Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Гомологический класс лагранжевой бутылки Клейна, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 4, 37–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:44:46

УДК 513.8+515.1

С. Ю. Немировский

Гомологический класс лагранжевой бутылки Клейна

Доказано, что вложенная лагранжева бутылка Клейна реализует ненулевой класс двумерных гомологий по модулю 2 в компактном четырехмерном симплектическом многообразии (X, ω) , удовлетворяющем условию $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] > 0$.

Библиография: 19 наименований.

Ключевые слова: лагранжево вложение, вполне вещественное вложение, хирургия Люттингера.

Введение

Теорема 0.2 в работе автора [14] утверждает, что лагранжева бутылка Клейна в проективной комплексной поверхности должна представлять ненулевой класс гомологий по модулю 2. Ошибка в топологической части доказательства этого результата была замечена Л. В. Полтеровичем (в п. 3.6 ошибочно утверждается, что диффеоморфизм ориентированной вещественной поверхности действует некоторым естественным образом на спинорном расслоении этой поверхности).

Недавно В. В. Шевчишин исправил и формулировку, и доказательство этой теоремы. С одной стороны, он показал, что результат в своем исходном виде неверен, построив пример гомологически тривиальной лагранжевой бутылки Клейна в биэллиптической поверхности. С другой стороны, он установил справедливость утверждения теоремы при одном дополнительном условии, которое теперь представляется весьма естественным.

ТЕОРЕМА А [18]. Пусть $K \subset X$ – вложенная лагранжева бутылка Клейна в компактном симплектическом четырехмерном многообразии (X, ω) . Предположим, что $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] > 0$. Тогда гомологический класс $[K] \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$ отличен от нуля.

Как доказали А. К. Лью, Х. Ота и К. Оно, симплектическое четырехмерное многообразие удовлетворяет условию $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] > 0$ тогда и только тогда, когда оно симплектоморфно либо $\mathbb{C}P^2$ со стандартной симплектической структурой, либо (раздутию) линейчатой комплексной поверхности с подходящей кэлеровой формой (см. [10, теорема В], [16, теорема 1.2], а также [12, следствие 1.4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00981), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-9429.2006.1) и Программы “Современные проблемы теоретической математики” РАН.

Из теоремы А следует, что бутылка Клейна не допускает лагранжева вложения в $\mathbb{R}^4$ со стандартной симплектической структурой. Действительно, если бы такое вложение существовало, то по теореме Дарбу можно было бы построить гомологически тривиальную лагранжеву бутылку Клейна в любом симплектическом многообразии (X, ω) (см. также замечание 2.4 ниже). Все остальные утверждения, выведенные в работе [14] из теоремы 0.2, также следуют из теоремы А.

В данном В. В. Шевчишиным доказательстве теоремы А используются основанный на теории пучков Лефшеца подход из работы [14], комбинаторная структура группы классов отображений и приведенное выше описание симплектических многообразий, удовлетворяющих условию $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] > 0$. В настоящей работе приведено другое доказательство теоремы А, в котором первые два из этих ингредиентов заменены несколько более традиционными результатами о топологии четырехмерных многообразий. Следует отметить, что хотя это рассуждение ближе к методам из работ [17] и [4], найдено оно было путем интерпретации полученных в работе [18] результатов в иных геометрических терминах.

Содержание работы должно быть ясно из названий ее параграфов и пунктов. История задачи Гивенталья [6] о лагранжевых вложениях бутылки Клейна подробно изложена во введениях к работам [14] и [18].

Автор благодарен В. М. Харламову за ценные замечания.

§ 1. Индексы самозацепления для вполне вещественных поверхностей

1.1. Характеристические окружности. Пусть S – замкнутая вещественная поверхность. Характеристический гомологический класс $u \in H_1(S; \mathbb{Z}/2)$ однозначно определяется условием

$$u \cdot x = x \cdot x = (w_1(S), x) \quad \forall x \in H_1(S; \mathbb{Z}/2),$$

где $w_1(S)$ – первый класс Штифеля–Уитни поверхности S . Заметим, что $u = 0$ тогда и только тогда, когда поверхность S ориентируема.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\xi \in H^1(S; \mathbb{Z})$ – целочисленный класс когомологий. Тогда выполнено $(\xi \bmod 2, u) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякий целочисленный класс когомологий на поверхности представляется как индекс пересечения с некоторой двусторонней кривой. Индекс пересечения класса u с такой кривой равен нулю по определению.

