Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 5, 189–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:57:34

УДК 511.335+511.336

А. В. Устинов

Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида

Доказаны асимптотические формулы с двумя значащими членами для математического ожидания и дисперсии случайной величины $s(c/d)$, когда переменные c и d меняются в пределах $1 \leq c \leq d \leq R$ и $R \rightarrow \infty$, где $s(c, d) = s(c/d)$ – число шагов в алгоритме Евклида, примененном к числам c и d .

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Обозначения

Запись $[x_0; x_1, \dots, x_s]$ обозначает цепную (непрерывную) дробь

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_s}}}$$

длиной s с формальными переменными $x_0, x_1, \dots, x_s$.

Для рационального r обычно (если не сделано дополнительных оговорок) будет использоваться каноническое разложение в цепную дробь, $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$, длиной $s = s(r)$, где $t_0 = [r]$ (целая часть r), $t_1, \dots, t_s$ – неполные частные (натуральные числа) и $t_s \geq 2$ при $s \geq 1$. Через $s_1(r)$ будем обозначать сумму неполных частных числа r : $s_1(r) = t_0 + t_1 + \dots + t_s$. Для r , записанного в виде несократимой дроби, через $q(r)$ будем обозначать знаменатель этой дроби.

Если A – некоторое утверждение, то $[A]$ равно 1 в случае, когда A истинно, и равно 0 в противном случае.

Для натурального q через $\delta_q(a)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q :

$$\delta_q(a) = [a \equiv 0 \pmod{q}] = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Знак “звездочка” в двойных суммах вида

$$\sum_n \sum_m^* \dots$$

означает, что переменные, по которым проводится суммирование, связаны дополнительным условием $(m, n) = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 03-51-5070), РФФИ (грант № 07-01-00306), проекта ДВО РАН 06-III-A-01-017 и Фонда содействия отечественной науке.

Конечные разности функции $a(u, v)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta_{1,0}a(u, v) &= a(u+1, v) - a(u, v), & \Delta_{0,1}a(u, v) &= a(u, v+1) - a(u, v), \\ \Delta_{1,1}a(u, v) &= \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(u, v)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(u, v)).\end{aligned}$$

Сумму степеней делителей натурального q обозначим

$$\sigma_\alpha(q) = \sum_{d|q} d^\alpha.$$

Дилогарифм Эйлера имеет вид

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = - \int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt.$$

§ 2. Введение

Детальный анализ алгоритма Евклида приводит к различным задачам о статистических свойствах конечных цепных дробей (см. [1, п. 4.5.3]). Если на вход алгоритма подается пара натуральных чисел c и d , $c < d$, то основной интерес представляет число выполняемых делений с остатком, которое совпадает с $s(c/d)$ – количеством неполных частных в цепной дроби

$$\frac{c}{d} = [0; t_1, \dots, t_s].$$

Впервые вопрос о поведении величины $s(c/d)$ в среднем был исследован Г. Хейльбронном. В 1968 г. он (см. [2]) доказал асимптотическую формулу

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leq c \leq d \\ (c,d)=1}} s\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log d + O(\log^4 \log d).$$

Позднее Дж. Портер (см. [3]) для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами:

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leq c \leq d \\ (c,d)=1}} s\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log d + C_P - 1 + O_\varepsilon(d^{-1/6+\varepsilon}),$$

где ε – любое положительное число и

$$C_P = \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(3 \log 2 + 4\gamma - 4 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 2 \right) - \frac{1}{2}$$

– константа, получившая название *константы Портера* (её окончательный вид был найден Дж. Ренчем [4]).

При усреднении по параметрам c и d вероятностными и эргодическими методами получены следующие результаты. Дж. Диксон в работе [5] показал, что для любого положительного ε найдётся такая константа $c_0 > 0$, что

$$\left| s\left(\frac{c}{d}\right) - \frac{12 \log 2}{\pi^2} \log d \right| < (\log d)^{1/2+\varepsilon}$$

для всех пар чисел (c, d) , лежащих в области $1 \leq c \leq d \leq R$, за исключением, быть может, $R^2 \exp(-c_0(\log R)^{\varepsilon/2})$ пар. Д. Хенсли в статье [6] уточнил результат Диксона и доказал, что разность между величиной $s(a/b)$ и ее средним значением имеет асимптотически нормальное распределение, параметры которого можно указать явно. В частности, Д. Хенсли доказал асимптотическую формулу для второго момента величины $s(c/d)$. Позднее Б. Валле [7] доказала асимптотические формулы для математического ожидания, дисперсии и моментов более высокого порядка со степенными понижениями в остаточных членах (см. [8]).

