text{wd}(t) + 1$. Кроме того, если $\ell(st) = \ell(t) - 1$ для образующей $s \in S$, то либо $t = s$ и $\ell(t) = 1$, либо $\ell(t) > 1$ и $t = st*s$ для некоторого другого квазиотражения $t^* \in \mathcal{T}(S)$ длины $\ell(t^*) = \ell(t) - 2$ и ширины $\text{wd}(t^*) = \text{wd}(t) - 1$.

iii) Пусть $t \in \mathcal{T}(S)$ – квазиотражение, а $s \neq s' \in S$ – две образующие, для которых $\ell(st) = \ell(s't) = \ell(t) - 1$. Положим $m := m_{s,s'}$. Тогда либо $t \equiv \langle ss' \rangle^m \equiv \langle s's \rangle^m$ и m нечетно, либо $t \equiv \langle ss' \rangle^m * t^*$ для некоторого квазиотражения ширины $\text{wd}(t^*) = \text{wd}(t) - m$.

iv) Пусть $t \in \mathcal{T}(S)$ – квазиотражение ширины k , а $t \equiv w * s$ и $t \equiv w' * s'$ – два представляющих t выражения, где $s, s' \in S$ и $w, w' \in W(S)$, причем $\ell(w) = \ell(w') = k$. Тогда значение выражения $\hat{w} * s$ в группе $\text{Br}(S)$ может быть получено из значения выражения $\hat{w}' * s' \in \text{Br}(S)$ сопряжением элементами вида $t_i^2 = \hat{w}_i * s_i^2 \in \text{Br}(S)$, где $s_i \in S$, а $w_i \in W(S)$, причем $\ell(w_i) < k$.

v) Для каждого $t \in \mathcal{T}(S)$ зафиксируем выражение $t = w_t * s_t$ при $s_t \in S$ и $w_t \in W(S)$, удовлетворяющее условию $\ell(w_t) = \text{wd}(t)$, и положим $\tilde{t} := \hat{w}_t * s_t \in \text{Br}(S)$. Тогда множество $\tilde{\mathcal{T}}^2 := \{\tilde{t}^2 : t \in \mathcal{T}(S)\}$ является минимальным множеством образующих для группы крашенных кос $P(S)$.

Главным в теореме 2.11 является утверждение iv), которое имеет следующий смысл: подъем $t \in \mathcal{T}(S) \mapsto \tilde{t} = \hat{w} * s$, определяемый в утверждении v), единствен по модулю сопряжений на подъемах $\tilde{t}_i$ квазиотражений t_i меньшей ширины, чем t , $\text{wd}(t_i) < \text{wd}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.11. i) Зафиксируем приведенное выражение $\mathbf{t}$ для элемента t . Заметим, что $\ell(st) = \ell((st)^{-1}) = \ell(t^{-1}s^{-1}) = \ell(ts)$. Предположим, что $\ell(ts) = \ell(st) = \ell(t) + 1$. Тогда $\ell(s(ts)) = \ell(ts) - 1$, и мы можем применить сильное свойство замены к выражению $s \cdot (t \cdot s)$. Первая буква s не может сократиться с буквой из $\mathbf{t}$, поскольку тогда $\ell(st) = \ell(t) - 1 = \ell(ts)$, что противоречит сделанному выше предположению. Значит, в выражении $s \cdot (t \cdot s)$ первая буква s сокращается с последней, и мы получаем требуемое утверждение. В случае $\ell(ts) = \ell(st) = \ell(t) - 1$ положим $x := t \cdot s \in W(\mathcal{S})$, зафиксируем приведенное выражение $\mathbf{x}$ для x и применим то же самое рассуждение к произведению $s \cdot (x \cdot s)$. Заметим, что хотя во втором случае утверждение вытекает также из утверждения ii), данное нами доказательство не опирается на ii).

ii) Рассмотрим несколько случаев и подслучаев. Поскольку все вычисления производятся в группе Кокстера $W(\mathcal{S})$, мы будем использовать для равенства в этой группе символ “=”.

Проведем индукцию по ширине $\text{wd}(t)$ квазиотражения. Заметим, что для любого элемента $t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ его длина $\ell(t)$ нечетна и $\ell(t) \leq 2 \text{wd}(t) + 1$.

Очевидно, что образующие $s \in \mathcal{S}$ – это единственные квазиотражения ширины 0, а их длина равна 1. Это доказывает базу индукции, и нам остается обосновать шаг индукции. Кроме того, если $\text{wd}(t) = 1$, то $t = s_1 s_2 s_1$ и длина $\ell(t)$ равна либо 3, либо 1. Во втором случае элементы s_1 и s_2 коммутируют, так что $t = s_1$, что противоречит условию $\text{wd}(t) = 1$. Значит, длина $\ell(t)$ должна быть равна 3. Далее, если $t = s_1 s_2 s_1$ и $\ell(s \cdot t) = 2$, то по сильному свойству замены произведение $s \cdot t$ задается словом, получающимся из $s_1 s_2 s_1$ удалением одной буквы. В частности, s лежит в подгруппе, порожденной s_1, s_2 . Из соотношений между образующими (см. предложение 2.3) следует, что s есть либо s_1 , либо s_2 . В случае $s = s_1$ доказательство очевидно, так что мы можем считать, что $s = s_2$. Рассматривая всевозможные слова, получающиеся из $s_1 s_2 s_1$ удалением одной буквы, мы видим, что единственное такое слово, являющееся выражением для $s \cdot t = s_2 s_1 s_2 s_1$, – это $s_1 s_2$. В данном случае мы немедленно получаем, что s_1, s_2 удовлетворяют обычному соотношению $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$, следовательно, $t = s_2 s_1 s_2 = s s_1 s$, что и требовалось доказать. Итак, оба утверждения части ii) справедливы при $k = 1$.

Зафиксируем теперь $k \geq 2$. Предположим, что $\ell(t_0) = 2 \text{wd}(t_0) + 1$ для всех $t_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ при $\text{wd}(t_0) \leq k$ и второе утверждение части ii) выполняется для всех $t_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ при $\text{wd}(t_0) \leq k - 1$. Пусть t – квазиотражение ширины k , и пусть $s \in \mathcal{S}$ – образующая. Если $\ell(sts) = \ell(t) + 2$, то доказательство очевидно. Поэтому можно считать, что $\ell(sts) \leq \ell(t)$. Тогда в случае $\ell(st) = \ell(t) + 1$ должно выполняться равенство $\ell(sts) = \ell(t)$. Значит, $sts = t$ в силу части i), так что требуемое соотношение $\ell(t) = 2 \text{wd}(t) + 1$ выполняется в силу индуктивного предположения. Поэтому мы можем полагать, что $\ell(st) = \ell(t) - 1$.

По условию имеем $t = s't's'$ для $s' \in \mathcal{S}$ и $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ ширины $\text{wd}(t') = k - 1$. Если $s = s'$, то доказательство очевидно, поэтому предположим, что s и s' различны. Тогда $\ell(s't) = \ell(t) - 1$ и в силу леммы 2.4 мы получаем, что $t = \langle ss' \rangle^m x$, где $m = m_{s,s'}$ и $x \in W(\mathcal{S})$ имеет длину $\ell(x) = \ell(t) - m$. Зафиксируем приведенное выражение $\mathbf{x}$, представляющее элемент x .

Тривиальный случай: $x = 1$, т.е. $t = \langle ss' \rangle^m$. В этом случае m нечетно, $m \geq 3$, следовательно, s является первой и последней буквой в слове $\langle ss' \rangle^m$. Таким образом, $sts = \langle s's \rangle^{m-2}$, и требуемое утверждение выполнено.

Случай (а): $\ell(xs) = \ell(xs') = \ell(x) - 1$. Тогда $x = y \cdot \langle ss' \rangle^m = y \cdot \langle s's \rangle^m$ для некоторого $y \in W(S)$ длины $\ell(y) = \ell(x) - m$, и потому $t = \langle s's \rangle^m * y$ и $t' = \langle ss' \rangle^{m-1} * y$. В частности, y является квазиотражением, $y \in T(S)$. Заметим, что к t' применимо предположение индукции. Сравнивая длины элементов t' и y , мы видим, что $\text{wd}(y) = \text{wd}(t') - (m - 1) = \text{wd}(t) - m$. Отсюда следует, что квазиотражение $t^* := \langle s's \rangle^{m-1} * y$ имеет ширину $\text{wd}(t^*) = \text{wd}(t) - 1$ и $t = st^*s$, что и требовалось доказать.

Случай (б): $\ell(xs) = \ell(xs') = \ell(x) + 1$. Из того что $ts = (st)^{-1}$, следует, что $\ell(ts) = \ell(t) - 1$ и, аналогичным образом, $\ell(ts') = \ell(t) - 1$. Значит, мы можем применить сильное свойство замены (см. предложение 2.3) к произведениям $\langle ss' \rangle^m x \cdot s$ и $\langle ss' \rangle^m x \cdot s'$. В этих двух случаях значение произведения дается словом, получающимся удалением одной буквы из произведения. Поскольку $\ell(xs) = \ell(xs') = \ell(x) + 1$, в двух случаях буква удаляется из подслова $\langle ss' \rangle^m$. Отсюда следуют коммутационные тождества $xs = s^*x$ и $xs' = s^+x$, где s^*, s^+ суть s или s' . Для того чтобы определить, в каком случае $s^* = s$, $s^+ = s'$, а в каком, наоборот, $s^* = s'$, $s^+ = s$, заметим, что $t' = s'ts' = \langle ss' \rangle^{m-1} x \cdot s' = \langle ss' \rangle^{m-2} x$, так что s^+ – последняя буква в словах $\langle ss' \rangle^{m-1}$ и $\langle s's \rangle^m$. Значит, $s^+ = s$, если m четно, и $s^+ = s'$, если m нечетно.

Коммутационные соотношения гарантируют, что мы можем передвигать буквы в подслове $\langle s's \rangle^m$ одну за другой с левой стороны от x направо, получая соотношения $t = \langle s's \rangle^m x = \langle s's \rangle^{m-1} x s' = \langle s's \rangle^{m-2} x s s'$ и т.д.

Рассмотрим подслучай, когда m четно, т.е. $m = 2n$. Передвинем половину слова $\langle s's \rangle^m$ и получим $t = \langle s's \rangle^n * x$. В частности, x является квазиотражением, $x \in T(S)$. Кроме того, $t' = s'ts' = \langle ss' \rangle^{n-1} * x$. Сравнивая длину и ширину t' и x , получаем соотношение $\ell(t') = \ell(x) + 2\ell(\langle ss' \rangle^{n-1})$. Поскольку $\text{wd}(t') < k$, можно применить предположение индукции и получить, что $\text{wd}(x) = \text{wd}(t') - (n - 1) = k - n$. В частности, элемент x может быть задан выражением вида $x = w s_0 w^{-1}$, где $s_0 \in S$, а w – приведенное слово длины $\ell(w) = k - n$. Теперь, используя идемпотентность $x = x^{-1}$, мы можем переписать соотношение коммутативности $s'x = xs$ в виде $x s x s' = 1$. Следовательно, мы можем применить сильное свойство замены к выражению $x \cdot (s w s_0 w^{-1} s')$. Это означает, что x сокращается с некоторой буквой в слове $s w s_0 w^{-1} s'$ и значение полученного слова в группе $W(S)$ равно 1. Сокращающаяся буква не может быть первой буквой s , поскольку тогда $x = s$ и $s' = x s x = s$, что противоречит предположению $s \neq s'$. Эта буква не может быть s_0 в середине, поскольку тогда мы получили бы, что $ss' = 1$, откуда снова имели бы $s = s'$. Итак, сокращающаяся буква лежит либо в слове w , либо в слове w^{-1} . Рассмотрим первую возможность. Тогда w имеет вид $w = w' s_1 w''$, где s_1 – это сокращающаяся буква, а w', w'' – подслова в w . Сокращение x и s_1 эквивалентно соотношению $x = w' * s_1$. Отсюда следует, что квазиотражение x имеет ширину $\text{wd}(x) \leq \ell(w') < \ell(w)$, что противоречит $\ell(w) = \text{wd}(x)$. Итак, сокращающаяся буква должна лежать в слове w^{-1} . Как и выше, это означает, что $w^{-1} = w' s_1 w''$, где s_1 – сокращающаяся буква и w', w'' – подслова в w^{-1} .

Заметим теперь, что $xsxs' = 1 = xs'sx$. Поэтому сокращение означает выполнение соотношения $x = (\mathbf{w}'')^{-1}s_1\mathbf{w}'' = ((\mathbf{w}'')^{-1}) * s_1$. Итак, в этом случае мы также приходим к противоречию. Значит, m не может быть четным в условиях рассматриваемого случая.

Если m нечетно, т.е. $m = 2n + 1$, то применимо аналогичное рассуждение. А именно, начнем с выражения $t = \langle s's \rangle^m x = \langle s's \rangle^{2n+1} x$ и передвинем n букв направо от x . Это дает выражение $t = \langle s's \rangle^n * (s^\# x)$, где $s^\#$ есть s или s' , в зависимости от четности n , откуда

$$t' = \langle ss' \rangle^{n-1} * (s^\# x), \quad \ell(t') = \ell(s^\# x) + 2\ell(\langle ss' \rangle^{n-1}).$$

Как и выше, мы заключаем, что $s^\# x$ является квазиотражением ширины $\text{wd}(s^\# x) = k - n$. Следовательно, $s^\# x$ имеет вид $s^\# t^\# s^\#$ для некоторого другого квазиотражения $t^\#$ ширины $\text{wd}(t^\#) = k - n - 1$. В частности, $\ell(s^\# t^\# s^\#) = \ell(t^\#) + 2$. Напомним теперь, что при нечетном $m = 2n + 1$ элемент x коммутирует с s и с s' , и поскольку $s^\#$ — одна из этих образующих, мы получаем $s^\# t^\# s^\# = t^\#$. Последнее равенство противоречит соотношению $\ell(s^\# t^\# s^\#) = \ell(t^\#) + 2$. Тем самым, m не может быть нечетным в условиях рассматриваемого случая. Итак, соотношение $\ell(xs) = \ell(xs') = \ell(x) + 1$ вообще не реализуется.

Случай (с): $\ell(xs') = \ell(x) - 1$ и $\ell(xs) = \ell(x) + 1$. Тогда $x = ys'$ для некоторого элемента $y \in W(\mathcal{S})$ длины $\ell(y) = \ell(x) - 1$. Поскольку $\ell(ts) = \ell((st)^{-1}) = \ell(st) = \ell(t) - 1$, мы можем применить сильное свойство замены к произведению $t \cdot s = \langle s's \rangle^m x \cdot s$. Последняя буква s не может сокращаться с буквой из слова x или с внутренней буквой из подслова $\langle s's \rangle^m$. Поэтому единственные возможности — это сокращения первой и последней букв в $\langle s's \rangle^m$. Далее, после сокращения мы получаем либо $\langle s's \rangle^{m-1} x$, либо $\langle ss' \rangle^{m-1} x$ в качестве приведенного слова, представляющего произведение $t \cdot s$, значит, $\langle s's \rangle^{m-1} xs$ или $\langle ss' \rangle^{m-1} xs$ в качестве приведенного слова, представляющего t . В любом случае выполнено коммутационное соотношение $xs = s^* x$, в котором s^* — последняя буква либо в слове $\langle s's \rangle^m$, либо в слове $\langle ss' \rangle^m$.

Рассмотрим сначала подслучай, в котором первая буква в подсловах $\langle ss' \rangle^{m-1}$, $\langle ss' \rangle^m$ есть s , так что $t = \langle ss' \rangle^{m-1} xs$. Подставляя $x = ys'$, мы получаем выражения $t = \langle ss' \rangle^m ys' = \langle ss' \rangle^{m-1} s^* ys' = \langle ss' \rangle^{m-1} ys's$ и, значит, $s^* ys' = ys's$. По лемме 2.4 имеем $ys's = z \langle ss' \rangle^m = z \langle s's \rangle^m$ для какого-то $z \in W(\mathcal{S})$ длины $\ell(z) = \ell(y) - (m - 2)$. Из двух возможных слов $\langle s's \rangle^m$, $\langle ss' \rangle^m$, дающих один и тот же элемент, выберем заканчивающееся на s ; оно может быть записано в виде $(\langle ss' \rangle^m)^{-1}$. Тогда $xs = ys's = z(\langle ss' \rangle^m)^{-1} = z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1}s$. Коммутационное соотношение $xs = s^* x$ можно переписать в форме $s^* x = z \langle ss' \rangle^m = s^* z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1}$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} t &= \langle ss' \rangle^{m-1} s^* ys' = \langle ss' \rangle^{m-1} s^* z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1} = \langle ss' \rangle^m z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1} \\ &= \langle s's \rangle^m z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1} = \langle s's \rangle^{m-1} (s^+ z)(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1} \\ &= \langle s's \rangle^{m-1} * (s^+ z), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где s^+ — это элемент из пары (s, s') , отличный от s^* . Подставляя тождество $t' = s'ts'$ в соотношение (2.2), мы получаем выражение $t' = \langle ss' \rangle^{m-2} * (s^+ z)$,

согласованное с длиной, т. е. $\ell(t') = \ell(s^+z) + 2(m-2)$. Теперь, как в случаях (а) и (б), мы заключаем, что элемент $s^+z =: t^+$ является квазиотражением ширины $\text{wd}(t^+) = \text{wd}(t') - (m-2) = \text{wd}(t) - (m-1)$ и длины $\ell(t^+) = \ell(t) - 2(m-1)$. Кроме того, сравнивая длины, мы получаем $\ell(t^+) = \ell(z) + 1$. По предположению индукции $t^+ = s^+t^\#s^+$ для некоторого квазиотражения $t^\#$ ширины $\text{wd}(t^\#) = \text{wd}(t^+) - 1$ и длины $\ell(t^\#) = \ell(t^+) - 2$. Значит, $t = \langle ss' \rangle^m * t^\#$ и $\ell(t) = \ell(t^\#) + 2m$. В частности, $x = t^\# \langle ss' \rangle^m$. Но слово $\langle ss' \rangle^m s$ не приведено, и потому $\ell(xs) = \ell(t^\# \langle ss' \rangle^m) = \ell(t^\#) + m - 1 = \ell(x) - 1$, что противоречит сделанным предположениям. Итак, подслучай $t = \langle ss' \rangle^{m-1} xs$ невозможен.

Полученное противоречие показывает, что $t = \langle s's \rangle^{m-1} xs$. Переставляя s и s' , мы можем использовать рассуждение из предыдущего подслучая вплоть до равенства $t = \langle s's \rangle^{m-1} s^*z(\langle s's \rangle^{m-1})^{-1}$ в формуле (2.2). Перепишем его в виде $t = \langle s's \rangle^{m-1} * (s^*z)$, пропустим дальнейшие выкладки в формуле (2.2) и продолжим рассуждение. Это дает аналогичное соотношение $t' = \langle ss' \rangle^{m-2} * (s^*z)$ для $\ell(t') = \ell(s^*z) + 2(m-2)$ и показывает, что элемент $s^*z =: t^+$ является квазиотражением ширины $\text{wd}(t^+) = \text{wd}(t') - (m-2) = \text{wd}(t) - (m-1)$ и длины $\ell(t^+) = \ell(t) - 2(m-1)$. Поскольку для t^+ выполнено аналогичное равенство $t^+ = s^*z$, где $\ell(t^+) = \ell(z) + 1$, квазиотражение $t^\# := s^*t^+s^*$ имеет длину $\ell(t^\#) = \ell(t^+) - 2 = \ell(t) - 2m$, и мы приходим к тому же противоречию, что и в предыдущем подслучае. Окончательно мы получаем, что весь рассматриваемый случай, в котором $\ell(xs') = \ell(x) - 1$ и $\ell(xs) = \ell(x) + 1$, невозможен.

Случай (d): $\ell(xs') = \ell(x) + 1$ и $\ell(xs) = \ell(x) - 1$. Этот случай отличается от случая (c) только тем, что s и s' меняются местами, и использованное выше рассуждение применяется с соответствующими минимальными изменениями. На самом деле, этот случай даже легче, так как один из возникающих в случае (c) подслучаев можно исключить более просто. А именно, поскольку $\ell(t') = \ell(s'ts') = \ell(t) - 2$, после сокращений в произведении $\langle s's \rangle^m x \cdot s'$ мы можем получить только выражение $\langle s's \rangle^{m-1} x$.

iii) Утверждение следует непосредственно из доказательства части ii).

iv) Доказательство проводится индукцией по ширине $\text{wd}(t)$ квазиотражений. В случае $\text{wd}(t) = 0$ доказательство очевидно, так как t — одна из образующих $s \in \mathcal{S}$. Пусть t — квазиотражение ширины $\text{wd}(t) =: k \geq 1$, и предположим, что наше утверждение верно для всех квазиотражений t' ширины $\text{wd}(t') < \text{wd}(t)$. Зафиксируем два приведенных выражения $t = w * s_0 = w' * s'_0$ при $s_0, s'_0 \in \mathcal{S}$ и $w, w' \in W(\mathcal{S})$ длины $\ell(w) = \ell(w') = k$. Найдем образующие $s, s' \in \mathcal{S}$, для которых $\ell(sw) = \ell(s'w') = \ell(w) - 1 = \ell(w') - 1$, и положим $w_1 := sw$ и $w'_1 := s'w'$.

Случай $s = s'$. В этом случае выражения $w_1 * s_0$ и $w'_1 * s'_0$ представляют один и тот же элемент в группе $W(\mathcal{S})$, скажем t_1 , который имеет ширину $\text{wd}(t_1) = k - 1$, и, значит, $\widehat{w}_1 * s_0$ и $\widehat{w}'_1 * s'_0$ сопряжены в $\text{Br}(\mathcal{S})$ элементами $\widehat{w}_j * s_j^{\pm 2}$ при $\ell(w_j) < k - 1$, $\widehat{w}_1 * s_0 = (\prod_j \widehat{w}_j * s_j^{\pm 2}) * (\widehat{w}'_1 * s'_0)$. Сопрягая элементом $s = s'$, мы получаем соотношение

$$\begin{aligned} \widehat{w} * s_0 &= s * (w_1 * s_0) = \left(\prod_j (s \cdot \widehat{w}_j) * s_j^{\pm 2} \right) * ((s \cdot \widehat{w}'_1) * s'_0) \\ &= \left(\prod_j (s \cdot \widehat{w}_j) * s_j^{\pm 2} \right) * (\widehat{w}' * s'_0). \end{aligned}$$

Сопрягающие элементы $(s \cdot \hat{w}_j) * s_j^{\pm 2}$ в этой формуле обладают следующими свойствами. В случае $\ell(s \cdot w_j) = \ell(w_j) + 1$ выполнено $\ell(s \cdot w_j) < k$ и $(s \cdot w_j)^\wedge = s \cdot \hat{w}_j$, так что выражение $(s \cdot \hat{w}_j) * s_j^{\pm 2}$ имеет требуемый вид. В случае $\ell(s \cdot w_j) = \ell(w_j) - 1$ определим $w'_j := s \cdot w_j$ как элемент в группе $W(\mathcal{S})$ и воспользуемся соотношениями $w_j := s \cdot w'_j$ и $\ell(w_j) = \ell(w'_j) + 1$. Тогда $\hat{w}_j = s \cdot \hat{w}'_j$, поэтому $s \cdot \hat{w}_j = s^2 \cdot \hat{w}'_j$ и, наконец, $(s \cdot \hat{w}_j) * s_j^{\pm 2} = s^2 \cdot (\hat{w}'_j * s_j^{\pm 2}) \cdot s^{-2}$. Отсюда следует утверждение iv) в случае $s = s'$.