ЛЕММА 1.2. Если $S \subset X$ – вложенная поверхность в гладком многообразии, причем $[S] = 0 \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$, то образ характеристического гомологического класса $u \in H_1(S; \mathbb{Z}/2)$ в группе $H_1(X; \mathbb{Z}/2)$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если поверхность S ориентируема, то доказательство очевидно. В ином случае рассмотрим произвольный когомологический класс

$\xi \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$. Препятствие к поднятию этого класса до целочисленного класса когомологий лежит в группе $H^2(X; \mathbb{Z})$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(X; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X; \mathbb{Z}/2) \\ \downarrow & & \downarrow 0 \\ H^2(S; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S; \mathbb{Z}/2) \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки – это отображения ограничения на S , а горизонтальные – это отображения приведения по модулю 2. Из этой диаграммы следует, что отображение $H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S; \mathbb{Z}) (\cong \mathbb{Z}/2)$ тривиально. Значит, ограничение класса ξ на поверхность S поднимается до целочисленного класса когомологий на S и равно нулю на u по лемме 1.2. Следовательно, $u = 0 \in H_1(X; \mathbb{Z}/2)$ в силу двойственности с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}/2$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Характеристической окружностью* называется простая замкнутая кривая $\ell \subset S$ в характеристическом классе гомотопий.

ПРИМЕР 1.4. Представим бутылку Клейна K как нетривиальное расслоение над окружностью со слоем окружность. Слой этого расслоения $m \subset K$ называется *меридианом* бутылки Клейна. Легко видеть, что m является характеристической окружностью на K .

1.2. Индекс Виро (ср. [19, § 4]). Вложенная поверхность $S \subset X$ в почти комплексном четырехмерном многообразии (X, J) называется *вполне вещественной*, если плоскость $J(T_p S)$ трансверсальна касательной плоскости $T_p S$ в каждой точке $p \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть $\ell \subset S$ – двусторонняя простая замкнутая кривая на вполне вещественной поверхности $S \subset X$. Ее $\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг $\ell^\sharp$ – это класс изотопии кривых в $X \setminus S$, содержащий сдвиг кривой ℓ в направлении векторного поля $J\nu_{\ell, S}$, где $\nu_{\ell, S}$ – произвольное не обращающееся в нуль нормальное векторное поле на кривой ℓ в поверхности S .

$\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг корректно определен, поскольку все не обращающиеся в нуль нормальные векторные поля на кривой $\ell \subset S$ гомотопны в классе не имеющих нулей сечений расслоения $TS|_\ell$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть $S \subset X$ – вполне вещественная поверхность, для которой $[S] = 0 \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$, в почти комплексном четырехмерном многообразии (X, J) , и пусть $\ell \subset S$ – двусторонняя простая замкнутая кривая, для которой $[\ell] = 0 \in H_1(X; \mathbb{Z}/2)$. *Индекс Виро* кривой ℓ – это определенное по модулю 2 число зацепления

$$V(\ell) = \text{lk}(\ell^\sharp, S),$$

где $\ell^\sharp$ – $\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг кривой ℓ .

Известно, что индекс $V(\ell)$ зависит только от класса гомологий кривой ℓ , а отображение $[\ell] \mapsto 1 + V(\ell)$ является квадратичной функцией, называемой *формой Виро* поверхности $S \subset X$.

ЛЕММА 1.7. *Пусть $S \subset X$ – вполне вещественная поверхность, причем $(w_2(X), [S]) = 0$. Тогда всякая характеристическая окружность $\ell \subset S$ двусторонняя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $TX|_S \cong TS \oplus TS$, следовательно, имеем $w_2(TX|_S) = w_1(S) \cup w_1(S)$ по формуле Уитни. Значит,

$$(w_1(S), [\ell]) = w_1(S)^2 = (w_2(TX), [S]) = 0,$$

и лемма доказана.