При фиксированном значении d для дисперсии величины $s(c/d)$ известна лишь правильная с точностью до константы оценка, принадлежащая В. А. Быковскому [9]:

$$\frac{1}{d} \sum_{c=1}^d \left(s\left(\frac{c}{d}\right) - \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log d \right)^2 \ll \log d.$$

Данная оценка получена методами аналитической теории чисел, опирающимися на оценки сумм Клоостермана.

В настоящей работе с использованием подхода, предложенного в [9], исследуется среднее значение $s(c/d)$:

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) \quad (1)$$

при $R \geq 2$. Для него доказывается асимптотическая формула с лучшим, чем можно получить из результата Портера, понижением в остаточном члене, а именно:

$$E(R) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log d + B + O(R^{-1} \log^5 R), \quad (2)$$

где

$$B = C_P - 1 + \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 \right).$$

Кроме того, для дисперсии

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} \left(s\left(\frac{c}{d}\right) - E(R) \right)^2 \quad (3)$$

доказывается формула

$$D(R) = \delta_1 \log R + \delta_0 + O_\varepsilon(R^{-1/4+\varepsilon}), \quad (4)$$

где $\delta_1 > 0$, δ_0 – абсолютные константы и ε – сколь угодно малое положительное число. Отметим, что в соответствующем результате из работы [8] утверждается лишь существование некоторой константы $\gamma > 0$ вместо $1/4$ в показателе остаточного члена.

Автор выражает благодарность В. А. Быковскому за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

§ 3. О цепных дробях

Следуя работе [9], обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}$$

с определителем $\det S = \pm 1$, у которых

$$1 \leq Q \leq Q', \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq P' \leq Q'.$$

Для вещественного $R > 0$ через $\mathcal{M}(R)$ будем обозначать конечное подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из всех матриц S с дополнительным условием $Q' \leq R$.

Отметим два свойства множества $\mathcal{M}$ (см. [9]).

1. Каждому конечному (непустому) набору натуральных чисел $(q_1, \dots, q_s)$ можно поставить в соответствие матрицу $S \in \mathcal{M}$ по правилу

$$S = S(q_1, \dots, q_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix}.$$

При этом

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix},$$

где

$$\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{s-1}], \quad \frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_s]$$

(здесь последние неполные частные могут быть и единицами).

Отображение $(q_1, \dots, q_s) \rightarrow S(q_1, \dots, q_s)$ является биекцией между множеством всех конечных наборов натуральных чисел и множеством $\mathcal{M}$.

2. Если $Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$, то имеются ровно две пары (P, P') и $(Q - P, Q' - P')$, дополняющие в качестве первой строки вторую (Q, Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Кроме того, если

$$\frac{Q}{Q'} = [0; q_s, \dots, q_1] = [0; q_s, \dots, q_1 - 1, 1], \quad q_1 \geq 2,$$

то соответствующие матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q - P & Q' - P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

При $Q = Q'$ существует только одна матрица $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ из $\mathcal{M}$.

В следующей лемме для рациональных чисел $r \in (0, 1]$ будет использоваться (единственное) разложение в цепную дробь с единицей на конце:

$$r = [0; t_1, \dots, t_s, 1], \quad s \geq 0.$$

Оно удобнее канонического разложения тем, что единообразно описывает все такие числа, включая $r = 1$.

ЛЕММА 1. Пусть c и d – натуральные числа, $1 \leq c \leq d$ и

$$\frac{c}{d} = [0; t_1, \dots, t_{s-1}, t_s, 1], \quad s \geq 0. \quad (6)$$

Тогда:

1) уравнение

$$S \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad (7)$$

в котором неизвестными являются числа $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leq l$, и матрица $S \in \mathcal{M}$, имеет s решений;

2) уравнение

$$S_1 S_2 \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (8)$$

имеет $s(s-1)/2$ решений относительно неизвестных $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq l$, $S_1, S_2 \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k/l = [0; q_1, \dots, q_m, 1]$, $m \geq 0$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_n \end{pmatrix}$$

и числа c, d определены равенством (7), то $c/d = [0; z_1, \dots, z_n, q_1, \dots, q_m, 1]$. Поэтому из условий (6), (7) и свойства 1 множества $\mathcal{M}$ вытекает, что для некоторого j , $1 \leq j \leq s$, выполнено

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix}, \quad \frac{k}{l} = [0; t_{j+1}, \dots, t_s, 1].$$

Значит, количество решений уравнения (7) совпадает с числом способов, которыми можно выбрать j в пределах от 1 до s , и равно s .