Случай $s \neq s'$. Положим $m := m_{s,s'}$. Тогда в силу утверждения iii) имеются две возможности: либо m нечетно, $m = 2n + 1$, и $t \equiv \langle ss' \rangle^m$, либо квазиотражение t может быть представлено в виде $t \equiv \langle ss' \rangle^m * t^+$ для другого квазиотражения t^+ ширины $\text{wd}(t^+) = \text{wd}(t) - m$. В первом случае существуют только два приведенных слова вида $\mathbf{w} * s$, представляющие t , а именно $\langle ss' \rangle^{2n+1} \equiv \langle ss' \rangle^n * s^\#$ и $\langle s's \rangle^{2n+1} \equiv \langle s's \rangle^n * s^\dagger$, где $s^\# = s$ и $s^\dagger = s'$, если n четно, и $s^\# = s'$ и $s^\dagger = s$, если n нечетно. Сравнивая подъемы в $\text{Br}(\mathcal{S})$, мы видим, что соотношение в группе кос $\langle ss' \rangle^{2n+1} = \langle s's \rangle^{2n+1}$ эквивалентно в $\text{Br}(\mathcal{S})$ соотношениям $\langle ss' \rangle^n * s^\# = \langle (s')^{-1} s^{-1} \rangle^n s^\dagger$ и $\langle s's \rangle^n * s^\dagger = \langle s^{-1} (s')^{-1} \rangle^n * s^\#$. Остается заметить, что обе пары элементов $\langle ss' \rangle^n * s^\#$, $\langle s^{-1} (s')^{-1} \rangle^n * s^\#$ и $\langle s's \rangle^n * s^\dagger$, $\langle (s')^{-1} s^{-1} \rangle^n s^\dagger$ удовлетворяют iv).

В оставшемся случае $t \equiv \langle ss' \rangle^m * t^+$ выберем представление квазиотражения t^+ в виде $t^+ \equiv \mathbf{w}^+ * s^+$, где $\mathbf{w}^+$ – приведенное слово длины $\ell(\mathbf{w}^+) = \text{wd}(t) - m$. Это дает нам два дополнительных представления квазиотражения t в группе $W(\mathcal{S})$, а именно $t \equiv (\langle ss' \rangle^m \mathbf{w}^+) * s^+ \equiv (\langle s's \rangle^m \mathbf{w}^+) * s^+$. По лемме 2.5 соответствующие элементы $(\langle ss' \rangle^m \hat{\mathbf{w}}^+) * s^+$ и $(\langle s's \rangle^m \hat{\mathbf{w}}^+) * s^+$ равны в группе кос $\text{Br}(\mathcal{S})$. Теперь мы можем воспользоваться уже рассмотренным случаем $s = s'$ и завершить доказательство.

v) Это утверждение следует из утверждения iv).

Предъявим теперь процедуру, позволяющую описать возможные разложения данного элемента $a \in P(\mathcal{S})$ в виде произведения RS-образующих $\tilde{t}_i^2 = \hat{w}_i * s_i^2 \in \tilde{T}^2(\mathcal{S})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. *Разложением длины l элемента x группы G называется выражение $\mathbf{f} = f_1 \cdot f_2 \cdots f_l$, значение которого в группе G равно x . Движением Гурвица называется преобразование такого выражения $\mathbf{f} = f_1 \cdot f_2 \cdots f_l$, при котором пара сомножителей $f_i \cdot f_{i+1}$ заменяется на $(f_i f_{i+1} f_i^{-1}) \cdot f_i$ или на $f_{i+1} \cdot (f_{i+1}^{-1} f_i f_{i+1})$, а остальные сомножители остаются неизменными. Мы будем говорить, что сомножитель f_i сдвигается (без сопряжения) вправо, а сомножитель f_{i+1} сдвигается с сопряжением влево, или, соответственно, что f_i сдвигается с сопряжением вправо, а f_{i+1} сдвигается без сопряжения влево.*

Преобразованием Гурвица называется последовательность движений Гурвица. Два разложения $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}'$, получающиеся друг из друга преобразованием Гурвица, называются гурвиц-эквивалентными.

Например, применяя подходящую последовательность движений Гурвица, мы можем сдвинуть заданный сомножитель f_k на правый конец разложения. Полученное разложение имеет вид $f_k \cdot f'_1 \cdots f'_{k-1} \cdot f_{k+1} \cdots f_l$ с сопряженными сомножителями $f'_i = f_k^{-1} f_i f_k$, $i = 1, \dots, k-1$. (Подробнее об этих понятиях см., например, работу [32].)

ТЕОРЕМА 2.13 (проблема Гурвица в группах Кокстера–Вейля). Пусть $\mathbf{t} = t_1 \cdot t_2 \cdots t_l$ – разложение единицы $1 \in W(S)$ в произведение квазиотражений $t_i \in \mathcal{T}(S)$. Тогда длина l этого разложения четна, $l = 2l'$, и разложение $\mathbf{t}$ гурвиц-эквивалентно разложению $\mathbf{t}'$ в произведение квадратов квазиотражений, т. е. разложению вида $\mathbf{t}' = t'_1 \cdot t'_2 \cdots t'_{l'}$, где $t'_{2i-1} \equiv t'_{2i} \in \mathcal{T}(S)$.

В специальном случае конечных групп Вейля, соответствующих простым комплексным алгебрам Ли, этот результат был получен Каневым [31, предложение 2.3]. Доказательство Канева использует другие методы, а именно геометрию и комбинаторику соответствующей системы корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.13. Поскольку множество квазиотражений $\mathcal{T}(S)$ инвариантно относительно сопряжений, всякое преобразование Гурвица переводит $\mathbf{t}$ в разложение в произведение квазиотражений.

Сдвигая с сопряжением первый сомножитель t_1 на правый конец разложения, мы получаем разложение вида $t_2 \cdot t_3 \cdots t_l \cdot \tilde{t}_1$. Сравнивая его с исходным разложением $\mathbf{t} = t_1 \cdot t_2 \cdots t_l \equiv 1$, мы получаем равенство $\tilde{t}_1 \equiv t_1$. Следовательно, циклическая перестановка сомножителей в разложении $\mathbf{t}$ приводит к гурвиц-эквивалентным разложениям. Поэтому мы можем считать, что последний сомножитель t_l имеет наибольшую ширину среди всех t_i .

Представим теперь каждый элемент t_i , $i = 1, \dots, l-1$, в виде $t_i \equiv w_i * s_i$ с наименьшей возможной длиной $\ell(w_i)$. Зафиксируем приведенное выражение $\mathbf{w}_i$ для каждого w_i . Заметим, что обращение выражения¹ $\mathbf{w}$ любого элемента $w \in W(S)$ дает выражение для обратного элемента w^{-1} . С учетом этого обозначим через $\mathbf{w}^{-1}$ обращение выражения $\mathbf{w}$.

Рассмотрим выражение $\mathbf{w} := \prod_{i=1}^{l-1} \mathbf{w}_i \cdot s_i \cdot \mathbf{w}_i^{-1}$. Его значение в группе $W(S)$ есть $t_l^{-1} \equiv t_l$, а его произведение с t_l равно 1. По сильному свойству замены найдется буква s в $\mathbf{w}$, исключение которой из $\mathbf{w}$ дает выражение для 1.

Рассмотрим сначала случай, когда s – средняя буква s_j в выражении $\mathbf{w}_j \cdot s_j \cdot \mathbf{w}_j^{-1}$ для некоторого t_j . Тогда оставшиеся части $\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_j^{-1}$ сокращаются и, следовательно,

$$t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_j \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1} \equiv t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1} \cdot t_l.$$

С другой стороны, сдвигая с сопряжением сомножитель t_j в выражении $t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_j \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1}$ на правый конец, мы получаем разложение $t_1 \cdots t_{j-1} \times t_{j+1} \cdots t_{l-1} \cdot \tilde{t}_j$. Следовательно, $\tilde{t}_j \equiv t_j$, и разложение $t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_j \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1} \cdot t_l$ гурвиц-эквивалентно разложению $t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1} \cdot t_l \cdot t_l$. Поскольку в этом случае $t_1 \cdots t_{j-1} \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1} \equiv 1$, мы получаем утверждение теоремы индукцией по l .

Остается рассмотреть случай, когда буква s появляется, скажем, в начальном подслове $\mathbf{w}_j$ в выражении $\mathbf{w}_j \cdot s_j \cdot \mathbf{w}_j^{-1}$ для какого-то квазиотражения t_j . (Случай, когда буква s встречается в конечном подслове $\mathbf{w}_j^{-1}$ рассматривается аналогично.) Запишем слово $\mathbf{w}_j$ в виде $\mathbf{w}'s\mathbf{w}''$. Тогда $\mathbf{w}'\mathbf{w}'' \equiv (\mathbf{w}'s(\mathbf{w}')^{-1}) \cdot \mathbf{w}'s\mathbf{w}''$ и, значит,

$$\mathbf{w}'\mathbf{w}'' \cdot s_j \cdot \mathbf{w}_j^{-1} \equiv (\mathbf{w}'s(\mathbf{w}')^{-1}) \cdot (\mathbf{w}_j s_j \mathbf{w}_j^{-1}). \quad (2.3)$$

¹Обращение порядка букв в слове $\mathbf{w}$.

Сдвинем теперь t_l с сопряжением влево до положения между t_{j-1} и t_j . Это дает разложение вида $t_1 \cdots t_{j-1} \cdot \tilde{t}_l \cdot t_j \cdot t_{j+1} \cdots t_{l-1}$. Сравнивая его с равенством (2.3), мы получаем равенство $\tilde{t}_l \equiv \mathbf{w}'s(\mathbf{w}')^{-1}$. Заметим, что ширина квазиотражения $\tilde{t}_l \equiv \mathbf{w}'s(\mathbf{w}')^{-1}$ не превосходит $\ell(\mathbf{w}') < \ell(\mathbf{w}'s\mathbf{w}'')$ и, следовательно, меньше ширины квазиотражения t_l . Теперь можно провести индукцию по сумме ширин квазиотражений t_i . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующую ситуацию. Пусть G – подгруппа в $W(S)$. Тогда группа G действует на $P_{ab}(S)$ сопряжением, и мы обозначим через $P_{ab}(S)_G$ группу коинвариантов (см., например, [14]). Напомним, что $P_{ab}(S)_G$ является фактором группы $P_{ab}(S)$ по подгруппе, порожденной элементами вида $w * A - A$, где $w \in G$ и $A \in P_{ab}(S)$. Поскольку $W(S)$ переставляет элементы базиса в $P_{ab}(S)$, группа $P_{ab}(S)_G$ является свободной абелевой группой с базисом, задаваемым фактормножеством $\mathcal{T}(S)/G$. По-другому группу $P_{ab}(S)_G$ можно описать как фактор группы $P(S)$ по подгруппе $[\tilde{G}, P(S)]$, где $\tilde{G}$ – прообраз группы G в группе $\text{Br}(S)$. Мы будем использовать обозначение $G \cdot t$ для элементов множества $\mathcal{T}(S)/G$ и обозначение $A_{G \cdot \theta}$ или $A_{G \cdot t}$ для элементов индуцированного базиса в группе $P_{ab}(S)_G$.

ТЕОРЕМА 2.14. Пусть G – подгруппа в $W(S)$ и x – элемент группы $P(S)$, представимый в виде произведения: $x = \prod_i \hat{t}_i^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [x_{2j-1}, x_{2j}]$, в котором $\hat{t}_i$ – квазиобразующие, $\epsilon_i = \pm 1$, а $[x_{2j-1}, x_{2j}]$ – коммутаторы элементов $x_j \in \text{Br}(S)$. Предположим, что образы элементов x_i и $\hat{t}_j$ в группе $W(S)$ лежат в G . Тогда образ $[x]_G$ элемента x в группе $P_{ab}(S)_G$ лежит в свободной абелевой группе, порожденной базисными элементами $A_{G \cdot t}$ для $t \in G \cap \mathcal{T}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала сведем общий случай к специальному случаю отсутствия коммутаторов. Для этого представим каждый элемент x_j в виде $x_j = x'_j \cdot x''_j$, где x'_j – произведение квазиобразующих, проекции которых лежат в G , а x''_j – произведение квадратов квазиобразующих. Используя тождества $[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot (y * [x, z])$ и $[x \cdot y, z] = (x * [y, z]) \cdot [x, z]$, разложим каждый коммутатор $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ в произведение квазиобразующих, проектирующихся в G , и коммутаторов вида $[y, \hat{t}^2]$, где элемент y проектируется в G , а $\hat{t}^2$ – квадрат квазиобразующей. Поскольку такой коммутатор $[y, \hat{t}^2]$ лежит в $P(S)$ и отображается в нуль в группе $P_{ab}(S)_G$, мы получаем нужное утверждение.

Заметим, что движения Гурвица не нарушают свойства сомножителей $\hat{t}_i^{\epsilon_i}$, перечисленные в условии теоремы. Поэтому применяя теорему 2.13, мы можем преобразовать исходное разложение так, чтобы выполнялось равенство $t_{2i-1} \equiv t_{2i} \in W(S)$. Это означает, что достаточно рассмотреть случай, когда x является произведением двух сомножителей, $x = \hat{t}_1^{\epsilon_1} \cdot \hat{t}_2^{\epsilon_2}$, в котором $t_1 \equiv t_2$. В случае, когда знаки ϵ_i совпадают, например $\epsilon_1 = \epsilon_2 = +1$, мы можем переписать это произведение в виде $\hat{t}_1 \hat{t}_2^{-1} \hat{t}_2^2$. Поскольку $t_2 \in G \cap \mathcal{T}(S)$ по условию, квадрат $\hat{t}_2^2$ имеет нужный вид. Итак, мы можем дополнительно предполагать, что $x = \hat{t}_1 \cdot \hat{t}_2^{-1}$.

Мы утверждаем, что из условия $t_1 \equiv t_2 \in W(S)$ следует, что элемент $\hat{t}_2$ может быть получен из элемента $\hat{t}_1$ сопряжением некоторым элементом $z \in P(S)$. Чтобы это доказать, запишем $\hat{t}_i = y_i * s_i$, где $s_i \in S$ и $y_i \in \text{Br}(S)$, и сопряжем оба элемента $\hat{t}_i$ элементом y_1^{-1} . Это сводит ситуацию к частному случаю,

в котором $\hat{t}_1 = s_1$ — обычная образующая группы $\text{Br}(\mathcal{S})$. Изменяя соответствующим образом обозначения, имеем $\hat{t}_2 = y_2 * s_2$. Пусть w — образ элемента y_2 в группе $W(\mathcal{S})$. Наше утверждение будет следовать из того, что в группе кос имеет место равенство $\hat{w} * s_2 = s_1$. Докажем этот факт. Предположим сначала, что $\ell(ws_2) < \ell(w)$. Тогда по сильному свойству замены $w \equiv w's_2$, где $\ell(w') = \ell(w) - 1$. В этом случае $\ell(w's_2) > \ell(w')$, $\hat{w} * s_2 = (\hat{w}'s_2) * s_2 = \hat{w}' * s_2$ и по-прежнему $\hat{w}' * s_2 \equiv s_1$ в группе $W(\mathcal{S})$. Поэтому мы можем считать, что $\ell(ws_2) > \ell(w)$. Заметим, что равенство $w * s_2 \equiv s_1$ эквивалентно равенству $ws_2 \equiv s_1w$. Поскольку $\ell(ws_2) > \ell(w)$, для любого приведенного выражения w элемента w выражения ws_2 и s_1w приведенные. Следовательно, $\hat{w} \cdot s_2 = s_1 \cdot \hat{w}$ в группе кос. Этим доказаны равенство $\hat{w} * s_2 = s_1$ и, следовательно, сделанное в начале этого абзаца утверждение.

Подводя итог, нам остается рассмотреть коммутатор $\hat{t}z\hat{t}^{-1}z^{-1}$, где $z \in P(\mathcal{S})$ и $\hat{t} \in G$. По определению такой элемент проектируется в нуль в группе $P_{\text{ab}}(\mathcal{S})_G$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Система Кокстера $(\mathcal{S}, M)$ называется *неприводимой*, если ее граф Кокстера связан, и имеет *конечный тип*, если группа $W(\mathcal{S})$ конечна. Известно, что в любой неприводимой системе Кокстера конечного типа $(\mathcal{S}, M)$ существует единственный элемент максимальной длины $w_o = w_o(\mathcal{S}) \in W(\mathcal{S})$. Его канонический подъем $\hat{w}_o \in \text{Br}(\mathcal{S})$ называется *элементом Гарсайда* группы $\text{Br}(\mathcal{S})$ и обозначается $\Delta(\mathcal{S})$.

Согласно классификации неприводимых групп Кокстера конечного типа (см. [15] и [27]) всякая такая группа есть либо группа Вейля простой комплексной группы Ли, либо группа диэдра D_{2m} с системой Кокстера на множестве $\mathcal{S} = \{s_1, s_2\}$, заданной соотношениями $m_{s_1, s_2} = m$, $m = 5, 7, 8, 9, \dots$, либо одна из групп H_3, H_4 . Известно, что элемент максимальной длины $w_o \in W(\mathcal{S})$ обладает свойством $\ell(w_o) = \ell(w_o w) + \ell(w)$ для любого $w \in W(\mathcal{S})$. Свойства элемента Гарсайда можно найти в [13] и [18].

ЛЕММА 2.16. Квадрат $\Delta^2(\mathcal{S})$ элемента Гарсайда лежит в группе $P(\mathcal{S})$ и равен сумме $\sum_{t \in T(\mathcal{S})} A_t$ в абелианизации $P_{\text{ab}}(\mathcal{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя свойство $\ell(w_o w) = \ell(w_o) - \ell(w)$ в случае $w = w_o$, мы получаем, что w_o — идемпотент. Значит, элемент $\Delta^2 = \hat{w}_o^2$ лежит в группе $P(\mathcal{S})$.

Рассмотрим произвольную образующую $s \in \mathcal{S}$ и любое приведенное выражение w элемента w_o . Тогда $\ell(sw_o) = \ell(w_o) - \ell(s) < \ell(w_o)$. По сильному свойству замены, удалив подходящую букву s' из выражения w , мы получаем слово w_1 , являющееся выражением элемента sw_o . Сравнивая длины, мы получаем, что w_1 приведено. Записав w_1 в виде $s_2 \cdots s_l$, где $l := \ell(w_o)$, мы видим, что $ss_2 \cdots s_l$ является приведенным выражением элемента w_o . Поскольку w_o идемпотент, то $s_l \cdots s_2 s$ также является приведенным выражением для w_o . Следовательно, $\Delta^2 = \hat{s} \hat{s}_2 \cdots \hat{s}_l \cdot \hat{s}_l \cdots \hat{s}_2 \hat{s}$. Введем обозначение $s_1 := s$ и преобразуем последнее выражение в произведение

$$\Delta^2 = \prod_{i=1}^l (\hat{s}_1^{-1} \hat{s}_2^{-1} \cdots \hat{s}_{i-1}^{-1}) * \hat{s}_i^2.$$

Отсюда следует, что в группе $P_{ab}(\mathcal{S})$ элемент Δ^2 равен сумме $\sum_{t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})} n_t A_t$, где неотрицательные целые числа n_t таковы, что $n_s > 0$ для любого $s \in \mathcal{S}$. Поскольку Δ^2 лежит в центре группы $Br(\mathcal{S})$, сумма $\sum_{t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})} n_t A_t$ инвариантна при действии группы $W(\mathcal{S})$. Так как это действие переставляет базисные элементы A_t группы $P_{ab}(\mathcal{S})$, а всякое квазиотражение $t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ сопряжено образующей $s \in \mathcal{S}$, мы получаем неравенства $n_t \geq 1$ для всех $t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$.

С другой стороны, в работах [13] и [18] показано, что элемент Δ^2 имеет выражение $\Delta^2 = \hat{\Pi}^h$, где Π – это так называемый *элемент Кокстера* в группе $W(\mathcal{S})$, а h – *число Кокстера* системы $\mathcal{S}$ (определения см., например, в [15] или [27]). Формула для числа Кокстера может быть истолкована как равенство длины $l = \ell(w_o)$ и количества квазиотражений. Это означает равенство $\sum_{t \in \mathcal{T}(\mathcal{S})} n_t = l$. Следовательно, все n_t равны 1, и лемма доказана.

2.2. Комбинаторная структура группы Mar_g . В этом пункте мы решаем ряд задач о разложении на множители в группе классов отображений. Эти результаты будут играть ключевую роль в доказательстве основной теоремы.

Мы будем использовать найденные Б. Вайнрыбом [42] и М. Мацумото [35] конечные копредставления групп Mar_g и $Mar_{g,[1]}$, которые реализуют эти группы как факторы группы кос некоторой системы Кокстера $\mathcal{S}_g$, получающиеся добавлением соотношений, задаваемых в терминах элементов Гарсайда подходящих подсистем $\mathcal{S}'$ системы $\mathcal{S}_g$. Проведем геометрическое описание этих соотношений (подробности можно найти, например, в работах [8] и [22]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17 (цепное и фонарное соотношения). Рассмотрим поверхность $\mathcal{C}$, являющуюся тором с двумя дырками. Обозначим граничные окружности через η', η'' . Рассмотрим на этой поверхности кривые α, β и β' , показанные на рис. 1. Заметим, что если α, β и β' – вложенные окружности на поверхности Σ такие, что β и β' не пересекаются, и каждая из них пересекает α трансверсально ровно в одной точке, то трубчатая окрестность U графа $\alpha \cup \beta \cup \beta'$ есть тор с двумя дырками и вся конфигурация диффеоморфна конфигурации, изображенной на рис. 1. Будем называть такую поверхность $\mathcal{C} \subset \Sigma$ и

Рис. 1. Окружности в цепной конфигурации

всю конфигурацию $(\mathcal{C}, \alpha, \beta, \beta')$ *цепной конфигурацией* на поверхности Σ , определяемой окружностями α, β, β' . Для всякой цепной конфигурации имеется

цепной элемент группы классов отображений, заданный формулой

$$C(\alpha, \beta, \beta') := (T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^4 (T_{\eta'} T_{\eta''})^{-1}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим еще поверхность $\mathcal{L}$, являющуюся сферой с четырьмя дырками. Обозначим ее граничные окружности через $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Представим $\mathcal{L}$ в виде диска с тремя дырками и рассмотрим кривые $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, изображенные на рис. 2. Заметим, что если вложенные окружности β_1, β_2 на поверхности Σ пересекаются трансверсально в двух точках, то трубчатая окрестность U графа $\beta_1 \cup \beta_2$ есть диск с тремя дырками и вся конфигурация диффеоморфна изображенной на рис. 2. Будем называть такую поверхность $\mathcal{L} \subset \Sigma$ и всю конфигурацию $(\mathcal{L}, \alpha_i, \beta_j)$ *фонарной конфигурацией* на поверхности Σ , определяемой окружностями β_1, β_2 . Для всякой фонарной конфигурации соответствующий *фонарный элемент* задается формулой

$$L(\beta_1, \beta_2) := (T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} T_{\alpha_3} T_{\alpha_4}) (T_{\beta_1} T_{\beta_2} T_{\beta_3})^{-1}. \quad (2.5)$$

Цепное и фонарное соотношения – это равенства $C(\alpha, \beta, \beta') = 1$ и $L(\beta_1, \beta_2) = 1$ для соответствующих элементов. Конфигурация и соотношение называются *неразбивающими*, если все участвующие в них кривые неразбивающие.