Леммы 1.2 и 1.7 показывают, что индекс Виро определен для любой характеристической окружности на гомологически тривиальной вполне вещественной поверхности. Если объемлющее многообразие компактно, то имеет место следующая формула, тесно связанная с результатами, полученными Н. Ю. Нецветаевым [15], Т. Фидлером [5] и Л. В. Полтеровичем [17].

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть ℓ – характеристическая окружность на вполне вещественной поверхности S , для которой $[S] = 0 \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$, в компактном почти комплексном четырехмерном многообразии X . Тогда*

$$V(\ell) = 1 + \frac{\chi(S)}{4} \bmod 2,$$

где $\chi(S)$ – эйлерова характеристика поверхности S .

ПРИМЕР 1.9 (случай бутылки Клейна). Если $\ell = m$ – меридиан вполне вещественной гомологически тривиальной бутылки Клейна $K \subset X$, то теорема 1.8 утверждает, что $V(m) = 1 \bmod 2$. Другими словами, $\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг меридиана нетривиально зацеплен с K , и именно этот результат понадобится в доказательстве теоремы А.

1.3. Доказательство теоремы 1.8. Сначала построим не обращающееся в нуль сечение ограничения комплексного детерминантного расслоения $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX$ на поверхность S , имеющее стандартный вид на кривой ℓ .

ЛЕММА 1.10. *Пусть τ_ℓ – не обращающееся в нуль касательное векторное поле к кривой ℓ . Тогда комплексное внешнее произведение $\sigma_\ell := \tau_\ell \wedge_{\mathbb{C}} \nu_{\ell, S}$ продолжается до не обращающегося в нуль сечения расслоения $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX|_S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вещественное внешнее произведение $\tau_\ell \wedge \nu_{\ell, S}$ является не обращающимся в нуль сечением вещественного детерминантного расслоения $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TS$, ограниченного на кривую ℓ . Заметим, что оно продолжается до глобального не обращающегося в нуль сечения комплексифицированного расслоения $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TS \otimes \mathbb{C}$. Действительно, препятствие задается относительным характеристическим числом $w_1^2(S, \ell) \in \mathbb{Z}/2$, которое равно нулю, поскольку дополнение к характеристической кривой ℓ ориентируемо.

Остается заметить, что для вполне вещественной поверхности $S \subset X$ отображение

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TS \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX|_S,$$

определяемое заменой вещественного внешнего умножения в расслоении TS на комплексное внешнее умножение в расслоении TX , является изоморфизмом.

ПРИМЕР 1.11. Рассмотрим бутылку Клейна K , представленную как фактор двумерного тора по отношению эквивалентности $(\varphi, \psi) \sim (\varphi + \pi, -\psi)$ (см. п. 2.1 ниже). Тогда $e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}$ будет корректно определенным не обращающимся в нуль сечением расслоения $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TK \otimes \mathbb{C}$, продолжающим сечение $\tau_m \wedge \nu_{m,K} = \frac{\partial}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}$ с меридиана $m = \{\varphi = 0\} \subset K$.

Пусть $\sigma \in \Gamma(X, \Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX)$ – глобальное продолжение общего положения для построенного в лемме 1.10 сечения. Его множество нулей

$$\Sigma = \{x \in X \mid \sigma(x) = 0\}$$

является ориентированным двумерным подмногообразием в X , не пересекающимся с S . Заметим, что при двойственности Пуанкаре с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ подмногообразие Σ соответствует классу когомологий $c_1(\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX) \bmod 2 = w_2(X)$. Таким образом, подмногообразия Σ и $\Sigma \sqcup S$ являются *характеристическими подмногообразиями* в X , т. е. их классы гомотопий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ двойственны по Пуанкаре второму классу Штифеля–Уитни многообразия X .

Пусть теперь $M \subset X$ – вложенная поверхность с краем $\partial M = \ell$, которая нормальна к поверхности S вдоль кривой ℓ и внутренность которой трансверсально пересекает подмногообразия S и Σ . Такие поверхности существуют (так как $[\ell] = 0 \in H_1(X; \mathbb{Z}/2)$ по лемме 1.2) и называются *перепонками* для кривой $\ell \subset S \sqcup \Sigma$.