Аналогично, из условий (6) и (8) следует, что для некоторых j и r , $1 \leq j < r \leq s$, выполнено

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_j \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_{j+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t_r \end{pmatrix}, \quad \frac{k}{l} = [0; t_{r+1}, \dots, t_s, 1].$$

Поэтому количество решений уравнения (8) равно числу пар (j, r) таких, что $1 \leq j < r \leq s$, т.е. равно $s(s-1)/2$.

§ 4. О математическом ожидании и дисперсии

Для действительного $R \geq 1$ положим

$$\mathcal{L}_1(R) = \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s \left(\frac{c}{d} \right), \quad \mathcal{L}_2(R) = \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s^2 \left(\frac{c}{d} \right).$$

Тогда в соответствии с (1) и (3) имеем

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \mathcal{L}_1(R), \quad (9)$$

$$D(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \mathcal{L}_2(R) - E^2(R). \quad (10)$$

Поэтому, чтобы доказать основные результаты (2) и (4), для сумм $\mathcal{L}_1(R)$ и $\mathcal{L}_2(R)$ необходимо получить асимптотические формулы с двумя и тремя значащими членами соответственно.

Через $\lambda(d)$ обозначим число решений уравнения

$$kQ + lQ' = d$$

относительно неизвестных k, l, Q и Q' таких, что

$$1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq Q \leq Q', \quad (Q, Q') = 1. \quad (11)$$

Через $N^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$kQ + lQ' \leq R \quad (12)$$

относительно неизвестных k, l, Q, Q' , связанных условиями (11); другими словами,

$$N^*(R) = \sum_{d \leq R} \lambda(d).$$

Соответственно, через $M^*(R)$ обозначим число решений неравенства

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leq R, \quad (13)$$

в котором

$$1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq Q \leq Q', \quad (Q, Q') = 1, \quad \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}. \quad (14)$$

Следующее утверждение сводит задачу о подсчете величин $E(R)$ и $D(R)$ к исследованию неравенств (12) и (13).

ЛЕММА 2. Пусть $R \geq 1$. Тогда

$$\mathcal{L}_1(R) = 2N^*(R) - \left[\frac{R}{2} \right] \left[\frac{R+1}{2} \right], \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_2(R) = 4M^*(R) + \left[\frac{R}{2} \right] \left[\frac{R+1}{2} \right]. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 1) леммы 1 вытекает, что сумма

$$\sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right)$$

равна числу решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 1 \leq k \leq l.$$

Если $Q' \geq 2$, то по свойству 2 множества $\mathcal{M}$ для пары (Q, Q') существуют ровно две пары чисел (P, P') , которые дополняют строку (Q, Q') до матрицы из $\mathcal{M}$. Значит, в этом случае число решений уравнения (17) равно $2\lambda(d)$. Если же $Q' = 1$, то $Q = 1$ и число решений уравнения (17) совпадает с числом решений уравнения $k + l = d$, где $1 \leq k \leq l$, т. е. равно $[d/2]$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) &= \sum_{d \leq R} \left(2\lambda(d) - \left[\frac{d}{2}\right]\right) \\ &= 2 \sum_{d \leq R} \lambda(d) - \left[\frac{R}{2}\right] \left[\frac{R+1}{2}\right] = 2N^*(R) - \left[\frac{R}{2}\right] \left[\frac{R+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Тем самым равенство (15) доказано.