Рис. 2. Окружности в фонарной конфигурации

Как подсказывает терминология, соотношения из определения 2.17 выполнены в группе классов отображений $\text{Mar}_{g,k,[l]}$ поверхности рода g с k отмеченными точками и l граничными окружностями. (Обозначение использует тот факт, что группа $\text{Mar}_{g,k,[l]}$ может быть определена как группа классов отображений поверхности Σ рода g с $k + l$ отмеченными точками, в l из которых, скажем $z_1, \dots, z_l$, задано *оснащение*, т. е. тривиализация касательной плоскости $T_{z_i} \Sigma$.) За исключением леммы 3.2, нас будет интересовать только случай одной отмеченной точки, и мы будем использовать сокращенные обозначения $\text{Mar}_{g,1}$ или $\text{Mar}_{g,[1]}$, не выписывая нулевой индекс k или l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18. Если $g = 1$, положим $\mathcal{S}_1 := A_2$, так что граф системы $\mathcal{S}_1$ состоит из двух вершин s_1 и s_2 , соединенных ребром. Если $g \geq 2$, то

система $\mathcal{S}_g$ определяется как расширение линейного графа Дынкина A_{2g} одной вершиной s_0 , соединенной ребром только с вершиной s_4 . Таким образом, граф системы $\mathcal{S}_g$ имеет вид

Всякий элемент $\hat{t} \in \text{Br}(\mathcal{S}_g)$, сопряженный одной из образующих s_i , называется *квазиобразующей*. Множество всех квазиобразующих обозначается $\hat{T}(\mathcal{S}_g)$.

Рис. 3. Геометрические образующие группы $\text{Map}_{g,[1]}$

ТЕОРЕМА 2.19. *Группа $\text{Map}_{g,[1]}$ изоморфна фактору обобщенной группы кос $\text{Br}(\mathcal{S}_g)$ со следующими дополнительными соотношениями:*

- 1) в случае $g = 1$ дополнительных соотношений нет;
- 2) в случае $g = 2$ добавляется одно неразбивающее цепное соотношение $C(\alpha, \beta, \beta') = 1$;
- 3) в случае $g \geq 3$ добавляется одно неразбивающее цепное соотношение $C(\alpha, \beta, \beta') = 1$ и одно неразбивающее фонарное соотношение $L(\beta', \beta'') = 1$.

Образующие группы кос s_i , $i = 0; 1, \dots, 2g$, могут быть реализованы как скручивания Дена относительно кривых a_i , изображенных на рис. 3. В частности, $a_0 = \beta_2$, $a_1 = \beta_1$, $a_{2i} = \alpha_i$ для любого $i = 1, \dots, g$, а каждая кривая a_{2i-1} гомологична над $\mathbb{Z}_2$ сумме $[\beta_{i-1}] + [\beta_i]$ для любого $i = 2, \dots, g$.

Ядро гомоморфизма $\text{Map}_{1,[1]} \rightarrow \text{Map}_1$ есть центральная абелева подгруппа, порожденная элементом $(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^6 = (s_1 s_2)^6$. В случае $g \geq 2$ ядро гомоморфизма $\text{Map}_{g,[1]} \rightarrow \text{Map}_g$ нормально порождается произведением $T_{\beta_g} T_{\beta'_g}^{-1}$, где $T_{\beta_g}, T_{\beta'_g}$ – скручивания Дена относительно кривых β_g, β'_g .

Это копредставление было найдено Б. Вайнрыбом [42] (с исправлениями в [10]). М. Мацумото [35] указал простой явный способ выразить соотношения в терминах элементов Гарсайда некоторых подсистем Кокстера в системе $\mathcal{S}_g$.

ТЕОРЕМА 2.20. i) *Цепное соотношение может быть задано элементом $C_0 := \Delta^{-4}(A_4)\Delta^2(A_5)$, где A_4 и A_5 – подсистемы Кокстера $\{s_2, s_3, s_4, s_0\}$ и $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_0\}$ соответственно.*

ii) *Фонарное соотношение можно задать элементом $C_0 \cdot \Delta^{-2}(E_6)\Delta(E_7)$, где C_0 – введенный выше цепной элемент, а E_6 и E_7 – подсистемы Кокстера $\{s_0, s_2, \dots, s_6\}$ и $\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_6\}$ соответственно.*

iii) *Соотношение $T_{\beta_g} = T_{\beta'_g}$ может быть заменено на коммутационное соотношение $[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})] = 1$, где A_{2g} – подсистема Кокстера $\{s_1, s_2, \dots, s_{2g}\}$.*

Известно, что любые две неразбивающие цепные (или фонарные) конфигурации сопряжены диффеоморфизмом $f \in \mathcal{D}iff_+(\Sigma, z_0)$. Отсюда следует неявно использованное в формулировке теоремы 2.20 утверждение о том, что нормально порожденная неразбивающим цепным соотношением $C(\alpha, \beta, \beta')$ подгруппа не зависит от выбора цепной конфигурации, и такое же утверждение верно для фонарного соотношения. Доказательство этого утверждения и его обсуждение можно найти в работе [22].

Будем называть элемент $\Delta^2(A_{2g})$ *гиперэллиптическим элементом*, а соотношение $[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})] = 1$ (или сам коммутатор в его левой части) *гиперэллиптическим соотношением*. Объяснением этой терминологии служит тот факт, что элемент $\Delta^2(A_{2g}) \in \text{Br}(S_g)$ представляет гиперэллиптическую инволюцию на поверхности Σ , которая может быть реализована на рис. 3 как вращение на угол π вокруг горизонтальной оси, проходящей через цепочку кривых $a_1, a_2, \dots, a_{2g}$. Кроме того, будем называть соотношение $\Delta^2(E_6) = \Delta(E_7)$ *модифицированным фонарным соотношением*, а произведение $\Delta^{-2}(E_6)\Delta(E_7)$ (*базисным*) *модифицированным фонарным элементом*. Те же названия будут использоваться для всех элементов, сопряженных к определенным в этом абзаце.

Все образующие s_i сопряжены в группе $\text{Br}(S_g)$, поэтому квазиобразующие $\hat{t} \in \hat{T}(S_g)$ являются предпочтительными подъемами скручиваний Дена относительно неразбивающих кривых δ . При этом класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[\delta] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ определяется образом элемента $\hat{t}$ в группе $W(S_g)$. Поэтому мы получаем $W(S_g)$ -эквивариантное отображение множеств $\mathcal{T}(S_g) \rightarrow \mathcal{H}_g := H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \setminus \{0\}$. (Это отображение взаимно однозначно при $g = 1, 2, 3$, но при $g \geq 4$ множество $\mathcal{T}(S_g)$ бесконечно и наше отображение только сюръективно.) Далее, образ любой квазиобразующей $\hat{t}$ в группе $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ имеет порядок 2. Отсюда следует существование гомоморфизма $W(S_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.21. Ядро $WI_g := \text{Ker}(W(S_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ называется *группой Вейля–Торелли* поверхности Σ .

Из определения 2.21 следует, что $\mathcal{H}_g$ – фактормножество $\mathcal{T}(S_g)/WI_g$. Значит, группа $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$ естественно изоморфна группе коинвариантов $P_{\text{ab}}(S_g)_{WI_g}$. Это позволяет применить теорему 2.14 с заменой группы $\mathbb{Z}\langle\mathcal{T}(S_g)\rangle$ на группу $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$. Кроме того, мы можем свести расширение $1 \rightarrow P(S_g) \rightarrow \text{Br}(S_g) \rightarrow W(S_g) \rightarrow 1$ к расширению $1 \rightarrow \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle \rightarrow E \rightarrow W(S_g) \rightarrow 1$. Однако в случае $g \geq 3$ группа $W(S_g)$ больше, чем группа $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, а группа Вейля–Торелли WI_g порождается фонарным элементом и невидима в группе Map_g . Хуже того, WI_g бесконечна при $g \geq 4$, что делает эффективные вычисления в группе WI_g затруднительными. Для того чтобы понять, какую часть группы WI_g мы можем отфакторизовать, нам необходимо описание ядра $\text{Ker}(\text{Br}(S_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22. Ядро гомоморфизма $\text{Br}(S_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ порождается квадратами квазиобразующих $\hat{t}^2$ и модифицированными фонарными элементами $x * (\Delta^{-2}(E_6)\Delta(E_7))$, $x \in \text{Br}(S_g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.16 любой элемент из ядра гомоморфизма $\text{Br}(S_g) \rightarrow \text{Map}_g$ может быть представлен как произведение квадратов квазиобразующих $\hat{t}^2$ и фонарных элементов. Следовательно, достаточно доказать соответствующее утверждение в группе Map_g .

Обозначим через $\mathbf{G}$ ядро $\text{Ker}(\text{Map}_g \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ и через $\mathbf{G}_0$ подгруппу, порожденную произведениями вида $T_{\delta_1}^{\epsilon_1} T_{\delta_2}^{\epsilon_2}$, где $\epsilon_i = \pm 1$ и $[\delta_1] = [\delta_2] \neq 0 \in \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Будем обозначать символом " $\equiv$ " равенство по модулю 2, т. е. равенство в $\mathbb{Z}_2$, $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ или $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ – выбранный выше геометрический базис на поверхности Σ .

Зафиксируем элемент $f \in \mathbf{G}$ и запишем его в виде произведения скручиваний Дена относительно неразбивающих кривых $f = \prod_{i=1}^n T_{\delta_i}^{\epsilon_i}$. Соотношения в группе кос $T_\gamma T_\delta^\epsilon = T_\delta^\epsilon T_\gamma$, где $\epsilon = \pm 1$ и $\delta' = T_\gamma(\delta)$, позволяют нам использовать движения Гурвица для того, чтобы сдвигать любое конкретное скручивание Дена T_γ в этом произведении в любую сторону без изменений. Заметим еще, что образующие $T_{\delta_1}^{\epsilon_1} T_{\delta_2}^{\epsilon_2}$ группы $\mathbf{G}_0$ сохраняются при сопряжении.

Шаг 1. Предположим, что существуют сомножители вида T_{δ_i} , где $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 0$. Соберем всех их справа, используя соотношения в группе кос. Итак, будем считать, что $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 1$ при $i = 1, \dots, n_1$, но $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 0$ при $i = n_1 + 1, \dots, n$.

Шаг 2. Предположим, что $\delta_i \cap \delta_j \equiv 1$ для различных $i, j \leq n_1$. Сдвинем эти сомножители вместе, так что $j = i + 1$, и применим соотношение в группе кос. При этом $T_{\delta_i} T_{\delta_{i+1}}$ преобразуется в $T_\gamma T_{\delta_i}$, где $\gamma \equiv \delta_i + \delta_{i+1}$. Следовательно, $\gamma \cap \beta_1 \equiv 0$, и мы можем сдвинуть полученное скручивание T_γ вправо. Это позволяет нам уменьшить число n_1 таких δ_i , что $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 1$. Повторяя этот шаг, мы сводим задачу к случаю, когда $\delta_i \cap \delta_j \equiv 0$ для всех $i, j \leq n_1$.

Шаг 3. Пусть $n_1 > 0$, т. е. существуют сомножители T_{δ_i} , для которых $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 1$. Возьмем начальную часть нашего произведения $\prod_{i=1}^{n_1} T_{\delta_i}$ и умножим его слева на $T_{\beta_1}^{-1} T_{\beta_1}$. Дважды применим соотношение в группе кос к слову $T_{\beta_1}^{-1} T_{\beta_1} T_{\delta_1}$, т. е. выполним преобразования

$$T_{\beta_1}^{-1} T_{\beta_1} T_{\delta_1} \Rightarrow T_{\beta_1}^{-1} T_\delta T_{\beta_1} \Rightarrow T_{\beta_1}^{-1} T_\gamma T_\delta,$$

где $\delta := T_\beta(\delta_1)$ и $\gamma := T_\delta(\beta_1)$. Тогда $\delta \equiv \delta_1 + \beta_1$ и $\delta \cap \delta_i \equiv 1$ для всех $i = 2, \dots, n_1$. Сдвинем теперь T_δ вправо от всех T_{δ_i} , $i = 2, \dots, n_1$, т. е. преобразуем

$$T_{\beta_1}^{-1} T_\gamma T_\delta \prod_{i=2}^{n_1} T_{\delta_i} \Rightarrow T_{\beta_1}^{-1} T_\gamma \prod_{i=2}^{n_1} T_{\delta'_i} T_\delta,$$

где $\delta'_i := T_\delta(\delta_i)$. Теперь $\delta'_i \equiv \delta_i + \delta$ и $\delta'_i \cap \beta_i \equiv 0$. Наконец, сдвинем $T_{\beta_1}^{-1}$ и полученные нами $T_{\delta'_i}$, $i = 2, \dots, n_1$, вправо до конца. Получится новое разложение $f = \prod_{i=1}^{n+2} T_{\delta''_i}$ исходного элемента f , в котором $\delta''_i \cap \beta_1 \equiv 0$ для всех $i = 3, \dots, n+2$ и $\delta''_1 \cap \beta_1 \equiv 1$.

Шаг 4. Если $\delta''_2 \cap \beta_1 \equiv 0$, то $\prod_{i=1}^{n+2} T_{\delta''_i}(\beta_1) \equiv \beta_1 + \delta''_1 \not\equiv \beta_1$, что противоречит условию $f_* \equiv \text{id}$ на $\mathbb{Z}_2$ -гомологиях. Если $\delta''_1 \cap \delta''_2 \equiv 1$, преобразуем $T_{\delta''_1} T_{\delta''_2}$ в $T_{\delta''_2} T_{\delta''_1}$, где $\delta''_2 \cap \beta_1 \equiv 0$. Получается то же самое противоречие. Значит, $\delta''_1 \cap \delta''_2 \equiv 0$ и $\delta''_1 \cap \beta_1 \equiv \delta''_2 \cap \beta_1 \equiv 1$. Но тогда $\beta_1 \equiv \prod_{i=1}^{n+2} T_{\delta''_i}(\beta_1) \equiv \beta_1 + \delta''_1 + \delta''_2$ и, следовательно, $\delta''_1 \equiv \delta''_2$. Это означает, что элемент $T_{\delta''_1} T_{\delta''_2}$ лежит в группе $\mathbf{G}_0$. Сдвинем его направо. Таким способом мы представим f в виде $\prod_i T_{\delta_i} \cdot f_1$, где $f_1 \in \mathbf{G}_0$ и $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 0$.

Шаг 5. Повторим шаги 1–4 последовательно для кривых $\beta_2, \dots, \beta_g$ вместо β_1 . Для каждого β_k полученные ранее соотношения $\delta_i \cap \beta_j \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, k-1$ останутся выполненными. В результате мы

представим f в виде $(\prod_i T_{\delta_i}) \cdot f_2$, где $f_2 \in G_0$ и $\delta_i \cap \beta_j \equiv 0$ для всех $j = 1, \dots, g$. Отсюда следует, что после выполнения этого шага каждый класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[\delta_i]$ будет линейной комбинацией $\mathbb{Z}_2$ -классов $[\beta_1], \dots, [\beta_g]$, а значит, $\delta_i \cap \delta_j \equiv 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Следовательно, применение соотношений группы кос не меняет класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий оставшихся кривых δ_i : если $T_{\delta_i} T_{\delta_j} T_{\delta_i}^{-1} = T_{\delta'_j}$, то $\delta_j \equiv \delta'_j$.

Шаг 6. Рассмотрим кривую α_g . Пусть Δ_{α_g} – множество тех δ_i , для которых $\alpha_g \cap \delta_i \equiv 1$, и пусть V_{α_g} – векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, порожденное Δ_{α_g} . Предположим, что $\dim_{\mathbb{Z}_2} V_{\alpha_g} \geq 3$. Выберем три окружности в Δ_{α_g} , скажем $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, классы гомологий которых линейно независимы над $\mathbb{Z}_2$. Тогда $[\delta_2] \equiv [\delta_1] + [\gamma_2]$ и $[\delta_3] \equiv [\delta_1] + [\gamma_3]$ для некоторых классов $[\gamma_2], [\gamma_3] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, где $[\delta_1], [\gamma_2], [\gamma_3]$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_2$. Заметим, что $\gamma_1 \cap \alpha_g \equiv (\delta_i - \delta_1) \cap \alpha_g \equiv 0$. Реализуем классы гомологий $[\gamma_2], [\gamma_3] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ вложенными кривыми $\gamma_2, \gamma_3 \subset \Sigma$, не пересекающимися с δ_1 и друг с другом. Выберем точку $z_0 \in \Sigma$, не лежащую на $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$, и вложенные дуги a_1, a_2, a_3 , соединяющие точку z_0 с кривыми $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно и не пересекающие друг друга и кривые $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$, за исключением своих концевых точек. Тогда трубчатая окрестность U графа Γ , образованного кривыми $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$ и a_1, a_2, a_3 , есть диск с тремя дырками, ограниченными кривыми $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3$, (см. рис. 2). Умножим произведение $\prod_{i=1}^n T_{\delta_i}$ на фонарное соотношение

$$T_{\delta_1+\gamma_2}^{-1} T_{\delta_1+\gamma_3}^{-1} T_{\gamma_2+\gamma_3}^{-1} T_{\delta_1} T_{\gamma_2} T_{\gamma_3} T_{\delta_1+\gamma_2+\gamma_3} = \text{id}$$

(см. рис. 2). Сомножители $T_{\delta_1+\gamma_2}^{-1} T_{\delta_2}$ и $T_{\delta_1+\gamma_3}^{-1} T_{\delta_3}$ сокращаются. Сдвинем сомножитель $T_{\delta_1}^2 \in G_0$ направо. Получится произведение $\prod_{i=1}^{n+1} T_{\delta'_i}$, содержащее меньше сомножителей $T_{\delta'_i}$, для которых $\delta'_i \cap \alpha_g \equiv 1$. Повторяя эту процедуру, мы сводим ситуацию к случаю $\dim_{\mathbb{Z}_2} V_{\alpha_g} \leq 2$.

Шаг 7. Сохраним обозначения Δ_{α_g} и V_{α_g} из шага 6. Если $\dim_{\mathbb{Z}_2} V_{\alpha_g} = 0$, то $\delta_i \cap \alpha_g \equiv 0$ для всех сомножителей T_{δ_i} , и мы переходим к следующему шагу. Предположим, что $\dim_{\mathbb{Z}_2} V_{\alpha_g} = 1$. Тогда $\delta_i \equiv \delta_j$ для всех $\delta_i, \delta_j \in \Delta_{\alpha_g}$. Следовательно, $\prod_{i=1}^n T_{\delta_i}(\alpha_g) \equiv \alpha_g + n_{\alpha_g} \delta_1$, где δ_1 – какой-нибудь элемент множества Δ_{α_g} , а n_{α_g} – количество элементов в Δ_{α_g} . Отсюда следует, что число n_{α_g} четно, и мы можем объединить сомножители T_{δ_i} в пары вида $T_{\delta_{2i-1}} T_{\delta_{2i}}$, лежащие в группе G_0 .

Шаг 8. Пусть $\dim_{\mathbb{Z}_2} V_{\alpha_g} = 2$. Возьмем два элемента из множества Δ_{α_g} , скажем δ_1 и δ_2 , классы гомологий которых линейно независимы. Тогда любая кривая $\delta_i \in \Delta_{\alpha_g}$ гомологична над $\mathbb{Z}_2$ либо δ_1 , либо δ_2 , либо $\delta_1 + \delta_2$. Найдем $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ такие, что $\delta_1 \cap \gamma_1 \equiv \delta_2 \cap \gamma_2 \equiv 1$, $\delta_1 \cap \gamma_2 \equiv \delta_2 \cap \gamma_1 \equiv \gamma_1 \cap \gamma_2 \equiv 0$ и $\delta_i \cap \gamma_j \equiv 0$ для любой δ_i , не содержащейся в Δ_{α_g} . (Это можно сделать, выбрав подходящий $\mathbb{Z}_2$ -базис Дарбу в пространстве $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.) Тогда

$$\prod_{i=1}^n T_{\delta_i}(\gamma_1) - \gamma_1 \equiv \sum_{i=1}^n (\gamma_1 \cap \delta_i) \delta_i,$$

и потому

$$\gamma_2 \cap \left(\prod_{i=1}^n T_{\delta_i}(\gamma_1) - \gamma_1 \right) \equiv n_{12},$$

где n_{12} – число кривых $\delta_i \in \Delta_{\alpha_g}$ таких, что $\delta_i \equiv \delta_1 + \delta_2$. Следовательно, число n_{12} четно, и мы можем объединить в пары сомножители T_{δ_i} , для которых $\delta_i \equiv \delta_1 + \delta_2$, как на шаге 6. Аналогичным образом показывается, что числа n_1 и n_2 таких $\delta_i \in \Delta_{\alpha_g}$, что $\delta_i \equiv \delta_1$ или, соответственно, $\delta_i \equiv \delta_2$, также четны. Поэтому все сомножители T_{δ_i} , для которых $\delta_i \in \Delta_{\alpha_g}$, можно собрать в пары $T_{\delta_{2i-1}}T_{\delta_{2i}}$, лежащие в группе $\mathbf{G}_0$.

Шаг 9. После выполнения шага 8 оставшиеся сомножители T_{δ_i} удовлетворяют соотношению $\delta_i \cap \alpha_g \equiv 0$. Повторим шаги 6–8 для кривых $\alpha_{g-1}, \alpha_{g-2}, \dots$. Заметим, что уже полученные соотношения $\mathbb{Z}_2$ -ортогональности классам кривых $\beta_1, \dots, \beta_g; \alpha_g$ сохраняются. В итоге получится равенство $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$.

Таким образом, мы показали, что ядро $\text{Ker}(\text{Map}_g \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ порождается произведениями вида $T_{\delta_1}^{\epsilon_1} T_{\delta_2}^{\epsilon_2}$, где $\epsilon_i = \pm 1$ и $[\delta_1] = [\delta_2] \neq 0 \in \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

Шаг 10. Умножая при необходимости образующую $T_{\delta_1}^{\epsilon_1} T_{\delta_2}^{\epsilon_2}$ на квадраты скручиваний $T_{\delta_1}^2$ и $T_{\delta_2}^2$, мы можем привести ее к виду $T_{\delta_1} T_{\delta_2}^{-1}$. Обозначим $\delta_1 =: \alpha$, $\delta_2 =: \alpha'$, так что образующая примет вид $T_{\alpha} T_{\alpha'}^{-1}$. Перепишем полученное произведение в виде $T_{\alpha} T_{\gamma}^{-2} T_{\gamma}^2 T_{\alpha'}^{-1}$. Сдвинем T_{γ}^2 вправо, сопрягая $T_{\alpha'}^{-1}$, а затем сдвинем T_{γ}^{-2} вправо с сопряжением. Тогда $T_{\alpha} T_{\gamma}^{-2} T_{\gamma}^2 T_{\alpha'}^{-1}$ преобразуется в $T_{\alpha} T_{\alpha''}^{-1} T_{\gamma'}^{-2} T_{\gamma'}^2$, где $\alpha'' = T_{\gamma}^2(\alpha')$. Это позволяет нам заменить класс гомологий $[\alpha']$ на $[\alpha''] = [\alpha'] + 2(\alpha' \cap \gamma)[\gamma]$.