Индекс Роулина перепонки M (относительно характеристического подмногообразия $\Sigma \sqcup S$) определяется формулой

$$R(M) = n(M, \nu_{\ell, S}) + \#(M \cap S) + \#(M \cap \Sigma),$$

где $n(M, \nu_{\ell, S}) \in \mathbb{Z}$ – препятствие к продолжению поля $\nu_{\ell, S}$ до не обращающегося в нуль нормального векторного поля на M , $\#(M \cap S)$ и $\#(M \cap \Sigma)$ – количества внутренних точек пересечения перепонки M с подмногообразиями S и Σ соответственно.

ЛЕММА 1.12. *Имеем $R(M) = \frac{S \cdot S}{4} \bmod 2$, где $S \cdot S \in \mathbb{Z}$ – нормальное число Эйлера поверхности $S \subset X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С каждым характеристическим двумерным подмногообразием $F \subset X$ связана квадратичная функция

$$q_F: \text{Ker } \iota_* \longrightarrow \mathbb{Z}/4,$$

определенная на ядре гомоморфизма включения $\iota_*: H_1(F; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}/2)$, которая называется *формой Роулина–Гийу–Марена* подмногообразия F (см. [7],

[1] и [2, п. 2.6]). Значение этой функции на характеристическом классе гомологий $u \in H_1(F; \mathbb{Z}/2)$ (в предположении, что $u \in \text{Ker } \iota_*$) удовлетворяет сравнению

$$\mathfrak{q}_F(u) = \frac{\text{sign}(X) - F \cdot F}{2} \bmod 4, \quad (1.1)$$

где через $\text{sign}(X)$ обозначена сигнатура четырехмерного многообразия X . Формула (1.1) была найдена Рохлиным (по крайней мере, в случае $\iota_* = 0$; см. [8, п.° 4]). Она получается из обобщенного сравнения Рохлина–Гийу–Марена (см. [2, теорема 2.6.1] или [1, теорема 3]), если его привести по модулю 8 и воспользоваться элементарным алгебраическим свойством инварианта Брауна (см. [2, п. 3.4.4(2)]).

Применяя сравнение (1.1) к характеристическим подмногообразиям $\Sigma \sqcup S$ и Σ и используя ориентируемость Σ , мы получаем сравнения

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{\Sigma \sqcup S}([\ell]) &= \frac{\text{sign}(X) - \Sigma \cdot \Sigma - S \cdot S}{2} \bmod 4, \\ 0 &= \frac{\text{sign}(X) - \Sigma \cdot \Sigma}{2} \bmod 4. \end{aligned}$$

(Вторая формула следует также из леммы ван дер Блюя [13, § II.5].) Итак, имеем

$$\mathfrak{q}_{\Sigma \sqcup S}([\ell]) = -\frac{S \cdot S}{2} \bmod 4,$$

откуда получаем

$$R(M) = \frac{S \cdot S}{4} \bmod 2,$$

поскольку

$$\mathfrak{q}_{\Sigma \sqcup S}([\ell]) = 2R(M) \bmod 4$$

по определению формы Рохлина–Гийу–Марена. Лемма доказана.

Выберем теперь перепонку M более тщательно. А именно, в дальнейшем будем предполагать, что она обладает следующими свойствами:

1) касательное (полу)пространство перепонки M в каждой точке $p \in \ell$ порождается векторами $\tau_\ell(p)$ и $J\nu_{\ell,S}(p)$; отметим, что эти два вектора комплексно линейно независимы в $T_p X$, значит, поверхность M вполне вещественна вблизи своей границы;

2) комплексные точки перепонки M (т. е. точки $p \in M$, в которых $J(T_p M) = T_p M$) находятся в общем положении.

Свойство 1) достигается скручиванием перепонки вокруг кривой ℓ , а свойство 2) – малым шевелением полученной поверхности. Индекс Рохлина такой специальной перепонки M можно вычислить с помощью приведенного по модулю 2 варианта формул Лая для числа комплексных точек на M (см. [9] и [3, п. 4.3]).

