Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение параболических уравнений с контрастными коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 5, 179–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 10:51:34

УДК 517.9

Г. В. Сандраков

Осреднение параболических уравнений с контрастными коэффициентами

Рассматривается нестационарная задача диффузии в периодической среде с включениями, заполненными слабопроводящим материалом. Получены осредненные уравнения, приближающие решения рассматриваемой задачи. Доказаны оценки точности такого приближения при стремлении к нулю периода среды и коэффициента проводимости. Вид осредненных уравнений и оценки точности существенно зависят от предельного поведения коэффициента проводимости в сравнении с квадратом периода.

Библиография: 20 наименований.

§1. Введение

В работе рассматриваются нестационарные уравнения параболического типа с коэффициентами, зависящими от двух малых положительных параметров ε и σ . Параметр мелкомасштабности ε задает период коэффициентов таких уравнений, а параметр контрастности σ характеризует отношение минимального и максимального значений коэффициентов проводимости. Начально-краевые задачи для этих уравнений моделируют диффузию в среде с включениями, имеющими малую проводимость и расположенными периодическим образом с периодом ε . Предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношение $\sigma \rightarrow 0$ и одно из следующих трех условий:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow \vartheta, \quad (1.2)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где ϑ – заданная положительная постоянная. Будут получены осредненные (предельные) уравнения, решения которых приближают решения рассматриваемых уравнений, и доказаны оценки точности такого приближения.

Пусть для $n \geq 2$ заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой (класса C^∞) границей, положительное T , финитные в Ω и гладкие функции $f, g \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega)$ и $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Определим функцию u как решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} m_\varepsilon u'_t - \operatorname{div} A_\varepsilon^\sigma(\nabla u + a_\varepsilon u + b_\varepsilon g) + k_\varepsilon^\sigma \nabla u &= r_\varepsilon f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = w \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.4)$$

зависящей от малых положительных параметров ε и σ , следующим образом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01394) и INTAS (грант № 96-1061).

Пусть F_1 является 1-периодическим открытым связным подмножеством $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2 , $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{F_1}$ является (не обязательно связным) множеством с границей класса C^2 и $F_\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x, x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1\}$. Здесь и далее 1-периодичность множества (функции) означает периодичность характеристической функции этого множества (этой функции) с периодом 1 по каждому x_k , $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $Y = [0, 1]^n$ является ячейкой периодичности и множества F_1, F_0 вполне определяются множествами $Y_1 = Y \cap F_1$ и $Y_0 = Y \cap F_0$. Предполагается, что эти множества имеют положительные меры Лебега в $\mathbb{R}^n$:

$$\theta_0 = \text{mes}(Y_0) > 0, \quad \theta_1 = \text{mes}(Y_1) > 0. \quad (1.5)$$

Кроме того, отождествляя противоположные грани Y , множества Y_1 и Y_0 можно также рассматривать как подмногообразия тора с общей границей (класса C^2): $\partial Y_1 = \partial Y_0 \equiv S$.

Матричнозначная функция A_ε^σ и вектор-функция k_ε^σ в (1.4) зависят от ε и σ :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^\sigma &= A_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & k_\varepsilon^\sigma &= k_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_1^\varepsilon &= \Omega \cap F_\varepsilon, \\ A_\varepsilon^\sigma &= \sigma A_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & k_\varepsilon^\sigma &= \sigma k_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_0^\varepsilon &= \Omega \setminus \overline{\Omega_1^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Предполагается, что компоненты матричнозначных функций $A_1(y)$, $A_0(y)$ и вектор-функций $k_1(y)$, $k_0(y)$ являются 1-периодическими ограниченными (почти всюду) функциями на F_1 и F_0 соответственно. Кроме того, $A_1(y)$ и $A_0(y)$ симметричны и равномерно эллиптичны:

$$\begin{aligned} \alpha|\xi|^2 &\leq (A_1(y)\xi, \xi) \leq \beta|\xi|^2, & |k_1(y)| &\leq \beta & \text{для } y \in Y_1 \text{ и } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha|\xi|^2 &\leq (A_0(y)\xi, \xi) \leq \beta|\xi|^2, & |k_0(y)| &\leq \beta & \text{для } y \in Y_0 \text{ и } \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где α и β – заданные положительные постоянные и $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$. Функции m_ε и r_ε в (1.4) зависят от ε :

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &= m_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & r_\varepsilon &= r_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \\ m_\varepsilon &= m_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & r_\varepsilon &= r_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $m_1(y)$, $r_1(y)$ и $m_0(y)$, $r_0(y)$ являются 1-периодическими ограниченными функциями на F_1 и F_0 . Кроме того, $m_1(y)$ и $m_0(y)$ отделены от нуля:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq m_1(y) \leq \beta, & |r_1(y)| &\leq \beta & \text{для } y \in Y_1, \\ \alpha &\leq m_0(y) \leq \beta, & |r_0(y)| &\leq \beta & \text{для } y \in Y_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вектор-функции a_ε и b_ε в (1.4) зависят от ε :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon &= a_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & b_\varepsilon &= b_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \\ a_\varepsilon &= a_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & b_\varepsilon &= b_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где компоненты вектор-функций $a_1(y)$, $b_1(y)$ и $a_0(y)$, $b_0(y)$ являются 1-периодическими ограниченными функциями на F_1 и F_0 .

Таким образом, не зависящие от времени быстроосциллирующие коэффициенты первого уравнения в (1.4) имеют единичный порядок на множестве Ω_1^ε и частично на множестве Ω_0^ε , но коэффициенты проводимости A_ε^σ и переноса k_ε^σ малы на Ω_0^ε . Кроме того, малость этих коэффициентов контролируется одним из предположений (1.1)–(1.3), а на множества Ω_1^ε и Ω_0^ε наложены условия непустоты (1.5) и некоторой регулярности “внутренних” границ.

Поскольку коэффициенты в (1.4) могут быть разрывными, следуя [1], решение этой задачи определим как элемент $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, удовлетворяющий для каждого $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$ интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} m_\varepsilon u_t' \varphi dx + \int_{\Omega} (A_\varepsilon^\sigma (\nabla u + a_\varepsilon u + b_\varepsilon g), \nabla \varphi) dx + \int_{\Omega} k_\varepsilon^\sigma \nabla u \varphi dx = \int_{\Omega} r_\varepsilon f \varphi dx \quad (1.11)$$

и начальному условию $u|_{t=0} = w$ в $L^2(\Omega)$. Известно [1], что для фиксированных ε и σ существует единственное решение этой задачи такое, что $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ и $u_t' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Здесь используются функциональные пространства, определенные, например, в [1].

Основные результаты работы составляют теоремы о предельном поведении решений задачи (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в предположении, что выполнены соотношения $\sigma \rightarrow 0$ и одно из условий (1.1)–(1.3). Для точной формулировки этих утверждений понадобятся некоторые дополнительные обозначения.

Пусть вектор-функция $N_1(y)$ является 1-периодическим решением задачи Неймана на Y_1 :

$$-\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y N_1) = \operatorname{div}_y A_1 \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y N_1, \nu) = (A_1, \nu) \quad \text{на } S, \quad (1.12)$$

где ν – внешняя нормаль к границе Y_1 , и использованы обозначения (1.6). Определим матрицу A с постоянными компонентами равенством

$$A = \langle A_1 + A_1 \nabla_y N_1 \rangle_1 \equiv \int_{Y_1} (A_1 + A_1 \nabla_y N_1) dy. \quad (1.13)$$

Известно (см. [2], [3]), что матрица A положительно определена.

Пусть функции $N_a(y), N_b(y)$ являются 1-периодическими решениями задач Неймана на Y_1 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y N_a) &= \operatorname{div}_y(A_1 a_1) \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y N_a, \nu) = (A_1 a_1, \nu) \quad \text{на } S, \\ -\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y N_b) &= \operatorname{div}_y(A_1 b_1) \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y N_b, \nu) = (A_1 b_1, \nu) \quad \text{на } S, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где использованы обозначения (1.6) и (1.10). Далее, учитывая (1.6), (1.8) и (1.13), введем обозначения

$$\begin{aligned} M &= \langle m_0 \rangle_0 + \langle m_1 \rangle_1 \equiv \int_{Y_0} m_0 dy + \int_{Y_1} m_1 dy, \quad R = \langle r_0 \rangle_0 + \langle r_1 \rangle_1, \\ a &= A^{-1} \langle A_1 a_1 + A_1 \nabla_y N_a \rangle_1, \quad b = A^{-1} \langle A_1 b_1 + A_1 \nabla_y N_b \rangle_1, \\ K &= \langle k_1 + k_1 \nabla_y N_1 \rangle_1, \quad k_a = \langle k_1 \nabla_y N_a \rangle_1, \quad k_b = \langle k_1 \nabla_y N_b \rangle_1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Определим функцию v как решение начально-краевой задачи для осредненного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} Mv_t' - \operatorname{div} A(\nabla v + av + bg) + K \nabla v + k_a v + k_b g &= Rf \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad v|_{t=0} = w \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где использованы обозначения (1.13) и (1.15).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (1.1). Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v – решение задачи (1.16). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right),$$

где постоянная C не зависит от ε и σ .

Пусть функции $Q(t, y)$ и $P(t, y)$ являются 1-периодическими решениями начально-краевых задач на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0 Q'_t - \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y Q) &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ Q &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad Q|_{t=0} = 1 \quad \text{в } Y_0, \\ m_0 P'_t - \vartheta \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y P) &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad P|_{t=0} = \frac{r_0}{m_0} \quad \text{в } Y_0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где учтены обозначения (1.2), (1.6) и (1.8). Далее введем обозначения

$$\begin{aligned} M_1 &= \langle m_1 \rangle_1, \quad M_0(t) = \langle m_0 Q'_t \rangle_0, \quad Q_\varepsilon = Q\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right), \\ R_1 &= \langle r_1 \rangle_1, \quad R_0(t) = \langle m_0 P'_t \rangle_0, \quad P_\varepsilon = P\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

(здесь, например, $Q(t, y)$ продолжена как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$, тогда Q_ε обозначает ограничение этого продолжения при $y = x/\varepsilon$ на Ω) и определим функцию v как решение начально-краевой задачи для осредненного уравнения

$$\begin{aligned} M_1 v'_t - M_0 * (v'_t) - \operatorname{div} A(\nabla v + av + bg) + K \nabla v + k_a v \\ + k_b g &= R_1 f - R_0 * f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad v|_{t=0} = w \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $*$ обозначает свертку по t и использованы обозначения (1.13) и (1.15).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (1.2), $f, g \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$ и $w = 0$. Предположим, что u является решением задачи (1.4) и v – решение задачи (1.19). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq c \left(\varepsilon + \varepsilon \sqrt{\vartheta} + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon \sqrt{\vartheta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma \vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right) \\ \leq C \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right), \end{aligned}$$

где постоянные C и c не зависят от ε , σ и c не зависит от ϑ .

Пусть χ_1^ε и χ_0^ε обозначают характеристические функции областей Ω_1^ε и Ω_0^ε соответственно. Определим функцию v как решение начально-краевой задачи для осредненного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} M_1 v'_t - \operatorname{div} A(\nabla v + av + bg) + K \nabla v + k_a v + k_b g &= R_1 f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad v|_{t=0} = w \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где использованы обозначения (1.13), (1.15) и (1.18).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие (1.3), $m_0, r_0 \in C^2(F_0)$, $A_0 \in C^2(F_0)^{n \times n}$ и $\partial F_0 \in C^3$. Предположим, что u – решение задачи (1.4) и v – решение задачи (1.20). Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| u - \chi_1^\varepsilon v - \chi_0^\varepsilon w - \chi_0^\varepsilon \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t f \, dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right),$$

где интеграл обозначает первообразную по t и C не зависит от ε и σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Проверяется, что в условиях теорем 1–3 достаточно гладкие решения осредненных задач (1.16), (1.19), (1.20) существуют и определены однозначно. Гладкость и финитность f, g, w (и равенство $w = 0$ из условий теоремы 2) используются в доказательстве именно этого утверждения о решениях осредненных задач. Это утверждение для задач (1.16) и (1.20) хорошо известно [4], поскольку при сделанных предположениях на исходные данные выполнены условия согласования произвольного порядка. Это утверждение для задачи (1.19) выводится в §2 из результатов работы [6], в которой была доказана разрешимость задачи (1.19) в пространстве $H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для построения начальных членов асимптотического разложения решения задачи (1.4) использовались методы работ [5] и [7]. Это построение заключается в последовательном разрешении некоторых периодических задач на ячейке (типа задач (1.12), (1.14)), условия разрешимости которых приводят к осредненным задачам (1.16), (1.19) или (1.20) в зависимости от выполнения одного из условий (1.1)–(1.3). В данной работе приводятся явные формулы этих разложений. После этого доказательство теорем 1–3 проводится энергетическими методами. При этом учитывается гладкость решений осредненных задач (на самом деле конечного порядка; см. §2) и некоторая регулярность решений задач на ячейке, в доказательстве которой используется гладкость (класса C^2) границы S . Кроме того, в случае выполнения условия (1.3) эту асимптотику необходимо “подправить” погранслойнными добавками, экспоненциально убывающими внутрь включений. Эти добавки строятся в §6 по схеме метода Вишика–Люстерника. Для задач осреднения эта схема реализована в работе [5]. Гладкость коэффициентов и границы включений из условий теоремы 3 используются при построении этих погранслоинных добавок. В реальных задачах, встречающихся на практике, коэффициенты $m_1, m_0, A_1, A_0, k_1, \dots$ как правило постоянны, так что гладкость коэффициентов не слишком существенна. Кроме того, предположение о постоянстве коэффициентов приводит к упрощениям некоторых формул. Например, если компоненты вектор-функций a_1 и b_1 в (1.10) постоянны, то $N_a = N_1 a_1$, $N_b = N_1 b_1$, и поэтому $a = a_1$, $b = b_1$ в формулах (1.15).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вопросы осреднения стационарного варианта задачи (1.4) рассматривались в работах [2], [8] и [9]. Задача (1.4) в случае, когда $\sigma = \varepsilon^2$, и в некоторых отличных, чем здесь, предположениях рассматривалась в работах [6] и [10], в которых были приведены утверждения о сходимости решений в соответствующих пространствах. Отметим также, что, используя подходящие аппроксимации исходных данных, из теорем 1–3 несложно вывести утверждения о сходимости решений задачи (1.4) в норме пространства $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ при более слабых предположениях на f, g и w . Точнее, в обозначениях из теорем 1–3 выполнены следующие утверждения о сходимости решений.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнено условие (1.1) и $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $w \in L^2(\Omega)$ в задаче (1.4). Предположим, что u – решение задачи (1.4) и v – решение задачи (1.16). Тогда

$$\|u - v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^2/\sigma \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнено условие (1.2) и $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $w = 0$ в задаче (1.4). Предположим, что u – решение задачи (1.4) и v – решение задачи (1.19). Тогда

$$\|u - v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon^1))} + \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v_t')\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega_\varepsilon^0))} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\sigma/\varepsilon^2 \rightarrow \vartheta$, $\sigma \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнено условие (1.3), $m_0, r_0 \in C^2(F_0)$, $A_0 \in C^2(F_0)^{n \times n}$, $\partial F_0 \in C^3$ и $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $w \in L^2(\Omega)$ в задаче (1.4). Предположим, что u – решение задачи (1.4) и v – решение задачи (1.20). Тогда

$$\left\| u - \chi_1^\varepsilon v - \chi_0^\varepsilon w - \chi_0^\varepsilon \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t f \, dt \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\sigma/\varepsilon^2 \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В реальных задачах, встречающихся на практике, имеются разнообразные асимптотические соотношения между коэффициентами задачи (1.4). Некоторые из этих соотношений приведены в работах [11], [12] и отличаются от принятых здесь. В работе [12] рассмотрена задача (1.4) в случае, когда $\sigma = \varepsilon^2$, $k_\varepsilon^\sigma = 0$ и в условии (1.10) коэффициенты $a_0(y)$ и $b_0(y)$ умножены на ε^{-1} . При этих предположениях в [12] доказана сходимость решений задачи (1.4) к решению осредненной задачи в пространстве $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Однако осредненная задача в [12] определяется через решение “двухмасштабной задачи на ячейке”, зависящей от параметра $x \in \Omega$. Используемые здесь методы позволяют “разделить” масштабы в этой задаче и уточнить результаты работы [12] следующим образом.