Утверждается, что существует последовательность таких “движений,” которая переводит целочисленный класс гомологий $[\alpha']$ в класс $[\alpha]$. Ясно, что достаточно найти обратное преобразование от $[\alpha]$ к $[\alpha']$. Выберем такую кривую β , что $\alpha \cap \beta = 1$. Тогда $[\alpha'] = (2k+1)[\alpha] + 2l[\beta] + 2m[\gamma]$ для некоторой неразбивающей кривой γ , для которой $\gamma \cap \alpha = \gamma \cap \beta = 0$, причем как l , так и m могут быть равны нулю. Применяя $T_{\beta}^{\pm 2}$ к α , мы можем заменить $2l$ на $2l \pm 2(2k+1)$. Итерациями этой операции мы можем заменить l на такое l' , что $|l'| \leq |2k+1|$. С другой стороны, мы можем взять вместо β новую кривую β' в классе гомологий $[\alpha] \pm [\beta]$. В результате число l останется неизменным, а $2k+1$ заменится на $2k+1 \pm 2l$. Следовательно, эти две операции позволяют избавиться от l .

Аналогичной процедурой можно добиться того, что m будет равно нулю. Действительно, если кривая γ' лежит в классе гомологий $[\gamma] + [\beta]$, то отображение $T_{\gamma'}^{\pm 2} T_{\gamma}^{\mp 2}$ переводит класс $[\alpha'] = (2k+1)[\alpha] + 2l[\beta] + 2m[\gamma]$ в класс $[\alpha''] = (2k+1)[\alpha] + 2l[\beta] + 2m'[\gamma]$, в котором $m' = m \pm 2(2k+1)$. С другой стороны, обозначая $T_{\gamma'}^{\pm 2} T_{\gamma}^{\mp 2}$ через f , мы имеем

$$T_{\alpha} T_{\alpha'}^{-1} = T_{\alpha} \cdot f^{-1} \cdot f \cdot T_{\alpha'}^{-1} = T_{\alpha} \cdot f^{-1} \cdot T_{\alpha''} \cdot f = T_{\alpha} \cdot T_{\alpha''} \cdot (f')^{-1} \cdot f,$$

где $f' = T_{\alpha'}^{-1} \cdot f \cdot T_{\alpha''}$. Заметим теперь, что f и f' лежат в $\mathbf{G}$. Поэтому мы можем заменить m на такое m' , что $|m'| \leq |2k+1|$. Однако равенство $m' = \pm(2k+1)$ невозможно, поскольку класс гомологий $[\alpha']$ примитивен. Значит, мы получим строгое неравенство $|m'| < |2k+1|$. Для того чтобы изменить k , выберем вложенную кривую δ так, что $\delta \cap \gamma = 1$ и $\delta \cap \alpha = \delta \cap \beta = 0$, а затем выберем кривую δ' в классе гомологий $[\delta] + [\alpha]$. Тогда отображение $T_{\delta'}^{\pm 2}$ переводит класс $(2k+1)[\alpha] + 2m[\gamma]$ в класс $(2k+1 \pm 4m)[\alpha] + 2m([\gamma] \mp 2[\delta])$. Значит, мы можем сделать $|2k+1|$ меньшим, чем $2m$, возможно, изменив класс $[\gamma]$. Эта процедура закончится при $l = m = 0$ и $2k+1 = \pm 1$. Поскольку скручивание

Дена T_δ не зависит от выбора ориентации на кривой δ , мы получаем равенство целочисленных классов гомологий $[\alpha] = [\alpha']$.

Шаг 11. Пусть α, α' – полученные выше простые кривые, $[\alpha] = [\alpha'] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Тогда $\alpha' = F_1(\alpha)$ для некоторого отображения $F_1 \in \text{Map}_g$. Как и выше, пусть β – такая кривая, что $\alpha \cap \beta = 1$. Положим $\beta' := F_1(\beta)$. Тогда $\beta' \cap \alpha = 1$ и, следовательно, $[\beta'] = [\beta] + l[\alpha] + m[\gamma]$ в группе $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ для некоторого примитивного класса $[\gamma] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ такого, что $\gamma \cap \alpha = \gamma \cap \beta = 0$. Значит, $T_{\alpha'}^{-l}$ сохраняет кривую α' (с точностью до изотопии), и $[T_{\alpha'}^{-l}(\beta')] = [\beta] + m[\gamma]$. Далее, найдем кривую γ' в гомологическом классе $[\alpha] + [\gamma] = [\alpha'] + [\gamma]$, не пересекающуюся с α' . Тогда $T_{\alpha'}^l T_{\gamma'}^{-l}$ сохраняет кривую α' (с точностью до изотопии) и переводит класс $[\beta] + m[\gamma]$ в класс $[\beta]$.

Таким образом мы построили отображение $F_2 \in \text{Map}_g$, переводящее кривую α в α' и сохраняющее целочисленный класс гомологий $[\beta]$. Заметим, что действие F_2 на $\cap$ -ортогональном дополнении к подпространству $\mathbb{Z}\langle[\alpha], [\beta]\rangle$ может быть реализовано как произведение скручиваний Дена относительно кривых, не пересекающихся с $\alpha' = F_2(\alpha)$ и $\beta' := F_2(\beta)$. Изменяя F_2 соответствующим образом, мы получаем отображение F , лежащее в группе Торелли $\mathcal{I}_g := \text{Ker}(\text{Map}_g \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$ и такое, что $\alpha' = F(\alpha)$.

Шаг 12. Воспользуемся теперь явным описанием группы Торелли. Известно, что группа $\mathcal{I}_2$ порождается скручиваниями Дена T_δ относительно *разбивающих* кривых (см. [40], а также [30]). Любая такая кривая делит поверхность Σ на две части Σ' и Σ'' , каждая из которых является тором с дыркой. Скручивание T_δ равно $(T_\alpha T_\beta)^6$ для любого геометрического базиса α и β на Σ' (т. е. простых кривых на Σ' , пересекающихся трансверсально в единственной точке). Но тогда T_α и T_β сопряжены подсистеме Кокстера $A_2 := \{s_1, s_2\}$, и потому элемент $(T_\alpha T_\beta)^6$ сопряжен $\Delta^4(A_2)$ и является произведением квадратов квазиобразующих $\hat{t}^2$.

Согласно [29] (см. также [30]) при $g \geq 3$ группа Торелли $\mathcal{I}_g$ порождена произведениями вида $T_\eta T_{\eta'}^{-1}$, где η, η' – такие непересекающиеся неразбивающие кривые, что их объединение $\eta \sqcup \eta'$ делит поверхность Σ на две части. Обозначим эти части через Σ' и Σ'' . Каждая из них является поверхностью с двумя граничными окружностями, а их рода g' и g'' связаны соотношением $g' + g'' = g - 1$. Если $g' = 0$ или $g'' = 0$, то кривые η, η' изотопны, а произведение $T_\eta T_{\eta'}^{-1}$ тривиально. Отсюда следует, что произведения $T_\eta T_{\eta'}^{-1}$ с дополнительным условием $g' = 1$ также порождают группу Торелли $\mathcal{I}_g$. Однако в случае $g' = 1$ поверхность Σ' является цепной поверхностью (см. рис. 1). Используя определение цепного соотношения и конфигурацию кривых, представленных на рис. 1, мы получаем равенства

$$T_\eta T_{\eta'}^{-1} = T_\eta^2 T_\eta^{-1} T_{\eta'}^{-1} = T_\eta^2 (T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^{-4}. \quad (2.6)$$

Заметим теперь, что цепная конфигурация $\{\beta, \alpha, \beta'\}$ сопряжена цепной конфигурации $\{a_1, a_2, a_3\} =: A_3$, представленной на рис. 3. Следовательно, элемент $(T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^4$ сопряжен элементу Гарсайда $\Delta^2(A_3)$ и может быть представлен в виде произведения квадратов квазиобразующих $\hat{t}^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2.23. i) Ядро $\text{Ker}(\text{Map}_{g,1} \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ порождается квадратами T_δ^2 скручиваний Дена относительно неразбивающих кривых $\delta \subset \Sigma \setminus \{z_0\}$.

ii) Группа Вейля–Торелли $WI_g = \text{Ker}(W(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ порождается элементами, сопряженными элементу $w_\circ(E_7)$.

Предложение 1.9 сводит доказательство топологического утверждения о существовании или несуществовании специальных вложений бутылки Клейна в топологические семейства Лефшеца к проверке некоторых алгебраических соотношений в группе классов отображений Map_g . Оказывается, что эти соотношения выполняются в группе $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. Подняв соответствующие элементы в обобщенную группу кос $\text{Br}(\mathcal{S}_g)$, мы можем затем спроектировать их в $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$. Поэтому нам необходимы средства, позволяющие изучить комбинаторную структуру групп $\mathcal{H}_g$ и $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$.

Опишем первое такое средство. Пусть R – коммутативное кольцо, а H – свободный R -модуль конечного ранга. Обозначим через $T^\bullet H$ тензорную алгебру H над R . Для каждой степени d пусть $T_{\text{Sym}}^d H \subset T^d H$ – подмодуль тензоров, инвариантных относительно естественного действия симметрической группы Sym_d , переставляющей тензорные сомножители $H \otimes \cdots \otimes H$. Введем $\bullet$ -умножение на $T^\bullet H$ следующим образом. Для $A \in T^k H$ и $B \in T^l H$ положим

$$A \bullet B := \sum'_{\sigma \in \text{Sym}_{k+l}} \sigma(A \otimes B),$$

где сумма $\sum'$ берется по всем перестановкам $\sigma \in \text{Sym}_{k+l}$ тензорных сомножителей, сохраняющим порядок первых k и последних l сомножителей. Другими словами, $\sigma \in \text{Sym}_{k+l}$ удовлетворяет условию $\sigma(i) < \sigma(j)$, если $i < j \leq k$ и если $k < i < j$. В частности,

$$v \bullet w = v \otimes w + w \otimes v, \quad u \bullet (v \otimes w) = u \otimes v \otimes w + v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u$$

для $u, v, w \in H$. Непосредственно проверяются следующие свойства этих структур:

- 1) $v^{\otimes d} \in T_{\text{Sym}}^d H$ для любого $v \in H$; $A \bullet B \in T_{\text{Sym}}^{k+l} H$, если $A \in T_{\text{Sym}}^k H$ и $B \in T_{\text{Sym}}^l H$;
- 2) $\bullet$ -умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно;
- 3) имеет место биномиальная формула

$$(v + w)^{\otimes d} = v^{\otimes d} + v^{\otimes(d-1)} \bullet w + v^{\otimes(d-2)} \bullet w^{\otimes 2} + \cdots + w^{\otimes d} \quad (2.7)$$

для любых $v, w \in H$;

- 4) $v^{\otimes k} \bullet v^{\otimes l} = \binom{k+l}{k} v^{\otimes(k+l)}$ для любого $v \in H$.

Последнее свойство показывает, что в случае свободного модуля $H \cong R^{\oplus r}$ ранга r , алгебра $(T_{\text{Sym}}^\bullet H, \bullet)$ изоморфна r -й тензорной степени $\mathbf{A}^\bullet \otimes \cdots \otimes \mathbf{A}^\bullet$ так называемой алгебры разделенных степеней $\mathbf{A}^\bullet$.

В интересующей нас ситуации $R := \mathbb{Z}_2$ и $H := H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Определим гомоморфизмы $\wp^d: \mathbb{Z}_2\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow T^d H$ формулой $\wp^d(A_v) := v^{\otimes d}$ для любого $v \in \mathcal{H}_g$ и будем использовать то же обозначение $\wp^d: P(\mathcal{S}_g) \rightarrow T^d H$ для сквозного отображения. Ясно, что $\wp^d$ принимает значения в $T_{\text{Sym}}^d H \cong \text{Sym}^d(H)$. Смысл гомоморфизма $\wp^1$ очевиден: он переводит каждый элемент A_v в вектор $v \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Для описания $\wp^2$ заметим, что пространство $\text{Sym}^2(H)$ естественно изоморфно $\mathbb{Z}_2$ -алгебре Ли $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. В явном виде изоморфизм задается формулой

$M \in \text{Sym}^d(H) \leftrightarrow J \cdot M \in \mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, где J – это “симплектическая” матрица, $J := \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ \text{id} & 0 \end{pmatrix}$, с квадратными блоками размера $g \times g$, а $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ реализована как матричная подалгебра Ли в $\text{Mat}(2g, \mathbb{Z}_2)$ относительно симплектического базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ пространства H . Далее, группа $\mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ имеет естественное расширение

$$1 \rightarrow \mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_4) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 1,$$

и явное вычисление с любым T_δ^2 показывает, что гомоморфизм $J \cdot \wp^2: \mathbf{P}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathfrak{sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_4)$ совпадает с композицией отображений

$$\mathbf{P}(\mathcal{S}_g) \hookrightarrow \text{Br}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \text{Map}_g \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_4).$$

Заметим, что матрицу J можно записать в виде $\sum_{i=1}^g \alpha_i \bullet \beta_i$ для любого симплектического базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ пространства H . Кроме того, напомним определение гиперэллиптического соотношения $[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]$ из теоремы 2.20.

ЛЕММА 2.24. *Справедливы тождества:*

- i) $\wp^3(\Delta^2(A_5)) = \wp^3(\Delta^2(E_7)) = 0$;
- ii) $\wp^3([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) = \beta_g \bullet (\sum_{i=1}^g \alpha_i \bullet \beta_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Имеют место равенства $\mathcal{T}(A_5) = \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{T}(E_7) = \mathcal{H}_3$. Поэтому в обоих случаях элемент $\Delta^2(\cdot)$ – это сумма $\sum_{v \neq 0 \in V} A_v$, где подпространство $V \subset \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ имеет размерность 4 или 6 соответственно. Следовательно, $\wp^3(\Delta^2(\cdot))$ есть сумма $\sum_{v \in V} v^{\otimes 3}$. Выберем базис $e_1, \dots, e_r$ в подпространстве V (где $r = 4$ или $r = 6$ в зависимости от рассматриваемого случая) и, разложив сумму $\sum_{v \in V} v^{\otimes 3}$ с помощью биномиальной формулы (2.7), получим сумму мономов $e^{\mathbf{n}} := e_1^{\otimes n_1} \bullet \dots \bullet e_r^{\otimes n_r}$, где $n_1 + \dots + n_r = 3$. Поскольку как минимум одно из чисел n_i равно нулю, каждый моном $e^{\mathbf{n}}$ встречается в этой сумме четное число раз, и сумма равна нулю.

ii) Для краткости будем использовать обозначения $a_i, \alpha_j, \beta_k \in \mathcal{H}_g$ для классов $\mathbb{Z}_2$ -гомологий соответствующих кривых. Положим $v_{ij} := \sum_{k=i}^j a_k$ и $v_i := v_{i, 2g}$. Тогда образ квадрата элемента Гарсайда $\Delta^2(A_{2g})$ в $\mathbb{Z}_2\langle \mathcal{H}_g \rangle$ есть сумма $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 2g} A_{v_{ij}}$. Поскольку кривая β_g не пересекается с кривой a_j при $j < 2g$, гиперэллиптическое соотношение $[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]$ отображается в сумму $\sum_{i=1}^{2g} (A_{v_i} + A_{v_i + \beta_g})$. Поэтому

$$\wp^3([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) = \sum_{i=1}^{2g} (v_i^{\otimes 3} + (v_i + \beta_g)^{\otimes 3}).$$

Раскрывая скобки с учетом того, что $2 = 0 \in \mathbb{Z}_2$, мы получаем

$$\wp^3([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) = \sum_{i=1}^{2g} (v_i \bullet \beta_g^{\otimes 2} + v_i^{\otimes 2} \bullet \beta_g).$$

Подставляя выражения $v_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{2g}$ в сумму $\sum_{i=1}^{2g} v_i$, мы видим, что каждый класс a_j участвует в ней j раз. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2g} v_i = a_1 + a_3 + \dots + a_{2g-1} = \beta_1 + (\beta_1 + \beta_2) + \dots + (\beta_{g-1} + \beta_g) = \beta_g.$$

Аналогично, подставляя $v_i^{\otimes 2} = \sum_{j=i}^{2g} a_j^{\otimes 2} + \sum_{i \leq j < k \leq 2g} a_j \bullet a_k$ в сумму $\sum_{i=1}^{2g} v_i^{\otimes 2}$, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{2g} v_i^{\otimes 2} = \sum_{j=1}^{2g} j a_j^{\otimes 2} + \sum_{1 \leq j < k \leq 2g} j a_j \bullet a_k.$$

Первая сумма дает

$$\begin{aligned} a_1^{\otimes 2} + a_3^{\otimes 2} + \dots + a_{2g-1}^{\otimes 2} &= \beta_1^{\otimes 2} + (\beta_1 + \beta_2)^{\otimes 2} + \dots + (\beta_{g-1} + \beta_g)^{\otimes 2} \\ &= \beta_1 \bullet \beta_2 + \beta_2 \bullet \beta_3 + \dots + \beta_{g-1} \bullet \beta_g + \beta_g^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

Вторая сумма переписывается в виде

$$\sum_{1 \leq j < k \leq 2g} j a_j \bullet a_k = \sum_{j=1}^g \sum_{k=2j}^{2g} a_{2j-1} \bullet a_k,$$

где внутренняя сумма $\sum_{k=2j}^{2g} a_k$ равна $(\alpha_j + \dots + \alpha_g) + (\beta_j + \beta_g)$. Поэтому, положив $\beta_0 := 0$, мы можем представить вторую сумму в виде

$$\sum_{1 \leq j < k \leq 2g} j a_j \bullet a_k = \sum_{j=1}^g (\beta_{j-1} + \beta_j) \bullet ((\alpha_j + \dots + \alpha_g) + (\beta_j + \beta_g)).$$

Проведем анализ отдельных членов в правой сумме последнего равенства. Во-первых, $\sum_{j=1}^g (\beta_{j-1} + \beta_j) \bullet \beta_g = \beta_g \bullet \beta_g = 2\beta_g^{\otimes 2} = 0$. Аналогично, $\beta_j \bullet \beta_j = 0$ и $\sum_{j=1}^g (\beta_{j-1} + \beta_j) \bullet \beta_j = \beta_1 \bullet \beta_2 + \beta_2 \bullet \beta_3 + \dots + \beta_{g-1} \bullet \beta_g$. Члены, содержащие данный класс α_k , имеют вид

$$\sum_{j=1}^k (\beta_{j-1} + \beta_j) \bullet \alpha_k = (\beta_0 + \beta_k) \bullet \alpha_k = \beta_k \bullet \alpha_k.$$

Наконец, мы можем вычислить

$$\wp^3([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) = \beta_g \bullet \beta_g^{\otimes 2} + \left(\beta_g^{\otimes 2} + \sum_{j=1}^g \beta_j \bullet \alpha_j \right) \bullet \beta_g = \beta_g \bullet \sum_{j=1}^g \alpha_j \bullet \beta_j,$$

что и требовалось получить.

СЛЕДСТВИЕ 2.25. При $g \geq 2$ гомоморфизм $\wp^3$ продолжается на группу $\text{Ker}(\text{Map}_{g,1} \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ таким образом, что композиция $\wp^3 \circ \partial_\pi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{T}^3$ равна композиции проекции $\pi_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ и вложения $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow \mathbb{T}^3$, задаваемого формулой $\gamma \mapsto \gamma \bullet \sum_{i=1}^g \alpha_i \bullet \beta_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем следствие 2.23, i).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.26. i) Абелианизация $W\mathcal{I}_{g,\text{ab}}$ группы Вейля–Торелли $W\mathcal{I}_g$ есть векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, естественно изоморфное $\wedge^6 H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

ii) Существует естественное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \Lambda_g \rightarrow W\mathcal{I}_{g,\text{ab}} \rightarrow 0,$$

в котором группа Λ_g может быть реализована как подрешетка в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$, а образ индуцированного вложения $W\mathcal{I}_{g,ab} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle/\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle \cong \mathbb{Z}_2\langle\mathcal{H}_g\rangle$ порождается суммами вида $L_V := \sum_{v \neq 0 \in V} A_v$, где V – симплектическое шестимерное подпространство в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

iii) Существуют расширения групп

$$0 \rightarrow \Lambda_g \rightarrow \widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 1 \quad (2.8)$$

и гомоморфизм из расширения $1 \rightarrow P(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathrm{Br}(\mathcal{S}_g) \rightarrow W(\mathcal{S}_g) \rightarrow 1$ на это расширение, для которого гомоморфизм $W(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ имеет обычный смысл, а гомоморфизм $P(\mathcal{S}_g) \rightarrow \Lambda_g$ есть композиция $P(\mathcal{S}_g) \rightarrow P_{ab}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle \subset \Lambda_g$.

Симплектичность подпространства $V \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ означает, что ограничение формы пересечения на V невырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.26. Пусть $L_0 := C \cdot \Delta^{-2}(E_6)\Delta(E_7)$ и $L'_0 := \Delta^{-2}(E_6)\Delta(E_7)$ – “базисные” элементы, соответствующие немодифицированному и модифицированному фонарному соотношению. Их образы в группе $W(\mathcal{S}_g)$ равны между собой и совпадают с элементом наибольшей длины $w_o(E_7)$ в подгруппе Кокстера $W(E_7) \subset W(\mathcal{S}_g)$. Поскольку элемент $w_o(E_7)$ имеет порядок 2 и нормально порождает группу $W\mathcal{I}_g$, ее абелианизация $W\mathcal{I}_{g,ab}$ является векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$.

Теперь рассмотрим естественное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle \rightarrow Q \rightarrow W\mathcal{I}_g \rightarrow 1,$$

в котором Q – это фактор ядра $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ по ядру $\mathrm{Ker}(P(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle)$. Каждый элемент в группе Q представляется произведением элементов вида $x * L_0$, где $x \in \mathrm{Br}(\mathcal{S}_g)$, и элементов группы $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$. Поскольку $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$ содержится в центре группы Q , а цепное соотношение $C = L_0(L'_0)^{-1}$ лежит в $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$, коммутаторы $[x * L_0, y * L_0]$ и $[x * L'_0, y * L_0]$ (и так далее) равны и порождают коммутант $Q' := [Q, Q]$.

Мы утверждаем, что пересечение $Q' \cap \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$ тривиально. Пусть $z \in Q' \cap \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$. Условие $z \in Q'$ означает, что z представляется элементом вида $\hat{z} = \prod_j [x_j * L_0, y_j * L_0]$ из группы $\mathrm{Br}(\mathcal{S}_g)$. Поскольку элементы $x_j * L_0, y_j * L_0$ отображаются в единицу $\mathrm{id} \in \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, мы можем применить к ним алгоритм из доказательства предложения 2.22. Однако теперь мы выполняем только те шаги, на которых не использовалось фонарное соотношение, т. е. не делаем шаги 6–9. В результате каждый элемент $x_j * L_0, y_j * L_0$ представляется в виде произведения элементов из $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$ и скручиваний Дена T_{δ_i} , у которых класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[\delta_i]$ является линейной комбинацией классов $[\beta_1], \dots, [\beta_g]$. Поскольку $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$ лежит в центре, отсюда следует, что коммутаторы $[x_j * L_0, y_j * L_0]$ есть произведения скручиваний Дена T_{δ_i} , у которых $[\delta_i] \in \mathbb{Z}_2\langle[\beta_1], \dots, [\beta_g]\rangle$.