ЛЕММА 1.13. *Имеем*

$$R(M) = 1 + V(\ell) \bmod 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что сдвиг кривой ℓ внутрь поверхности M есть в точности $\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг ℓ в силу свойства 1) перепонки M . Следовательно, $V(\ell) = \#(M \cap S) \bmod 2$ по определению индекса Виро. Значит, нам нужно показать, что

$$n(M, \nu_{\ell, S}) + \#(M \cap \Sigma) = 1 \bmod 2.$$

Препятствие $n(M, \nu_{\ell, S})$ можно вычислить следующим образом. Пусть τ – общее касательное векторное поле на поверхности M , удовлетворяющее условию $\tau = -J\nu_{\ell, S}$ на границе $\ell = \partial M$. (Заметим, что τ трансверсально ∂M .) Определяемое полем $J\tau$ нормальное продолжение векторного поля $\nu_{\ell, S}$ обращается в нуль в тех точках $p \in M$, где $J\tau(p) \in T_p M$. Такими точками являются, во-первых, нули векторного поля τ и, во-вторых, комплексные точки перепонки M . Без учета возникающих здесь знаков мы получаем сравнение

$$n(M, \nu_{\ell, S}) = \chi(M) + c(M) \bmod 2, \quad (1.2)$$

где $\chi(M)$ – эйлерова характеристика перепонки M , а $c(M)$ – число комплексных точек на M .

Аналогичным образом рассмотрим приведенное по модулю 2 препятствие к продолжению сечения σ_ℓ (из леммы 1.10) до не обращающегося в нуль сечения расслоения $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX|_M$. С одной стороны, это препятствие равно $\#(M \cap \Sigma) \bmod 2$, поскольку $M \cap \Sigma$ есть множество трансверсальных нулей такого продолжения $\sigma|_M$. С другой стороны, заметим, что

$$\sigma_\ell = \tau_\ell \wedge_{\mathbb{C}} \nu_{\ell, S} = -\sqrt{-1} \tau_\ell \wedge_{\mathbb{C}} J\nu_{\ell, S} = -\sqrt{-1} \tau_\ell \wedge_{\mathbb{C}} \nu_{\ell, M}.$$

Как мы уже видели при доказательстве леммы 1.10, препятствие к продолжению сечения $\tau_\ell \wedge_{\mathbb{C}} \nu_{\ell, M}$ с границы ∂M до не обращающегося в нуль сечения расслоения $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX|_M$ является суммой двух препятствий. Во-первых, комплексифицированное расслоение $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TM \otimes \mathbb{C}$ может быть нетривиальным. Во-вторых, отображение $\Lambda_{\mathbb{R}}^2 TM \otimes \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX|_M$ вырождается в комплексных точках поверхности M . Подводя итог, мы получаем формулу

$$\#(M \cap \Sigma) = w_1^2(M, \partial M) + c(M) \bmod 2. \quad (1.3)$$

Комбинация формул (1.2) и (1.3) дает сравнение

$$n(M, \nu_{\ell, S}) + \#(M \cap \Sigma) = \chi(M) + w_1^2(M, \partial M) \bmod 2.$$

Правая часть этого сравнения равна $1 \bmod 2$ для любой поверхности M , имеющей единственную граничную компоненту. Лемма доказана.

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы. Из лемм 1.13 и 1.12 вытекает сравнение

$$V(\ell) = 1 + \frac{S \cdot S}{4} \bmod 2,$$

и остается заметить, что $S \cdot S = -\chi(S)$ для всякой вложенной вполне вещественной поверхности S .

§ 2. Применение хирургии Люттингера

2.1. Явная модель (ср. [11] и [4, § 2]). Рассмотрим сначала (тривиальное) кокасательное расслоение T^*T двумерного тора $T = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ с координатами

$$(\varphi, \psi, r, \theta) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

где (φ, ψ) – координаты на самом торе, а (r, θ) – двойственные полярные координаты в слое.

Скручиванием Люттингера $f_{n,k}$ называется диффеоморфизм гиперповерхности $\{r = 1\} \subset T^*T$, задаваемый формулой

$$(\varphi, \psi, \theta) \mapsto (\varphi + n\theta, \psi + k\theta, \theta)$$

для некоторой пары целых чисел $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$. Ключевое свойство этого отображения состоит в том, что оно сохраняет ограничение канонической симплектической формы на гиперповерхность $\{r = 1\}$.