Предположим, что в (1.6) и (1.10) определения коэффициентов k_ε^σ , a_ε и b_ε в области Ω_0^ε заменены более общими равенствами:

$$\begin{aligned} k_\varepsilon^\sigma &= \sigma k_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \sqrt{\sigma} k_0^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \\ a_\varepsilon &= a_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + a_0^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad b_\varepsilon = b_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + b_0^0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где компоненты вектор-функций $k_0(y)$, $k_0^0(y)$, $a_0(y)$, $a_0^0(y)$, $b_0(y)$ и $b_0^0(y)$ являются 1-периодическими ограниченными функциями на F_0 . Предположим также, что

$\operatorname{div}_y(A_0 a_0^0), \operatorname{div}_y(A_0 b_0^0), \operatorname{div}_y(k_0^0) \in L^\infty(Y_0)$. Пусть функции $P(t, y), Q(t, y), q(t, y)$ и $p(t, y)$ являются 1-периодическими решениями начально-краевых задач на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0 Q'_t - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0 (\sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + a_0^0 Q) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y Q &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ Q &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad Q|_{t=0} = 1 \quad \text{в } Y_0, \\ m_0 P'_t - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0 (\sqrt{\vartheta} \nabla_y P + a_0^0 P) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y P &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad P|_{t=0} = \frac{r_0}{m_0} \quad \text{в } Y_0, \\ m_0 q'_t - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0 (\sqrt{\vartheta} \nabla_y q + a_0^0 q) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y q &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ q &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad q|_{t=0} = \frac{\sqrt{\vartheta} (\operatorname{div}_y A_0 a_0^0)}{m_0} \quad \text{в } Y_0, \\ m_0 p'_t - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0 (\sqrt{\vartheta} \nabla_y p + a_0^0 p) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y p &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ p &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad p|_{t=0} = \frac{\sqrt{\vartheta} (\operatorname{div}_y A_0 b_0^0)}{m_0} \quad \text{в } Y_0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где учтены обозначения (1.2), (1.6), (1.8) и (1.21). Далее введем обозначения

$$\begin{aligned} q_0 &= \langle m_0 q \rangle_0, \quad q_k = \sqrt{\vartheta} \langle k_0^0 \nabla_y q \rangle_0, \quad M_k = \langle m_0 Q'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y Q \rangle_0, \\ p_0 &= \langle m_0 p \rangle_0, \quad p_k = \sqrt{\vartheta} \langle k_0^0 \nabla_y p \rangle_0, \quad R_k = \langle m_0 P'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y P \rangle_0, \\ q_\varepsilon &= q\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad p_\varepsilon = p\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad Q_\varepsilon = Q\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad P_\varepsilon = P\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

и определим функцию v как решение начально-краевой задачи для осредненного уравнения

$$\begin{aligned} M_1 v'_t - (M_k - q_0) * (v'_t) - \operatorname{div} A(\nabla v + av + bg) + K \nabla v + k_a v \\ + q_k * v + p_0 * (g'_t) + p_k * g + k_b g = R_1 f - R_k * f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad v|_{t=0} = w \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где использованы обозначения (1.13), (1.15) и (1.18).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (1.2), (1.21), $f, g \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)$ и $w = 0$. Предположим, что u — решение задачи (1.4) и v — решение задачи (1.24). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t) - q_\varepsilon * v - p_\varepsilon * g\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| + \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \right), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ε и σ .

Проверяется, что в условиях теоремы 4 достаточно гладкое решение задачи (1.24) существует и определено однозначно. Это утверждение доказывается в §2 методами работы [5], в которой была доказана разрешимость аналогичной задачи для линеаризованной системы уравнений гидродинамики. Отметим также, что используемые здесь задачи на ячейке (1.12), (1.14), (1.17), (1.22) имеют решения и не зависят от параметров x, ε и σ .

Доказательства представленных здесь утверждений даны в §3–7. Несколько вспомогательных лемм, используемых в этих доказательствах, приведены в §2. Частные случаи теорем 1–3 были анонсированы в докладе [13]. Утверждение, близкое к теореме 1, было ранее доказано Н. С. Бахваловым.

Автор выражает признательность Н. С. Бахвалову за многочисленные полезные советы по рассматриваемым в статье вопросам.

§2. Леммы

В дальнейшем изложении C обозначает постоянные, не зависящие от параметров ε и σ . Кроме того, для заданной 1-периодической на Y функции $P(y)$ через $P_\varepsilon = P(x/\varepsilon)$ обозначается ε -периодическое продолжение этой функции на Ω . Более точно, $P(y)$ продолжается как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$ и выбирается ограничение полученной функции при $y = x/\varepsilon$ на Ω , которое и обозначается P_ε .

ЛЕММА 1. Для решений задачи (1.4) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n)}^2 \\ & \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $\varphi = u$ в тождестве (1.11) и учитывая (1.7), имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} m_\varepsilon u^2 dx \right)'_t + \alpha \sigma \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx + \alpha \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx \\ & \leq \left| \int_{\Omega} (k_\varepsilon^\sigma \nabla u) u dx \right| + \left| \int_{\Omega} (A_\varepsilon^\sigma(a_\varepsilon u + b_\varepsilon g), \nabla u) dx \right| + \left| \int_{\Omega} r_\varepsilon f u dx \right|. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Воспользуемся для оценки интегралов в (2.1) неравенством Коши–Буняковского и “ δ -неравенством”, записанным в виде $|ab| \leq (\delta/2)a^2 + b^2/(2\delta)$ для положительного δ и произвольных a, b . Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (k_\varepsilon^\sigma \nabla u) u dx \right| \leq \sigma \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0 \nabla u) u dx \right| + \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon} (k_1 \nabla u) u dx \right| \\ & \leq \sigma \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n} \|u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)} + \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n} \|u\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} \\ & \leq \beta \left(\frac{\sigma \delta}{2} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx + \frac{\sigma}{2\delta} \|u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx + \frac{1}{2\delta} \|u\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 \right). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Следовательно, выбирая $\delta = \alpha/\beta$ в (2.2) и используя это неравенство в (2.1), интегралы с ∇u можно перенести в левую часть неравенства (2.1). Оценивая аналогично другие слагаемые справа в (2.1), имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} m_\varepsilon u^2 dx \right)'_t + \sigma \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n}^2 \\ & \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Далее, учитывая (1.9) и применяя лемму Гронуолла (см., например, [1]), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 dt + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n}^2 dt \\ & \leq C \left(\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^t \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как уже отмечалось, $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Таким образом, переход к максимуму по $t \in [0, T]$ в (2.3) завершает доказательство леммы 1.

Будем обозначать через $H_P^1(Y_1)$ пространство Соболева 1-периодических функций из $H^1(Y_1)$ (см., например, [2], [3]). Эквивалентно, $H_P^1(Y_1)$ определяется как пространство квадратично интегрируемых вместе с производными первого порядка функций на многообразии Y_1 с границей S класса C^2 . Тогда [1] определены пространство $H_P^{1/2}(S)$ следов на S элементов из $H_P^1(Y_1)$ и пространство $H_P^{-1/2}(S)$, сопряженное к $H_P^{1/2}(S)$. Кроме того, из результатов [14, гл. 1, теорема 1.2] следует формула интегрирования по частям

$$\int_S (V, \nu) W ds = \int_{Y_1} (\operatorname{div}_y V) W dy + \int_{Y_1} (V, \nabla_y W) dy, \quad (2.4)$$

где $W \in H_P^1(Y_1)$, $V \in L^2(Y_1)^n$ с $\operatorname{div}_y V \in L^2(Y_1)$ и след (V, ν) определен как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S)$:

$$\|(V, \nu)\|_{H_P^{-1/2}(S)}^2 \leq C \left(\|V\|_{L^2(Y_1)^n}^2 + \|\operatorname{div}_y V\|_{L^2(Y_1)}^2 \right). \quad (2.5)$$

Известно (см. [2], [3]), что решение $N_1 \in (H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R})^n$ задачи (1.12) существует и определено однозначно. Аналогично определены $N_a, N_b \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$, удовлетворяющие (1.14). Эти утверждения выполнены и при более слабых предположениях на S , но в дальнейшем встретятся более общие задачи Неймана на Y_1 . Гладкость S существенна в следующем известном (см., например, [1]) утверждении.

ЛЕММА 2. Пусть $V \in L^2(Y_1)$ и $W \in H_P^{-1/2}(S)$ удовлетворяют равенству

$$\int_{Y_1} V dy = \int_S W ds.$$

Тогда существует единственное решение $U \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ задачи Неймана на Y_1 :

$$-\operatorname{div}_y (A_1 \nabla_y U) = V \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y U, \nu) = W \quad \text{на } S.$$

Доказательство следующей леммы повторяет доказательство леммы 1.

ЛЕММА 3. *Существуют однозначно определенные решения из пространства $L^2(0, T; H_P^1(Y)) \cap L^\infty(0, T; L^2(Y))$ начально-краевых задач (1.17) и*

$$\begin{aligned} \|Q\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y))}^2 + \vartheta \|\nabla_y Q\|_{L^2(0, T; L^2(Y)^n)}^2 &\leq C, \\ \|P\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y))}^2 + \vartheta \|\nabla_y P\|_{L^2(0, T; L^2(Y)^n)}^2 &\leq C, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ϑ .

Начальные данные в задачах (1.17) не удовлетворяют условиям согласования, и производные по t от решений, используемые в (1.18), могут иметь особенности. Однако для дальнейшего достаточно следующего утверждения.

ЛЕММА 4. *Функции M_0 и R_0 , определенные в (1.18), принадлежат $L^1(0, T)$ и*

$$\|M_0\|_{L^1(0, T)} + \|R_0\|_{L^1(0, T)} \leq C,$$

где постоянная C не зависит от ϑ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, первую начально-краевую задачу из (1.17). Для каждого $l = 1, 2, \dots$ обозначим через λ_l и e_l собственные значения и собственные функции 1-периодической задачи Дирихле на Y_0 :

$$-\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y e_l) = \lambda_l m_0 e_l \quad \text{в } Y_0, \quad e_l = 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1, \quad \langle m_0 e_l^2 \rangle_0 = 1.$$

Более традиционно, здесь e_l равны нулю на S и продолжены нулем на Y_1 . В соответствии с [4] имеем представление

$$Q(y, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \langle m_0 e_l \rangle_0 e_l(y) e^{-\vartheta \lambda_l t},$$

где ряд сходится в пространстве $L^2(0, T; H_P^1(Y_0))$. Далее, прямое вычисление дает неравенство

$$\begin{aligned} \|M_0\|_{L^1(0, T)} &= \int_0^T \left| \sum_{l=1}^{\infty} \langle m_0 e_l \rangle_0^2 (-\vartheta \lambda_l) e^{-\vartheta \lambda_l t} \right| dt \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \langle m_0 e_l \rangle_0^2 \int_0^{\infty} \vartheta \lambda_l e^{-\vartheta \lambda_l t} dt = \sum_{l=1}^{\infty} \langle m_0 e_l \rangle_0^2, \end{aligned}$$

где сходимость последнего ряда эквивалентна принадлежности $Q|_{t=0}$ пространству $L^2(Y_0)$, что доказывает лемму 4.

Напомним, что свертка по t от гладких функций $P(t, x)$ и $v(t, x)$ определяется равенствами

$$(P * v)(t) = \int_0^t P(t - \tau) v(\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (2.6)$$

и выполнены формулы дифференцирования

$$(P * v)_t' = (P|_{t=0})v + (P_t') * v = P(v|_{t=0}) + P * (v_t'). \quad (2.7)$$

Это определение можно продолжить достаточно стандартным образом на более общие классы функций и распределений (см., например, [15]). Некоторые из таких продолжений понадобятся в дальнейшем.

ЛЕММА 5. Пусть $P \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ и $v \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Тогда $P * v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Кроме того, $P * v \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, если $v'_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая равенство

$$\int_0^t \|P(t - \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^t \|P(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \|(P * v)(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_0^t \|P(t - \tau)v(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \\ &\leq \int_0^t \|P(t - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|v(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} d\tau \leq \|P\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))}, \end{aligned}$$

что доказывает первую часть леммы 5. В соответствии со вторым равенством из (2.7) имеем $(P * v)'_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, если $v'_t \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Тогда лемма 5 следует из теоремы “вложения” (см., например, [14, гл. 3, лемма 1.2]).

ЛЕММА 6. Пусть $P \in L^1(0, T)$ и $v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Тогда $P * v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ с $\|h\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 1$ и продолжим P, v, h нулем при $t \in \mathbb{R} \setminus [0, T]$. Тогда, используя теорему Фубини и инвариантность нормы в пространстве $L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ относительно сдвигов по t , получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} (P * v)(t) h(t) dx dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t |P(\tau)| |v(t - \tau)| |h(t)| d\tau dx dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(\tau)| \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t - \tau)| |h(t)| dt dx d\tau \\ &\leq \int_0^T |P(\tau)| d\tau \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Супремум по h от левой части этого неравенства задает норму в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, что доказывает лемму 6.

ЛЕММА 7. Пусть целое $s > 0$, $P \in L^1(0, T)$ и $v \in L^2(0, T; H^s(\Omega))$. Тогда $P * v \in L^2(0, T; H^s(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из представления (2.6), леммы 6 и известных свойств пространств $H^s(\Omega)$ (см., например, [1]).

ЛЕММА 8. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует единственное достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (1.19), причем оценки соответствующих норм не зависят от ϑ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $F = R_1 f - R_0 * f + \operatorname{div} A(bg)$. Из лемм 4 и 6 заключаем, что $F \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, причем оценка соответствующей нормы не зависит от ϑ . Тогда из результатов работы [6] следует существование единственного $v \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, удовлетворяющего (1.19), с оценками соответствующих норм, не зависящими от ϑ .

Перепишем (1.19) в виде “эллиптической” краевой задачи:

$$-\operatorname{div} A(\nabla v) = U \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.8)$$

В силу эллиптической регулярности $v \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$, поскольку $U \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, с оценками, не зависящими от ϑ (см., например, [1]).

Из лемм 4 и 7 следует, что $F \in L^2(0, T; H^s(\Omega))$. Здесь и далее целое положительное s достаточно велико и соответствующие оценки не зависят от ϑ . Учитывая второе равенство из (2.7) и финитность f, g вблизи $t = 0$, имеем $F \in H^s(0, T; H^s(\Omega))$. Полагая $t = 0$ в первом уравнении из (1.19), получаем $v'_t|_{t=0} = 0$, поскольку $w = 0$. Вновь учитывая второе равенство из (2.7), продифференцируем первое уравнение из (1.19) по t . Тогда v'_t удовлетворяет начально-краевой задаче, аналогичной исходной. Следовательно, $v'_t \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, и поэтому $v \in H^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^4(\Omega))$ в силу леммы 7 и представления (2.8) (см., например, [1]). Продолжая по индукции, получаем $v \in H^s(0, T; H^s(\Omega))$, что доказывает лемму 8.

На самом деле в §3–6 используется только гладкость конечного порядка решений осредненных задач (1.16), (1.19) и (1.20):

$$\partial_t^{\varkappa} \partial_{x_1}^{\varkappa_1} \dots \partial_{x_n}^{\varkappa_n} v \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega)) \quad \text{для } \varkappa + \varkappa_1 + \dots + \varkappa_n \leq 3, \quad (2.9)$$

где через $\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ обозначены соответствующие частные производные. Достаточные для выполнения (2.9) условия на исходные данные для задач (1.16) и (1.20) можно найти в [4], а для задачи (1.19) выводятся из доказательства леммы 8 и теорем вложений. Но мы не будем останавливаться на формулировке этих громоздких предположений на f, g, w и Ω .

Рассмотрим теперь задачу (1.4) в предположении, что выполнены равенства (1.21). Отметим, что лемма 1 выполнена и для решений этой задачи. Действительно, чтобы доказать это утверждение, достаточно оценить подходящим образом дополнительные слагаемые, возникающие в (2.1). Но, как и в доказательстве (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma} \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_0 a_0^0 u, \nabla u) dx \right| &\leq \sqrt{\sigma} C \|u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n} \\ &\leq C \left(\frac{\sqrt{\sigma} \delta}{2} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx + \frac{\sqrt{\sigma}}{2\delta} \|u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 \right), \quad (2.10) \\ \sqrt{\sigma} \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla u) u dx \right| &\leq C \left(\frac{\sqrt{\sigma} \delta}{2} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\nabla u)^2 dx + \frac{\sqrt{\sigma}}{2\delta} \|u\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно, выбирая $\delta = \alpha \sqrt{\sigma} / (2C)$ в (2.10) и используя эти неравенства в (2.1), интегралы с ∇u перенесем в левую часть неравенства (2.1). Далее, как и в доказательстве леммы 1, получим оценку (2.3), из которой и следует лемма 1.

Отметим также, что лемма 3 выполнена и для решений начально-краевых задач (1.22), но с постоянными C , зависящими от ϑ , впрочем несложно выписать явно эту зависимость (см., например, [4]). В доказательстве леммы 4 используется то, что производящий оператор соответствующей начально-краевой задачи самосопряжен. Для задач (1.22) это условие может не выполняться. Однако лемма 4 используется только при доказательстве существования достаточно гладкого

решения задачи (1.19), а для задачи (1.24) это утверждение будет доказано непосредственно с помощью преобразования Лапласа.

Фиксируем $\gamma \geq 0$ и определим пространство $L_\gamma^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ как множество функций из $L_{\text{loc}}^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{L_\gamma^2(0, \infty; L^2(\Omega))} = \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))}.$$

Последнее равенство определяет норму в пространстве $L_\gamma^2(0, \infty; L^2(\Omega))$, относительно которой это пространство является полным (см., например, [16]).

Следуя [16], определим пространство $E_\gamma(L^2(\Omega))$ как множество функций $U(\rho) = U(\rho_1 + i\rho_2)$ со значениями в $L^2(\Omega)$, заданных и голоморфных в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_\gamma = \{\rho \in \mathbb{C}: \rho = \rho_1 + i\rho_2, \rho_1 > \gamma\}$, для которых конечна величина

$$\|U(\rho)\|_{E_\gamma(L^2(\Omega))}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|U(\gamma + i\rho_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\rho_2,$$

где интеграл определяется как предел в среднем интеграла от K до $-K$ при $K \rightarrow \infty$. Последнее равенство определяет норму в пространстве $E_\gamma(L^2(\Omega))$. Следующий вариант теоремы Пэли–Винера доказан в [16].

ТЕОРЕМА 9. *Преобразование Лапласа*

$$\widehat{u}(t) = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(t) dt = U(\rho)$$

отображает пространство $L_\gamma^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ на пространство $E_\gamma(L^2(\Omega))$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Аналогично определяются пространства $E_\gamma(H_0^1(\Omega))$ и $E_\gamma(L^2(Y))$, для которых также выполнен аналог теоремы 9. Кроме того (см. [16]), преобразование Лапласа коммутирует с дифференцированиями по пространственным переменным и оператор свертки по t переводится преобразованием Лапласа в оператор поточечного умножения.