Для доказательства равенства (16) заметим, что по лемме 1 сумма

$$\frac{1}{2} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) \left(s\left(\frac{c}{d}\right) - 1\right)$$

совпадает с числом решений уравнения

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{pmatrix} * & * \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}, \quad 1 \leq k \leq l.$$

Если $Q' \geq 2$, то по свойству 2 множества $\mathcal{M}$ число решений уравнения (18) равно удвоенному числу решений уравнения

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') = d$$

с ограничениями (14). Если же $Q' = 1$, то $Q = 1$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и уравнение (18) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} * & * \\ a+b & m+n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ d \end{pmatrix}. \quad (19)$$

По свойству 2 (см. равенство (5)) множество пар $(a+b, m+n)$ совпадает с множеством всех пар (Q, Q') таких, что $1 \leq Q < Q'$ и $(Q, Q') = 1$. Таким образом, уравнение (19) может быть записано в виде

$$kQ + lQ' = d,$$

где $1 \leq k \leq l$, $1 \leq Q < Q'$, $(Q, Q') = 1$. Число решений такого уравнения равно $\lambda(d) - [d/2]$. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) \left(s\left(\frac{c}{d}\right) - 1\right) &= 2M^*(R) - \sum_{d \leq R} \left(\lambda(d) - \left[\frac{d}{2}\right]\right) \\ &= 2M^*(R) - N^*(R) + \left[\frac{R}{2}\right] \left[\frac{R+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\mathcal{L}_2(R) = 4M^*(R) + \mathcal{L}_1(R) - 2N^*(R) + 2 \left[\frac{R}{2}\right] \left[\frac{R+1}{2}\right].$$

Подставляя в последнюю формулу значение $\mathcal{L}_1(R)$ из (15), получаем нужную формулу для суммы $\mathcal{L}_2(R)$.

§ 5. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha = p(\alpha)/q(\alpha)$ – рациональное число, β , a , b – действительные, $a \leq b$, и $f(x) = \alpha x + \beta$. Тогда

$$\sum_{a < x \leq b} \{f(x)\} = \frac{b-a}{2} + O\left(\left(\frac{b-a}{q(\alpha)} + 1\right) s_1(\alpha)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10, § 2, теорема 2].

ЛЕММА 4. Для любого натурального b

$$\sum_{a=1}^b s_1\left(\frac{a}{b}\right) \ll b \log^2(b+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [11].

ЛЕММА 5. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и функции $\rho(x)$, $\sigma(x)$ определены равенствами

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(u) du.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} f(x) &= \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) \\ &\quad + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [12, теорема I,1].

В основе следующего утверждения, в частных случаях доказанного в работе [13], лежат оценки сумм Клоостермана, принадлежащие Эстерману [14].

ЛЕММА 6. Пусть $q \geq 1$ – натуральное число и функция $a(u, v)$ задана в целых точках (u, v) , где $1 \leq u, v \leq q$. Предположим, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$a(u, v) \geq 0, \quad \Delta_{1,0}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{0,1}a(u, v) \leq 0, \quad \Delta_{1,1}a(u, v) \geq 0$$

во всех точках, в которых эти неравенства определены. Тогда для суммы

$$W = \sum_{u,v=1}^q \delta_q(uv \pm 1) a(u, v)$$

(при любом выборе знака в символе $\pm$) справедлива асимптотическая формула

$$W = \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u,v=1}^q a(u, v) + O(A\psi(q)\sqrt{q}),$$

где $\psi(q) = \sigma_0(q)\sigma_{-1/2}(q)\log^2(q+1)$ и $A = a(1, 1)$ – наибольшее значение функции $a(u, v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [15, лемма 5].

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1 из работы [16].

ЛЕММА 7. Пусть $n \geq 1$, $f(x) \geq 0$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[P_1, P_2] \subset [0, n]$ и при $x \in [P_1, P_2]$

$$\frac{1}{c} \leq |f''(x)| \leq \frac{w}{c}$$

для некоторых $1 \leq w \leq c$. Тогда

$$\sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{1 \leq y \leq f(x)} \delta_n(xy \pm 1) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{P_1 < x \leq P_2 \\ (x, n)=1}} f(x) + O_{\varepsilon, w}((nc^{-1/3} + c^{2/3})n^\varepsilon).$$

ЛЕММА 8. При $R \geq 1$ для суммы

$$\Phi(R) = \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'} \frac{1}{Q'(Q + Q')} \quad (20)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(R) = \log 2(\log R + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{1}{R} \left(\log(2\rho(R)) + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\Phi(R) = \log 2 \sum_{Q' \leq R} \frac{1}{Q'} + \sigma_0 - \sum_{Q' > R} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q + Q'} - \log 2 \right), \quad (21)$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} - \log 2 \right). \quad (22)$$

Для суммы σ_0 методом производящих функций находится точное значение (см. [4]):

$$\sigma_0 = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{2}. \quad (23)$$