Бутылка Клейна K является фактором тора T по отношению эквивалентности

$$(\varphi, \psi) \sim (\varphi + \pi, -\psi).$$

Таким образом, кокасательное расслоение поверхности K является фактором кокасательного расслоения тора по отношению

$$(\varphi, \psi, r, \theta) \sim (\varphi + \pi, -\psi, r, -\theta).$$

Следовательно, скручивания Люттингера $f_{0,k}$ при $n = 0$ определяют диффеоморфизмы гиперповерхности $\{r = 1\} \subset T^*K$.

Рассмотрим на пространстве расслоения T^*K кэлерову структуру (g_0, ω_0, J_0) , задаваемую плоской метрикой и канонической симплектической формой. Эта структура поднимается до определяемой аналогичным образом кэлеровой структуры на пространстве расслоения T^*T и задается теми же формулами в координатах $(\varphi, \psi, r, \theta)$.

ЛЕММА 2.1. *С-нормальный сдвиг меридиана $m = \{\varphi = 0\} \subset K$ в многообразии (T^*K, J_0) задается кривой $\{\varphi = 0, r = 1, \theta = 0\}$.*

2.2. Восстановительная хирургия. Пусть $K \subset X$ – вполне вещественная вложенная бутылка Клейна в почти комплексном четырехмерном многообразии (X, J) . В этом случае существует трубчатая окрестность $N \supset K$, которая ориентируемо диффеоморфна расслоению на единичные диски $DT^*K = \{r \leq 1\} \subset T^*K$. Кроме того, этот диффеоморфизм может быть выбран так, что почти комплексная структура J в расслоении $TX|_K$ соответствует стандартной комплексной структуре J_0 .

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $K \subset X$ – гомологичная нулю вполне вещественная бутылка Клейна в компактном почти комплексном четырехмерном многообразии. Тогда хирургия Люттингера*

$$X' = N \cup_{f_{0,1}} (X \setminus N)$$

делает бутылку Клейна K гомологически нетривиальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.2 меридиан $m \subset K$ гомологичен нулю в многообразии X (по модулю 2). Из точной последовательности Майера–Вьеториса для разложения $X = N \cup (X \setminus N)$ следует существование гомологического класса $\zeta \in H_1(\partial N; \mathbb{Z}/2)$, удовлетворяющего условиям:

- 1) $\iota_* \zeta = [m] \in H_1(N; \mathbb{Z}/2)$,
- 2) $j_* \zeta = 0 \in H_1(\overline{X \setminus N}; \mathbb{Z}/2)$,

где через $\iota: \partial N \rightarrow N$ и $j: \partial N \rightarrow \overline{X \setminus N}$ обозначены включения. Второе свойство влечет равенство

$$\text{lk}(\zeta, K) = 0.$$

Поэтому теорема 1.8 показывает, что класс ζ отличен от гомологического класса $\mathbb{C}$ -нормального сдвига $m^\sharp$ (см. пример 1.9).

Прообраз $\iota_*^{-1}([m]) \in H_1(\partial N; \mathbb{Z}/2)$ состоит в точности из двух классов, представленных кривыми

$$m' = \{\varphi = 0, r = 1, \theta = 0\}, \quad m'' = \{\varphi = 0, r = 1, \theta = \psi\}.$$

Первая кривая задает $\mathbb{C}$ -нормальный сдвиг меридиана по лемме 2.1. Поэтому $\zeta = [m'']$ и, следовательно, кривая m'' ограничивает двумерную цепь в $\overline{X \setminus N}$.

Рассмотрим теперь слой $\{\varphi = 0, \psi = 0, r = 1\}$ проекции $\partial N \rightarrow K$. Скручивание Люттингера

$$f_{0,1}(\varphi, \psi, 1, \theta) := (\varphi, \psi + \theta, 1, \theta)$$

переводит этот слой в кривую m'' . Отсюда следует, что диск $\Delta = \{\varphi = 0, \psi = 0, r \leq 1\}$, ограниченный слоем в N , и двумерная цепь, ограниченная кривой m'' в $\overline{X \setminus N}$, склеиваются в двумерный цикл в многообразии X' . Индекс пересечения этого цикла с бутылкой Клейна K равен $\#(K \cap \Delta) \bmod 2$. Очевидно, что $\#(K \cap \Delta) = 1 \bmod 2$, следовательно, K гомологически нетривиальна в X' .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Выполнено равенство*