ЛЕММА 10. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда существует единственное достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (1.24).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства существования и единственности решения в подходящих пространствах, как обычно, наиболее существенный момент – это априорные оценки (см., например, [1], [4]). В соответствии с теоремой 9 эти оценки можно попытаться доказать для преобразования Лапласа от решения задачи (1.24). Введем обозначения $V = \widehat{v}$, $F = \widehat{f}$, $G = \widehat{g}$ для преобразований Лапласа от функций v , f и g из (1.24). Тогда, применяя преобразование Лапласа к (1.24), получаем краевую задачу для V с комплексным параметром ρ :

$$\rho m V - (\rho m_k - q_{0k}) V + 2\mathbb{A}V = \mathbb{F} \quad \text{в } \Omega, \quad V = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (2.11)$$

(см., например, [16], [17]), где использованы обозначения

$$\begin{aligned} m &= M_1, \quad 2\mathbb{A}V = -\operatorname{div} A(\nabla V + aV) + K\nabla V + k_a V, \\ \mathbb{F} &= R_1 F - \widehat{R}_k F - (\rho \widehat{p}_0 + \widehat{p}_k) G - k_b G + Ab\nabla G, \\ m_k &= \widehat{M}_k = \langle m_0 \rho \widehat{Q} - m_0(Q) |_{t=0} + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \widehat{Q} \rangle_0 \\ &= \langle m_0(\rho \widehat{Q} - 1) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \widehat{Q} \rangle_0, \\ q_{0k} &= \langle m_0 \rho \widehat{q} + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \widehat{q} \rangle_0, \\ \widehat{R}_k &= \langle m_0 \rho \widehat{P} - r_0 + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \widehat{P} \rangle_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что в силу леммы 3 функции $\widehat{Q}(\rho)$, $\widehat{P}(\rho)$, $\widehat{q}(\rho)$, $\widehat{p}(\rho)$, и поэтому $m_k(\rho)$, $q_{0k}(\rho)$, $\widehat{R}_k(\rho)$, $\widehat{p}_0(\rho)$, $\widehat{p}_k(\rho)$ определены и являются голоморфными функциями на $\mathbb{C}_0$ со значениями в соответствующих пространствах (см., например, [17, гл. 6]). Из (1.22) получаем для $z = \widehat{P}(\rho)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} m_0 \rho z - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0 (\sqrt{\vartheta} \nabla_y z + a_0^0 z) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y z &= r_0 \quad \text{в } Y_0, \\ z &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Умножая первое уравнение этой задачи на функцию $\bar{\rho} \bar{z}$ (комплексно-сопряженную к $\rho z = \rho \widehat{P}(\rho)$) и интегрируя полученное соотношение по Y_0 , имеем

$$\begin{aligned} \langle m_0 (\rho z)^2 \rangle_{\mathbf{0}} + \bar{\rho} \vartheta \langle (A_0 \nabla_y z, \nabla_y \bar{z}) \rangle_{\mathbf{0}} \\ = \langle r_0 \bar{\rho} \bar{z} \rangle_{\mathbf{0}} - \langle (a_0^0 \bar{\rho} z, \sqrt{\vartheta} \nabla_y \bar{z}) \rangle_{\mathbf{0}} - \langle \bar{\rho} \bar{z} \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y z \rangle_{\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Далее рассмотрим уравнение, комплексно-сопряженное к первому уравнению из (2.13). Умножая это уравнение на ρz и интегрируя по Y_0 , получаем

$$\begin{aligned} \langle m_0 (\rho z)^2 \rangle_{\mathbf{0}} + \rho \vartheta \langle (A_0 \nabla_y \bar{z}, \nabla_y z) \rangle_{\mathbf{0}} \\ = \langle r_0 \rho z \rangle_{\mathbf{0}} - \langle (a_0^0 \rho \bar{z}, \sqrt{\vartheta} \nabla_y z) \rangle_{\mathbf{0}} - \langle \rho z \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \bar{z} \rangle_{\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Учитывая симметричность матрицы A_0 , сложим соотношения (2.14) и (2.15). Тогда

$$\begin{aligned} \langle m_0 (\rho z)^2 \rangle_{\mathbf{0}} + \rho_1 \vartheta \langle (A_0 \nabla_y z, \nabla_y \bar{z}) \rangle_{\mathbf{0}} \\ = \operatorname{Re} \langle r_0 \bar{\rho} \bar{z} \rangle_{\mathbf{0}} - \operatorname{Re} \langle (a_0^0 \bar{\rho} z, \sqrt{\vartheta} \nabla_y \bar{z}) \rangle_{\mathbf{0}} - \operatorname{Re} \langle \bar{\rho} \bar{z} \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y z \rangle_{\mathbf{0}}, \end{aligned}$$

где по определению $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$, и поэтому $|\operatorname{Re} z| \leq (|z| + |\bar{z}|)/2 = |z|$ для $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, найдутся такие постоянные c_0 и C , не зависящие от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_0$, что

$$\|\rho z\|_{L^2(Y_0)}^2 + \rho_1 \vartheta \|\nabla_y z\|_{L^2(Y_0)^n}^2 \leq \frac{1}{2} \|\rho z\|_{L^2(Y_0)}^2 + c_0 \vartheta \|\nabla_y z\|_{L^2(Y_0)^n}^2 + C \|r_0\|_{L^2(Y_0)}^2$$

(см. доказательство леммы 1). Таким образом, для всех $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ с $\rho_1 - c_0 \geq 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \|\rho z\|_{L^2(Y_0)}^2 + \vartheta \|\nabla_y z\|_{L^2(Y_0)^n}^2 \leq C \|r_0\|_{L^2(Y_0)}^2. \quad (2.16)$$

Аналогичные неравенства выполнены для функций $\widehat{Q}(\rho)$, $\widehat{q}(\rho)$ и $\widehat{p}(\rho)$. Поэтому найдется такое положительное $\omega = 1 + c_0$, что

$$\begin{aligned} |q_{0k}| &\leq |\langle m_0 \rho \widehat{q} \rangle_{\mathbf{0}}| + |\langle \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \widehat{q} \rangle_{\mathbf{0}}| \leq C, \\ |m_k| &\leq C, \quad |\rho \widehat{p}_0 + \widehat{p}_k| \leq C, \quad |\widehat{R}_k| \leq C, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где использованы обозначения (2.12) и постоянная C не зависит от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_\omega$. Следовательно, выполнено неравенство

$$\|\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|F\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (2.18)$$

где постоянная C не зависит от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_\omega$.

Умножим уравнение из (2.11) на $\bar{V}$ и проинтегрируем полученное соотношение по Ω . Тогда

$$\rho m \int_{\Omega} V^2 dx + \int_{\Omega} (q_{0k} - \rho m_k) V^2 dx + 2 \int_{\Omega} (\mathbb{A}V) \bar{V} dx = \int_{\Omega} \mathbb{F} \bar{V} dx. \quad (2.19)$$

Далее рассмотрим уравнение, комплексно-сопряженное к уравнению из (2.11). Умножая это уравнение на V , интегрируя по Ω и складывая полученное соотношение с (2.19), имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 m \int_{\Omega} V^2 dx + \int_{\Omega} \operatorname{Re}(q_{0k} - \rho m_k) V^2 dx \\ + \int_{\Omega} (\mathbb{A}V) \bar{V} dx + \int_{\Omega} (\mathbb{A}\bar{V}) V dx = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \mathbb{F} \bar{V} dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оценим интегралы в этом равенстве, содержащие $\mathbb{A}$, как и в доказательстве леммы 1 (сохраняя $(A\nabla V, \nabla \bar{V})$ в левой части (2.20) и перенося остальные слагаемые в правую часть (2.20)). Тогда найдутся такие постоянные c_1 , c_α и C , не зависящие от ϑ и $\rho \in \mathbb{C}_\omega$, что

$$\begin{aligned} \rho_1 m \|V\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \operatorname{Re}(-\rho m_k) V^2 dx + c_\alpha \|\nabla V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ \leq C \|\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_1 \|V\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c_\alpha}{2} \|\nabla V\|_{L^2(\Omega)^n}^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где учтены неравенства (2.17) и положительная определенность матрицы A . Предположим, что выполнено соотношение

$$\operatorname{Re}(-\rho m_k) = \mathbb{P} + \mathbb{B} \quad \text{при} \quad \mathbb{P} \geq 0 \quad \text{и} \quad |\mathbb{B}| \leq c_2 \quad (2.22)$$

с некоторой постоянной c_2 , не зависящей от $\rho \in \mathbb{C}_\omega$. Тогда из (2.21) следует неравенство

$$(\rho_1 m - c_1 - c_2) \|V\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c_\alpha}{2} \|\nabla V\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \|\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Таким образом, для всех $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ (с $\rho_1 - c_1 - c_2 \geq 1$ и $\rho_1 - c_0 \geq 1$) найдется такое положительное ω , что

$$\|V\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\mathbb{F}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{при} \quad \rho_1 \geq \omega, \quad (2.23)$$

где постоянная C не зависит от $\rho \in \mathbb{C}_\omega$.

Докажем соотношения (2.22). Пусть $z = \hat{Q}(\rho)$. Тогда

$$-\rho m_k = \rho \langle (-1)m_0(\rho z - 1) \rangle_0 - \sqrt{\vartheta} \langle k_0^0 \nabla_y \rho z \rangle_0. \quad (2.24)$$

Интегрируя в последнем слагаемом этого равенства по частям, имеем

$$-\sqrt{\vartheta} \langle k_0^0 \nabla_y \rho z \rangle_0 = \sqrt{\vartheta} \langle (\operatorname{div}_y k_0^0) \rho z \rangle_0.$$

Поэтому, учитывая предположение $\operatorname{div}_y k_0^0 \in L^\infty(Y_0)$ и неравенство (2.16), получаем

$$|\operatorname{Re} \sqrt{\vartheta} \langle k_0^0 \nabla_y \rho z \rangle_0| \leq \sqrt{\vartheta} |\langle (\operatorname{div}_y k_0^0) \rho z \rangle_0| \leq C, \quad (2.25)$$

где постоянная C не зависит от $\rho \in \mathbb{C}_\omega$. Следовательно, последнее слагаемое в (2.24) можно считать нулевым, поскольку это слагаемое не влияет на доказательство соотношений (2.22).

В соответствии с (1.22) краевая задача для $z = \widehat{Q}(\rho)$ имеет вид

$$m_0(\rho z - 1) - \sqrt{\vartheta} \operatorname{div}_y A_0(\sqrt{\vartheta} \nabla_y z + a_0^0 z) + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y z = 0 \quad \text{в } Y_0, \quad (2.26)$$

$$z = 0 \quad \text{на } \overline{Y}_1.$$

Умножая уравнение этой задачи на функцию $\rho \bar{z}$ и интегрируя полученное соотношение по Y_0 , имеем

$$\begin{aligned} & \rho \langle m_0 \bar{z}(\rho z - 1) \rangle_0 + \vartheta \langle (A_0 \nabla_y \rho z, \nabla_y \bar{z}) \rangle_0 \\ & + \langle (A_0 a_0^0 \rho z, \sqrt{\vartheta} \nabla_y \bar{z}) \rangle_0 + \langle (\sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \rho z) \bar{z} \rangle_0 = 0. \end{aligned}$$

Учтем это соотношение в равенстве (2.24). Тогда

$$\begin{aligned} -\rho m_k &= \rho \langle m_0(\rho z - 1)^2 \rangle_0 + \vartheta \langle (A_0 \nabla_y \rho z, \nabla_y \bar{z}) \rangle_0 \\ &+ \langle (A_0 a_0^0 \rho z, \sqrt{\vartheta} \nabla_y \bar{z}) \rangle_0 + \langle (\sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \rho z) \bar{z} \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

и аналогичное равенство выполнено для $-\bar{\rho} \bar{m}_k$. Интегрируя в последнем слагаемом равенства (2.27) по частям, получаем

$$\langle (\sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \rho z) \bar{z} \rangle_0 = -\langle \rho z \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y \bar{z} \rangle_0 - \sqrt{\vartheta} \langle (\rho z)^2 \operatorname{div}_y k_0^0 \rangle_0. \quad (2.28)$$

Последнее слагаемое в этом равенстве можно считать нулевым в силу неравенства, аналогичного (2.25), а предпоследнее слагаемое сократится с соответствующим слагаемым из $-\bar{\rho} \bar{m}_k$ при вычислении $\operatorname{Re}(-\bar{\rho} \bar{m}_k)$. Следовательно, преобразовывая аналогичным образом предпоследнее слагаемое в (2.27), имеем

$$\operatorname{Re}(-\rho m_k) = -\frac{\rho m_k + \bar{\rho} \bar{m}_k}{2} = \rho_1 \langle m_0(\rho z - 1)^2 \rangle_0 + \vartheta \langle A_0 \nabla_y \rho z, \nabla_y \bar{z} \rangle_0 \geq 0$$

с точностью до несущественных слагаемых, что доказывает соотношения (2.22) и неравенство (2.23).

Из неравенств (2.18) и (2.23) следует, что для каждого $\rho \in \mathbb{C}_\omega$ решение задачи (2.11) существует и определено однозначно, поскольку уравнение этой задачи является обычным эллиптическим уравнением с комплексными коэффициентами (см., например, [1], [16]). Это решение является непрерывной функцией на $\mathbb{C}_\omega$ со значениями в $H_0^1(\Omega)$. Действительно, фиксируем несовпадающие ρ и ρ_0 из $\mathbb{C}_\omega$. Тогда $V_0 = V(\rho) - V(\rho_0)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} & \rho m V_0 - (\rho m_k - q_{0k}) V_0 + 2A V_0 = \mathbb{F}(\rho) - \mathbb{F}(\rho_0) \\ & + (\mathbb{M}(\rho) - \mathbb{M}(\rho_0)) V(\rho_0) \quad \text{в } \Omega, \quad V_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\mathbb{F}$ и $\mathbb{M} = \rho m - \rho m_k + q_{0k}$ являются голоморфными (и поэтому непрерывными) функциями на $\mathbb{C}_0$ со значениями в соответствующих пространствах. Следовательно, используя неравенство (2.23), имеем

$$\|V(\rho) - V(\rho_0)\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \rho_0, \quad (2.30)$$

что доказывает непрерывность решения задачи (2.11).

Продифференцируем формально (2.11) по ρ и рассмотрим краевую задачу

$$\rho m V_1 - (\rho m_k - q_{0k}) V_1 + 2A V_1 = F'_\rho + M'_\rho V \quad \text{в } \Omega, \quad V_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.31)$$

В силу уже доказанных результатов решение этой задачи существует, непрерывно зависит от $\rho \in \mathbb{C}_\omega$ и удовлетворяет неравенству, аналогичному (2.23).

Разделим уравнения (2.29) на $\rho - \rho_0$ и вычтем из полученных соотношений уравнения (2.31). Тогда $V_2 = (V(\rho) - V(\rho_0))/(\rho - \rho_0) - V_1$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho m V_2 - (\rho m_k - q_{0k}) V_2 + 2A V_2 &= F_\Delta - F'_\rho + M_\Delta V_0 + (M_\Delta - M'_\rho) V \quad \text{в } \Omega, \\ V_2 &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $F_\Delta = (F(\rho) - F(\rho_0))/(\rho - \rho_0)$ и $M_\Delta = (M(\rho) - M(\rho_0))/(\rho - \rho_0)$. Следовательно, используя неравенство (2.23) и соотношение (2.30), имеем

$$\|(V(\rho) - V(\rho_0))/(\rho - \rho_0) - V_1\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \rho_0.$$

Таким образом, решение задачи (2.11) является голоморфной функцией на $\mathbb{C}_\omega$ со значениями в $H_0^1(\Omega)$.

Кроме того, умножая неравенство (2.23) на $|\rho|^s$ для $s = 0, 1, \dots$, имеем априорные оценки

$$\|\rho^s V\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|\rho^s F\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho^s G\|_{H^1(\Omega)} \right), \quad (2.32)$$

где постоянная C не зависит от s и $\rho \in \mathbb{C}_\omega$. Из этих оценок и теоремы 9 следует, что

$$\|v_t^{(s)}\|_{L_\omega^2(0, \infty; H^1(\Omega))} \leq C \left(\|f_t^{(s)}\|_{L_\omega^2(0, \infty; L^2(\Omega))}^2 + \|g_t^{(s)}\|_{L_\omega^2(0, \infty; H^1(\Omega))}^2 \right),$$

где постоянная C не зависит от $s = 0, 1, \dots$. Весовая функция $e^{-\omega t}$ из определения пространства $L_\omega^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ отделена от нуля на конечном интервале $(0, T)$, и поэтому

$$\|v\|_{H^s(0, T; H^1(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{H^s(0, T; L^2(\Omega))} + \|g\|_{H^s(0, T; H^1(\Omega))} \right), \quad (2.33)$$

где постоянная C не зависит от $s = 0, 1, \dots$, но зависит от T .

В условиях леммы из неравенств (2.32) следует, что $v_t^{(s)}|_{t=0} = 0$ для $s = 0, 1, \dots$ (см., например, [16]). Эти равенства можно получить и непосредственно из (1.24). Действительно, полагая $t = 0$ в этих уравнениях, получаем $v_t'|_{t=0} = 0$. Учитывая второе равенство из (2.7), продифференцируем уравнения (1.24) по t и положим $t = 0$. Тогда $v_t^{(2)}|_{t=0} = 0$, и, продолжая по индукции, получим требуемые равенства.

Отметим, что приведенное доказательство неравенства (2.33) не обобщается на случай ненулевых w . Действительно, пусть выполнены неравенства (2.33) и $v|_{t=0} \neq 0$. Тогда, в общем случае, $v_t'|_{t=0} \neq 0$ и дифференцирование уравнений (1.24) по t приводит к появлению в этих уравнениях нерегулярного по t слагаемого $M_k(t)(v_t'|_{t=0})$, а остальные слагаемые регулярны по t , что несовместимо с достаточной гладкостью решения задачи (1.24). Нерегулярность $M_k(t)$ связана

с возможной нерегулярностью по t решений задач (1.22), для которых не выполнены условия согласования подходящего порядка (см., например, [1], [4], [16]).