Теперь рассмотрим z как элемент группы $P(\mathcal{S}_g)$. Запишем образ элемента z в группе $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}\rangle$ в виде $z = \sum_{v \in \mathcal{H}_g} n_v A_v$, где $n_v \in \mathbb{Z}$. Пусть G – подгруппа в $W(\mathcal{S}_g)$, полученная из $W\mathcal{I}_g$ добавлением квазиотражений $t \in \mathcal{T}(\mathcal{S}_g)$, проекции которых в $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ суть скручивания Дена T_{δ_i} , $[\delta_i] \in \mathbb{Z}_2\langle[\beta_1], \dots, [\beta_g]\rangle$.

Поскольку G содержит WI_g , существует G -эквивариантная проекция $\mathcal{G}_g = \mathcal{T}(\mathcal{S}_g)/WI_g \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{S}_g)/G$, при которой смежные классы в $\mathcal{T}(\mathcal{S}_g)/G$ совпадают с G -орбитами в $\mathcal{G}_g$. Очевидно, все классы $[\delta] \in \mathbb{Z}_2\langle[\beta_1], \dots, [\beta_g]\rangle$ неподвижны при действии G . Остальные орбиты описываются следующим образом. Положим $V := \mathbb{Z}_2\langle[\beta_1], \dots, [\beta_g]\rangle$ и $U := \mathbb{Z}_2\langle[\alpha_1], \dots, [\alpha_g]\rangle$. Тогда для любого элемента $u \in \mathcal{H}_g$ с нетривиальной проекцией на U вдоль V его G -орбита $G \cdot u$ состоит из всех векторов $u + v$, где v пробегает V . В частности, $\sum_{v \in V} n_{u+v} = 0$ по теореме 2.14. Положим $V_1 := \mathbb{Z}_2\langle[\beta_2], \dots, [\beta_g]\rangle$. Тогда в специальном случае $u = [\alpha_1]$ мы получаем $\sum_{v \in V_1} (n_{[\alpha_1]+v} + n_{[\alpha_1+\beta_1]+v}) = 0$. Возможность выбора произвольного $\mathbb{Z}_2$ -симплектического базиса дает еще два соотношения:

$$\sum_{v \in V_1} (n_{[\beta_1]+v} + n_{[\alpha_1+\beta_1]+v}) = 0, \quad \sum_{v \in V_1} (n_{[\alpha_1]+v} + n_{[\beta_1]+v}) = 0.$$

Сравнивая их, мы получаем равенство

$$\sum_{v \in V_1} n_{w+v} = 0$$

сначала для $w = [\alpha_1], [\beta_1], [\alpha_1 + \beta_1]$, а затем для любого $w \in \mathcal{H}_g$, $\mathbb{Z}_2$ -ортогонального классам $\beta_2, \dots, \beta_g$. Положим далее $V_k := \mathbb{Z}_2\langle[\beta_{k+1}], \dots, [\beta_g]\rangle$ и запишем последнее равенство для $w = [\beta_1]$ в виде

$$\sum_{v \in V_2} (n_{[\beta_1]+v} + n_{[\beta_1+\beta_2]+v}) = 0.$$

Используя приведенное выше рассуждение, получаем, что $\sum_{v \in V_2} n_{w+v} = 0$ сначала также для $w = [\beta_1]$, а затем для всех $w \in \mathcal{H}_g$, $\mathbb{Z}_2$ -ортогональных V_2 . Повторяя это построение, мы получаем равенства $n_w = 0$ для всех $w \in \mathcal{H}_g$. Это доказывает тривиальность $z \in \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$.

Свойство $Q' \cap \mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle = 1$ показывает, что абелианизация $\Lambda := Q_{ab} = Q/Q'$ включается в расширение (2.8). Поскольку цепной элемент C и элемент $\Delta^2(E_6)$ лежат в $\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$, мы можем в описании расширения (2.8) заменить L_0 на $\Delta(E_7)$. Квадрат $\Delta^2(E_7)$ равен сумме $\sum_{t \in \mathcal{T}(E_7)} A_t$. Множество квазиотражений $\mathcal{T}(E_7)$ совпадает с множеством $\mathcal{H}_3$ ненулевых векторов в $\mathbb{Z}_2\langle[\alpha_1], \dots, [\beta_3]\rangle$. Действуя группой $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, мы получаем требуемое описание образующих группы $WI_{g,ab} = \Lambda_g/\mathbb{Z}\langle\mathcal{H}_g\rangle$.

Для доказательства изоморфизма $WI_{g,ab} \cong \wedge^6 H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ найдем $\wp^6(\Delta^2(E_7))$. Явное вычисление с использованием биномиальной формулы (2.7) показывает, что $\wp^6(\Delta^2(E_7)) = \alpha_1 \bullet \alpha_2 \bullet \alpha_3 \bullet \beta_1 \bullet \beta_2 \bullet \beta_3$. Заметим еще, что над кольцом $\mathbb{Z}_2$ выполнено соотношение $v \bullet v = 0$. Отсюда следует, что алгебра, порожденная $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ и $\bullet$ -умножением, есть просто $\mathbb{Z}_2$ -грасманова алгебра пространства $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, $\bullet$ -произведение $\alpha_1 \bullet \alpha_2 \bullet \alpha_3 \bullet \beta_1 \bullet \beta_2 \bullet \beta_3$ можно отождествить с внешним произведением $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \in \wedge^6 H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Обратно, всякое симплектическое подпространство $V \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ размерности 6 имеет вид $V = x \cdot \mathbb{Z}_2\langle[\alpha_1], \dots, [\beta_3]\rangle$ для некоторого преобразования $x \in \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. Для такого подпространства V элемент $x * \Delta^2(E_7)$ равен сумме $\sum_{v \neq 0 \in V} A_v =: L_V \in \mathbb{Z}_2\langle\mathcal{H}_g\rangle$, а $\wp^6(L_V)$ есть внешнее произведение всех векторов любого базиса подпространства V . Поэтому требуемый изоморфизм $WI_{g,ab} \cong \wedge^6 H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ получается из того, что элементы,

$\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ -сопряженные $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$, порождают пространство $\wedge^6 \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

Теперь мы опишем второй инструмент, используемый при изучении группы $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$. Сопоставим гомоморфизму $\varphi_\mu = (\mu \cap \cdot): \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$, положив $\widehat{\varphi}_\mu(A_v) := 1 \in \mathbb{Z}$, если $\varphi_\mu(v) \equiv 1 \in \mathbb{Z}_2$, и $\widehat{\varphi}_\mu(A_v) := 0$, если $\varphi_\mu(v) \equiv 0$, где $v \in \mathcal{H}_g \subset \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Таким образом, $\widehat{\varphi}_\mu$ есть алгебраическое число образующих A_v , для которых $\varphi_\mu(v) \equiv 1$. Этот гомоморфизм очевидным образом продолжается до гомоморфизма $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbf{P}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 2.27. Пусть $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ – гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом $\varphi_\mu: \mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

- i) Для любого цепного элемента C значение $\widehat{\varphi}_\mu(C)$ равно 0 или -4 .
- ii) Для квадрата любого модифицированного фонарного элемента L^2 значение $\widehat{\varphi}_\mu(L^2)$ равно 0 или -8 .
- iii) Для любого элемента x , соответствующего скручиванию Дена T_δ относительно разбивающей кривой δ , выполнено $\widehat{\varphi}_\mu(x) \equiv 0 \pmod{4}$.
- iv) Выполнено сравнение $\widehat{\varphi}_\mu([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) \equiv (2g - 2)\varphi_\mu(\beta_g) \pmod{4}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.28. Гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ продолжается на стабилизатор $\mathbf{Br}(\mathcal{S}_g)_\mu$ элемента μ . Это продолжение индуцирует гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \mathbf{Map}_{g,1,\mu} \rightarrow \mathbb{Z}_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.27 И СЛЕДСТВИЯ 2.28. Начнем с доказательства следствия. Напомним, что решетка Λ_g (см. предложение 2.26, ii)) порождена множеством $\mathcal{H}_g$ и (образами) модифицированных фонарных элементов. Из утверждения ii) леммы немедленно следует, что существует естественное продолжение $\widehat{\varphi}_\mu: \Lambda_g \rightarrow \mathbb{Z}$, при котором $\widehat{\varphi}_\mu(L) = 0$ или $\widehat{\varphi}_\mu(L) = -4$ для любого модифицированного фонарного элемента L .

Группа $\widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)$ (см. предложение 2.26, iii)) действует естественным образом на пространстве $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Пусть $\widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu$ – стабилизатор класса μ . Из предложения 2.26, iv) следует, что $\widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu$ есть образ группы $\mathbf{Br}(\mathcal{S}_g)_\mu$ при естественном эпиморфизме $\mathbf{Br}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)$. Следующий шаг в доказательстве следствия – продолжение $\widehat{\varphi}_\mu$ до гомоморфизма $\widehat{\varphi}_\mu: \widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu \rightarrow \mathbb{Z}$. Заметим, что группа $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu$ порождается (образами) скручиваний Дена T_δ с $\delta \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$. В силу предложения 2.26 группа $\widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu$ порождена квадратами скручиваний Дена T_δ^2 (относительно неразбивающих кривых δ), образами фонарных элементов и скручиваниями Дена T_δ , для которых $\delta \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$. Положим $\widehat{\varphi}_\mu(T_\delta) = 0$ для таких скручиваний Дена. Чтобы проверить корректность этого определения, рассмотрим элемент x , являющийся произведением скручиваний T_{δ_j} при $\delta_j \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$ и лежащий в Λ_g . Квадрат этого элемента x^2 лежит в $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$. Далее, пусть $x = T_{\delta_1}^{\epsilon_1} \cdot x_1$, тогда

$$x^2 = T_{\delta_1}^{\epsilon_1} \cdot x_1 \cdot T_{\delta_1}^{\epsilon_1} \cdot x_1 = (T_{\delta_1}^{\epsilon_1})^2 \cdot [T_{\delta_1}^{-\epsilon_1}, x_1] \cdot x_1^2.$$

Повторяя эту процедуру, мы видим, что x^2 есть произведение квадратов $(T_{\delta_i}^{\epsilon_i})^2$ скручиваний Дена, $\delta_i \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$, и коммутаторов $[y_{2j-1}, y_{2j}]$, для которых проекции элементов y_j в группу $\mathbf{W}(\mathcal{S}_g)$ принадлежат стабилизатору элемента μ . Значит, из теоремы 2.14 следует, что $\widehat{\varphi}_\mu(x^2) = 0$. Таким образом, $\widehat{\varphi}_\mu(x) = 0$,

следовательно, гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu \rightarrow \mathbb{Z}$ действительно определен корректно.

Смысл леммы состоит в том, что гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu: \widehat{\mathbf{Sp}}(2g, \mathbb{Z}_2)_\mu \rightarrow \mathbb{Z}$ принимает значения в $4\mathbb{Z}$ на образах всех элементов, отвечающих соотношениям в группе классов отображений $\text{Map}_{g,1}$. Это свойство эквивалентно существованию индуцированного гомоморфизма $\widehat{\varphi}_\mu: \text{Map}_{g,1,\mu} \rightarrow \mathbb{Z}_4$.

Теперь перейдем к доказательству леммы.

i) Очевидно, что имеется следующее *свойство сопряжения*: $\widehat{\varphi}_{x*\mu}(x * A) = \widehat{\varphi}_\mu(A)$ для любого $x \in \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ и любого $A \in \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$. Значит, мы можем считать, что C – базисный цепной элемент $C_0 := \Delta^{-4}(A_4)\Delta^2(A_5)$. Далее, ограничивая φ_μ на подпространство $\mathbb{Z}_2\langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle$, мы можем считать, что $g = 2$ и что это ограничение нетривиально.

Нам понадобятся стандартные факты о системах корней (см. [15]). В частности, мы имеем естественное отождествление систем Кокстера $\mathcal{S}_2 = A_5$ и соответствующих групп $\mathbf{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) = W(A_5)$. Кроме того, множество $\mathcal{H}_2$ естественно отождествляется с множеством $\Phi^+(A_5)$ положительных корней системы A_5 .

Мы утверждаем, что действие группы $W(A_4)$ на $\Phi^+(A_5)$ имеет ровно две орбиты. Первая из них – это система корней $\Phi^+(A_4)$. Явное описание систем корней дает пять оставшихся элементов: $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + \dots + v_4 + v_0\}$. (Здесь мы используем обозначения из определения 2.18 и обозначаем через v_i простой корень, соответствующий s_i , $i = 0; 1, \dots, 4$.) Непосредственно видно, что $v_1 + v_2$ получается из v_1 применением отражения $s_2 = T_{a_2}$, $v_1 + v_2 + v_3$ получается из $v_1 + v_2$ применением $s_3 = T_{a_3}$ и т. д. Отсюда вытекает требуемое описание орбит.

Следовательно, достаточно вычислить $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^{-4}(A_4)\Delta^2(A_5))$ в случаях $\mu = \beta_1 = a_1$ и $\mu = \beta_2 = a_0$. По определению значение $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(A_5))$ равно числу векторов $v \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, для которых $\varphi_\mu(v) = 1$. Таковых имеется $2^3 = 8$, т. е. $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(A_5)) = 8$.

Для упрощения обозначений заменим систему $\{s_2, s_3, s_4, s_0\}$ на $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. (Такая замена возможна при $g = 2$ в силу изоморфизма этих систем.) Тогда $\Delta^2(A_4) = \sum_{1 \leq j \leq k \leq 4} A_{v_{jk}}$, где $v_{jk} := \sum_{i=j}^k a_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Значит, $\widehat{\varphi}_{\beta_1}(\Delta^2(A_4))$ – число векторов v_{jk} , “содержащих” слагаемое $\alpha_1 = a_2$. Для таких векторов $1 \leq j \leq 2 \leq k \leq 4$, так что $\widehat{\varphi}_{\beta_1}(\Delta^2(A_4)) = 2 \times 3 = 6$ и $\widehat{\varphi}_{\beta_1}(\Delta^4(A_4)) = 12$. Аналогичное рассуждение в случае $\mu = \beta_2$ приводит к векторам v_{jk} , где $1 \leq j \leq k = 4$, откуда следует, что $\widehat{\varphi}_{\beta_2}(\Delta^4(A_4)) = 4 \times 2 = 8$. Итак, значение $\widehat{\varphi}_\mu(C)$ равно либо $8 - 8 = 0$, либо $8 - 12 = -4$.

ii) Рассмотрим теперь квадрат модифицированного фонарного элемента L^2 . Мы утверждаем, что предыдущее рассуждение остается верным, если в нем заменить A_4 на E_6 и A_5 на E_7 . В частности, имеются естественные отождествления систем Кокстера $\mathcal{S}_3 = E_7$ и множеств положительных корней $\Phi^+(E_7) = \mathcal{H}_3$, а также изоморфизм групп $W(E_7) = \mathbf{Sp}(6, \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2\langle w_o(E_7) \rangle$. Применяя сопряжение, мы сводим задачу к случаю базисного фонарного элемента $\Delta^{-4}(E_6)\Delta^2(E_7)$. Аналогично предыдущей ситуации мы можем считать, что $g = 3$ и ограничение φ_μ на соответствующее подпространство нетривиально. Тогда снова $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_7))$ есть число векторов $v \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих условию $\varphi_\mu(v) = 1$. На этот раз это число равно $2^5 = 32 = \widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_7))$.

Теперь опишем $W(E_6)$ -орбиты в $\mathcal{T}(E_7)$. Поскольку квазиотражения находятся во взаимно однозначном соответствии с положительными корнями алгебры Ли, имеется 63 квазиотражения в $\mathcal{T}(E_7)$ и 36 квазиотражений в $\mathcal{T}(E_6)$. Далее, вложение систем Кокстера $E_6 \subset E_7$ индуцирует вложение множеств квазиотражений. Таким образом, $\mathcal{T}(E_6)$ является $W(E_6)$ -орбитой в $\mathcal{T}(E_7)$, и имеется еще $63 - 36 = 27$ квазиотражений.

Одним из оставшихся квазиотражений является элемент s_1 . (Мы используем обозначения из определения 2.18.) Для того чтобы найти его $W(E_6)$ -орбиту, рассмотрим комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ типа E_7 . Зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и согласованную систему простых корней, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с системой $E_7 = \{s_0; s_1, \dots, s_6\}$. Для любого $t \in \mathcal{T}(E_7)$ обозначим через $\alpha_t \in \mathfrak{h}^*$ соответствующий положительный корень, а через $\mathfrak{g}_t^\pm$ – корневые подпространства, соответствующие $\pm\alpha_t$. Далее, пусть $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра Ли типа E_6 , определенная вложением $E_6 \subset E_7$, а $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ – согласованное вложение картановской подалгебры $\mathfrak{h}'$. Обозначим через $B: \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$ каноническую билинейную форму на $\mathfrak{h}^*$, нормализованную условием $B(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_i}) = +2$.

Обозначим через V^+ (соответственно, V^-) сумму корневых подпространств $\mathfrak{g}_t^+$ (соответственно, $\mathfrak{g}_t^-$) по всем квазиотражениям $t \in \mathcal{T}(E_7) \setminus \mathcal{T}(E_6)$. Поскольку каждый корень α_t , $t \in \mathcal{T}(E_7) \setminus \mathcal{T}(E_6)$, имеет положительный коэффициент при α_{s_1} , подпространство V^+ инвариантно относительно присоединенного действия $\mathfrak{g}'$. Это означает, что вся орбита $W(E_6) \cdot \alpha_{s_1}$ лежит в множестве $\Phi^+(E_7)$ (в отличие от действия всей группы Вейля $W(E_7)$, которое переводит каждый корень в противоположный).

Из диаграммы Дынкина мы видим, что $B(\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}) = -1$ и корень α_{s_1} ортогонален остальным простым корням $\alpha_{s_0}; \alpha_{s_3}, \dots, \alpha_{s_6}$ в E_6 . Это означает, что для любого $v \in \mathfrak{h}'$ выполнено равенство $\alpha_{s_1}(v) = -\omega_{s_2}(v)$, где ω_{s_2} – фундаментальный вес системы E_6 , двойственный к α_{s_2} . Следовательно, подпространство V^+ содержит неприводимый $\mathfrak{g}'$ -подмодуль с минимальным весом $-\omega_{s_2}$. Известно, что размерность этого подмодуля равна 27. Значит, $\dim V^+ \geq 27$. Аналогично, $\dim V^- \geq 27$. Сравнивая размерности, мы заключаем, что $\mathfrak{g}'$ -неприводимое разложение алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus V^+ \oplus V^- \oplus \mathbb{C}\langle\alpha_{s_1}^\vee\rangle$, где $\alpha_{s_1}^\vee$ – кокорень, двойственный корню α_{s_1} . Заметим теперь, что согласно [15, гл. VI, упражнение 24 к § 1] вес $-\omega_{s_2}$ является микровесом². Последнее свойство эквивалентно тому, что $\mathfrak{g}'$ -веса в V^+ образуют одну $W(E_6)$ -орбиту.

Вернемся к вычислению возможных значений $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_6))$. Воспользуемся следующей явной конструкцией системы корней типа E_6 . Пусть $(\mathfrak{h}')_{\mathbb{R}}^*$ (вещественная форма картановской подалгебры $(\mathfrak{h}')^*$) есть векторное пространство, натянутое на векторы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6; \varepsilon$, удовлетворяющие линейному соотношению $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6 = 0$. Определим билинейную форму на $(\mathfrak{h}')_{\mathbb{R}}^*$, положив $B(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \frac{5}{6}$, $B(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -\frac{1}{6}$, $B(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2}$ и $B(\varepsilon_i, \varepsilon) = 0$. Тогда множество

$$\Phi := \{\pm 2\varepsilon, \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k \pm \varepsilon, i > j > k; \varepsilon_i - \varepsilon_j, i \neq j\}$$

является системой корней типа E_6 , а множество

$$\pi := \{\alpha_{s_i} := \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}, i = 2, \dots, 6; \alpha_{s_0} := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon\}$$

²Автор благодарен В. Зёргелю за эту ссылку.

является системой простых корней относительно подходящей камеры Вейля. Соответствующие положительные корни образуют множество

$$\Phi^+ := \{2\varepsilon, \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon, i > j > k; \varepsilon_i - \varepsilon_j, i > j\}.$$

Обозначим через Λ целочисленную решетку, порожденную множеством π . Поскольку кривые $a_0; a_2, \dots, a_6$ задают базис целочисленных гомологий поверхности Σ , мы можем отождествить решетку Λ с $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Как мы уже показали, любой гомоморфизм $\varphi_\mu: H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ есть $\mathbb{Z}_2$ -редукция либо гомоморфизма $\lambda \in \Lambda \mapsto B(\alpha_t, \lambda) \in \mathbb{Z}$ для некоторого $\alpha_t \in \Phi$, либо гомоморфизма $\lambda \in \Lambda \mapsto B(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}$ для некоторого веса γ , соответствующего $\mathfrak{g}'$ -модулю V^+ . Более того, гомоморфизмы φ_μ одного типа дают одинаковое значение $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_6))$.

В качестве представителя первой $W(E_6)$ -орбиты возьмем корень 2ε . Тогда $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_6))$ равно числу корней вида $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon$, для которых $i > j > k$. Таким образом, в этом случае $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_6)) = \binom{6}{3} = 20$. Отсюда следует, что $\widehat{\varphi}_\mu(L^2) = 32 - 2 \times 20 = -8$.

В качестве представителя второй $W(E_6)$ -орбиты рассмотрим вес $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Для подсчета числа корней в этом случае воспользуемся следующими наблюдениями. Во-первых, поскольку корень ε ортогонален ε_1 и ε_2 , мы можем заменить $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon$ на $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$. Во-вторых, поскольку $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6 = 0$, а нас интересует только четность числа $B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_t)$, мы можем заменить каждый корень $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$ на $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6 - \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$. Таким образом, каждый корень $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k$ при $i > j > k \geq 2$ нужно посчитать дважды. Явная комбинаторика такова:

- 1) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ортогонален $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$;
- 2) $B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_i - \varepsilon_1) = -1$ при $i \geq 3$, и таких корней 4;
- 3) $B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_i - \varepsilon_2) = -1$ при $i \geq 3$, и таких корней 4;
- 4) $B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k) = -1$ при $i > j > k \geq 3$, и таких корней $2 \times 4 = 8$;
- 5) $B(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_i + \varepsilon_j) = 0$ при $i > j \geq 3$.