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H_1(X'; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_1(X; \mathbb{Z}/2) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим длинные точные последовательности в когомологиях с компактным носителем

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_c^2(X; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H_c^2(K; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_c^3(X \setminus K; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_c^3(X; \mathbb{Z}/2) \\ &\rightarrow H_c^3(K; \mathbb{Z}/2) \cong 0, \\ \cdots \rightarrow H_c^2(X'; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H_c^2(K; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_c^3(X' \setminus K; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_c^3(X'; \mathbb{Z}/2) \\ &\rightarrow H_c^3(K; \mathbb{Z}/2) \cong 0. \end{aligned}$$

Первое отображение в первой последовательности тривиально, так как бутылка Клейна K гомологична нулю в многообразии X . Поэтому

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X; \mathbb{Z}/2) &= \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X \setminus K; \mathbb{Z}/2) - \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^2(K; \mathbb{Z}/2) \\ &= \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X \setminus K; \mathbb{Z}/2) - 1. \end{aligned}$$

С другой стороны, первое отображение во второй последовательности сюръективно, так как $[K] \neq 0$ в многообразии X' , и потому

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X'; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X' \setminus K; \mathbb{Z}/2).$$

Поскольку многообразия $X \setminus K$ и $X' \setminus K$ диффеоморфны, мы получаем равенство

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X'; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_c^3(X; \mathbb{Z}/2) + 1,$$

и требуемое утверждение следует из того, что $H_1(Y; \mathbb{Z}/2) \cong H_c^3(Y; \mathbb{Z}/2)$ для любого четырехмерного многообразия Y в силу двойственности Пуанкаре.

2.3. Симплектическая жесткость: доказательство теоремы А. Пусть теперь $K \subset X$ – лагранжева бутылка Клейна в компактном симплектическом четырехмерном многообразии (X, ω) . Тогда K вполне вещественна относительно всякой почти комплексной структуры J на многообразии X , согласованной с формой ω .

Обозначим через X' многообразие, полученное из X с помощью использованной в теореме 2.2 хирургии Люттингера. Поскольку теперь бутылка Клейна K лагранжева, хирургия Люттингера может быть выполнена симплектически, т. е. существует симплектическая форма ω' на многообразии X' , совпадающая с формой ω на подмножестве $X' \setminus N = X \setminus N$. Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство аналогичного факта для лагранжевых торов в статье [11]. Другое доказательство, использующее симплектические пучки Лефшеца, дано в работе [18].

Заметим, что $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] = c_1(X', \omega') \cdot [\omega']$. (Доказательство легко следует из того, что $H^2(N; \mathbb{R}) = 0$.) Таким образом, если $c_1(X, \omega) \cdot [\omega] > 0$, то $c_1(X', \omega') \cdot [\omega'] > 0$, и каждое из многообразий X и X' диффеоморфно либо $\mathbb{C}P^2$, либо (раздутию) линейчатой поверхности по теореме Лью и Ота–Оно, упомянутой во введении. В частности, $\mathbb{Z}/2$ -размерности групп гомологий $H_1(X; \mathbb{Z}/2)$ и $H_1(X'; \mathbb{Z}/2)$ четны.

Однако если $[K] = 0 \in H_2(X; \mathbb{Z}/2)$, то

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H_1(X'; \mathbb{Z}/2) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H_1(X; \mathbb{Z}/2) + 1$$

по следствию 2.3, и одна из этих размерностей нечетна. Полученное противоречие доказывает теорему А.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из нашего доказательства теоремы А нетрудно извлечь непосредственное доказательство отсутствия вложенных лагранжевых бутылок Клейна в $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}})$. При этом некоторые шаги в рассуждении упрощаются или становятся ненужными. В частности, можно воспользоваться исходной теоремой Громова о симплектических четырехмерных многообразиях, симплектоморфных $(\mathbb{R}^4, \omega_{\text{st}})$ на бесконечности, вместо более сложных результатов Лью и Ота–Оно.