Перепишем (1.24) в виде “эллиптической” краевой задачи:

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) = U \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.34)$$

Из теоремы 9, неравенств (2.17) и (2.32) следует, что $U \in H^{s-1}(0, T; L^2(\Omega))$, где целое положительное s достаточно велико. Отметим, что $|\rho m_k| \leq |\rho| |m_k| \leq |\rho| C$ в соответствии с неравенствами (2.17). Поэтому для решения задачи (2.34) имеем $v \in H^{s-1}(0, T; H^2(\Omega))$ в силу эллиптической регулярности (см., например, [1]). Продолжая по индукции, получаем $v \in H^s(0, T; H^s(\Omega))$, что доказывает лемму 10.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть в условиях леммы 10 выполнены равенства $\operatorname{div}_y k_0^0 = 0$, $\operatorname{div}_y A_0 a_0^0 = 0$ и $\operatorname{div}_y A_0 b_0^0 = 0$ (например, соответствующие коэффициенты являются постоянными). Тогда в соответствии с (2.25) и (2.28) соотношения (2.22) выполнены при $c_2 = 0$. В этом случае непосредственно проверяется, что постоянные C в неравенствах (2.32) и (2.33) не зависят от ϑ , и поэтому выполнен аналог леммы 8 для задачи (1.24). Эти постоянные также можно считать не зависящими от ϑ при дополнительном условии $\vartheta \leq C < \infty$, но в общем случае оценки (2.32) и (2.33) не являются равномерными по ϑ .

§3. Доказательство теоремы 1

Как уже отмечалось в §2, однозначно определены $N_a, N_b \in H_P^1(Y_1)$ и $N_1 \in H_P^1(Y_1)^n$, удовлетворяющие (1.14) и (1.12). Следовательно, определены следы N_a, N_b и N_1 на S как элементы $H_P^{1/2}(S)$ и $H_P^{1/2}(S)^n$. Продолжим N_a, N_b и N_1 на Y_0 как 1-периодические решения задач Дирихле:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A_0\nabla_y N_a) &= \operatorname{div}_y(A_0 a_0) \quad \text{в } Y_0, & N_a &= N_a \quad \text{на } S, \\ -\operatorname{div}_y(A_0\nabla_y N_b) &= \operatorname{div}_y(A_0 b_0) \quad \text{в } Y_0, & N_b &= N_b \quad \text{на } S, \\ -\operatorname{div}_y(A_0\nabla_y N_1) &= \operatorname{div}_y A_0 \quad \text{в } Y_0, & N_1 &= N_1 \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда $N_a, N_b \in H_P^1(Y)$ и $N_1 \in H_P^1(Y)^n$ (см., например, [1]). Определим $Q, P \in H_P^1(Y)$ как 1-периодические решения задач Дирихле на Y_0 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A_0\nabla_y Q) &= m_0 \quad \text{в } Y_0, & Q &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1, \\ -\operatorname{div}_y(A_0\nabla_y P) &= r_0 \quad \text{в } Y_0, & P &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае когда выполнено условие (1.1), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) задаются равенством

$$u_a = v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon \nabla v + \varepsilon(N_a)_\varepsilon v + \varepsilon(N_b)_\varepsilon g - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} Q_\varepsilon v'_t + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} P_\varepsilon f, \quad (3.3)$$

где v – решение осредненной задачи (1.16) и, например, $P_\varepsilon = P(x/\varepsilon)$ обозначает ε -периодическое продолжение этой функции на Ω (см. §2). Следующая хорошо известная формула и различные ее вариации в обозначениях часто используются в дальнейшем

$$\nabla(P_\varepsilon f) = \varepsilon^{-1}(\nabla_y P)_\varepsilon f + P_\varepsilon \nabla f. \quad (3.4)$$

В (3.3) все слагаемые, кроме второго, удовлетворяют однородным граничным условиям Дирихле на $\partial\Omega$. Полезно подправить и это второе слагаемое. Для этого определим гладкую в Ω функцию η , равную нулю при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ и единице при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, где $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначает расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Для достаточно малых ε ($\leq \varepsilon_0$) такие функции существуют, $\varepsilon|\nabla\eta| \leq C$ в Ω и носители функций $\eta - 1$ и $\nabla\eta$ содержатся в приграничной полосе $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширины 2ε (см., например, [2]). Из ограниченности области Ω и известной оценки $\text{mes}(\Omega_{2\varepsilon}) \leq C\varepsilon$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|(N_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|(\nabla_y N_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 &\leq C, \\ \|(N_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^n}^2 + \|(\nabla_y N_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^{n \times n}}^2 &\leq C\varepsilon \end{aligned} \quad (3.5)$$

и аналогичные неравенства для N_a , N_b , Q и P (см., например, [9]).

Подправленная асимптотика задается равенством

$$v_a = v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon \eta \nabla v + \varepsilon(N_a)_\varepsilon v + \varepsilon(N_b)_\varepsilon g - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} Q_\varepsilon v'_t + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} P_\varepsilon f. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.3) и (3.4), имеем $v_a - u_a = \varepsilon(N_1)_\varepsilon (\eta - 1) \nabla v$,

$$\nabla(v_a - u_a) = (\nabla_y N_1)_\varepsilon (\eta - 1) \nabla v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon (\nabla\eta) \nabla v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon (\eta - 1) \nabla^2 v.$$

Следовательно, используя второе неравенство из (3.5) и гладкость v , получаем

$$\|v_a - u_a\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla(v_a - u_a)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)}^2 \leq C\varepsilon, \quad (3.7)$$

так что v_a достаточно близка к асимптотике u_a и $v_a = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Введем обозначения

$$r = u - v_a, \quad r_a = v_a - u_a, \quad (3.8)$$

где u – решение задачи (1.4). Выберем $\varphi = r$ в интегральном тождестве (1.11) и вычтем соответствующие интегралы от v_a . Тогда

$$\begin{aligned} &\int_\Omega m_\varepsilon r'_t r \, dx + \int_\Omega (A_\varepsilon^\sigma(\nabla r + a_\varepsilon r), \nabla r) \, dx + \int_\Omega (k_\varepsilon^\sigma \nabla r) r \, dx \\ &= \int_\Omega r_\varepsilon f r \, dx - \int_\Omega m_\varepsilon (v_a)'_t r \, dx - \int_\Omega (k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a) r \, dx \\ &\quad - \int_\Omega (A_\varepsilon^\sigma(\nabla v_a + a_\varepsilon v_a + b_\varepsilon g), \nabla r) \, dx \equiv I. \end{aligned}$$

Повторяя доказательство леммы 1 и учитывая гладкость v , заключаем, что

$$\begin{aligned} E(r) &\equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \int_0^T \|\nabla r\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 \, dt \\ &\quad + \int_0^T \|\nabla r\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n}^2 \, dt \leq C \|r|_{t=0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^T |I| \, dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В силу представления (3.6) и первого неравенства из (3.5) имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right)$$

и $\|r\|_{t=0}^2 \big|_{L^2(\Omega)} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2/\sigma)$. Таким образом, для доказательства теоремы 1 остается оценить второе слагаемое в правой части неравенства (3.9) величиной $C(\varepsilon + \sigma + \varepsilon^2/\sigma)$.

Используя (3.4) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \nabla v_a &= \nabla r_a + \nabla u_a = \nabla r_a + \nabla v + (\nabla_y N_1)_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_a)_\varepsilon v \\ &\quad + (\nabla_y N_b)_\varepsilon g - \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y Q)_\varepsilon v'_t + \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y P)_\varepsilon f + \varepsilon (N_1)_\varepsilon \nabla^2 v \\ &\quad + \varepsilon (N_a)_\varepsilon \nabla v + \varepsilon (N_b)_\varepsilon g - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} Q_\varepsilon \nabla v'_t + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} P_\varepsilon \nabla f \\ &\equiv \nabla r_a + \nabla v + (\nabla_y N_1)_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_a)_\varepsilon v \\ &\quad + (\nabla_y N_b)_\varepsilon g - \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y Q)_\varepsilon v'_t + \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y P)_\varepsilon f + \varepsilon J_1 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} J_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь и далее $\|J_s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$ в силу первого неравенства из (3.5) и гладкости v , g и f . По определению Q_ε и P_ε равны нулю на Ω_1^ε , следовательно,

$$A_\varepsilon^\sigma (\nabla v_a + a_\varepsilon v_a + b_\varepsilon g) = A_\varepsilon^\sigma \nabla r_a + \varepsilon J_3 + (\tilde{A})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon v + (\tilde{A}_b)_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (3.11)$$

где $\tilde{A}(y) = A_1 + A_1 \nabla_y N_1$, $\tilde{A}_a(y) = A_1 a_1 + A_1 \nabla_y N_a$ и $\tilde{A}_b(y) = A_1 b_1 + A_1 \nabla_y N_b$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A} \rangle_1 &= A, & \langle \tilde{A}_a \rangle_1 &= Aa, & \langle \tilde{A}_b \rangle_1 &= Ab, \\ \operatorname{div}_y \tilde{A} &= 0, & \operatorname{div}_y \tilde{A}_a &= 0, & \operatorname{div}_y \tilde{A}_b &= 0 \quad \text{в } Y_1, \\ (\tilde{A}, \nu) &= 0, & (\tilde{A}_a, \nu) &= 0, & (\tilde{A}_b, \nu) &= 0 \quad \text{на } S \end{aligned} \quad (3.12)$$

в соответствии с (1.12)–(1.15). Аналогично получаем

$$k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a = k_\varepsilon^\sigma \nabla r_a + \varepsilon k_\varepsilon^\sigma J_1 + (\tilde{K})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{k}_a)_\varepsilon v + (\tilde{k}_b)_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (3.13)$$

где $\tilde{K}(y) = k_1 + k_1 \nabla_y N_1$, $\tilde{k}_a(y) = k_1 \nabla_y N_a$ и $\tilde{k}_b(y) = k_1 \nabla_y N_b$ удовлетворяют соотношениям

$$\langle \tilde{K} \rangle_1 = K, \quad \langle \tilde{k}_a \rangle_1 = k_a, \quad \langle \tilde{k}_b \rangle_1 = k_b. \quad (3.14)$$

Соответствующие интегралы по Ω , содержащие ∇r_a , J_1 и J_3 , не существенны в (3.9), поскольку, например,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left| \int_\Omega (A_\varepsilon^\sigma \nabla r_a, \nabla r) dx \right| dt \\ &\leq \frac{\sigma \delta C}{2} \int_0^T \|\nabla r\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 dt + \frac{\delta C}{2} \int_0^T \|\nabla r\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n}^2 dt \\ &\quad + \frac{\sigma C}{2\delta} \int_0^T \|\nabla r_a\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 dt + \frac{C}{2\delta} \int_0^T \|\nabla r_a\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n}^2 dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

(см. доказательство неравенства (2.2)). Выбрав $\delta = 1/C$, интегралы с ∇r справа в (3.15) перенесем в левую часть (3.9), а интегралы с ∇r_a оценим величиной $C\varepsilon$ в силу (3.7). Так же просто оценивается в (3.9) интеграл по Ω_0^ε , содержащий k_ε^σ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a) r \, dx \right| dt &\leq \sigma C \int_0^T \|\nabla v_a\|_{L^2(\Omega)^n} \|r\|_{L^2(\Omega)} \, dt \\ &\leq \sigma C \int_0^T \|\nabla v_a\|_{L^2(\Omega)^n} \, dt \leq C(\sigma + \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.16)$$

в силу леммы 1, представления (3.10) для ∇v_a и определений (1.6). Аналогично, $(v_a)'_t = v'_t + \varepsilon J_4 + (\varepsilon^2/\sigma) J_5$, где интегралы по Ω , содержащие J_4 и J_5 , не существенны в (3.9).

Выделяя сингулярное слагаемое в (3.10), введем обозначение

$$v_2 = \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y P)_\varepsilon f - \frac{\varepsilon}{\sigma} (\nabla_y Q)_\varepsilon v'_t \quad (3.17)$$

и определим v_3 из равенства

$$A_\varepsilon^\sigma (\nabla v_a + a_\varepsilon v_a + b_\varepsilon g) = A_\varepsilon^\sigma v_2 + A_\varepsilon^\sigma v_3 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon.$$

Непосредственно из (1.6), (3.5), (3.7) и (3.10) заключаем, что

$$\int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_3, \nabla r) \, dx \right| dt \leq \frac{\sigma \delta C}{2} \int_0^T \|\nabla r\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n}^2 \, dt + \frac{\sigma C}{2\delta} \quad (3.18)$$

(см. (2.2)), и, выбрав $\delta = 1/C$, интеграл с ∇r справа в (3.18) перенесем в левую часть (3.9).

Таким образом, учитывая (3.11), (3.13), (3.15), (3.16) и (3.18), неравенство (3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) &\leq C \int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (r_0)_\varepsilon f r \, dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0)_\varepsilon v'_t r \, dx \right. \\ &\quad - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nabla r) \, dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} (r_1)_\varepsilon f r \, dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (m_1)_\varepsilon v'_t r \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon v + (\tilde{A}_b)_\varepsilon g, \nabla r) \, dx \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{K})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{k}_a)_\varepsilon v + (\tilde{k}_b)_\varepsilon g) r \, dx \right| dt + C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая граничные условия из (1.4) и определение функции r , на границе $\partial\Omega$ имеем равенство $r = 0$. Кроме того, граница $S_\varepsilon \equiv \partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega$ имеет класс C^2 , и поэтому в области Ω_1^ε выполнена следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A}_a)_\varepsilon v, \nabla r) \, dx = \int_{S_\varepsilon} (\tilde{A}_a, \nu)_\varepsilon v r \, ds - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div}((\tilde{A}_a)_\varepsilon v) r \, dx \quad (3.20)$$

(см. формулу (2.4) и [14]). Отметим, что $(\tilde{A}_a, \nu)_\varepsilon = 0$ на S_ε в соответствии с (3.12). Для оператора дивергенции формула (3.4) имеет вид

$$\operatorname{div}((\tilde{A}_a)_\varepsilon v) = \varepsilon^{-1}(\operatorname{div}_y \tilde{A}_a)_\varepsilon v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon \nabla v. \quad (3.21)$$

Используя (3.12), (3.20), заключаем, что

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon v + (\tilde{A}_b)_\varepsilon g, \nabla r) dx \\ & = \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A})_\varepsilon \nabla^2 v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_b)_\varepsilon \nabla g) r dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для области Ω_0^ε также выполнена формула интегрирования по частям (3.20), изменяется только знак у нормали ν_ε в соответствии с равенством $\partial\Omega_0^\varepsilon \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega = S_\varepsilon$. Следовательно, учитывая (1.6), (3.2), (3.17) и (3.21), получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nabla r) dx &= \int_{S_\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nu_\varepsilon) r ds + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} \operatorname{div}((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon f) r dx \\ & - \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} \operatorname{div}((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon v'_t) r dx = \int_{S_\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nu_\varepsilon) r ds \\ & + \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y P)_\varepsilon f r dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon v'_t r dx \\ & + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon r, \nabla f) dx - \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon r, \nabla v'_t) dx \\ & = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon f r ds - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon v'_t r ds \\ & - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (r_0)_\varepsilon f r dx + \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0)_\varepsilon v'_t r dx + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} J_6 r dx, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где последний интеграл не существует в (3.19) в силу гладкости f , v'_t и первого неравенства из (3.5) для Q и P . Таким образом, интегралы по Ω_0^ε заменяются в (3.19) на интегралы по S_ε в соответствии с (3.23).

Используя (1.5), перепишем осредненное уравнение из (1.16) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\langle m_0 \rangle \mathbf{0}}{\theta_1} + \frac{\langle m_1 \rangle \mathbf{1}}{\theta_1} \right) v'_t - \frac{A}{\theta_1} (\nabla^2 v + a \nabla v + b \nabla g) \\ & + \frac{K}{\theta_1} \nabla v + \frac{k_a}{\theta_1} v + \frac{k_b}{\theta_1} g - \left(\frac{\langle r_0 \rangle \mathbf{0}}{\theta_1} + \frac{\langle r_1 \rangle \mathbf{1}}{\theta_1} \right) f = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

и введем обозначения для функций, имеющих нулевое среднее на Y_1 :

$$\begin{aligned} \hat{r}_1(y) &= r_1(y) - \frac{\langle r_1 \rangle \mathbf{1}}{\theta_1}, & \hat{m}_1(y) &= m_1(y) - \frac{\langle m_1 \rangle \mathbf{1}}{\theta_1}, \\ \hat{A}(y) &= \tilde{A} - \frac{A}{\theta_1}, & \hat{A}_a(y) &= \tilde{A}_a - \frac{A_a}{\theta_1}, & \hat{A}_b(y) &= \tilde{A}_b - \frac{A_b}{\theta_1}, \\ \hat{K}(y) &= \tilde{K} - \frac{K}{\theta_1}, & \hat{k}_a(y) &= \tilde{k}_a - \frac{k_a}{\theta_1}, & \hat{k}_b(y) &= \tilde{k}_b - \frac{k_b}{\theta_1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Умножим (3.24) на r , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_1^ε и учтем результат в (3.19). Тогда, используя (3.19), (3.22) и (3.23), неравенство (3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) \leq & C \int_0^T \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon f r \, ds - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon v'_t r \, ds \right. \\ & + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon v'_t r \, dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle r_0 \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon f r \, dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\hat{r}_1)_\varepsilon f r \, dx \\ & - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\hat{m}_1)_\varepsilon v'_t r \, dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\hat{A}))_\varepsilon \nabla^2 v + (\hat{A}_a)_\varepsilon \nabla v + (\hat{A}_b)_\varepsilon \nabla g) r \, dx \\ & \left. - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\hat{K}))_\varepsilon \nabla v + (\hat{k}_a)_\varepsilon v + (\hat{k}_b)_\varepsilon g) r \, dx \right| dt + C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (3.26) \end{aligned}$$

Интегралы в (3.26), содержащие функции из (3.25), оцениваются одинаково. Поэтому рассмотрим, например, первый из этих интегралов. Определим $U \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ как 1-периодическое решение задачи Неймана на Y_1 :

$$-\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y U) = \hat{r}_1 \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y U, \nu) = 0 \quad \text{на } S. \quad (3.27)$$

В силу леммы 2 такое решение существует и удовлетворяет неравенству

$$\|(A_1 \nabla_y U)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n} \leq C, \quad (3.28)$$

поскольку область $\Omega_1^\varepsilon \subset \Omega$ ограничена. Следовательно, используя (3.20), (3.21) и (3.27), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\hat{r}_1)_\varepsilon f r \, dx &= - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_1 \nabla_y U)_\varepsilon f r \, dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla f) r \, dx - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div}((A_1 \nabla_y U)_\varepsilon f) r \, dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla f) r \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y U)_\varepsilon f, \nabla r) \, dx, \quad (3.29) \end{aligned}$$

так что эти интегралы не существенны в (3.26) в силу леммы 1, гладкости f и неравенства (3.28). Здесь учтено, что $(A_1 \nabla_y U, \nu)_\varepsilon = 0$ на S_ε в силу (3.27).