Окончательно получаем, что в этом случае $\widehat{\varphi}_\mu(\Delta^2(E_6)) = 16$ и $\widehat{\varphi}_\mu(L^2) = 32 - 2 \times 16 = 0$.

iii) Каждая разбивающая кривая $\gamma \subset \Sigma \setminus \{z_0\}$ делит поверхность Σ на две части Σ' и Σ'' , одна из которых (скажем, Σ'') содержит точку z_0 . Пусть $p \geq 1$ – род другой части Σ' . Тогда вся конфигурация сопряжена такой, в которой часть Σ' содержит кривые $a_1, \dots, a_{2p}$, а часть Σ'' – кривые $a_{2p+2}, \dots, a_{2g}$ (см. расположение кривой γ_3 на рис. 3). В частности, если $p = g$, то кривая γ окружает базовую точку z_0 и соответствует граничной кривой ∂ , представленной на рис. 3. В силу (на этот раз *разбивающего*) цепного соотношения имеем $T_{\gamma_p} T_{\gamma_{p-1}} = (T_{\beta_p} T_{\alpha_p} T_{\beta'_p})^4$, где кривая β'_p аналогична кривой, изображенной на рис. 1, и мы считаем, что $T_{\gamma_0} = 1 \in \text{Map}_{g,1}$ в специальном случае $p = 1$. Таким образом, скручивание T_γ сопряжено произведению элементов $(T_{\beta_p} T_{\alpha_p} T_{\beta'_p})^4$. Отношения инцидентности в конфигурации $\beta_p, \alpha_p, \beta'_p$ соответствуют системе Кокстера A_3 , а произведение $(T_{\beta_p} T_{\alpha_p} T_{\beta'_p})^4$ равно квадрату элемента Гарсайда $\Delta^2(A_3)$. Следовательно, элемент $(T_{\beta_p} T_{\alpha_p} T_{\beta'_p})^4$ лежит в группе $P(\mathcal{S}_g)$ и равен в $\mathbb{Z}(\mathcal{H}_g)$ сумме $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} A_{v_{ij}}$, где $v_{11} = [\beta_p] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, $v_{22} = [\alpha_p]$, $v_{33} = [\beta'_p] = [\beta_p]$ и $v_{ij} = \sum_{k=i}^j v_{kk}$. Явное вычисление дает

$\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} A_{v_{ij}} = 2A_{[\beta_p]} + 2A_{[\alpha_p]} + 2A_{[\alpha_p + \beta_p]}$. Значит, гомоморфизм $\widehat{\varphi}_\mu$ принимает значение 0 или 4 на любом произведении вида $(T_{\beta_p} T_{\alpha_p} T_{\beta'_p})^4$. Это доказывает утверждение iii).

iv) Подгруппа $\partial_\pi(\pi_1(\Sigma, z_0)) \subset \text{Map}_{g,1}$ нормально порождена базисным гиперэллиптическим соотношением $[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]$. Его геометрическая реализация – это $\partial_\pi(\beta''_g)$, где элемент $\beta''_g \in \pi_1(\Sigma, z_0)$ представляется вложенной кривой, также обозначаемой β''_g , которая изотопна кривой β_g и проходит через базовую точку z_0 . На рис. 3 эта кривая соответствует дуге β''_g , а правильная картинка для замкнутой поверхности получится, если стянуть граничную окружность ∂ в базовую точку z_0 . В частности, после такого стягивания кривые β_g и β'_g ограничивают трубчатую окрестность кривой β''_g . Заметим, что элемент $\Delta^2(A_{2g})$ представляется гиперэллиптической инволюцией на поверхности Σ , переводящей кривую β_g в кривую β'_g .

Ввиду этого алгебраического описания нам достаточно найти возможные значения $\widehat{\varphi}_\mu([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})])$. Заметим сначала, что в группе $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$ выполнено равенство $\Delta^2(A_{2g}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2g} A_{v_{ij}}$, где $v_{ij} := \sum_{k=i}^j [a_k] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Далее, $T_{\beta_g}(v_{ij}) = v_{ij}$ при $i \leq j < 2g$, так что в группе $\mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_g \rangle$ мы получаем равенство

$$[T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})] = \sum_{i=1}^{2g} (A_{v_{i,2g} + [\beta_g]} - A_{v_{i,2g}}).$$

Легко видеть, что если $\varphi_\mu[\beta_g] = 0$, то $\widehat{\varphi}_\mu(A_{v_{i,2g} + [\beta_g]} - A_{v_{i,2g}}) = 0$ для любого $i = 1, \dots, 2g$. Поэтому остается рассмотреть случай $\varphi_\mu[\beta_g] = 1$.

Здесь мы заметим, что классы $[a_1], \dots, [a_{2g}]$ образуют базис в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, причем $[\beta_g] = [a_1] + [a_3] + \dots + [a_{2g-1}]$. Таким образом, гомоморфизм $\varphi_\mu: H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ полностью определяется своими значениями $\varphi_\mu[a_1], \dots, \varphi_\mu[a_{2g}]$. Значит, варьируя эти значения, мы получим всевозможные φ_μ . Ясно, что группа таких преобразований гомоморфизмов φ_μ , при которых не изменяется значение $\varphi_\mu[\beta_g] = 1 \in \mathbb{Z}_2$, порождена следующими двумя типами *простых преобразований*: либо мы изменяем одно значение $\varphi_\mu[a_{2k}]$ на кривой a_{2k} с четным номером, либо одновременно изменяем два значения $\varphi_\mu[a_{2k-1}]$ и $\varphi_\mu[a_{2k+1}]$ на двух следующих друг за другом кривых a_{2k-1} и a_{2k+1} с нечетными номерами. Поскольку $\varphi_\mu[\beta_g] = 1$, каждое значение $\widehat{\varphi}_\mu(A_{v_{i,2g} + [\beta_g]} - A_{v_{i,2g}})$ есть либо +1, либо -1. Ключевое наблюдение состоит в том, что для любого простого преобразования мы получаем *четное* число изменений знака у значений $\widehat{\varphi}_\mu(A_{v_{i,2g} + [\beta_g]} - A_{v_{i,2g}})$. А именно, $2k$ изменений знаков происходят при изменении значения $\varphi_\mu[a_{2k}]$, и два знака меняются при изменении значений $\varphi_\mu[a_{2k-1}]$ и $\varphi_\mu[a_{2k+1}]$. Отсюда следует, что значение $\widehat{\varphi}_\mu([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) \bmod 4$ остается неизменным, т. е. оно зависит только от $\varphi_\mu([\beta_g])$. Явное вычисление в случае, когда φ_μ обращается в нуль на $[\alpha_1], \dots, [\alpha_g]; [\beta_1], \dots, [\beta_{g-1}]$, дает равенство $\widehat{\varphi}_\mu([T_{\beta_g}, \Delta^2(A_{2g})]) = 2g - 2$, что и утверждалось.

2.3. Разложения на множители в группах классов отображений.

В этом пункте мы рассматриваем задачи разложения на множители в группе $\text{Map}_{g,1}$ и ее подгруппе $\text{Map}_{g,1,\mu}$, оставляющей неподвижным заданный ненулевой класс гомологий $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Топологический смысл этих задач состоит

в существовании или нетривиальности специальных классов гомологий в семействах Лефшеца.

Напомним (см. формулу (1.15)), что через $\widetilde{\text{Map}}_g$ мы обозначаем группу в расширении

$$1 \rightarrow \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \widetilde{\text{Map}}_g \rightarrow \text{Map}_g \rightarrow 1,$$

т.е. $\widetilde{\text{Map}}_g$ есть фактор группы $\text{Map}_{g,1}$ по образу при отображении ∂_π ядра гомоморфизма $\pi_1(\Sigma, z_0) \rightarrow \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Для нас будут важны только проекции элементов $F \in \text{Map}_{g,1}$ в группу Map_g . Пусть $\widetilde{\text{Map}}_{g,\mu} \subset \widetilde{\text{Map}}_g$ – стабилизатор класса μ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.29. *Существует гомоморфизм $\tilde{\varphi}_\mu: \widetilde{\text{Map}}_{g,\mu} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ со следующими свойствами:*

- ($\varphi 1$) $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta) \equiv 0 \pmod 4$ для скручивания Дена T_δ такого, что $\delta \cap \mu \equiv 0 \pmod 2$;
- ($\varphi 2$) $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta^2) \equiv [\delta] \cap [\mu] \pmod 4$ для любого скручивания Дена;
- ($\varphi 3$) $\tilde{\varphi}_\mu(\partial_\pi(\gamma)) \equiv (2g - 2)\varphi_\mu(\gamma) \pmod 4$ для любого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$, где $\partial_\pi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Map}_{g,1}$ – стандартное вложение;
- ($\varphi 4$) $\tilde{\varphi}_\mu$ равен нулю на подгруппе $\widetilde{\text{Map}}'_{g,\mu} \subset \widetilde{\text{Map}}_{g,\mu}$, порожденной скручиваниями Дена T_δ такими, что $\delta \cap \mu \equiv 0 \pmod 2$, и коммутаторами $[F, F']$, где $F, F' \in \widetilde{\text{Map}}_{g,\mu}$;
- ($\varphi 5$) ограничение $\tilde{\varphi}_\mu$ на ядро $\text{Ker}(\widetilde{\text{Map}}_{g,\mu} \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$ есть редукция $\pmod 4$ гомоморфизма $\hat{\varphi}_\mu$.

Свойство ($\varphi 2$) понимается следующим образом: $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta^2) \equiv 0 \pmod 4$, если $[\delta] \cap [\mu] \equiv 0 \pmod 2$, и $\tilde{\varphi}_\mu(T_\delta^2) \equiv +1 \pmod 4$, если $[\delta] \cap [\mu] \equiv 1 \pmod 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.29. Нужно применить лемму 2.27 и следствие 2.28.

ТЕОРЕМА 2.30. *Пусть род $g = 2g' \geq 2$ четен, и пусть $\text{id} = \prod_i [F_{2i-1}, F_{2i}] \circ \prod_j T_{\delta_j}$ – разложение на множители в группе Map_g , где $[F_{2i-1}, F_{2i}]$ – коммутатор элементов $F_{2i-1}, F_{2i} \in \text{Map}_g$ и T_{δ_j} – скручивания Дена относительно окружностей $\delta_1, \dots, \delta_n \subset \Sigma \setminus \{z_0\}$. Тогда существуют подъемы $\tilde{F}_{2i-1}, \tilde{F}_{2i} \in \text{Map}_{g,1}$ и окружности δ'_j в $\Sigma \setminus \{z_0\}$ такие, что δ'_j изотопна δ_i на Σ , и $\prod_i [\tilde{F}_{2i-1}, \tilde{F}_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta'_j} = \partial_\pi \gamma \in \text{Map}_{g,1}$ для некоторого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$ с нулевым классом $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[\gamma] = 0 \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем какие-нибудь подъемы $\tilde{F}_i \in \text{Map}_{g,1}$ элементов $F_i \in \text{Map}_g$ и поднимем скручивания Дена T_{δ_j} в $\text{Map}_{g,1}$ естественным способом. Для любого $v \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ обозначим через ϑ_v соответствующий элемент в $\widetilde{\text{Map}}_g$. Тогда $\prod_i [\tilde{F}_{2i-1}, \tilde{F}_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j} = \vartheta_{w_0} \in \widetilde{\text{Map}}_g$ для какого-то $w_0 \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

Обозначим через W множество всех $w \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, для которых элемент ϑ_w может быть представлен в виде произведения $\prod_i [\tilde{F}_{2i-1}, \tilde{F}_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta'_j}$ для каких-то подъемов $\tilde{F}_i$ и $T_{\delta'_j}$. Тогда $W = w_0 + V$ для подходящего $\mathbb{Z}_2$ -подпространства $V \subset \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ и утверждение теоремы эквивалентно тому, что $w_0 \in V$. Предположим противное; тогда V должно быть собственным подпространством в $\text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

Пусть $\mu \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ – такой класс, что линейный функционал $\varphi_\mu: v \in \text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \mapsto \mu \cap v \in \mathbb{Z}_2$ обращается в нуль на V , но не равен нулю на w_0 .

Мы утверждаем, что класс $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ инвариантен при действии всех сомножителей F_i, T_{δ_j} . Из леммы 1.12 следует, что подпространство V состоит из элементов, двойственных по Пуанкаре кограницам $d^{(2)}(\lambda^\vee)$, где $\lambda^\vee$ имеет вид (1.16). Эквивалентное двойственное условие состоит в том, что если мы рассмотрим разложение $\prod_i [F_{2i-1}, F_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j}$ как соотношение R , то граница $\partial_2(R \otimes_2 \mu)$ обращает в нуль все такие $\lambda^\vee$. Используя вычисление из доказательства предложения 1.9, получаем

$$\begin{aligned} \partial_2(R \otimes_2 \mu) &= \sum_j T_{\delta_j} \otimes_1 w_j^T \mu \\ &\quad + \sum_i (F_{2i-1} \otimes_1 (F_{2i} - \text{id})w_i^F \mu + F_{2i} \otimes_1 (\text{id} - F_{2i-1})w_i^F \mu), \end{aligned}$$

где w_j^T, w_i^F – некоторые концевые части слова R . Точнее, w_j^T состоит из всех букв, стоящих в R после T_{δ_j} , а w_i^F – из всех букв после F_{2i} . Рассмотрим теперь условия $w_j^T \mu \cap \delta_j \equiv 0 \pmod 2$, начиная с последней буквы T_{δ_i} и двигаясь к началу слова R . По индукции мы получим требуемые равенства $\mu \cap \delta_j \equiv 0 \pmod 2$. Аналогичное рассуждение в случае условий $(F_{2i} - \text{id})w_i^F \mu \cap \lambda_i \equiv 0$ и $(F_{2i-1} - \text{id})w_i^F \mu \cap \nu_i \equiv 0$ дает нужный результат для F_i .

Итак, $\tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_{w_0}) \equiv 0 \pmod 4$ по предложению 2.29, ($\varphi 1$). С другой стороны, $\tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_{w_0}) \equiv (2g-2)\varphi_\mu(w_0) \equiv 2(\mu \cap w_0) \equiv 2$ по предложению 2.29, ($\varphi 3$). Полученное противоречие означает, что нужные подъемы существуют.

Из теоремы 2.30 и леммы 1.12 следует теорема 0.10, а из нее – сформулированное непосредственно после предложения 1.7 утверждение о нетривиальности класса $\mathbb{Z}_2$ -гомологий слоя для любого топологического семейства Лефшеца со слоем четного рода.

Из доказательства теоремы 2.30 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.31. Пусть род $g \geq 3$ нечетен, и пусть $\text{id} = \prod_i [F_{2i-1}, F_{2i}] \circ \prod_j T_{\delta_j}$ – такое же разложение в группе Map_g , как и в теореме 2.30. Предположим, что для любого подъема $\prod_i [\tilde{F}_{2i-1}, \tilde{F}_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j} = \partial_\pi \gamma \in \text{Map}_{g,1}$, где $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$, класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[\gamma]_{\mathbb{Z}_2}$ отличен от нуля. Тогда найдется класс $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, неподвижный при действии элементов F_i и T_{δ_j} и такой, что $\mu \cap [\gamma] \equiv 1 \pmod 2$ для этого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$.

ТЕОРЕМА 2.32. i) Пусть род $g \geq 1$ нечетен. Тогда элемент $(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3$ не представляется в группе Map_g в виде произведения $\prod_i T_{\delta_i}^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [F_{2j-1}, F_{2j}]$ скручиваний Дена и коммутаторов, для которого $\delta_i \cap \beta_1 \equiv 0 \pmod 2$ и каждый элемент F_j сохраняет класс гомологий $[\beta_1]_{\mathbb{Z}_2} \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$.

ii) Пусть род $g \geq 2$ четен. Пусть $\prod_i T_{\delta_i}^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [F_{2j-1}, F_{2j}]$ – разложение элемента $(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3$ в группе Map_g , удовлетворяющее вышеуказанным условиям, и пусть $\hat{F}_j$ – какие-то подъемы сомножителей в группу $\text{Map}_{g,1}$. Тогда

$$(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^{-3} \prod_i T_{\delta_i}^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [\hat{F}_{2j-1}, \hat{F}_{2j}] = \partial_\pi(\gamma),$$

где $\gamma \in \pi_1(\Sigma, z_0)$ удовлетворяет условию $[\gamma] \cap \beta_1 \equiv 1 \pmod 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Рассмотрим сначала частный случай $g = 1$, обозначив α_1, β_1 через α, β . Здесь $\mathcal{S}_1 = \{s_1, s_2\} = A_2$, и потому $W(\mathcal{S}_1) = \text{Sym}_3$ и $\text{Br}(\mathcal{S}_1) = \text{Br}_3$. Кроме того, мы можем отождествить $\text{Map}_{1,[1]}$ с группой кос Br_3 , сопоставив скручиваниям Дена T_α, T_β стандартные образующие в Br_3 . Помимо этого, $\mathcal{T}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{H}_1 = \{[\alpha], [\beta], [\alpha + \beta]\}$, где рассматриваются гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Применим теорему 2.14 к подгруппе $G := \mathbb{Z}_2\langle T_\beta \rangle \subset \text{Sym}_3$. Эта подгруппа имеет две орбиты в $\mathcal{T}(\mathcal{S}_1)$, а именно $\{[\beta]\}$ и $\{[\alpha], [\alpha + \beta]\}$. Пусть $A_{G \cdot [\beta]}, A_{G \cdot [\alpha]}$ – соответствующий базис в $\text{P}_{\text{ab}}(\mathcal{S}_1)_G$. Как и выше, проекция из $\text{P}_{\text{ab}}(\mathcal{S}_1) = \mathbb{Z}\langle A_{[\alpha]}, A_{[\beta]}, A_{[\alpha + \beta]} \rangle$ на компоненту $\mathbb{Z}\langle A_{G \cdot [\alpha]} \rangle$ дается гомоморфизмом $\hat{\varphi}_{[\beta]}: \text{P}_{\text{ab}}(\mathcal{S}_1) \rightarrow \mathbb{Z}$. В этой ситуации теорема 2.14 утверждает, что $\hat{\varphi}_{[\beta]}(F) = 0$ для любого разложения F , удовлетворяющего условиям нашей теоремы. С другой стороны, $(T_\alpha T_\beta)^3$ есть элемент Гарсайда группы кос $\text{Br}(\mathcal{S}_1)$, следовательно, его проекция в $\text{P}_{\text{ab}}(\mathcal{S}_1)$ равна $A_{[\alpha]} + A_{[\beta]} + A_{[\alpha + \beta]}$. Значит, $\hat{\varphi}_{[\beta]}((T_\alpha T_\beta)^3) = \hat{\varphi}_{[\beta]}(A_{[\alpha]} + A_{[\beta]} + A_{[\alpha + \beta]}) = 2$. Полученное противоречие доказывает невозможность такого разложения.

Теперь рассмотрим случай нечетного рода $g \geq 3$ и предположим, что существует удовлетворяющее условиям теоремы разложение $\prod_i T_{\delta_i}^{\epsilon_i} \cdot \prod_j [F_{2j-1}, F_{2j}]$. Поднимая его в группу $\text{Br}(\mathcal{S}_g)$, мы получаем элемент $\hat{F}$, лежащий в ядре $\text{Ker}(\text{Br}(\mathcal{S}_g) \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2))$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.30, мы получаем сравнение $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}(\hat{F}) \equiv 0 \pmod{4}$. Заметим, что подъем $\hat{F}$ отличается от $(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3$ (рассматриваемого теперь как элемент группы $\text{Br}(\mathcal{S}_g)$) на произведение цепных, фонарных и гиперэллиптических соотношений. Поскольку род g нечетен, то $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}(x) \equiv 0 \pmod{4}$ для любого из элементов x , задающих эти соотношения (включая гиперэллиптическое), а значит, значение $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3)$ должно делиться на 4. С другой стороны, сделанное в случае $g = 1$ вычисление показывает, что $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3) = 2$. Противоречие.

ii) Как и раньше, применим рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 2.30. Получится сравнение $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3 \cdot \partial_\pi(\gamma)) \equiv 0 \pmod{4}$. Поскольку $\hat{\varphi}_{[\beta_1]}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3) = 2$, нужное утверждение следует из предложения 2.29, ($\varphi 3$).

§ 3. Доказательство основного результата

В этом параграфе дается доказательство основной теоремы из введения. Сохраним обозначения из п. 1.4. В частности, $\mathbf{m}$ обозначает меридиан бутылки Клейна K , рассматриваемый как кривая на слое Σ , а $\mu = [\mathbf{m}]_{\mathbb{Z}_2}$ – гомологический класс этой кривой на Σ .

В случае, когда меридиан $\mathbf{m}$ разбивает поверхность Σ , утверждение доказано непосредственно после предложения 1.7. Поэтому будем предполагать, что $\mathbf{m}$ не разбивает Σ . Кроме того, мы можем считать, что выполнены условия предложения 1.9 и проекция класса $[K]$ на $H_1(Y^\circ, \mathcal{H}_1(X_y, \mathbb{Z}_2))$ тривиальна, так как в противном случае доказательство очевидно.

Рассмотрим монодромию F_Γ вдоль кривой Γ . Реализуем меридиан $\mathbf{m}$ как кривую β_1 в некотором геометрическом базисе $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ поверхности Σ . Тогда мы можем изотопировать F_Γ так, что кривая $\beta_1 = \mathbf{m}$ переходит в себя при действии F_Γ . Индуцированное отображение $F_\Gamma: \beta_1 \rightarrow \beta_1$ обращает ориентацию. Заметим, что отображение $(T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3$ обладает тем же свойством на

классах гомотопии, т. е. оно переводит свободный гомотопический класс кривой β_1 в себя с обратной ориентацией. Следовательно, в изотопическом классе $F'_\Gamma := F_\Gamma(T_{\alpha_1}T_{\beta_1})^{-3}$ найдется представитель (который мы по-прежнему будем обозначать через F'_Γ), сохраняющий кривую β_1 поточечно. В частности, F'_Γ является диффеоморфизмом поверхности $\Sigma \setminus \beta_1$. Из классификации диффеоморфизмов поверхностей следует, что F'_Γ можно разложить в произведение скручиваний Дена T_δ относительно кривых, не пересекающихся с кривой β_1 . Зафиксируем такое разложение F'_Γ и поднимем его в группу $\text{Mar}_{g,1}$. Обозначим полученные элементы группы $\text{Mar}_{g,1}$ через $\hat{F}'_\Gamma$ и $\hat{F}_\Gamma := \hat{F}'_\Gamma \cdot (T_{\alpha_1}T_{\beta_1})^3$.

3.1. Тонкая структура монодромии. В этом пункте мы уточним результат, полученный в предложении 1.9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *В условиях предложения 1.9, i) предположим дополнительно, что класс $[K] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ тривиален. Тогда построенное в этом предложении разложение $\mu = \mu_+ + \mu_- \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ удовлетворяет соотношениям*

$$\mu \cap \mu_+ \equiv \mu \cap \mu_- \equiv 1 \pmod{2}.$$

Кроме того, класс μ не инвариантен ни при действии группы $\pi_1(Y_+^\circ)$, ни при действии группы $\pi_1(Y_-^\circ)$ преобразованиями монодромии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо исключить следующие две возможности:

- 1) один из классов $\mu_\pm$ (например, μ_-) тривиален, так что $\mu_+ = \mu$;
- 2) оба класса μ_+, μ_- нетривиальны, но $\mu \cap \mu_+ \equiv \mu \cap \mu_- \equiv 0 \pmod{2}$.

Сначала рассмотрим случай $\mu_- = 0$. Тогда монодромия F_Γ может быть разложена в произведение $F_+ := \prod_i [F_{2i-1}, F_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j}$, причем класс μ инвариантен относительно всех F_i и всех T_{δ_j} . Отсюда следует тождество $(T_{\alpha_1}T_{\beta_1})^3 = F_+ \cdot (F'_\Gamma)^{-1}$, правая часть которого обладает тем же свойством. По теореме 2.32 такая ситуация невозможна в случае нечетного рода g , а в случае четного рода она влечет следующее утверждение. Для любого подъема $\hat{F}_+$ класса F_+ в группе $\text{Mar}_{g,1}$ имеется соотношение $(T_{\alpha_1}T_{\beta_1})^3 = \partial_\pi(\gamma) \cdot \hat{F}_+ \cdot (\hat{F}'_\Gamma)^{-1}$ для некоторого элемента $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$, соответствующий которому класс гомологий $[\gamma] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ удовлетворяет условию $[\gamma] \cap \mu \equiv 1 \pmod{2}$. Выберем поднятие $\hat{F}_+$ как часть поднятия полной монодромии, используя теорему 2.30. Поднятие $\hat{F}_\Gamma \in \text{Mar}_{g,1}$ задает сечение $\sigma_K: \Gamma \rightarrow X$ семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$ над кривой Γ , не пересекающееся с бутылкой Клейна K . С другой стороны, поднятие $\hat{F}_+$ определяет $\mathbb{Z}_2$ -сечение $\sigma|_\Gamma$ семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$ над кривой Γ , которое является ограничением глобального $\mathbb{Z}_2$ -сечения σ . Условие $[\gamma] \cap \mu \equiv 1 \pmod{2}$ означает, что $\mathbb{Z}_2$ -индекс пересечения $\sigma \cap [K]$ отличен от нуля, т. е. класс $[K]$ должен быть ненулевым. Тем самым, случай $\mu_- = 0$ невозможен.