Кроме того, по лемме 5 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{Q' \leq R} \frac{1}{Q'} &= \log R + \gamma + \frac{\rho(R)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ \sum_{Q=1}^{Q'} \frac{1}{Q+Q'} &= \log 2 - \frac{1}{4Q'} + O\left(\frac{1}{(Q')^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя три последних равенства в формулу (21), приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 9. При $\xi \geq 2$ для суммы

$$F(\xi) = \sum_{n < \xi} \sum_{m \leq n} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) - \sum_{n < \xi} \sum_{\substack{m \leq n \\ m+n > \xi}} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right) \quad (24)$$

справедлива асимптотическая формула

$$F(\xi) = \log 2 \left(\log \xi + \frac{\log 2}{2} + \gamma - 1 \right) + \frac{1}{2\xi} (1 - \log 2) + \frac{2 \log 2}{\xi} \rho\left(\frac{\xi}{2}\right) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$F(\xi) = F_1(\xi) - F_2(\xi) + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= \sum_{n \leq \xi-1} \sum_{m \leq n} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) = \Phi(\xi-1), \\ F_2(\xi) &= \sum_{n \leq \xi-1} \sum_{\substack{m \leq n \\ m+n > \xi}} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right), \end{aligned}$$

а сумма $\Phi(R)$ определена равенством (20). По лемме 8 имеем

$$F_1(\xi) = \log 2 (\log \xi + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{1}{\xi} \left(\log(2(\rho(\xi) - 1)) + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right).$$

Далее, по лемме 5 при $n > \xi/2$ получаем

$$\sum_{\xi-n < m \leq n} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{m+n} \right) = g(n) + \frac{1}{n} \left(\log 2 + \frac{1}{2\xi} \right) - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{\xi^2(\xi-n)}\right),$$

где

$$g(n) = \frac{1}{\xi} (\log n - \log(\xi - n)) + \frac{1}{n} (\log(\xi - n) - \log \xi).$$

Значит,

$$F_2(\xi) = \sum_{\xi/2 < n \leq \xi-1} g(n) + \left(\log 2 + \frac{1}{2\xi} \right) \sum_{\xi/2 < n \leq \xi-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{4\xi} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right).$$

Вновь применяя лемму 5, находим

$$\begin{aligned} \sum_{\xi/2 < n \leq \xi-1} \frac{1}{n} &= \log 2 + \frac{1}{\xi} \left(\rho(\xi) - 1 - 2\rho\left(\frac{\xi}{2}\right) \right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \\ \sum_{\xi/2 < n \leq \xi-1} g(n) &= \int_{\xi/2}^{\xi} g(n) dn + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right). \end{aligned}$$

После замены переменной $n = x\xi$ с учетом равенств $\text{Li}_2(1) = \zeta(2)$, $\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\log^2 2}{2}$ (см. [17]), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\xi/2}^{\xi} g(n) dn &= \int_{1/2}^1 \left(\log x - \log(1-x) + \frac{\log(1-x)}{x} \right) dx \\ &= (x \log x + (1-x) \log(1-x) - \text{Li}_2(x)) \Big|_{x=1/2}^1 = \log 2 - \frac{1}{2} (\zeta(2) + \log^2 2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_2(\xi) = \log 2 + \frac{1}{2} (\log^2 2 - \zeta(2)) + \frac{\log 2}{\xi} \left(\rho(\xi) - 2\rho\left(\frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4\xi} + O\left(\frac{\log \xi}{\xi^2}\right).$$

Подставляя найденные асимптотические формулы для $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ в равенство (26), приходим к утверждению леммы.

Определим четыре суммы

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha, R) &= \sum_{n \leq R} \sum_{m=1}^n \frac{[\alpha m + n \leq R]}{(\alpha m + n)^2}, & \sigma_2(\alpha, R) &= \sum_{n \leq R} \sum_{m=1}^n \frac{1}{(\alpha m + n)^2}, \\ \sigma_3(\alpha, R) &= \sum_{n \leq R} \sum_{m=1}^n [\alpha m + n \leq R], & \sigma_4(\alpha, R) &= \sum_{n \leq R} \sum_{m=1}^n \frac{[\alpha m + n \leq R]}{\alpha m + n} \end{aligned}$$