Обозначим $W = A_0 \nabla_y Q$. Тогда $W \in L^2(Y_0)^n$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)$ в силу (3.2) и первого неравенства из (3.5) для Q . Следовательно, определен след (W, ν) на S как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S)$ в соответствии с неравенством (2.5) для Y_0 . Интегрируя (3.2) по Y_0 и затем по частям, получаем

$$\langle m_0 \rangle_0 = -\langle \operatorname{div}_y A_0 \nabla_y Q \rangle_0 = \int_S (A_0 \nabla_y Q, \nu) \, ds, \quad (3.30)$$

где учтено, что ν является внутренней нормалью для Y_0 . Далее, $\langle \langle m_0 \rangle_0 / \theta_1 \rangle_1 = \langle m_0 \rangle_0$ и в силу леммы 2 существует 1-периодическое решение $V \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ задачи Неймана на Y_1 :

$$-\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y V) = \frac{\langle m_0 \rangle_0}{\theta_1} \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y V, \nu) = (A_0 \nabla_y Q, \nu) \quad \text{на } S, \quad (3.31)$$

удовлетворяющее неравенству (3.28). Следовательно, используя (3.20), (3.21) и (3.31), имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon v'_t r \, dx &= - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_1 \nabla_y V)_\varepsilon v'_t r \, dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon (\nabla v'_t) r \, dx - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div}((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon v'_t) r \, dx \\
&= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon (\nabla v'_t) r \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon v'_t, \nabla r) \, dx \\
&\quad - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_1 \nabla_y V, \nu)_\varepsilon v'_t r \, ds = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon v'_t r \, ds \\
&\quad + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon (\nabla v'_t) r \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon v'_t, \nabla r) \, dx, \quad (3.32)
\end{aligned}$$

где последние два интеграла не существенны в (3.26) (в силу леммы 1, гладкости v и неравенства (3.28) для V), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (3.26). Оценивая аналогичным образом оставшиеся в (3.26) интегралы, заключаем, что

$$E(r) \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \quad (3.33)$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Несложно проверить, что в доказательстве теоремы 1 использовались только конечная гладкость (2.9) с $\varkappa \leq 2$ решения осредненной задачи (1.16) и конечная гладкость f и g .

Учитывая явный вид задач (3.1), можно улучшить оценку (3.18). Определяя дополнительные задачи на ячейке, можно улучшить оценку (3.16). Такой подход позволяет увеличить показатели степеней σ и ε^2/σ в (3.33). Однако без дополнительных предположений не улучшается показатель степени ε в (3.33), чему препятствует неулучшаемость оценки (3.7), связанная с краевыми эффектами в задаче (1.4) вблизи $\partial\Omega$.

§4. Доказательство теоремы 2

Как и в доказательстве теоремы 1, пусть $N_a, N_b \in H_P^1(Y)$ и $N_1 \in H_P^1(Y)^n$ удовлетворяют (1.14), (1.12), (3.1), поэтому и неравенствам (3.5). Пусть функции $Q(t, y)$ и $P(t, y)$ являются 1-периодическими решениями задач (1.17). Тогда из леммы 3 и ограниченности области Ω следуют неравенства

$$\begin{aligned}
\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \vartheta \|\nabla_y Q_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 &\leq C, \\
\|P_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \vartheta \|\nabla_y P_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 &\leq C.
\end{aligned} \quad (4.1)$$

В этих неравенствах и далее постоянная C не зависит от ε , σ и ϑ .

В случае когда выполнено условие (1.2), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) задаются равенством

$$u_a = v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon \nabla v + \varepsilon(N_a)_\varepsilon v + \varepsilon(N_b)_\varepsilon g - Q_\varepsilon * (v'_t) + P_\varepsilon * f, \quad (4.2)$$

где v – решение осредненной задачи (1.19). Отметим, что последние два слагаемых в (4.2) определены как элементы пространства $C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ в силу леммы 5, неравенств (4.1) и гладкости v и f . Определим также подправленную асимптотику v_a равенством

$$v_a = u_a + \varepsilon(N_1)_\varepsilon(\eta - 1)\nabla v \quad (4.3)$$

(см. §3). Тогда выполнено неравенство (3.7) и $v_a = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Введем обозначения (3.8). Тогда выполнены неравенство (3.9), неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\varepsilon$$

и $\|r\|_{t=0}^2 \leq C\varepsilon$ в силу первого неравенства из (3.5). Таким образом, для доказательства теоремы 2 остается оценить второе слагаемое в правой части неравенства (3.9) величиной

$$C \left(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{\vartheta} + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\vartheta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma\vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right).$$

При этом интегралы по Ω_1^ε будут оцениваться фактически так же, как и в доказательстве теоремы 1, а оценки интегралов по Ω_0^ε несколько изменятся.

По определению Q_ε и P_ε равны нулю на $\Omega_1^\varepsilon \times (0, T)$. Следовательно, выполнены соотношения (3.11)–(3.14), а равенство (3.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla v_a = \nabla r_a + \nabla v + (\nabla_y N_1)_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_a)_\varepsilon v + (\nabla_y N_b)_\varepsilon g \\ - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y P)_\varepsilon * f - Q_\varepsilon * (\nabla v'_t) + P_\varepsilon * (\nabla f) + \varepsilon J_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь и далее $\|J_s\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C$ в силу первого неравенства из (3.5) и гладкостей v , g и f с оценками норм, не зависящими от ϑ (см. лемму 8). Соответствующие интегралы по Ω , содержащие ∇r_a , J_1 и J_3 (из (3.11)), не существенны в (3.9), поскольку, например, для интеграла с ∇r_a выполнено (3.15).

Выделяя сингулярное слагаемое в (4.4), введем обозначение

$$v_2 = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y P)_\varepsilon * f - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t) \quad (4.5)$$

и определим v_3 из равенства

$$A_\varepsilon^\sigma (\nabla v_a + a_\varepsilon v_a + b_\varepsilon g) = A_\varepsilon^\sigma v_2 + A_\varepsilon^\sigma v_3 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon. \quad (4.6)$$

Непосредственно из (1.6), (3.5), (3.7), (4.1), (4.4) и леммы 5 заключаем, что выполнено неравенство (3.18). При выводе этого неравенства использовано, что v_3 не содержит градиентов от Q_ε и P_ε , оценки которых могут зависеть от ϑ . Так же просто оценивается в (3.9) интеграл по Ω_0^ε , содержащий k_ε^σ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a) r \, dx \right| dt &\leq \sigma C \int_0^T \|v_2 + \nabla v_a - v_2\|_{L^2(\Omega)^n} \|r\|_{L^2(\Omega)} \, dt \\ &\leq \frac{\sigma C}{\varepsilon} \int_0^T \|(\nabla_y P)_\varepsilon * f\|_{L^2(\Omega)^n} \, dt + \frac{\sigma C}{\varepsilon} \int_0^T \|(\nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t)\|_{L^2(\Omega)^n} \, dt \\ &\quad + \sigma C \int_0^T \|\nabla v_a - v_2\|_{L^2(\Omega)^n} \, dt \leq \frac{\sigma C}{\varepsilon} \|(\nabla_y P)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)} \\ &\quad + \frac{\sigma C}{\varepsilon} \|(\nabla_y Q)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)} + \sigma C \leq C \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\vartheta}} + \sigma \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

(см. доказательство леммы 5), где учтены лемма 1, неравенства (3.5) и (4.1), гладкость v , g , f и тот факт, что $\nabla v_a - v_2$ не содержит градиентов от Q_ε и P_ε .

Непосредственно из (1.6) и (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nabla r) dx &= \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, \nabla r) dx \\ &- \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx = \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, \nabla r) dx \\ &- \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx + \varepsilon \left(\frac{\sigma}{\varepsilon^2} - \vartheta \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, \nabla r) dx \\ &- \varepsilon \left(\frac{\sigma}{\varepsilon^2} - \vartheta \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где последние два интеграла не существенны в (3.9), поскольку, например,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left| \varepsilon \left(\frac{\sigma}{\varepsilon^2} - \vartheta \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, \nabla r) dx \right| dt \\ &\leq \varepsilon \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \| (A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \| \nabla r \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)} \\ &\leq \frac{\varepsilon C}{\sqrt{\sigma}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \| (\nabla_y P)_\varepsilon \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \leq \frac{\varepsilon C}{\sqrt{\sigma \vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь учтены леммы 1 и 5, неравенство (4.1) и гладкость f .

Используя первое равенство из (2.7) и начальные условия из (1.17), получаем

$$\begin{aligned} (v_a)'_t &= v'_t + (P'_t)_\varepsilon * f + (P|_{t=0})_\varepsilon f - (Q'_t)_\varepsilon * (v'_t) - (Q|_{t=0})_\varepsilon v'_t + \varepsilon J_4 \\ &= (P'_t)_\varepsilon * f + \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon f - (Q'_t)_\varepsilon * (v'_t) + \varepsilon J_4 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon \end{aligned} \quad (4.10)$$

и $(v_a)'_t = v'_t + \varepsilon J_4$ в Ω_1^ε , где интегралы, содержащие J_4 , не существенны в (3.9).

Таким образом, учитывая (3.11), (3.13), (3.15), (3.18), (4.7), (4.8) и (4.10), неравенство (3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) &\leq C \int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0 Q'_t)_\varepsilon * (v'_t) r dx - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0 P'_t)_\varepsilon * (f) r dx \right. \\ &\quad + \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx - \varepsilon \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * (f), \nabla r) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{A})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{A}_a)_\varepsilon v + (\tilde{A}_b)_\varepsilon g, \nabla r) dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (m_1)_\varepsilon v'_t r dx \\ &\quad - \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((\tilde{K})_\varepsilon \nabla v + (\tilde{k}_a)_\varepsilon v + (\tilde{k}_b)_\varepsilon g) r dx + \left. \int_{\Omega_1^\varepsilon} (r_1)_\varepsilon f r dx \right| dt \\ &\quad + C \left(\varepsilon + \varepsilon \sqrt{\vartheta} + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon \sqrt{\vartheta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma \vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя равенство (3.21), уравнения из (1.17) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon\vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * (f), \nabla r) dx = \varepsilon\vartheta \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f) r ds \\
& + \varepsilon\vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} \operatorname{div}((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f) r dx = \varepsilon\vartheta \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f) r ds \\
& + \vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((\operatorname{div}_y A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f) r dx + \varepsilon\vartheta \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * (\nabla f)) r dx \\
& = \varepsilon\vartheta \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f) r ds + \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((m_0 P'_t)_\varepsilon * f) r dx + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} J_5 r dx, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

где последний интеграл не существует в (4.11) в силу леммы 5, гладкости f и неравенства (4.1) для P . Аналогичные (4.12) равенства выполнены для интеграла по Ω_0^ε в (4.11), содержащего ϑ и Q . Таким образом, интегралы по Ω_0^ε заменяются в (4.11) на интегралы по S_ε в соответствии с (4.12).

Учитывая (1.5), перепишем осредненное уравнение из (1.19) в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle m_1 \rangle_1}{\theta_1} v'_t - \left(\frac{\langle m_0 Q'_t \rangle_0}{\theta_1} \right) * (v'_t) - \frac{A}{\theta_1} (\nabla^2 v + a \nabla v + b \nabla g) \\
& + \frac{K}{\theta_1} \nabla v + \frac{k_a}{\theta_1} v + \frac{k_b}{\theta_1} g - \frac{\langle r_1 \rangle_1}{\theta_1} f + \left(\frac{\langle m_0 P'_t \rangle_0}{\theta_1} \right) * f = 0 \quad (4.13)
\end{aligned}$$

и введем обозначения (3.25) для функций, имеющих нулевое среднее на Y_1 . Умножим (4.13) на r , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_1^ε и учтем результат и равенство (3.22) в (4.11). Тогда, оценивая интегралы в (4.11), содержащие функции из (3.25), как и в §3 (см. (3.27)–(3.29)), неравенство (4.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
E(r) & \leq C \int_0^T \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 P'_t \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon * f r dx - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 Q'_t \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon * (v'_t) r dx \right. \\
& + \varepsilon\vartheta \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f r ds - \varepsilon\vartheta \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon * (v'_t) r ds \Big| dt \\
& + C \left(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{\vartheta} + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\vartheta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma\vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right). \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Интегралы в (4.14), содержащие функции P и Q , оцениваются одинаково. Поэтому рассмотрим, например, интегралы с P . Для оценки этих интегралов непосредственно не применима схема из §3 (см. (3.30)–(3.32)), поскольку производные по t от решений задачи (1.17) могут иметь особенности и соответствующие следы на S могут быть не определены. Однако свертка по t примечательна тем, что производные по t можно “перебросить” на второй, достаточно гладкий, множитель, и возникшая проблема легко решается.

Пусть R обозначает такую первообразную по t от P , что $R|_{t=0} = 0$. Из равенств (2.7) следует, что

$$\begin{aligned}
\langle m_0 P'_t \rangle_0 * f & = \left\langle m_0 \left(\int_0^t P'_t dt \right)' \right\rangle_{t/0} * f = \langle m_0 P - r_0 \rangle_0 * (f'_t), \\
(A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f & = (A_0 \nabla_y R, \nu)_\varepsilon * (f'_t). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Интегрируя по t уравнение для P из (1.17), имеем

$$m_0 P - r_0 = \vartheta \operatorname{div}(A_0 \nabla_y R) \quad \text{в } Y_0 \times (0, T). \quad (4.16)$$

По определению $P = R'_t$, и поэтому R удовлетворяет неравенству (4.1) (см. лемму 3 и [4]).

Из неравенств (4.1) для P и R следует, что $W \equiv \vartheta A_0 \nabla_y R \in L^2(Y_0)^n$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Поэтому для таких $t \in (0, T)$ определен след (W, ν) на S как элемент пространства $H_P^{-1/2}(S)$ и

$$\|(W, \nu)\|_{H_P^{-1/2}(S)}^2 \leq C(\|\vartheta A_0 \nabla_y R\|_{L^2(Y_0)^n}^2 + \|m_0 P - r_0\|_{L^2(Y_0)}^2)$$

в соответствии с неравенством (2.5) для Y_0 . Интегрируя последнее неравенство по $(0, T)$ и учитывая (4.1), имеем

$$\|(W, \nu)\|_{L^2(0, T; H_P^{-1/2}(S))}^2 \leq C(1 + \vartheta). \quad (4.17)$$

Интегрируя (4.16) по Y_0 и затем по частям, получаем

$$\langle r_0 - m_0 P \rangle_0 = -\vartheta \langle \operatorname{div}_y A_0 \nabla_y R \rangle_0 = \vartheta \int_S (A_0 \nabla_y R, \nu) ds.$$

Эти равенства гарантируют для почти всех $t \in (0, T)$ разрешимость задачи Неймана на Y_1 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y(A_1 \nabla_y V) &= \frac{\langle r_0 - m_0 P \rangle_0}{\theta_1} \quad \text{в } Y_1, \\ -(A_1 \nabla_y V, \nu) &= \vartheta(A_0 \nabla_y R, \nu) \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В силу леммы 2 для почти всех $t \in (0, T)$ существует 1-периодическое решение $V \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ задачи (4.18) и

$$\|A_1 \nabla_y V\|_{L^2(Y_1)^n}^2 \leq C(|\langle r_0 - m_0 P \rangle_0|^2 + \|\vartheta(A_0 \nabla_y R, \nu)\|_{H_P^{-1/2}(S)}^2).$$

Интегрируя последнее неравенство по $(0, T)$ и учитывая (4.1) и (4.17), имеем

$$\|(A_1 \nabla_y V)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n)} \leq C\sqrt{1 + \vartheta} \leq C(1 + \sqrt{\vartheta}), \quad (4.19)$$

поскольку область $\Omega_1^\varepsilon \subset \Omega$ ограничена.

Таким образом, используя (3.20), (3.21), (4.15) и (4.18), получаем

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 P'_t \rangle_0}{\theta_1} \right)_\varepsilon * f r dx &= -\int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t) r dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t) r dx - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div}((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t)) r dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t) r dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), \nabla r) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_1 \nabla_y V, \nu)_\varepsilon * (f'_t) r ds = \varepsilon \vartheta \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y R, \nu)_\varepsilon * (f'_t) r ds \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t) r dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), \nabla r) dx, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где последние два интеграла не существенны в (4.14) (в силу лемм 1 и 5, гладкости f и неравенства (4.19)), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (4.14) в силу (4.15). Оценивая аналогичным образом оставшиеся в (4.14) интегралы, заключаем, что

$$E(r) \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon\sqrt{\vartheta} + \sigma + \frac{\sigma}{\varepsilon\sqrt{\vartheta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma\vartheta}} \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right). \quad (4.21)$$

Из условия (1.2) следует, что $\sigma/(\varepsilon\sqrt{\vartheta}) = \sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma}/\varepsilon\sqrt{\vartheta})$, где при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$ величина $\sqrt{\sigma}/\varepsilon$ сходится к $\sqrt{\vartheta}$ и поэтому ограничена. По аналогичной причине ограничена и величина $\varepsilon/\sqrt{\sigma}$, что доказывает теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Несложно проверить, что в доказательстве теоремы 2 использовалась только конечная гладкость (2.9) решения осредненной задачи (1.19) и конечная гладкость f и g .