Список литературы

1. C. Baily, A. Vdovina, “Sous-espaces déterminant l’invariant de Arf et un théorème de Rohlin sur la signature”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **330**:3 (2000), 221–223.
2. A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces*, Lecture Notes in Math., **1746**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
3. А. И. Дегтярев, В. М. Харламов, “Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: du côté de chez Rokhlin”, *УМН*, **55**:4 (2000), 129–212; англ. пер.: A. I. Degtyarev, V. M. Kharlamov, “Topological properties of real algebraic varieties: du côté de chez Rokhlin”, *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 735–814.
4. Ya. Eliashberg, L. Polterovich, “New applications of Luttinger’s surgery”, *Comment. Math. Helv.*, **69**:1 (1994), 512–522.
5. Th. Fiedler, “Totally real embeddings of the torus into $\mathbb{C}^2$ ”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **5**:2 (1987), 117–121.
6. А. Б. Гивенталь, “Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 35–41; англ. пер.: A. B. Givental, “Lagrangian imbeddings of surfaces and unfolded Whitney umbrella”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:3 (1986), 197–203.
7. Л. Гийу, А. Марен, “Обобщение теоремы Рохлина о сигнатуре”, *В поисках утраченной топологии*, Мир, М., 1989, 110–133; пер. с фр.: L. Guillou, A. Marin, “Une extension d’un théorème de Rohlin sur la signature”, *À la recherche de la topologie perdue*, Progr. Math., **62**, Birkhäuser, Boston, MA, 1986, 97–118.
8. “Приложение: Рохлин и его теорема (по письму О. Виро и В. Харламова)”, *В поисках утраченной топологии*, Мир, М., 1989, 173–174; пер. с фр.: “Appendice: Rohlin et son théorème (d’après une lettre de O. Viro et V. Harlamov)”, *À la recherche de la topologie perdue*, Progr. Math., **62**, Birkhäuser, Boston, MA, 1986, 153–155.
9. H.-F. Lai, “Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **172** (1972), 1–33.
10. A.-K. Liu, “Some new applications of general wall crossing formula, Gompf’s conjecture and its applications”, *Math. Res. Lett.*, **3**:5 (1996), 569–585.
11. K. M. Luttinger, “Lagrangian tori in $\mathbb{R}^4$ ”, *J. Differential Geom.*, **42**:2 (1995), 220–228.
12. D. McDuff, D. Salamon, “A survey of symplectic 4-manifolds with $b^+ = 1$ ”, *Turkish J. Math.*, **20**:1 (1996), 47–60.
13. Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер, *Симметрические билинейные формы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: J. W. Milnor, D. H. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
14. С. Ю. Немировский, “Пучки Лефшеца, функции Морса и лагранжевы вложения бутылки Клейна”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 153–166; англ. пер.: S. Yu. Nemirovski, “Lefschetz pencils, Morse functions, and Lagrangian embeddings of the Klein bottle”, *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 151–164.
15. Н. Ю. Нецветаев, “Об аналоге индекса Маслова”, *Исследования по топологии – 7*, Записки науч. сем. ПОМИ, **208**, ПОМИ, СПб., 1993, 133–135; англ. пер.: N. Yu. Netsvetaev, “An analogue of the Maslov index”, *J. Math. Sci.*, **81**:2 (1996), 2535–2537.
16. H. Ohta, K. Ono, “Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$. II”, *Internat. J. Math.*, **7**:6 (1996), 755–770.
17. Л. В. Полтерович, “Сильно оптические лагранжевы многообразия”, *Матем. заметки*, **45**:2 (1989), 95–104; англ. пер.: L. V. Polterovich, “Strongly optical lagrangian manifolds”, *Math. Notes*, **45**:2 (1989), 152–158.

18. В. В. Шевчишин, “Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:4 (2009), 153–224; англ. пер.: V. Shevchishin, “Lagrangian embeddings of the Klein bottle and combinatorial properties of mapping class groups”, *Izv. Math.*, **73**:4 (2009), 797–859.
19. О. Viro, “Complex orientations of real algebraic surfaces”, *Topology of manifolds and varieties*, Adv. Soviet Math., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 261–284.

С. Ю. НЕМИРОВСКИЙ (S. YU. NEMIROVSKIY)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Ruhr-Universität Bochum
E-mail: stefan@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
26.03.2007