Предположим теперь, что оба класса μ_+ и μ_- нетривиальны, но $\mu_+ \cap \mu \equiv \mu_- \cap \mu \equiv 0$. Тогда $g \geq 2$. Наложим дополнительное условие на выбранный выше геометрический базис $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ поверхности Σ . А именно, будем считать, что $\mu_+ = [\beta_2]$. Поскольку группа Mar_g транзитивно действует на тройках (μ, μ_+, μ_-) попарно ортогональных ненулевых векторов в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$

с условием $\mu = \mu_+ + \mu_-$, такой базис $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ существует. Итак, $\mu_+ \cap [\alpha_1] \equiv \mu_+ \cap ([\alpha_1] + [\beta_1]) \equiv 0 \pmod 2$ и $\mu_- \cap [\alpha_1] \equiv \mu_- \cap ([\alpha_1] + [\beta_1]) \equiv 1 \pmod 2$. Значит, как и в доказательстве утверждения i) теоремы 2.32, мы получаем, что

$$\tilde{\varphi}_{\mu_+}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{\mu_-}((T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3) = 2. \quad (3.1)$$

Рассмотрим дополнение $\Sigma \setminus \mathbf{m}$; это *открытая* поверхность рода $g - 1$ с двумя “дырками”. Обозначим через Σ° пополнение поверхности $\Sigma \setminus \mathbf{m}$, получающееся добавлением двух граничных окружностей ∂_1, ∂_2 , каждая из которых естественным образом отождествляется с $\mathbf{m}$. Тогда Σ° – это компактная поверхность с краем, внутренность которой есть $\Sigma \setminus \mathbf{m}$. Включение $\Sigma \setminus \mathbf{m} \hookrightarrow \Sigma$ продолжается по непрерывности до отображения $\Sigma^\circ \rightarrow \Sigma$, при котором каждая из граничных окружностей ∂_1, ∂_2 переходит в $\mathbf{m}$. В дальнейшем обозначение Σ° будет использоваться и для поверхности $\Sigma \setminus \mathbf{m}$. Помимо этого, мы будем называть отображение $\Sigma^\circ \rightarrow \Sigma$ *включением*, что, строго говоря, некорректно. Будем надеяться, что читатель не будет введен в заблуждение этими вольностями речи.

Включение $\Sigma^\circ \rightarrow \Sigma$ индуцирует гомоморфизм $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0) \rightarrow \text{Map}(\Sigma, z_0)$. Отсюда мы получаем действие группы $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ на группе гомологий $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Для класса $\lambda \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ обозначим через $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_\lambda$ его стабилизатор и через $\tilde{\varphi}_\lambda: \text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}_4$ композицию гомоморфизмов $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_\lambda \rightarrow \text{Map}(\Sigma, z_0)_\lambda$ и $\tilde{\varphi}_\lambda: \text{Map}(\Sigma, z_0)_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}_4$. Эти обозначения будут использоваться при $\lambda = \mu_\pm$.

Заметим, что по построению геометрическая реализация монодромии $\hat{F}'_\Gamma$ действует на поверхности Σ° , оставляя ее границу неподвижной. Это означает, что монодромия $\hat{F}'_\Gamma$, рассматриваемая как элемент группы $\text{Map}_{g,1} = \text{Map}(\Sigma, z_0)$, лежит в образе гомоморфизма $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0) \rightarrow \text{Map}(\Sigma, z_0)$.

ЛЕММА 3.2. *Стабилизаторы $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_+}$, $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_-}$ и гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}: \text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_\pm} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ совпадают. В частности, $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}'_\Gamma) \equiv \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}'_\Gamma)$.*

Мы докажем лемму 3.2 при более общем предположении, что $\mu_+, \mu_- \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ – произвольные ненулевые классы гомологий, удовлетворяющие условию $\mu_+ + \mu_- = \mu$. В частности, соотношение $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}'_\Gamma) \equiv \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}'_\Gamma)$ будет доказано и в случае, когда $\mu_\pm \cap \mu \equiv 1 \pmod 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Поясним основную идею доказательства. Напомним, что согласно предложению 2.29 для любого $\lambda \neq 0 \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ его стабилизатор $\text{Map}_{g,1,\lambda}$ и гомоморфизм $\tilde{\varphi}_\lambda: \text{Map}_{g,1,\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ определены в терминах λ . А именно, образующие группы $\text{Map}_{g,1,\lambda}$ есть либо скручивания Дена T_δ при $\delta \cap \lambda \equiv 0 \pmod 2$, для которых мы полагаем $\tilde{\varphi}_\lambda(T_\delta) = 0$, либо квадраты скручиваний Дена T_δ^2 при $\delta \cap \lambda \equiv 1 \pmod 2$, для которых $\tilde{\varphi}_\lambda(T_\delta^2) = 1$. В ходе доказательства мы покажем, что:

- i) группы $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_\pm}$ и гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}: \text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_\pm} \rightarrow \mathbb{Z}_4$ допускают аналогичное описание с несколько более сложным множеством образующих;
- ii) имеется общее множество образующих для обеих групп $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_\pm}$, а значения гомоморфизмов $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}$ на каждой из этих образующих равны.

Грубо говоря, эти свойства имеют место в силу того факта, что $\mu_+ \cap \delta \equiv \mu_- \cap \delta \pmod 2$ для любой кривой δ на поверхности Σ° .

Известно, что группа классов отображений $\text{Map}_{h,k,[l]}$ поверхности рода $h \geq 1$ порождается скручиваниями Дена T_δ относительно неразбивающих кривых и граничных окружностей (см., например, [28] или [22, теорема В и лемма 5.1 в специальном случае $h = 1$]). В нашей ситуации группа $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ имеет тип $\text{Map}_{g-1,1,[2]}$, а граничные окружности – это ∂_1 и ∂_2 . При гомоморфизме $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0) \rightarrow \text{Map}(\Sigma, z_0)$ оба скручивания Дена T_{∂_1} и T_{∂_2} переходят в скручивание T_m относительно окружности m , которая не разбивает поверхность Σ .

Из равенства $\mu_+ \cap \delta \equiv \mu_- \cap \delta$ немедленно следует соотношение $T_\delta(\mu_+) + \mu_+ \equiv T_\delta(\mu_-) + \mu_- \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ для любой кривой δ , удовлетворяющей этому условию. Поскольку группа $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ порождена скручиваниями Дена T_δ , мы заключаем, что для любого элемента $f \in \text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ выполнено $f(\mu_-) = f(\mu_+) + \mu_- + \mu_+ = f(\mu_+) + \mu$. В частности, формула $\lambda \mapsto \lambda + \mu$ задает $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ -эквивариантную биекцию между $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ -орбитами классов μ_+ и μ_- в группе $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, стабилизаторы $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_+}$ и $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_-}$ действительно совпадают.

Пусть H – образ группы $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)$ в $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, и пусть $H_{\mu_\pm}$ – общий стабилизатор классов μ_+ и μ_- в H . Мы утверждаем, что $H_{\mu_\pm}$ порождается образами скручиваний T_δ относительно окружности m и неразбивающих кривых δ на поверхности Σ° , удовлетворяющих условию $\delta \cap \mu_\pm \equiv 0 \pmod{2}$. Структура группы $H_{\mu_\pm}$ немного различается в случаях, когда $\mu_\pm \cap \mu \equiv 0 \pmod{2}$ или $\mu_\pm \cap \mu \equiv 1 \pmod{2}$. В обоих случаях группа $H_{\mu_\pm}$ тривиально действует на $\mathbb{Z}_2$ -плоскости $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Эта плоскость симплектическая относительно $\mathbb{Z}_2$ -формы пересечения $\cap$ на $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, если $\mu \cap \mu_\pm \equiv 1 \pmod{2}$, и изотропная в противном случае. В симплектическом случае $H_{\mu_\pm}$ есть в точности группа $\mathbf{Sp}(2g - 2, \mathbb{Z}_2)$, действующая симплектически на $\cap$ -ортогональном $\mathbb{Z}_2$ -пространстве $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Значит, $H_{\mu_\pm}$ порождается элементами указанного вида.

В изотропном случае $\mathbb{Z}_2$ -пространство $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, являющееся $\cap$ -ортогональным, содержит плоскость $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle$, и факторпространство $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp / \mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle$ есть снова симплектическое $\mathbb{Z}_2$ -пространство размерности $2g - 4$. В этом случае группа $H_{\mu_\pm}$ сохраняет флаг векторных подпространств $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle \subset \mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, и потому $H_{\mu_\pm}$ состоит из блочных матриц вида $\begin{pmatrix} \text{id} & B & C \\ 0 & A & B^t \\ 0 & 0 & \text{id} \end{pmatrix}$, где A лежит в $\mathbf{Sp}(2g - 4, \mathbb{Z}_2)$ и действует симплектически на $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp / \mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle$, B – произвольная $(2 \times (2g - 4))$ -матрица с элементами из $\mathbb{Z}_2$, а C – симметрическая (2×2) -матрица с элементами из $\mathbb{Z}_2$. В специальном случае $g = 2$ пространство $\mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle^\perp / \mathbb{Z}_2\langle\mu, \mu_+\rangle$ нулевое и блоки A, B, B^t пустые. Теперь утверждение об образующих группы $H_{\mu_\pm}$ сводится к простому упражнению по линейной алгебре.

Пусть теперь x – произвольный элемент из стабилизатора $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_\pm}$. Как было показано выше, элемент x может быть представлен в виде произведения скручиваний Дена $\prod_j T_{\delta_j}^{\epsilon_j}$ относительно кривых δ_j на поверхности Σ° , удовлетворяющих следующему условию:

(δ) каждая кривая δ_j либо не разбивает поверхность Σ° , либо является одной из граничных окружностей ∂_1, ∂_2 .

В силу предыдущего рассуждения существует другое разложение на множители $x' = \prod_i T_{\delta'_i}^{\epsilon'_i}$, удовлетворяющее условию (δ) и такое, что x и x' имеют

один и тот же образ в группе $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$, и каждая кривая δ'_i отображается в $H_{\mu_{\pm}} \subset \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$. Тогда x' лежит в группе $\text{Map}(\Sigma^\circ, z_0)_{\mu_{\pm}}$ и оба гомоморфизма $\tilde{\varphi}_{\mu_+}, \tilde{\varphi}_{\mu_-}$ принимают на этом элементе значение нуль. Заменяя x на $x \cdot (x')^{-1}$, мы сводим лемму к специальному случаю, когда x имеет тривиальную проекцию в группу $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{Z}_2)$ и по-прежнему допускает разложение на множители $x = \prod_j T_{\delta_j}^{\epsilon_j}$, удовлетворяющее условию (δ) .

При этом дополнительном предположении предложение 2.22 дает алгоритм для преобразования разложения $x = \prod_j T_{\delta_j}^{\epsilon_j}$ в разложение вида $x = \prod_i (T_{\delta_i}^2)^{\epsilon_i}$, содержащее только квадраты скручиваний Дена. В этом алгоритме мы воспользуемся геометрическим базисом $\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g$ поверхности Σ , выбранным в начале настоящего параграфа. Для этого базиса $\mu = [\beta_1]_{\mathbb{Z}_2}$. Мы утверждаем, что в этом случае шаги 1–9 из доказательства предложения 2.22 могут быть сделаны так, что условие (δ) будет выполнено для всех участвующих в рассуждении скручиваний Дена T_δ . Чтобы в этом убедиться, заметим, что мы применяем следующие три операции:

- (i) движения Гурвица;
- (ii) вставка сомножителя вида $T_\beta T_\beta^{-1}$;
- (iii) вставка фонарного элемента L .

Операция (i) является сопряжением и, значит, не разрушает свойство (δ) . Условия, налагаемые на кривые, участвующие в операциях (ii) и (iii), касаются только их $\mathbb{Z}_2$ -гомологических классов, поэтому всегда можно найти подходящую кривую β или, соответственно, фонарную конфигурацию кривых.

Выполнив шаг 9, мы получаем для элемента x разложение вида $\prod_i (T_{\gamma_i}^2)^{\epsilon_i} \times \prod_j (T_{\delta_j} T_{\delta'_j}^{-1})$, где кривые $\gamma_i, \delta_j, \delta'_j$ удовлетворяют условию (δ) , и $[\delta_j] = [\delta'_j] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_{\mu_{\pm}}$ принимают одинаковые значения на каждом сомножителе $T_{\gamma_i}^2$. Поэтому достаточно рассмотреть специальный случай, когда $x = T_\delta T_{\delta'}^{-1}$ для некоторых кривых δ, δ' , удовлетворяющих условию (δ) и имеющих один и тот же класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий на поверхности Σ . Случай, когда δ, δ' – это граничные окружности ∂_1, ∂_2 , тривиален, поскольку обе эти окружности соответствуют кривой $\mathbf{m}$ на Σ . Таким образом, мы можем предполагать, что δ и δ' являются неразбивающими кривыми на Σ° . В частности, они представляют ненулевой примитивный класс гомологий.

Шаг 10 из доказательства предложения 2.22 показывает, как преобразовать элемент вида $x = T_\delta T_{\delta'}^{-1}$, где $[\delta]_{\mathbb{Z}_2} = [\delta']_{\mathbb{Z}_2} \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, в разложение $\prod_i (T_{\gamma_i}^2)^{\epsilon_i} \cdot \prod_j (T_{\delta_j} T_{\delta'_j}^{-1})$ такого же типа, как и выше, но с дополнительным равенством $[\delta_j] = [\delta'_j]$ целочисленных гомологических классов. Мы утверждаем, что в нашей ситуации это можно сделать, не нарушив условия (δ) . Действительно, шаг 10 преобразует заданный элемент $x = T_\delta T_{\delta'}^{-1}$ с помощью вставки произведений $T_{\gamma_i}^{-2} T_{\gamma_i}^2$ и сопряжения $T_{\delta'}$ с помощью $T_{\gamma_i}^2$; при этом сомножители $T_{\gamma_i}^{-2}$ и $T_{\gamma_i}^2$ также сопрягаются. Условие, наложенное на участвующие в этом преобразовании кривые γ_i , есть $[\gamma_i] \cap [\delta_i] = 1$. Поскольку кривые δ и δ' не разбивают поверхность Σ° , существуют такие кривые γ_i , удовлетворяющие также и условию (δ) . Отсюда следует, что шаг 10 можно выполнить, сохраняя условие (δ) .

В качестве примера покажем, как изменить целочисленный класс гомологий кривой δ' на $2[\mathbf{m}]$. Выберем вложенную кривую γ на поверхности Σ° ,

удовлетворяющую условию $[\gamma] \cap [\delta'] = 1$, а также вложенную кривую γ' , представляющую класс гомологий $[\gamma] + [\mathbf{m}]$. Тогда

$$\begin{aligned} T_\delta T_{\delta'}^{-1} &= T_\delta \cdot T_\gamma^2 T_{\gamma'}^{-2} T_\gamma^{-2} \cdot T_{\delta'}^{-1} = T_\delta T_\gamma^2 T_{\gamma'}^{-2} \cdot T_{\delta''}^{-1} \cdot T_{\gamma'}^2 T_\gamma^{-2} \\ &= T_\delta \cdot T_{\delta''}^{-1} \cdot T_{\gamma^*}^2 T_{(\gamma')^*}^{-2} \cdot T_{\gamma'}^2 T_\gamma^{-2}, \end{aligned}$$

где все преобразования суть движения Гурвица. Поскольку $T_\alpha T_\beta T_\alpha^{-1} = T_{T_\alpha(\beta)}$, мы получаем, что $\delta'' = T_{\gamma'}^2 T_\gamma^{-2}(\delta')$, $\gamma^* = T_{\delta''}(\gamma)$ и $(\gamma')^* = T_{\delta''}(\gamma')$. В частности,

$$[\delta''] = [\delta'] - 2[\gamma] + 2[\gamma + \mathbf{m}] = [\delta'] + 2[\mathbf{m}],$$

что и требовалось доказать.

Наконец, рассмотрим преобразования, выполняемые на шаге 11 и шаге 12 из доказательства предложения 2.22. Там доказывается, что две неразбивающие кривые δ, δ' на поверхности Σ , представляющие один и тот же целочисленный гомологический класс, отличаются на элемент y , лежащий в группе Торелли $\mathcal{I}_g$ поверхности Σ . Это означает, что элемент $T_\delta T_{\delta'}^{-1}$ является коммутатором $[T_\delta, y]$. Из соотношения

$$[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot y[x, z]y^{-1} = [x, y] \cdot [yxy^{-1}, yzy^{-1}]$$

следует, что достаточно рассматривать только коммутаторы $[T_\delta, y]$, в которых элемент y пробегает подходящее множество образующих группы $\mathcal{I}_g$.

Случай $g = 2$ является особым, поскольку образующие группы $\mathcal{I}_2$ имеют другой вид, чем в случае $g \geq 3$. Воспользуемся многочисленными изоморфизмами, имеющими место для поверхностей рода один и два: $\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}_2$, $\text{Map}_{1,[1]} = \text{Br}(\mathcal{A}_2) = \text{Br}_3$, $\mathbf{SU}(2, \mathbb{Z}_2) = \text{W}(\mathcal{A}_2) = \text{Sym}_3$, $\mathcal{T}(\mathcal{A}_2) = \mathcal{T}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{H}_1$ и $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_1 \rangle = \text{P}_{3,\text{ab}}$ в случае $g = 1$ и $\mathcal{S}_2 = \mathcal{A}_5$, $\text{Map}_{2,[1]} = \text{Br}(\mathcal{A}_5) = \text{Br}_6$, $\mathbf{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) = \text{W}(\mathcal{A}_5) = \text{Sym}_6$, $\mathcal{T}(\mathcal{A}_5) = \mathcal{T}(\mathcal{S}_2) = \mathcal{H}_2$ и $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_2 \rangle = \text{P}_{6,\text{ab}}$ в случае $g = 2$. Группа $\mathcal{I}_2$ порождается скручиванием Дена относительно кривых γ , разбивающих поверхность Σ на две части Σ', Σ'' , каждая из которых есть тор с дыркой (см. [40] или [30]). Пусть α, β – геометрический базис поверхности Σ' . Тогда группа $\text{Map}(\Sigma')$ изоморфна группе кос Br_3 со стандартными образующими T_α, T_β , а $T_\gamma = (T_\alpha T_\beta)^6$ (см. теорему 2.19). Более того, произведение $(T_\alpha T_\beta)^6$ равно $\Delta^4(\text{Br}_3)$. Значит, $T_\gamma = \Delta^4(\text{Br}_3)$ лежит в группе крашенных кос P_3 , и в силу леммы 2.16 проекция элемента T_γ в абелианизацию $\text{P}_{3,\text{ab}} = \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_1 \rangle$ равна $2A_{[\alpha]} + 2A_{[\beta]} + 2A_{[\alpha]+[\beta]}$. Здесь через $[\alpha]$ и $[\beta]$ обозначены $\mathbb{Z}_2$ -гомологические классы, так что $[\alpha], [\beta], [\alpha]+[\beta]$ исчерпывают множество $\mathcal{H}_1$ нетривиальных элементов в группе $\text{H}_1(\Sigma', \mathbb{Z}_2)$. Следовательно, коммутатор $[T_\delta, T_\gamma]$ также лежит в группе крашенных кос, а его проекция в группу $\text{P}_{6,\text{ab}} = \mathbb{Z}\langle \mathcal{H}_2 \rangle$ равна

$$2A_{[\alpha]} + 2A_{[\beta]} + 2A_{[\alpha]+[\beta]} - 2A_{[T_\delta(\alpha)]} + 2A_{[T_\delta(\beta)]} + 2A_{[T_\delta(\alpha)]+[T_\delta(\beta)]}.$$

Класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[T_\delta(\alpha)]$ равен $[\alpha] + [\delta]$ в случае $\alpha \cap \delta \equiv 1 \pmod 2$ и равен $[\alpha]$ в случае $\alpha \cap \delta \equiv 0 \pmod 2$. Следовательно, значение $\tilde{\varphi}_\lambda(2A_{[\alpha]} - 2A_{[T_\delta(\alpha)]})$ равно $2 \pmod 4$, если $\alpha \cap \delta \equiv \lambda \cap \delta \equiv 1 \pmod 2$, и нулю в противном случае. Поскольку в нашей ситуации $\mu_+ \cap \delta \equiv \mu_- \cap \delta \pmod 2$, гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_{\mu_+}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu_-}$ принимают одинаковые значения на всех коммутаторах $[T_\delta, T_\gamma]$ рассматриваемого вида.