§5. Доказательство теоремы 4

Как и в доказательстве теорем 1 и 2, пусть $N_a, N_b \in H_P^1(Y)$ и $N_1 \in H_P^1(Y)^n$ удовлетворяют (1.14), (1.12), (3.1) и (3.5). Пусть функции $Q(t, y)$, $P(t, y)$, $q(t, y)$ и $p(t, y)$ являются 1-периодическими решениями начально-краевых задач (1.22) и поэтому удовлетворяют неравенствам (4.1). В этих неравенствах и далее постоянные C не зависят от ε и σ , но могут зависеть от ϑ .

В случае когда выполнено условие (1.2), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4), (1.21) задаются равенством

$$u_a = v + \varepsilon(N_1)_\varepsilon \nabla v + \varepsilon(N_a)_\varepsilon v + \varepsilon(N_b)_\varepsilon g - Q_\varepsilon * (v'_t) + P_\varepsilon * f + q_\varepsilon * v + p_\varepsilon * g, \quad (5.1)$$

где v – решение осредненной задачи (1.24), которое существует и достаточно гладко в силу леммы 10. Определим также подправленную асимптотику v_a равенством (4.3). Тогда выполнено неравенство (3.7) и $v_a = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Введем обозначения (3.8). Тогда выполнены неравенство (3.9), неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t) - q_\varepsilon * v - p_\varepsilon * g\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|r\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\varepsilon$$

и $\|r\|_{t=0}^2_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon$ в силу первого неравенства из (3.5). Таким образом, для доказательства теоремы 4 остается оценить второе слагаемое в правой части неравенства (3.9) величиной $C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + |\vartheta - \sigma/\varepsilon^2| + |\sqrt{\vartheta} - \sqrt{\sigma}/\varepsilon|)$. При доказательстве этой оценки будет использоваться схема доказательства из §4, но с некоторыми изменениями, вызванными наличием дополнительных слагаемых в (1.21) по сравнению с (1.6) и (1.10).

По определению Q_ε , P_ε , q_ε и p_ε равны нулю на $\Omega_1^\varepsilon \times (0, T)$. Поэтому, как и в §4, выполнены соотношения (3.11)–(3.14), а равенство (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla v_a &= \nabla r_a + \nabla v + (\nabla_y N_1)_\varepsilon \nabla v + (\nabla_y N_a)_\varepsilon v + (\nabla_y N_b)_\varepsilon g \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y P)_\varepsilon * f - Q_\varepsilon * (\nabla v'_t) + P_\varepsilon * (\nabla f) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y q)_\varepsilon * v + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y p)_\varepsilon * g + q_\varepsilon * (\nabla v) + p_\varepsilon * (\nabla g) + \varepsilon J_1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь и далее соответствующие интегралы по Ω , содержащие ∇r_a и J_s , не существуют в (3.9) (см., например, (3.15)).

Выделяя сингулярные слагаемые в (5.2), введем обозначения (4.5) и

$$v_4 = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y q)_\varepsilon * v + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y p)_\varepsilon * g. \quad (5.3)$$

Обозначим $J_2 = (N_1)_\varepsilon \nabla v + (N_a)_\varepsilon v + (N_b)_\varepsilon g$ и определим v_3 из равенства

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^\sigma (\nabla v_a + a_\varepsilon v_a + b_\varepsilon g) &= A_\varepsilon^\sigma v_2 + A_\varepsilon^\sigma v_3 + A_\varepsilon^\sigma v_4 + \varepsilon \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0)_\varepsilon J_2 \\ &\quad - \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t) + \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0 P)_\varepsilon * f + \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0 q)_\varepsilon * v \\ &\quad + \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0 p)_\varepsilon * g + \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0)_\varepsilon v + \sqrt{\sigma} (A_0 b_0^0)_\varepsilon g \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Как и в §4, для слагаемого $A_\varepsilon^\sigma v_3$ в (5.4) выполнено неравенство (3.18). Аналогично величиной $C\varepsilon$ оценивается в (3.9) интеграл по Ω_0^ε , содержащий $\varepsilon \sqrt{\sigma} (A_0 a_0^0)_\varepsilon J_2$ (см. (2.10)).

Заметим, что для $A_\varepsilon^\sigma v_2$ и $A_\varepsilon^\sigma v_4$ выполнены соотношения (4.8) и (4.9). Эти соотношения фактически означают, что величину σ/ε в (5.4) можно заменить на $\varepsilon\vartheta$ с точностью до не существенных в (3.9) интегралов. Аналогично величину $\sqrt{\sigma}$ в (5.4) можно заменить на $\varepsilon\sqrt{\vartheta}$. Поскольку, например,

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx &= \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} - \sqrt{\vartheta} \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где последний интеграл не существует в (3.9), имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left| \varepsilon \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} - \sqrt{\vartheta} \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx \right| dt \\ &\leq \varepsilon \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \| (A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t) \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \| \nabla r \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon)^n)} \\ &\leq \frac{\varepsilon C}{\sqrt{\sigma}} \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \| Q_\varepsilon \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \end{aligned} \quad (5.6)$$

в силу лемм 1 и 5, неравенства (4.1) для Q_ε , гладкости v и ограниченности величины $\varepsilon/\sqrt{\sigma}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$.

По определению $k_\varepsilon^\sigma = \sigma k_0 + \sqrt{\sigma} k_0^0$ в Ω_0^ε . Для интеграла по Ω_0^ε , содержащего k_0 , выполнены неравенства (4.7), и поэтому этот интеграл не существует в (3.9). Далее, имеем равенство

$$\sqrt{\sigma} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla v_a) r dx = \sqrt{\sigma} \int_{\Omega_0^\varepsilon} k_0^0 (v_2 + v_4) r dx + \sqrt{\sigma} \int_{\Omega_0^\varepsilon} k_0^0 (\nabla v_a - v_2 - v_4) r dx,$$

где последний интеграл не существует в (3.9) в силу неравенств, аналогичных (4.7). Следовательно, можно считать, что

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a) r \, dx = -\sqrt{\sigma} \int_{\Omega_0^\varepsilon} k_0^0 (v_2 + v_4) r \, dx \\
& = \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y P)_\varepsilon * f r \, dx \\
& \quad - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y q)_\varepsilon * v r \, dx - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y p)_\varepsilon * g r \, dx. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

В этих равенствах величину $\sqrt{\sigma}/\varepsilon$ можно заменить величиной $\sqrt{\vartheta}$. Поскольку, например,

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx = \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx \\
& \quad + \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} - \sqrt{\vartheta} \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

где последний интеграл не существует в (3.9), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left| \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} - \sqrt{\vartheta} \right) \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx \right| dt \\
& \leq C \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \|(\nabla_y Q)_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)} \leq C \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right|
\end{aligned}$$

в силу лемм 1 и 5, неравенства (4.1) для Q_ε и гладкости v .

Используя первое равенство из (2.7) и начальные условия из (1.22), получаем

$$\begin{aligned}
(v_a)'_t &= (P'_t)_\varepsilon * f + \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon f - (Q'_t)_\varepsilon * (v_t') + (q'_t)_\varepsilon * v + (p'_t)_\varepsilon * g \\
& \quad + \sqrt{\vartheta} \left(\frac{\operatorname{div}_y A_0 a_0^0}{m_0} \right)_\varepsilon v + \sqrt{\vartheta} \left(\frac{\operatorname{div}_y A_0 b_0^0}{m_0} \right)_\varepsilon g + \varepsilon J_3 \quad \text{в } \Omega_0^\varepsilon \quad (5.9)
\end{aligned}$$

и $(v_a)'_t = v'_t + \varepsilon J_3$ в Ω_1^ε , где интегралы по Ω , содержащие J_3 , не существенны в (3.9).

Учитывая (3.15), (3.18), (4.7), (4.8) и (5.4)–(5.9), интегралы по Ω_0^ε в (3.9), содержащие Q , можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0 Q'_t)_\varepsilon * (v_t') r \, dx + \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t') r \, dx \\
& \quad + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v_t'), \nabla r) \, dx \quad (5.10)
\end{aligned}$$

(см. (4.11)). Используя равенство (3.21), уравнения из (1.22) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t), \nabla r) dx \\
&= -\varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon, \nu)_\varepsilon * (v'_t) r ds \\
&\quad - \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} \operatorname{div}((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon * (v'_t)) r dx \\
&= -\varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q)_\varepsilon, \nu)_\varepsilon * (v'_t) r ds \\
&\quad - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0 Q'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v'_t) r dx + \varepsilon \int_{\Omega_0^\varepsilon} J_4 r dx, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

где последний интеграл не существует в (3.9) в силу леммы 5, гладкости v и неравенства (4.1) для Q_ε . Таким образом, интегралы (5.10) заменяются в (3.9) на интегралы по S_ε в соответствии с (5.11). Точно так же преобразуются интегралы по Ω_0^ε в (3.9), содержащие P .

Аналогично, учитывая (3.15), (3.18), (4.7), (4.8) и (5.4)–(5.9), интегралы по Ω_0^ε в (3.9), содержащие v , можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_0^\varepsilon} (m_0 q'_t)_\varepsilon * v r dx - \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y q + A_0 a_0^0 q)_\varepsilon * v, \nabla r) dx \\
& - \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_0^0 \nabla_y q)_\varepsilon * v r dx - \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_0 a_0^0)_\varepsilon v r dx \\
& - \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 a_0^0)_\varepsilon v, \nabla r) dx
\end{aligned}$$

и заменить на граничные интегралы

$$\varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y q + A_0 a_0^0 q)_\varepsilon, \nu)_\varepsilon * v r ds + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} (A_0 a_0^0, \nu)_\varepsilon v r ds. \quad (5.12)$$

Точно так же преобразуются интегралы по Ω_0^ε в (3.9), содержащие g .

Используя (2.7) и начальные условия из (1.22), получаем

$$\begin{aligned}
\langle m_0 q \rangle_0 * (v'_t) &= \langle m_0 q'_t \rangle_0 * v + \sqrt{\vartheta} \langle \operatorname{div}_y A_0 a_0^0 \rangle_0 v, \\
\langle m_0 p \rangle_0 * (g'_t) &= \langle m_0 p'_t \rangle_0 * g + \sqrt{\vartheta} \langle \operatorname{div}_y A_0 b_0^0 \rangle_0 g.
\end{aligned} \quad (5.13)$$

Учитывая эти равенства и (1.5), перепишем первое уравнение из (1.24) в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\langle m_1 \rangle_1}{\theta_1} v'_t - \frac{M_k}{\theta_1} * (v'_t) - \frac{A}{\theta_1} (\nabla^2 v + a \nabla v + b \nabla g) + \frac{K}{\theta_1} \nabla v + \frac{k_a}{\theta_1} v + \frac{k_b}{\theta_1} g \\
& + \frac{q_0 k}{\theta_1} * v + \frac{q_a}{\theta_1} v + \frac{p_0 k}{\theta_1} * g + \frac{p_b}{\theta_1} g - \frac{\langle r_1 \rangle_1}{\theta_1} f + \frac{R_k}{\theta_1} * f = 0, \quad (5.14)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_k &= \langle m_0 Q'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y Q \rangle_0, \quad q_{0k} = \langle m_0 q'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y q \rangle_0, \quad q_a = \sqrt{\vartheta} \langle \operatorname{div}_y A_0 a_0^0 \rangle_0, \\ R_k &= \langle m_0 P'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y P \rangle_0, \quad p_{0k} = \langle m_0 p'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y p \rangle_0, \quad p_b = \sqrt{\vartheta} \langle \operatorname{div}_y A_0 b_0^0 \rangle_0. \end{aligned}$$

Введем обозначения (3.25) для функций, имеющих нулевое среднее на Y_1 . Умножим (5.14) на r , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_1^ε и учтем результат и равенство (3.22) в (3.9). Тогда, оценивая интегралы в (3.9), содержащие функции из (3.25), как и в §3 (см. (3.27)–(3.29)), неравенство (3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) &\leq C \int_0^T \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{q_{0k}}{\theta_1} \right)_\varepsilon * vr \, dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{q_a}{\theta_1} \right)_\varepsilon vr \, dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{p_{0k}}{\theta_1} \right)_\varepsilon * gr \, dx \right. \\ &\quad - \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y Q + A_0 a_0^0 Q), \nu)_\varepsilon * (v'_t) r \, ds - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{M_k}{\theta_1} \right)_\varepsilon * (v'_t) r \, dx \\ &\quad + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y P + A_0 a_0^0 P), \nu)_\varepsilon * fr \, ds + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{R_k}{\theta_1} \right)_\varepsilon * fr \, dx \\ &\quad + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y q + A_0 a_0^0 q), \nu)_\varepsilon * vr \, ds + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} (A_0 a_0^0, \nu)_\varepsilon vr \, ds \\ &\quad + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y p + A_0 a_0^0 p), \nu)_\varepsilon * gr \, ds + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} (A_0 b_0^0, \nu)_\varepsilon gr \, ds \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{p_b}{\theta_1} \right)_\varepsilon gr \, dx \right| dt + C \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| + \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \right). \quad (5.15) \end{aligned}$$

Обозначим $W = \sqrt{\vartheta} A_0 a_0^0$. Тогда $W \in L^2(Y_0)^n$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)$ в силу условий на коэффициенты задачи (1.4), (1.21). Следовательно, определен след $(W, \nu) \in H_P^{-1/2}(S)$ в соответствии с неравенством (2.5) для Y_0 . Интегрируя по частям, получаем

$$q_a = \sqrt{\vartheta} \langle \operatorname{div}_y A_0 a_0^0 \rangle_0 = -\sqrt{\vartheta} \int_S (A_0 a_0^0, \nu) \, ds.$$

Тогда в соответствии с леммой 2 существует 1-периодическое решение $U \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ задачи Неймана на Y_1 :

$$-\operatorname{div}_y (A_1 \nabla_y U) = \frac{q_a}{\theta_1} \quad \text{в } Y_1, \quad -(A_1 \nabla_y U, \nu) = -\sqrt{\vartheta} (A_0 a_0^0, \nu) \quad \text{на } S, \quad (5.16)$$

удовлетворяющее неравенству (3.28). Следовательно, используя (3.20), (3.21) и (5.16), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{q_a}{\theta_1} \right)_\varepsilon vr \, dx &= - \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_1 \nabla_y U)_\varepsilon vr \, dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla v) r \, dx - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div}((A_1 \nabla_y U)_\varepsilon v) r \, dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y U)_\varepsilon (\nabla v) r \, dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y U)_\varepsilon v, \nabla r) \, dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_1 \nabla_y U, \nu)_\varepsilon vr \, ds \\ &= -\varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} (A_0 a_0^0, \nu)_\varepsilon vr \, ds + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} J_5 r \, dx, \quad (5.17) \end{aligned}$$

где последний интеграл не существует в (5.15) (в силу леммы 1, гладкости v и неравенства (3.28) для U), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (5.15). Аналогично оцениваются последние два интеграла в (5.15).

Пусть R обозначает такую первообразную по t от P , что $R|_{t=0} = 0$. Из равенств (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} R_k * f &= \langle m_0 P'_t + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y P \rangle_0 * f = \langle m_0 P - r_0 + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y R \rangle_0 * (f'_t), \\ ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y P + A_0 a_0^0 P), \nu)_\varepsilon * f &= ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R), \nu)_\varepsilon * (f'_t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Интегрируя по t уравнение для P из (1.22), имеем

$$m_0 P - r_0 + \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y R = \sqrt{\vartheta} \operatorname{div} (A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R) \quad \text{в } Y_0 \times (0, T), \quad (5.19)$$

и поэтому R удовлетворяет неравенству (4.1) (см. лемму 3 и [4]). Из этих неравенств следует, что $W \equiv \sqrt{\vartheta} (A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R) \in L^2(Y_0)^n$ и $\operatorname{div}_y W \in L^2(Y_0)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Поэтому для таких $t \in (0, T)$ определен след (W, ν) , удовлетворяющий неравенству

$$\|(W, \nu)\|_{L^2(0, T; H_P^{-1/2}(S))}^2 \leq C. \quad (5.20)$$

Интегрируя (5.19) по Y_0 и затем по частям, получаем

$$\langle r_0 - m_0 P - \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y R \rangle_0 = \sqrt{\vartheta} \int_S ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R), \nu) ds.$$

Эти равенства гарантируют для почти всех $t \in (0, T)$ разрешимость задачи Неймана на Y_1 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y (A_1 \nabla_y V) &= \frac{\langle r_0 - m_0 P - \sqrt{\vartheta} k_0^0 \nabla_y R \rangle_0}{\theta_1} \quad \text{в } Y_1, \\ -(A_1 \nabla_y V, \nu) &= \sqrt{\vartheta} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R), \nu) \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В силу леммы 2 и неравенства (5.20) для почти всех $t \in (0, T)$ существует 1-периодическое решение $V \in H_P^1(Y_1) \cap L^2(Y_1)/\mathbb{R}$ задачи (4.18) и

$$\|(A_1 \nabla_y V)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_1^\varepsilon)^n)} \leq C. \quad (5.22)$$

Таким образом, используя (3.20), (3.21), (5.18) и (5.21), получаем

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{R_k}{\theta_1} \right)_\varepsilon * f r dx &= -\int_{\Omega_1^\varepsilon} (\operatorname{div}_y A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t) r dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t) r dx - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t)) r dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} (A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (\nabla f'_t) r dx + \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} ((A_1 \nabla_y V)_\varepsilon * (f'_t), \nabla r) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (A_1 \nabla_y V, \nu)_\varepsilon * (f'_t) r ds = \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} J_6 r dx \\ &\quad + \varepsilon \sqrt{\vartheta} \int_{S_\varepsilon} ((A_0 \sqrt{\vartheta} \nabla_y R + A_0 a_0^0 R), \nu)_\varepsilon * (f'_t) r ds, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где предпоследний интеграл не существует в (5.15) (в силу лемм 1 и 5, гладкости f и неравенства (5.22)), а граничный интеграл сокращается с соответствующим граничным интегралом из (5.15) в силу (5.18). Оценивая аналогичным образом оставшиеся в (5.15) интегралы, заключаем, что

$$E(r) \leq C \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| + \left| \sqrt{\vartheta} - \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right| \right).$$

Теорема 4 доказана.

§6. Доказательство теоремы 3

Из условия (1.3) следует, что $\nu \equiv \sqrt{\sigma}/\varepsilon$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$. Как и в доказательстве теорем 1 и 2, пусть $N_a, N_b \in H_P^1(Y)$ и $N_1 \in H_P^1(Y)^n$ удовлетворяют (1.14), (1.12), (3.1) и (3.5). Пусть функции $Q(t, y)$ и $P(t, y)$ являются 1-периодическими решениями начально-краевых задач на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0 Q'_t - \nu^2 \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y Q) &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ Q &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad Q|_{t=0} = 1 \quad \text{в } Y_0, \\ m_0 P'_t - \nu^2 \operatorname{div}_y (A_0 \nabla_y P) &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P &= 0 \quad \text{на } \bar{Y}_1 \times (0, \infty), \quad P|_{t=0} = \frac{r_0}{m_0} \quad \text{в } Y_0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где учтены обозначения (1.2), (1.6) и (1.8). Тогда из леммы 3 и ограниченности области Ω следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \nu^2 \|(\nabla_y Q)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 &\leq C, \\ \|P_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \nu^2 \|(\nabla_y P)_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 &\leq C. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В этих неравенствах и далее постоянная C не зависит от ε, σ и ν .

В случае когда выполнено условие (1.3), начальные члены асимптотического разложения решения задачи (1.4) задаются равенством

$$u_a = v + \varepsilon (N_1)_\varepsilon \nabla v + \varepsilon (N_a)_\varepsilon v + \varepsilon (N_b)_\varepsilon g - Q_\varepsilon * (v'_t) + P_\varepsilon * f, \quad (6.3)$$

где v – решение осредненной задачи (1.20). Определим также подправленную асимптотику v_a равенством (4.3). Тогда выполнено неравенство (3.7) и $v_a = 0$ на $\partial\Omega \times (0, T)$.

Введем обозначения (3.8). Тогда выполнено неравенство (3.9). После дополнительного исследования свойств решений начально-краевых задач (6.1) правая часть неравенства (3.9) будет оценена величиной $C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu)$. Тогда из этой оценки и свойств решений задач (6.1) и будет следовать теорема 3.

По определению Q_ε и P_ε равны нулю на $\Omega_1^\varepsilon \times (0, T)$. Следовательно, выполнены соотношения (3.11)–(3.14) и равенство (4.4). Соответствующие интегралы по Ω , содержащие $\nabla r_a, J_1$ и J_3 (из (3.11)), не существенны в (3.9), поскольку, например, для интеграла с ∇r_a выполнено неравенство (3.15).

Выделяя сингулярное слагаемое в (4.4), введем обозначение (4.5) и определим v_3 из равенства (4.6). Непосредственно из (1.6), (3.5), (3.7), (4.1), (4.4) и леммы 5 заключаем, что выполнено неравенство (3.18). При выводе этого неравенства использовано, что v_3 не содержит градиентов от Q_ε и P_ε , оценки которых могут зависеть от ν . Как и в (4.7), оценивается в (3.9) интеграл по Ω_0^ε , содержащий k_ε^σ :

$$\int_0^T \left| \int_{\Omega_0^\varepsilon} (k_\varepsilon^\sigma \nabla v_a) r \, dx \right| dt \leq C \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \nu} + \sigma \right) \leq C \sqrt{\sigma}, \quad (6.4)$$

где учтены лемма 1, неравенства (3.5) и (6.2), гладкости v , g , f и тот факт, что $\nabla v_a - v_2$ не содержит градиентов от Q_ε и P_ε .

Непосредственно из (1.6) и (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^\varepsilon} (A_\varepsilon^\sigma v_2, \nabla r) \, dx &= \varepsilon \nu^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y P)_\varepsilon * f, \nabla r) \, dx \\ &- \varepsilon \nu^2 \int_{\Omega_0^\varepsilon} ((A_0 \nabla_y Q)_\varepsilon * (v_t'), \nabla r) \, dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Используя первое равенство из (2.7) и начальные условия из (6.1), получаем равенства (4.10). Следовательно, учитывая (3.11), (3.13), (3.15), (3.18), (6.4), (6.5) и (4.10), неравенство (3.9) можно переписать в виде (4.11) и выполнены соотношения (4.12), в которых величину ϑ следует заменить на ν^2 .

Используя (1.5), перепишем осредненное уравнение из (1.20) в виде

$$\frac{\langle m_1 \rangle_1}{\theta_1} v_t' - \frac{A}{\theta_1} (\nabla^2 v + a \nabla v + b \nabla g) + \frac{K}{\theta_1} \nabla v + \frac{k_a}{\theta_1} v + \frac{k_b}{\theta_1} g - \frac{\langle r_1 \rangle_1}{\theta_1} f = 0 \quad (6.6)$$

и введем обозначения (3.25) для функций, имеющих нулевое среднее на Y_1 . Умножим (6.6) на r , проинтегрируем полученное соотношение по Ω_1^ε и учтем результат и равенство (3.22) в (4.11). Тогда, оценивая интегралы в (4.11), содержащие функции из (3.25), как и в §3 (см. (3.27)–(3.29)), неравенство (4.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) &\leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu) + C \int_0^T \left| \varepsilon \nu^2 \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f r \, ds \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \nu^2 \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon * (v_t') r \, ds \right| dt. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Далее следует учесть, что ν является малым параметром, и построить главные члены асимптотики решений задач (6.1). Это построение будет проведено позже, а на данный момент отметим следующее следствие из этих построений.

ЛЕММА 10. *Для решений задач (6.1) выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} \|Q - 1\|_{L^\infty(0,T;L^1(Y_0))} + \left\| P - \frac{r_0}{m_0} \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(Y_0))} &\leq C\nu, \\ \|Q - 1\|_{L^\infty(0,T;L^2(Y_0))}^2 + \left\| P - \frac{r_0}{m_0} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(Y_0))}^2 &\leq C\nu. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из этой леммы и условий (1.9) следует, что

$$\|\langle m_0 Q - m_0 \rangle_{\mathbf{0}}\|_{L^1(0,T)} + \|\langle m_0 P - r_0 \rangle_{\mathbf{0}}\|_{L^1(0,T)} \leq C\nu. \quad (6.9)$$

Действительно, используя свойства интеграла Лебега, получаем

$$|\langle m_0 P - r_0 \rangle_{\mathbf{0}}| \leq \left\langle m_0 \left| P - \frac{r_0}{m_0} \right| \right\rangle_{\mathbf{0}} \leq C \left\| P - \frac{r_0}{m_0} \right\|_{L^1(Y_0)},$$

и интегрирование этих неравенств по $t \in (0, T)$ доказывает (6.9).

Таким образом, учитывая (6.9), лемму 5, гладкости f и v , неравенство (6.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E(r) &\leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu) \\ &+ C \int_0^T \left| \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 P - r_0 \rangle_{\mathbf{0}}}{\theta_1} \right) * (f'_t) r \, dx + \varepsilon \nu^2 \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y P, \nu)_\varepsilon * f r \, ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left(\frac{\langle m_0 Q - m_0 \rangle_{\mathbf{0}}}{\theta_1} \right) * (v''_{tt}) r \, dx - \varepsilon \nu^2 \int_{S_\varepsilon} (A_0 \nabla_y Q, \nu)_\varepsilon * (v'_t) r \, ds \right| dt. \end{aligned}$$

Это неравенство фактически совпадает с неравенством (4.14), и поэтому выполнены соотношения (4.15)–(4.21), в которых величину ϑ следует заменить на ν^2 .

Таким образом, доказано неравенство

$$E(r) \leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu).$$

По определению Q_ε и P_ε равны нулю на Ω_1^ε . Следовательно,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 \leq E(r) + C\varepsilon \leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu) \quad (6.10)$$

в силу представления (6.3) и неравенств (3.5). Аналогично, получаем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \left\| u - v - \left(P_\varepsilon - \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \right) * f - \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon * f \right. \\ \left. + (Q_\varepsilon - 1) * (v'_t) + 1 * (v'_t) \right\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 \leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Используя лемму 10, ограниченность Ω_0^ε , гладкости f и v , имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \left(P_\varepsilon - \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \right) * f \right\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|(Q_\varepsilon - 1) * (v'_t)\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 \leq C\nu$$

(см. доказательство леммы 5). Тогда из (6.11) заключаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| u - v - \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon * f + 1 * (v'_t) \right\|_{L^2(\Omega_0^\varepsilon)}^2 \leq C(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \nu). \quad (6.12)$$

Кроме того, в силу определений (2.6) выполнены равенства

$$\left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon * f = \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t f \, dt, \quad 1 * (v'_t) = v - w,$$

которые вместе с (6.10) и (6.12) доказывают теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 10. Рассмотрим, например, начально-краевую задачу для P из (6.1). В силу леммы 3 существует единственное решение $P \in L^2(0, T; H_P^1(Y))$ этой задачи и

$$\|P\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y_0))}^2 + \nu^2 \|\nabla_y P\|_{L^2(0, T; L^2(Y_0)^n)}^2 \leq C. \quad (6.13)$$

В этом неравенстве и далее постоянная C не зависит от ν .

Пусть заданы такие вектор-функция $V_\nu \in L^2(0, T; L^2(Y_0)^n)$ и функция $W_\nu \in L^2(0, T; L^2(Y_0))$, что

$$\|V_\nu\|_{L^2(0, T; L^2(Y_0)^n)} + \|W_\nu\|_{L^2(0, T; L^2(Y_0))} \leq C. \quad (6.14)$$

Определим функцию $P_\nu(t, y)$ как 1-периодическое решение начально-краевой задачи на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0(P_\nu)_t' - \nu^2 \operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y P_\nu) &= \nu^2 \operatorname{div}_y(V_\nu) + \nu W_\nu \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ P_\nu &= 0 \quad \text{на } S \times (0, \infty), \quad P_\nu|_{t=0} = \frac{r_0}{m_0} \quad \text{в } Y_0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Тогда, повторяя доказательство леммы 1, заключаем, что

$$\|P - P_\nu\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y_0))}^2 + \nu^2 \|\nabla_y(P - P_\nu)\|_{L^2(0, T; L^2(Y_0)^n)}^2 \leq C\nu^2. \quad (6.16)$$

Кроме того, из компактности Y_0 следует, что

$$\|P - P_\nu\|_{L^\infty(0, T; L^1(Y_0))} \leq C\|P - P_\nu\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y_0))} \leq C\nu. \quad (6.17)$$

Таким образом, лемму 10 достаточно доказать для решения P_ν задачи (6.15). Другими словами, в доказательстве леммы 10 первое уравнение для P из (6.1) допускает возмущения νW_ν и $\nu^2 \operatorname{div}_y(V_\nu)$, удовлетворяющие (6.14).

Будем искать решение задачи (6.1) в виде $P = U + (r_0/m_0)$. Тогда для $U = P - (r_0/m_0)$ имеем начально-краевую задачу на Y_0 :

$$\begin{aligned} m_0 U_t' - \nu^2 \operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y U) &= \nu^2 \operatorname{div}_y\left(A_0 \nabla_y \left(\frac{r_0}{m_0}\right)\right) \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ U &= \frac{r_0}{m_0} \quad \text{на } S \times (0, \infty), \quad U|_{t=0} = 0 \quad \text{в } Y_0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

В силу неравенств (6.16), (6.17) и условий теоремы 3 можно считать в этой задаче, что $A_0 \nabla_y(r_0/m_0) = 0$. Из неравенства (6.13) и условий теоремы 3 также следует, что

$$\|U\|_{L^\infty(0, T; L^2(Y_0))}^2 + \nu^2 \|\nabla_y U\|_{L^2(0, T; L^2(Y_0)^n)}^2 \leq C. \quad (6.19)$$

Рассмотрим Y_0 как компактное n -мерное многообразие с границей S класса C^3 (в силу условий теоремы 3). По определению найдется такое конечное разбиение единицы $\{\varphi_\kappa\}$, что для каждого κ пересечение $\operatorname{supp}(\varphi_\kappa) \cap Y_0$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}_+^n = \{z = (z_1, \dots, z_n), z_n > 0\}$.

Для каждого κ определим U_κ как решение начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} m_0(U_\kappa)_t' - \nu^2 \operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y U_\kappa) &= 0 \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ U_\kappa &= \varphi_\kappa \frac{r_0}{m_0} \quad \text{на } S \times (0, \infty), \quad U_\kappa|_{t=0} = 0 \quad \text{в } Y_0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

По определению $\sum_{\kappa} \varphi_{\kappa} = 1$. Следовательно, $U = \sum_{\kappa} U_{\kappa}$ в силу единственности решений задачи (6.18). Кроме того, если $\text{supp}(\varphi_{\kappa})$ не пересекается с S , то $U_{\kappa} = 0$ в соответствии с (6.20).

Фиксируем κ и определим $U_{\kappa}^{\kappa} = \varphi_{\kappa} U$. Тогда, умножая (6.18) на φ_{κ} , получим для U_{κ}^{κ} начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} m_0(U_{\kappa}^{\kappa})'_t - \nu^2 \operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y U_{\kappa}^{\kappa}) &= -\nu^2 [\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y), \varphi_{\kappa}] U \quad \text{в } Y_0 \times (0, \infty), \\ U_{\kappa}^{\kappa} &= \varphi_{\kappa} \frac{r_0}{m_0} \quad \text{на } S \times (0, \infty), \quad U_{\kappa}^{\kappa}|_{t=0} = 0 \quad \text{в } Y_0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь $[\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y), \varphi_{\kappa}]$ обозначает коммутатор дифференциального оператора $\operatorname{div}_y(A_0 \nabla_y)$ и оператора умножения на функцию φ_{κ} . Несложно проверить, что этот коммутатор является дифференциальным оператором первого порядка (с непрерывными коэффициентами в силу условий теоремы 3). Кроме того, этот коммутатор умножается на ν^2 , и U удовлетворяет неравенству (6.19). Поэтому можно считать этот коммутатор нулевым в (6.21) (в смысле выполнения неравенств (6.16) и (6.17)).

Таким образом, можно считать, что $U_{\kappa}^{\kappa} = U_{\kappa}$, и ввести новые координаты $z \in \mathbb{R}_+^n$ в задаче (6.20). Воспользуемся для этого известными формулами замены координат в дифференциальных операторах второго порядка (см., например, [15]). Тогда задачу (6.20) в координатах z можно записать в виде

$$\begin{aligned} (U_{\kappa})'_t - \nu^2 a_m \partial_n^2 U_{\kappa} - \nu^2 H(z, \partial_z) U_{\kappa} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty), \\ U_{\kappa} &= r_{\kappa} \quad \text{на } \{z_n = 0\} \times (0, \infty), \quad U_{\kappa}|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где $r_{\kappa} = \varphi_{\kappa} r_0 / m_0$, ∂_n обозначает частную производную по z_n , коэффициент a_m принадлежит $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ и удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leq a_m(z) \leq \beta \quad \text{для } z \in \overline{\mathbb{R}_+^n} \quad (6.23)$$

в силу неравенств (1.7), (1.9) и условий теоремы 3. Кроме того, $H(z, \partial_z)$ обозначает дифференциальный оператор второго порядка по z (с непрерывными ограниченными коэффициентами в силу условий теоремы 3), но этот оператор содержит только производные первого порядка по z_n .

Используя формулу Тейлора, коэффициент a_m представим в виде $a_m = a_m^0 + z_n a_m^1$ для $z_n \in [0, 1]$, где $a_m^0 = a_m$ при $z_n = 0$. Далее, полагая $a_m^1 = (a_m - a_m^0)/z_n$ для $z_n \in [1, \infty)$, имеем

$$a_m = a_m^0 + z_n a_m^1 \quad \text{для } z \in \overline{\mathbb{R}_+^n}, \quad (6.24)$$

где a_m^0 и a_m^1 — непрерывные ограниченные на $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ функции, коэффициент a_m^0 принадлежит $C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ и удовлетворяет неравенствам (6.23).

Определим функцию $U_{\kappa}^0(t, z)$ как решение начально-краевой задачи на $\mathbb{R}_+^n$:

$$\begin{aligned} (U_{\kappa}^0)'_t - \left(\frac{h^2}{4} \right) \partial_n^2 U_{\kappa}^0 &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty), \\ U_{\kappa}^0 &= r_{\kappa} \quad \text{на } \{z_n = 0\} \times (0, \infty), \quad U_{\kappa}^0|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $h^2/4 = \nu^2 a_m^0$. Решение этой задачи задается равенствами

$$\begin{aligned} U_\kappa^0 &= \frac{2r_\kappa}{h\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z_n - \xi)^2}{h^2 t}\right) d\xi = -\frac{2r_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_n} \exp\left(-\frac{s^2}{h^2 t}\right) d\left(\frac{s}{h\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{2r_\kappa}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z_n}{h\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = r_\kappa \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

где $\operatorname{erfc}(\cdot)$ обозначает специальную функцию, которую принято называть *дополнительным интегралом вероятностей* (см., например, [18]).