Теперь рассмотрим случай коммутаторов вида $[T_\delta, x]$, где x – это образующая группы Торелли $\mathcal{I}_g$ при $g \geq 3$. Как было показано на шаге 12 в доказательстве предложения 2.22 (см. формулу (2.6) и рассуждение непосредственно после нее), в этом случае группа $\mathcal{I}_g$ порождается элементами вида $T_\eta^2(T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^{-4}$, где кривые $\eta, \beta, \alpha, \beta'$ лежат в некоторой неразбивающей цепной конфигурации $\mathcal{C}$ (см. рис. 1). Заметим, что $(T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^4$ есть квадрат элемента Гарсайда $\Delta^2(A_3)$ системы Кокстера $\{T_\beta, T_\alpha, T_{\beta'}\} \cong A_3$. Значит, $\Delta^2(A_3)$ лежит в группе крашенных кос $P(A_3)$, а его проекция в группу $P_{ab}(A_3)$ равна сумме $\sum_{t \in T(A_3)} A_t$ (см. лемму 2.16). С точностью до сопряжения мы можем считать, что кривые β, α, β' есть кривые a_1, a_2, a_3 из системы $\mathcal{S}_g$ (см. рис. 3). В свою очередь, $\{a_1, a_2, a_3\}$ есть подсистема в $A_5 = \{a_1, \dots, a_4, a_0\}$. Таким образом, $T(A_3)$ есть подмножество в $T(A_5) = \mathcal{H}(\mathcal{S}_2)$. Прямое вычисление показывает, что $T(A_3)$ состоит из следующих $\mathbb{Z}_2$ -гомологических классов: $[a_1], [a_2], [a_3], [a_1] + [a_2], [a_2] + [a_3], [a_1] + [a_2] + [a_3]$, т. е. всех ненулевых векторов в векторном пространстве над $\mathbb{Z}_2$, порожденном классами $[a_1] = [\beta], [a_2] = [\alpha], [a_3] = [\beta']$, за исключением $[a_1] + [a_3]$. Обозначим через V это $\mathbb{Z}_2$ -векторное пространство, а через V' – подмножество $V \setminus \{0\}$. Заметим еще, что $[a_1] + [a_3] = [\beta] + [\beta'] = [\eta]$. Отсюда мы получаем, что проекция образующей $T_\eta^2(T_\beta T_\alpha T_{\beta'})^{-4}$ в группу $P_{ab}(A_3)$ равна $2A_{[\eta]} - \sum_{v \in V'} A_v$. Далее, для любого класса $\lambda \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ индекс пересечения $\lambda \cap v \in \mathbb{Z}_2$ либо равен нулю для всех $v \in V$, либо отличен от нуля в точности для четырех элементов $v \in V'$. Отсюда следует, что гомоморфизм $\tilde{\varphi}_\lambda$ обращается в нуль на $\sum_{v \in V'} A_v$ и на образах этого класса под действием любых элементов $y \in \text{Map}_{g,1}$. Поэтому значения гомоморфизмов $\tilde{\varphi}_{\mu_+}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu_-}$ на элементе $[T_\delta, x]$ рассматриваемого здесь вида равны их значениям на $2A_{[\eta]} - 2A_{[T_\delta(\eta)]}$. Однако выше было показано, что если $\mu_+ \cap \delta \equiv \mu_- \cap \delta \pmod{2}$, то значения гомоморфизмов $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}$ на $2A_{[\eta]} - 2A_{[T_\delta(\eta)]}$ совпадают. Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству предложения 3.1. Применяя лемму 3.2 и соотношения (3.1) к рассмотренному выше разложению $\hat{F}_\Gamma = \hat{F}'_\Gamma \cdot (T_{\alpha_1} T_{\beta_1})^3$, мы получаем, что

$$\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_\Gamma) - \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}_\Gamma) \equiv 2 \pmod{4}. \quad (3.2)$$

Пусть F_+ и F_- – разложения монодромии F_Γ вида $F_\pm := \prod_i [F_{2i-1}, F_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j}$, получающиеся из гомоморфизмов монодромии $\mathcal{F}_\pm: \pi_1(Y_\pm^\circ) \rightarrow \text{Map}_g$. Поднимая гомоморфизмы $\mathcal{F}_\pm$ в группу $\text{Map}_{g,1}$, мы получаем подъемы $\hat{F}_\pm \in \text{Map}_{g,1}$ монодромии F_Γ , которые отличаются от $\hat{F}_\Gamma$ на элементы, лежащие в образе гомоморфизма $\partial_\pi: \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Map}_{g,1}$.

Предположим, что род g нечетен. Тогда гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\varphi}_{\mu_\pm}$ обращаются в нуль по модулю 4 на образе гомоморфизма ∂_π в силу предложения 2.29, ($\varphi 3$). Значит, $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_\Gamma) \equiv \tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_+) \pmod{4}$. Напомним, что элемент $\hat{F}_+$ был построен вместе с разложением $\hat{F}_+ = \prod_i [\hat{F}_{2i-1}, \hat{F}_{2i}] \cdot \prod_j T_{\delta_j}$, в котором $\delta_j \cap \mu_+ \equiv 0 \pmod{2}$, и что класс μ_+ инвариантен относительно $\hat{F}_i$. Поэтому гомоморфизм $\tilde{\varphi}_{\mu_+}$ обращается в нуль на каждом скручивании T_{δ_j} по предложению 2.29, ($\varphi 1$). Далее, инвариантность μ_+ относительно преобразований $\hat{F}_i$ означает, что $\hat{F}_i$ лежат в подгруппе $\text{Map}_{g,1,\mu_+}$. Следовательно, $\tilde{\varphi}_{\mu_+}$ обращается в нуль на всех

коммутаторах $[\hat{F}_{2i-1}, \hat{F}_{2i}]$. Итак, мы получаем равенство $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_\Gamma) \equiv 0 \pmod{4}$. Аналогично, $\tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}_\Gamma) \equiv 0 \pmod{4}$. Это противоречит соотношению (3.2).

Предположим, что род g четен. Определим $\gamma_\pm \in \pi_1(\Sigma)$ из соотношений $\hat{F}_\pm = \hat{F}_\Gamma \cdot \partial_\pi(\gamma_\pm)$. По теореме 2.30 существует подъем $\tilde{\mathcal{F}}: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \widehat{\text{Map}}_g$ гомоморфизма монодромии $\mathcal{F}: \pi_1(Y^\circ) \rightarrow \text{Map}_g$ (см. п. 2.3). По лемме 1.12 любой такой подъем $\tilde{\mathcal{F}}$ соответствует $\mathbb{Z}_2$ -сечению σ . Можно считать, что подъемы $\hat{F}_\pm \in \text{Map}_{g,1}$ монодромии F_Γ согласованы с сечением σ . (Это означает, что проекции элементов $\hat{F}_\pm$ в группу $\widehat{\text{Map}}_g$ совпадают.) Следовательно, $[\gamma_+] = [\gamma_-] \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Сравнивая значения гомоморфизмов $\tilde{\varphi}_\mu$ и $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}$ и воспользовавшись формулой $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}(\hat{F}_\pm) = 0$, мы получаем соотношение $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\partial_\pi(\gamma_+)) - \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\partial_\pi(\gamma_-)) \equiv 2 \pmod{4}$. Теперь, используя предложение 2.29, (φ3), мы заключаем, что $[\gamma_+] \cap \mu \equiv 1 \pmod{2}$. Это означает, что $[K] \cap [\sigma] \neq 0$. Получено противоречие с условиями предложения.

Допустим теперь, что класс μ инвариантен при действии группы $\pi_1(Y_+^\circ)$ преобразованиями монодромии. Поскольку класс μ_+ также инвариантен при этом действии, это верно и для класса $\mu_- = \mu + \mu_+$. В частности, $\mu_+ \cap [\delta_i] \equiv \mu_- \cap [\delta_i] \equiv 0 \pmod{2}$ для любого скручивания Дена T_{δ_i} , возникающего в рассмотренном выше разложении монодромии F_+ . Значит, для подъема $\hat{F}_+$ разложения F_+ мы получаем соотношение $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_+) \equiv \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}_+) \equiv 0 \pmod{4}$.

Следующее рассуждение по существу совпадает с использованным при доказательстве формулы $\mu_\pm \cap \mu \equiv 1 \pmod{2}$. А именно, в случае нечетного рода g гомоморфизмы $\tilde{\varphi}_{\mu_\pm}$ обращаются в нуль на образе гомоморфизма $\partial_\pi(\pi_1(\Sigma))$ и, следовательно, $\tilde{\varphi}_{\mu_+}(\hat{F}_\Gamma) \equiv \tilde{\varphi}_{\mu_-}(\hat{F}_\Gamma) \equiv 0 \pmod{4}$. Это противоречит соотношению (3.2).

В случае четного рода g существует $\mathbb{Z}_2$ -сечение σ проекции $\text{pr}: X \rightarrow Y$ и мы можем предполагать, что подъем $\hat{F}_+$ согласован с сечением σ . Определим $\gamma_+ \in \pi_1(\Sigma)$ из соотношения $\hat{F}_+ = \hat{F}_\Gamma \cdot \partial_\pi(\gamma_+)$, где $\hat{F}_\Gamma$ – выбранный нами подъем F_Γ . Теперь, используя свойство (φ3) из предложения 2.29 и соотношение (3.2), мы получаем $\varphi_{\mu_+}(\gamma_+) - \varphi_{\mu_-}(\gamma_+) \equiv 1 \pmod{2}$. Поскольку $\varphi_{\mu_\pm}(\gamma_+)$ есть просто $\mathbb{Z}_2$ -индекс пересечения $\mu_\pm \cap \gamma_+$, выполнено равенство $\mu \cap \gamma_+ \equiv 1 \pmod{2}$. Итак, $\mathbb{Z}_2$ -сечение σ нетривиально пересекается с K , а значит, класс гомологий $[K] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$ нетривиален. Это противоречит условиям предложения.

Таким образом, класс μ не может быть инвариантен при действии группы $\pi_1(Y_+^\circ)$ преобразованиями монодромии. Такое же рассуждение применимо к действию группы $\pi_1(Y_-^\circ)$.

3.2. Доказательство основной теоремы. Переобозначим через X_0 исходное линейчатое симплектическое многообразие, а через X обозначим его раздутие, построенное в лемме 1.3.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и бутылка Клейна $K \subset X$ гомологически тривиальна. Перечислим установленные нами в этой ситуации свойства семейства Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$. По лемме 1.3 база Y является сферой S^2 и окружность Γ делит Y на два диска $Y_\pm$. По предложению 1.7

меридиан $\mathbf{m}$ не разбивает слой Σ , а по предложению 3.1 монодромия семейства $\text{rg}: X \rightarrow Y$ имеет следующее свойство: существуют такие классы гомотопий $\mu_+, \mu_- \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, что $\mu \cap \mu_+ \equiv \mu \cap \mu_- \equiv 1 \pmod{2}$, и монодромия $\mathcal{F}_\pm: \pi_1(Y_\pm^\circ) \rightarrow \text{Map}_g$ в каждом из дисков $Y_\pm$ сохраняет соответствующий класс $\mu_\pm$, но не сохраняет класс μ . Наконец, монодромия F_Γ вдоль окружности Γ может быть реализована отображением, также обозначаемым $F_\Gamma \in \mathcal{D}iff_+(\Sigma)$, которое переводит кривую $\mathbf{m}$ в себя с обратной ориентацией.

Выберем локальные “полярные” координаты (r, φ) в окрестности $U_{\mathbf{m}}$ кривой $\mathbf{m}$ на поверхности Σ , в которых $\mathbf{m}$ задается уравнением $r = 1$, φ является угловой координатой на окружности $\mathbf{m}$, а отображение F_Γ имеет вид $(r, \varphi) \mapsto (r^{-1}, -\varphi)$. Следовательно, имеется геометрическая реализация скручивания Дена $T_{\mathbf{m}} \in \mathcal{D}iff_+(\Sigma)$ относительно $\mathbf{m}$, коммутирующая с диффеоморфизмом F_Γ . Используя это отображение $T_{\mathbf{m}}$ и локальную тривиализацию расслоения $\text{rg}: X_\Gamma \rightarrow \Gamma$ из определения отображения монодромии F_Γ , мы получаем отображение $\Psi: X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$, сохраняющее слои и действующее на каждом слое X_y , $y \in \Gamma$, как скручивание $T_{\mathbf{m}}$.

Построим новое многообразие X' , склеивая куски X_{Y_+} и X_{Y_-} вдоль $X_\Gamma = \partial X_{Y_+} = \partial X_{Y_-}$ по отображению $\Psi: X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$. Очевидно, что на X' также имеется семейство Лефшеца $\text{rg}': X' \rightarrow Y$ над той же базой $Y = S^2$. Более того, монодромия семейства $\text{rg}': X' \rightarrow Y$ не изменяется над диском Y_+ и сопрягается отображением $T_{\mathbf{m}}$ над диском Y_- . Поскольку $[\mathbf{m}]_{\mathbb{Z}_2} = \mu$ и $\mu_+ = \mu + \mu_-$, полная монодромия семейства $\text{rg}': X' \rightarrow Y$ сохраняет класс μ_+ .

Автор благодарен С. Ю. Немировскому за следующее наблюдение. Приведенная выше конструкция многообразия X' эквивалентна применению *хирургии Люттингера* относительно бутылки Клейна $K \subset X$ (см. п. 0.2 и [39]). В свою очередь, данное нами описание показывает, что эта хирургия вдоль бутылки Клейна согласована с проекцией rg семейства Морса–Лефшеца $\text{rg}: (X, K) \rightarrow (Y, \Gamma)$ при условии, что проекция $\text{rg}: K \rightarrow \Gamma \cong S^1$ есть очевидное S^1 -расслоение. Отметим, что такое же согласование имеется и в случае, когда вместо K берется тор T^2 (см. [6]).

ЛЕММА 3.3. *Имеем $\text{rank } H_1(X', \mathbb{Z}_2) = \text{rank } H_1(X, \mathbb{Z}_2) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V_+ и V_- – это $\mathbb{Z}_2$ -подпространства в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, порожденные исчезающими классами $[\delta_i]$ семейств $\text{rg}: X_{Y_+} \rightarrow Y_+$ и $\text{rg}: X_{Y_-} \rightarrow Y_-$ соответственно. Тогда по лемме 1.10 имеем

$$\begin{aligned} H_1(X, \mathbb{Z}_2) &= H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)/(V_+ + V_-), \\ H_1(X', \mathbb{Z}_2) &= H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)/(V_+ + T_{\mu}(V_-)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Положим

$$W_0 := \mathbb{Z}_2\langle \mu_+, \mu_- \rangle^\perp \subset H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2),$$

так что $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\langle \mu_+, \mu_- \rangle \oplus W_0$ задает ортогональное разложение. По предложению 3.1 фактор $(V_+ + W_0)/W_0$ имеет ранг 1 и порождается классом смежности μ_+ . Аналогично,

$$(V_- + W_0)/W_0 \cong \mathbb{Z}_2\langle \mu_- \rangle.$$

Мы утверждаем, что класс $\mathbb{Z}_2$ -гомологий $[m]$ меридиана m в многообразии X тривиален³. В силу изоморфизмов (3.3) это утверждение эквивалентно тому, что класс $\mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ лежит в подпространстве $V_+ + V_-$. Для доказательства рассмотрим гомоморфизм Бокштейна $\beta_\Sigma: H_2(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$, соответствующий точной последовательности групп коэффициентов $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$, и аналогичный гомоморфизм в гомологиях многообразия X . Поскольку дополнение $K \setminus m$ ориентируемо, оно определяет целочисленную 2-цепь на K , граница которой есть $\pm 2[m]$. Отсюда немедленно следует, что $\beta_\Sigma[K]_{\mathbb{Z}_2} = \mu \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$. Теперь требуемое включение $\mu \in V_+ + V_-$ вытекает из согласованности гомоморфизмов Бокштейна с гомоморфизмами $H_i(\Sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z}_2)$.

Итак, мы видим, что существуют векторы $v_\pm \in V_\pm$, для которых $v_\pm - \mu_\pm \in W_0$ и $v_+ - v_- - \mu \in W_0 \cap (V_+ + V_-)$. Утверждение леммы следует отсюда с помощью элементарной линейной алгебры.

Лемма 3.3 справедлива для любого топологического семейства Лефшеца $\text{pr}: X \rightarrow Y$, содержащего вложенную бутылку Клейна K , удовлетворяющую условиям (T1), (T2) из п. 1.4 и дополнительному условию, что кривая $\Gamma = \text{pr}(K)$ разбивает Y . В качестве подпространства V_+ в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}_2)$ нужно рассмотреть сумму образов гомоморфизмов $\text{id} - \mathcal{F}_+(\gamma)$ для всех $\gamma \in \pi_1(Y_+^\circ)$ и аналогично определить подпространство V_- . В остальном доказательство проводится без изменений.

Напротив, основной момент в доказательстве следующей леммы – классификация *линейчатых симплектических* 4-многообразий.

ЛЕММА 3.4. *Ранги $\text{rank } H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ и $\text{rank } H_1(X', \mathbb{Z}_2)$ четны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из классификации линейчатых симплектических четырехмерных многообразий (см. [36]) следует, что конечной последовательностью раздутий и стягиваний многообразие X можно перевести в произведение $S^2 \times Y$, где Y – замкнутая ориентированная поверхность. Поскольку раздутия не меняют $\pi_1(X)$, мы получаем первое утверждение леммы.

Второе утверждение получается аналогичным образом, если показать, что многообразие X' также является линейчатым (или раздутием линейчатого). Заметим сначала, что отображение склейки $\Psi: X_\Gamma \rightarrow X_\Gamma$ может быть продолжено до симплектоморфизма некоторой окрестности X_Γ . Следовательно, на многообразии X' существует симплектическая форма ω' , совпадающая на его подмножествах $X_{Y_\pm}$ с исходной формой ω на многообразии X .

Воспользуемся теперь специфической структурой формы ω и монодромии семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$. Напомним, что многообразие X было симплектическим раздутием исходного многообразия X_0 . Поэтому существуют симплектические сечения $E_1, \dots, E_N \subset X$ проекции $\text{pr}: X \rightarrow S^2$ такие, что для класса когомологий $[D] := [\Sigma] + \sum_i [E_i] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ выполнено неравенство $c_1(X) \cdot [D] > 0$. Сечения E_i – это просто исключительные сферы раздутий. Поскольку E_i не пересекаются с K , они выживают и в X' , так что мы получаем симплектические сечения $E'_1, \dots, E'_N$ в X' . Более того, для класса $[D'] := [\Sigma] + \sum_i [E'_i] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ выполняется аналогичное неравенство $c_1(X') \cdot [D'] > 0$. В этой ситуации, из

³Ср. п. 1.1 в [39]; приводимое ниже доказательство было предложено В. М. Харламовым.

классификации МакДаффа и Саламона (см. [36, следствие 1.5]) вытекает, что X' действительно является раздутием линейчатого симплектического многообразия. Лемма доказана.

Полученное противоречие показывает, что в условиях основной теоремы монодромия семейства $\text{pr}: X \rightarrow Y$ не может иметь вид, описанный в предложении 3.1. Тем самым, основная теорема доказана.

Список литературы

1. J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, T. Pantev, “Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups”, *J. Differential Geom.*, **54**:3 (2000), 489–545.
2. В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, “Симплектическая геометрия”, *Динамические системы* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **4**, ВИНТИ, М., 1985, 5–135; англ. пер.: V. I. Arnol’d, A. B. Givental’, “Symplectic geometry”, *Dynamical systems. IV. Symplectic geometry and its applications*, Encyclopaedia Math. Sci., **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 1–136.
3. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II: Monodromy and asymptotics of integrals*, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
4. M. Audin, “Quelques remarques sur les surfaces lagrangiennes de Givental”, *J. Geom. Phys.*, **7**:4 (1990), 583–598.
5. D. Auroux, “A stable classification of Lefschetz fibrations”, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 203–217.
6. D. Auroux, S. K. Donaldson, L. Katzarkov, “Luttinger surgery along Lagrangian tori and non-isotopy for singular symplectic plane curves”, *Math. Ann.*, **326**:1 (2003), 185–203.
7. D. Auroux, V. Muñoz, F. Presas, “Lagrangian submanifolds and Lefschetz pencils”, *J. Symplectic Geom.*, **3**:2 (2005), 171–219.
8. J. S. Birman, “Mapping class groups of surfaces”, *Proceedings of Conference on Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 13–43.
9. J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Math. Studies, **82**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1975.
10. J. S. Birman, B. Wajnryb, “Errata: Presentations of the mapping class group”, *Israel J. Math.*, **88**:1–3 (1994), 425–427.
11. F. Bogomolov, L. Katzarkov, T. Pantev, “Hyperelliptic Szpiro inequality”, *J. Differential Geom.*, **61**:1 (2002), 51–80.
12. F. Bogomolov, Yu. Tschinkel, “Simple examples of symplectic four-manifolds with exotic properties”, *Acta Appl. Math.*, **75**:1–3 (2003), 25–28.
13. E. Brieskorn, K. Saito, “Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen”, *Invent. Math.*, **17**:4 (1972), 245–271.
14. К. С. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math., **87**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
15. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Гл. 4–6: Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes*

- de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, **1337**, Hermann, Paris, 1968.
16. Д. Коллинз, Х. Цишанг, “Комбинаторная теория групп и фундаментальные группы”, *Алгебра* – 7, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **58**, ВИНТИ, М., 1990, 5–190; англ. пер.: D. J. Collins, H. Zieschang, “Combinatorial group theory and fundamental groups”, *Algebra VII. Combinatorial group theory. Applications to geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **58**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–166.
 17. M. Dehn, “Die Gruppe der Abbildungsklassen”, *Acta Math.*, **69**:1 (1938), 135–206.
 18. P. Deligne, “Les immeubles des groupes de tresses généralisés”, *Invent. Math.*, **17**:4 (1972), 273–302.
 19. S. K. Donaldson, “Lefschetz fibrations in symplectic geometry”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berlin, 1998), Doc. Math., Extra Vol. II, 1998, 309–314.
 20. Ya. Eliashberg, L. Polterovich, “New applications of Luttinger’s surgery”, *Comment. Math. Helv.*, **69**:1 (1994), 512–522.
 21. D. Gatiën, F. Lalonde, “Holomorphic cylinders with Lagrangian boundaries and Hamiltonian dynamics”, *Duke Math. J.*, **102**:3 (2000), 485–511.
 22. S. Gervais, “Presentation and central extensions of mapping class groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:8 (1996), 3097–3132.
 23. А. Б. Гивенталь, “Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 35–41; англ. пер.: A. B. Givental’, “Lagrangian imbeddings of surfaces and unfolded Whitney umbrella”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:3 (1986), 197–203.
 24. R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Stud. Math., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
 25. R. E. Gompf, “Toward a topological characterization of symplectic manifolds”, *J. Symplectic Geom.*, **2**:2 (2004), 177–206.
 26. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
 27. J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
 28. N. V. Ivanov, “Mapping class groups”, *Handbook of geometric topology*, Elsevier, Amsterdam, 2002, 523–633.
 29. D. Johnson, “The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for $\mathcal{I}$ ”, *Ann. of Math.* (2), **118**:3 (1983), 423–442.
 30. D. Johnson, “A survey of the Torelli group”, *Low-dimensional topology* (San Francisco, CA, 1981), Contemp. Math., **20**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, 165–179.
 31. V. Kanev, *Irreducibility of Hurwitz spaces*, Preprint № 241, Dipartimento di Matematica, Università di Palermo; [arXiv: math.AG/0509154](https://arxiv.org/abs/math/0509154).
 32. В. М. Харламов, Вик. С. Куликов, “О брэйд-монодромных разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118; англ. пер.: V. M. Kharlamov, V. S. Kulikov, “On braid monodromy factorizations”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 499–534.
 33. К. М. Лuttinger, “Lagrangian tori in $\mathbb{R}^4$ ”, *J. Differential Geom.*, **42**:2 (1995), 220–228.
 34. Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **89**, Springer-Verlag, Berlin–New-York, 1977.
 35. M. Matsumoto, “A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities”, *Math. Ann.*, **316**:3 (2000), 401–418.
 36. D. McDuff, D. Salamon, “A survey of symplectic 4-manifolds with $b_+ = 1$ ”, *Turkish J. Math.*, **20**:1 (1996), 47–60.

- 37. K. Mohnke, *How to (symplectically) thread the eye of a (Lagrangian) needle*, [arXiv:math.SG/0106139](#).
- 38. С. Ю. Немировский, “Пучки Лефшеца, функции Морса и лагранжевы вложения бутылки Клейна”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 153–166; англ. пер.: S. Yu. Nemirovski, “Lefschetz pencils, Morse functions, and Lagrangian embeddings of the Klein bottle”, *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 151–164.
- 39. С. Ю. Немировский, “Гомологический класс лагранжевой бутылки Клейна”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:4 (2009), 37–48; англ. пер.: S. Yu. Nemirovski, “Homology class of a Lagrangian Klein bottle”, *Izv. Math.*, **73**:4 (2009), 689–698.
- 40. J. Powell, “Two theorems on the mapping class group of a surface”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **68**:3 (1978), 347–350.
- 41. W. Rudin, “Shorter notes: totally real Klein bottles in C^2 ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **82**:4 (1981), 653–654.
- 42. B. Wajnryb, “A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface”, *Israel J. Math.*, **45**:2–3 (1983), 157–174.

В. В. Шевчишин (V. V. SHEVCHISHIN)
University of Bonn, Mathematical Institute, Germany
E-mail: sewa@math.uni-bonn.de

Поступило в редакцию
26.03.2007