Действительно, так определенное U_κ^0 удовлетворяет первому уравнению из (6.25), что проверяется непосредственным дифференцированием под интегралом в первом равенстве из (6.26) (см., например, [19]). Далее следует учесть, что $\operatorname{erfc}(0) = 1$ и $\operatorname{erfc}(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ (см., например, [18, гл. 7]). Тогда из последнего равенства в (6.26) заключаем, что U_κ^0 удовлетворяет граничным и начальным условиям из (6.25). Таким образом, формула (6.26) определяет классическое решение задачи (6.25).

Оценим норму этого решения в $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}_+^n))$ и $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))$. Напомним, что $h = 2\nu\sqrt{a_m^0}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |U_\kappa^0| dz_n &= |r_\kappa| \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) dz_n \\ &= |r_\kappa| h\sqrt{t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\tau) d\tau \leq \nu c(z_0) \sqrt{T} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Здесь и далее $z_0 = (z_1, \dots, z_{n-1})$ и $c(z_0)$ обозначает ограниченные функции с компактным носителем на $\mathbb{R}^{n-1}$. Значение последнего интеграла в (6.27) выражается через значения гамма-функции и поэтому ограничено постоянной (см., например, [18, гл. 7, §7.4]). Интегрируя неравенство (6.27) по $\mathbb{R}^{n-1}$ и учитывая свойства функции $c(z_0)$, получаем

$$\|U_\kappa^0\|_{L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}_+^n))} \leq C\nu. \quad (6.28)$$

Используя, что $\operatorname{erfc}(\tau) \leq 1$ для неотрицательных τ , имеем

$$\int_0^\infty (U_\kappa^0)^2 dz_n \leq r_\kappa^2 \int_0^\infty \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) dz_n \leq \nu c(z_0) \sqrt{T} \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\tau) d\tau. \quad (6.29)$$

Интегрируя эти неравенства по $\mathbb{R}^{n-1}$, заключаем, что

$$\|U_\kappa^0\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))}^2 \leq C\nu. \quad (6.30)$$

Из неравенств (6.28) и (6.30) будет следовать лемма 10, если доказать соответствующую близость U_κ^0 к решению задачи (6.22). Для доказательства этого утверждения оценим некоторые нормы от U_κ^0 .

Введем обозначение $\operatorname{erfc}^{(1)}(\tau) = (\operatorname{erfc}(\tau))'_\tau = -(2/\sqrt{\pi})e^{-\tau^2}$. Тогда, дифференцируя (6.26), имеем $\partial_n U_\kappa^0 = (r_\kappa/h\sqrt{t}) \operatorname{erfc}^{(1)}(z_n/h\sqrt{t})$, и поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\partial_n U_\kappa^0)^2 dz_n &= \frac{r_\kappa^2}{h^2 t} \int_0^\infty \operatorname{erfc}^{(1)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right)^2 dz_n \\ &= \frac{r_\kappa^2}{h\sqrt{t}} \int_0^\infty \operatorname{erfc}^{(1)}(\tau)^2 d\tau = \frac{c(z_0)}{\nu\sqrt{t}} \operatorname{erfc}(0). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Интегрируя это равенство по $\mathbb{R}^{n-1}$ и затем по $(0, T)$, имеем

$$\|\partial_n U_\kappa^0\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))}^2 \leq \frac{C}{\nu}. \quad (6.32)$$

Обозначим через ∂_0 одну из частных производных по $z_1, \dots, z_{n-1}$. Тогда из (6.26) следует, что

$$\begin{aligned} \partial_0 U_\kappa^0 &= (\partial_0 r_\kappa) \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) + \frac{r_\kappa z_n}{\nu\sqrt{t}} \operatorname{erfc}^{(1)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) \partial_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{a_m^0}}\right) \\ &= (\partial_0 r_\kappa) \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) + \frac{c(z_0)z_n}{h\sqrt{t}} \operatorname{erfc}^{(1)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Для оценки первого слагаемого в последнем равенстве из (6.33) достаточно повторить доказательство неравенств (6.29) и (6.30). Следовательно,

$$\|\partial_0 U_\kappa^0\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))}^2 \leq C\nu, \quad (6.34)$$

поскольку выполнено равенство

$$c^2(z_0) \int_0^\infty \left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}} \operatorname{erfc}^{(1)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right)\right)^2 dz_n = \nu c_1(z_0) \sqrt{t} \int_0^\infty (\tau \operatorname{erfc}^{(1)}(\tau))^2 d\tau,$$

где последний интеграл ограничен постоянной (см., например, [18, гл. 7, §7.4]).

Введем также обозначение $\operatorname{erfc}^{(2)}(\tau) = (\operatorname{erfc}^{(1)}(\tau))'_\tau = (-2\tau) \operatorname{erfc}^{(1)}(\tau)$. Тогда из (6.33) следует, что

$$\partial_0^2 U_\kappa^0 = c_1(z_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) + \frac{c_2(z_0)z_n}{h\sqrt{t}} \operatorname{erfc}^{(1)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right) + \frac{c_3(z_0)z_n^2}{h^2 t} \operatorname{erfc}^{(2)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right).$$

Для оценки первых двух слагаемых в этом равенстве достаточно повторить доказательство неравенств (6.30) и (6.34). Следовательно,

$$\|\partial_0^2 U_\kappa^0\|_{L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))}^2 \leq C\nu, \quad (6.35)$$

поскольку выполнено равенство

$$c_3^2(z_0) \int_0^\infty \left(\frac{z_n^2}{h^2 t} \operatorname{erfc}^{(2)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right)\right)^2 dz_n = \nu c_4(z_0) \sqrt{t} \int_0^\infty (\tau^3 \operatorname{erfc}^{(1)}(\tau))^2 d\tau,$$

где последний интеграл ограничен постоянной (см., например, [18, гл. 7, §7.4]).

Аналогично получаем $\partial_n^2 U_\kappa^0 = (r_\kappa/h^2 t) \operatorname{erfc}^{(2)}(z_n/h\sqrt{t})$, и поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (z_n a_m^1 \partial_n^2 U_\kappa^0)^2 dz_n &\leq \frac{c_1(z_0)}{h^2 t} \int_0^\infty \left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}} \operatorname{erfc}^{(2)}\left(\frac{z_n}{h\sqrt{t}}\right)\right)^2 dz_n \\ &= \frac{c_1(z_0)}{h\sqrt{t}} \int_0^\infty (\tau \operatorname{erfc}^{(2)}(\tau))^2 d\tau \\ &\leq \frac{c_2(z_0)}{\nu\sqrt{t}} \int_0^\infty (\tau^2 \operatorname{erfc}^{(1)}(\tau))^2 d\tau, \end{aligned}$$

где последний интеграл ограничен постоянной (см., например, [18, гл. 7, §7.4]). Интегрируя эти неравенства по $\mathbb{R}^{n-1}$ и затем по $(0, T)$, заключаем, что

$$\|z_n a_m^1 \partial_n^2 U_\kappa^0\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))}^2 \leq \frac{C}{\nu}. \quad (6.36)$$

Пусть $R_\kappa = U_\kappa - U_\kappa^0$, где U_κ – решение задачи (6.22) и U_κ^0 – решение задачи (6.25). Тогда, учитывая (6.24) и уравнения из (6.25), получим для R_κ начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned} (R_\kappa)_t' - \nu^2 a_m \partial_n^2 R_\kappa - \nu^2 H(z, \partial_z) R_\kappa &= \nu W_\kappa \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n \times (0, \infty), \\ R_\kappa &= 0 \quad \text{на } \{z_n = 0\} \times (0, \infty), \quad R_\kappa|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \quad (6.37)$$

где $W_\kappa = \nu z_n a_m^1 \partial_n^2 U_\kappa^0 + \nu H(z, \partial_z) U_\kappa^0$. Из неравенств (6.30), (6.32), (6.34)–(6.36) следует, что для W_κ выполнена оценка

$$\|W_\kappa\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}_+^n))} \leq C. \quad (6.38)$$

Аналогичная оценка выполнена для $m_0 W_\kappa$ в силу условий (1.9). Поэтому, возвращаясь в задаче (6.37) к координатам $y \in Y_0$, получаем для R_κ начально-краевую задачу (6.15), в которой $V_\nu = 0$ и W_ν удовлетворяет (6.14).

Таким образом, в координатах $y \in Y_0$ конечная сумма

$$P = \sum_{\kappa} \varphi_{\kappa} \left(U_{\kappa}^0 + \frac{r_0}{m_0} \right)$$

определяет главный член асимптотики решения задачи (6.1) для P и неравенства (6.28) и (6.30) доказывают лемму 10.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для функции $\operatorname{erfc}(\tau)$ выполнено следующее асимптотическое разложение:

$$\operatorname{erfc}(\tau) = \frac{e^{-\tau^2}}{\tau\sqrt{\pi}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right) \right] \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad (6.39)$$

(см., например, [18, гл. 7]). Кроме того, $\operatorname{erfc}(\tau_1) \leq \operatorname{erfc}(\tau_2)$ для таких неотрицательных τ_1 и τ_2 , что $\tau_2 \leq \tau_1$. Фиксируем некоторое положительное z_n^0 . Тогда в силу (6.39) найдутся такие положительные постоянные C , c и ν_0 , что

$$|U_\kappa^0| \leq \nu C e^{-(cz_n/\nu)^2} \quad \text{для } \nu \leq \nu_0 \quad \text{и } z_n^0 \leq z_n.$$

Таким образом, функция $P(t, y) - r_0(y)/m_0(y)$ достаточно быстро убывает при удалении точки y от границы S .

Предполагая большую гладкость коэффициентов и границы включений, чем в теореме 3, можно построить и дальнейшие члены асимптотического разложения решений задачи (6.1), следуя основным идеям метода Вишика–Люстерника (см., например, [20]).

§7. Доказательство следствий

Известно [4], что в предположениях следствий 1, 2 или 3 решение задачи (1.4) существует и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (7.1)$$

где постоянная C не зависит от ε и σ (см. доказательство леммы 1). Отметим, что несколько более общая оценка леммы 1 выполнена при дополнительном условии $w \in H_0^1(\Omega)$ (см., например, [1], [4]).

Аналогично, в предположениях следствий 1 или 3 решения осредненных задач (1.16) и (1.20) существуют и удовлетворяют неравенству

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (7.2)$$

Из результатов работы [6] (см. также лемму 10) следует аналогичное утверждение для осредненной задачи (1.19) и

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v_t'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

если выполнены предположения следствия 2.

Известно [1], что множества $C_0^\infty(\Omega)$ и $C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$ плотны в сепарабельных пространствах $L^2(\Omega)$ и $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ соответственно. Поэтому найдутся такие последовательности $\{f_s\}, \{g_s\} \subset C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$ и $\{w_s\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\|f - f_s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|g - g_s\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|w - w_s\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \delta_s. \quad (7.4)$$

Здесь и далее δ_s достаточно мало при достаточно больших s .

Для каждого s обозначим через u_s решение задачи (1.4), в которой f , g и w заменены на f_s , g_s и w_s соответственно. Аналогично, обозначим через v_s решение одной из осредненных задач (1.16), (1.19) или (1.20), в которых f , g и w заменены на f_s , g_s и w_s . Используя неравенства (7.1)–(7.4) и линейность рассматриваемых задач, заключаем, что

$$\|u - u_s\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\delta_s, \quad \|v - v_s\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\delta_s, \quad (7.5)$$

где постоянная C не зависит от ε , σ и s . Кроме того, имеем неравенство

$$\|(v - v_s)_t'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\delta_s, \quad (7.6)$$

если выполнены предположения следствия 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Для u_s выполнены условия теоремы 1. Разумеется, постоянная C из неравенства этой теоремы может зависеть от s . Поэтому из неравенств (7.5) и неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \|u - u_s + u_s - v_s + v_s - v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C\delta_s + C\|u_s - v_s\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C\delta_s + C_s \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Для произвольного δ можно выбрать s так, чтобы $C\delta_s < \delta/2$. В силу условия (1.1) найдутся такие $\varepsilon(\delta)$ и $\sigma(\delta)$, что $C_s(\varepsilon + \sigma + \varepsilon^2/\sigma) < \delta/2$ при $\varepsilon < \varepsilon(\delta)$ и $\sigma < \sigma(\delta)$. Таким образом, из неравенства (7.7) имеем

$$\|u - v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 < \delta \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon(\delta) \quad \text{и} \quad \sigma < \sigma(\delta),$$

что доказывает следствие 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. В предположениях следствия 2 свертки $P_\varepsilon * f$ и $Q_\varepsilon * (v'_t)$ могут быть не определены как элементы пространства $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, поскольку не всегда определено поточечное умножение двух функций из $L^2(\Omega)$ (см. определения (2.6)). В силу (4.1) для этих свертки выполнены только неравенства

$$\begin{aligned} \|(Q_\varepsilon * (v'_t))(t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_0^T \|Q_\varepsilon(t - \tau)v'_t(\tau)\|_{L^1(\Omega)} d\tau \\ &\leq C \int_0^T \|Q_\varepsilon(t - \tau)\|_{L^2(\Omega)} \|v'_t(\tau)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \leq C \|v'_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \quad (7.8) \\ \|(P_\varepsilon * f)(t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

(см. доказательство леммы 5). Поэтому $P_\varepsilon * f, Q_\varepsilon * (v'_t) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ в силу неравенства (7.3) и предположений следствия 2.

Используя неравенства (7.4)–(7.6) и теорему 2, получаем

$$\begin{aligned} \|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 &\leq C\delta_s + C \|u_s - v_s - P_\varepsilon * f_s + Q_\varepsilon * (v_s)_t'\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 \\ &\quad + C \|P_\varepsilon * (f_s - f)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 + C \|Q_\varepsilon * (v_s - v)_t'\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 \\ &\leq C\delta_s + C_s \left(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + \left| \vartheta - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \right| \right) + C\delta_s, \quad (7.9) \end{aligned}$$

где учтены неравенства (7.8), в которых v'_t и f заменены на $(v_s - v)_t'$ и $f_s - f$ соответственно.

Для произвольного δ можно выбрать s так, чтобы $C\delta_s < \delta/4$. В силу условия (1.2) найдутся такие $\varepsilon(\delta)$ и $\sigma(\delta)$, что $C_s(\varepsilon + \sqrt{\sigma} + |\vartheta - \sigma/\varepsilon^2|) < \delta/2$ при $\varepsilon < \varepsilon(\delta)$ и $\sigma < \sigma(\delta)$. Таким образом, из неравенства (7.9) имеем

$$\|u - v - P_\varepsilon * f + Q_\varepsilon * (v'_t)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 < \delta \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon(\delta) \quad \text{и} \quad \sigma < \sigma(\delta),$$

что доказывает сходимость второго слагаемого из утверждения следствия 2.

По определению Q_ε и P_ε равны нулю на $\Omega_1^\varepsilon \times (0, T)$. Поэтому, учитывая неравенства (7.5) и теорему 2, для завершения доказательства следствия 2 достаточно повторить доказательство следствия 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Заметим, что

$$\left\| \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t (f - f_s) dt \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \|f - f_s\|_{L^2(\Omega)} dt \leq C \sqrt{\delta_s} \quad (7.10)$$

в силу (7.4) и неравенства Коши–Буняковского. Кроме того, имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| u - \chi_1^\varepsilon v - \chi_0^\varepsilon w - \chi_0^\varepsilon \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t f dt \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq \|u - v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1^\varepsilon))}^2 + \left\| u - w - \left(\frac{r_0}{m_0} \right)_\varepsilon \int_0^t f dt \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_0^\varepsilon))}^2. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неравенства (7.4), (7.5), (7.10) и теорему 3, для доказательства следствия 3 достаточно повторить доказательство следствия 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Используя подходящие аппроксимации коэффициентов, можно вывести утверждение следствия 3 при более слабых предположениях на коэффициенты задачи (1.4). Аналогично, утверждения следствий 1–3 выполнены при более слабых предположениях на гладкость границ $\partial\Omega$, ∂F_0 и ∂F_1 . Однако такой путь доказательства этих утверждений является достаточно длинным, и проще дать непосредственные доказательства, которые будут приведены где-нибудь в другом месте.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. Батвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
3. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. Сандраков Г. В. Осреднение линеаризованной системы гидродинамики с малой вязкостью и скоростью звука в смесях. Препринт № 178. М.: ОВМ АН СССР, 1987.
6. Hornung U., Showalter R. E. Diffusion models for fractured media // J. Math. Analysis and Applications. 1990. V. 147. № 1. P. 67–80.
7. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1643–1690.
8. Панасенко Г. П. Многокомпонентное осреднение процессов в сильно неоднородных структурах // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 1. С. 134–142.
9. Батвалов Н. С., Эглит М. Э. О предельном поведении периодических сред с мягкомодульными включениями // ЖВМ и МФ. 1995. Т. 35. № 6. С. 905–917.
10. Хруслов Е. Я., Рост Г. Усреднение уравнения диффузии с коэффициентами, не удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности // УМН. 1991. Т. 46. № 6. С. 189–190.
11. Hornung U., Jager W. Diffusion, convection, adsorption, and reaction of chemicals in porous media // J. Diff. Equat. 1991. V. 92. № 2. P. 199–225.
12. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
13. Сандраков Г. В. Диффузия в сильно неоднородной периодической среде // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 208–209.
14. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
15. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

16. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–161.
17. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
18. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979.
19. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
20. *Треногин В. А.* Развитие и применение метода Люстерника–Вишика // УМН. 1970. Т. 25. № 4. С. 123–156.

Механико-математический факультет,
кафедра Вычислительной математики
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sandrako@compmath.math.msu.su

Поступило в редакцию
27.VI.1997

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Отметим несколько работ, не попавших в список литературы по различным причинам, в которых рассматриваются близкие проблемы и приведены утверждения о сходимости решений в соответствующих пространствах.

Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.

Bourgeat A., Mikelić A., Piatnitski A. Modele de double porosité aléatoire // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1998. V. 327. P. 99–104.

Pankratov L. S. Homogenization of semilinear parabolic equations with asymptotically degenerating coefficients // Матем. физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5. С. 250–273.