и введем функцию

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(nx)}{n^2}.$$

ЛЕММА 10. Пусть $1 \leq U \leq R/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha, R) &= \frac{1}{\alpha+1} \left(\log R + c_1(\alpha) + \frac{\alpha}{R} \left(\rho(R) + \frac{1}{2} \right) \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \\ \sigma_2(\alpha, R) &= \frac{1}{\alpha+1} \left(\log R + c_2(\alpha) \frac{1}{R} + \left(\rho(R) + \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha+1} \right) \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$c_1(\alpha) = \frac{\log(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{\zeta(2)}{2} \frac{\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1} + \gamma - 1 + 2\alpha(\alpha+1) \int_0^1 \frac{h(\xi)}{(\alpha\xi+1)^3} d\xi, \quad (27)$$

$$c_2(\alpha) = c_1(\alpha) - \frac{\log(\alpha+1)}{\alpha} + 1.$$

Кроме того, для рационального $\alpha \in (0, 1]$ со знаменателем $q(\alpha)$ выполнено

$$\sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)} + 1\right)s_1(\alpha)\right),$$

$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{R}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \log R + O\left(\left(\frac{\log R}{q(\alpha)} + 1\right)s_1(\alpha)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления $\sigma_1(\alpha, R)$ воспользуемся леммой 5:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha, R) &= \sum_{n \leq \frac{R}{\alpha+1}} \sum_{m \leq n} \frac{1}{(\alpha m + n)^2} + \sum_{\frac{R}{\alpha+1} < n \leq R} \sum_{m \leq \frac{R-n}{\alpha}} \frac{1}{(\alpha m + n)^2} \\ &= \sum_{n \leq \frac{R}{\alpha+1}} \left(\int_0^n \frac{dm}{(\alpha m + n)^2} + \frac{1}{2n^2} \left(\frac{1}{(\alpha+1)^2} - 1 \right) + 2\alpha \int_0^n \frac{\rho(m) dm}{(\alpha m + n)^3} \right) \\ &\quad + \sum_{\frac{R}{\alpha+1} < n \leq R} \left(\int_0^{(R-n)/\alpha} \frac{dm}{(\alpha m + n)^2} + \frac{\rho(R)}{R} - \frac{1}{2n^2} \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left(\log R + c_1(\alpha) + \frac{\alpha}{R} \left(\rho(R) + \frac{1}{2} \right) \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{aligned}$$

Асимптотическая формула для суммы $\sigma_2(\alpha, R)$ проверяется аналогично.

Очевидно, что $\sigma_3(\alpha, R)$ можно переписать в виде

$$\sigma_3(\alpha, R) = \sum_{n \leq \frac{R}{\alpha+1}} n + \sum_{\frac{R}{\alpha+1} < n \leq R} \left\lfloor \frac{R-n}{\alpha} \right\rfloor.$$

Применяя ко второй сумме этого равенства лемму 3, находим

$$\sigma_3(\alpha, R) = \sum_{n \leq R} f(n) - \frac{\alpha R}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R}{q(\alpha)} + 1\right)s_1(\alpha)\right),$$

где $f(n) = \min\{n, \frac{R-n}{\alpha}\}$. Применяя к сумме значений функции $f(n)$ на каждом из отрезков линейности лемму 5, получаем требуемую формулу для $\sigma_3(\alpha, R)$.

Пусть $1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_P < R$ – значения, которые принимает форма $\alpha m + n$, когда $1 \leq m \leq n$, $\alpha m + n \leq R$. Тогда

$$\sigma_4(\alpha, R) = \sum_{j=1}^P \frac{1}{\lambda_j}.$$

Применим к этой сумме преобразование Абеля в интегральной форме

$$\sum_{j=1}^P a_j g(\lambda_j) = A(\lambda_P) g(\lambda_P) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} A(t) g'(t) dt, \quad (28)$$

где

$$A(t) = \sum_{\lambda_j \leq t} a_j.$$

Для этого выберем $a_j = 1$, $j = 1, \dots, P$, $g(t) = 1/t$. Тогда $A(t) = \sigma_3(\alpha, t)$ и

$$\sigma_4(\alpha, R) = \frac{\sigma_3(\alpha, \lambda_P)}{\lambda_P} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_P} \frac{\sigma_3(\alpha, t)}{t^2} dt.$$

Далее, так как $\lambda_1 > 1$, $\lambda_P - R \ll 1$, $\sigma_3(\alpha, R) \ll R^2$ и $\sigma_3(\alpha, \lambda_P) = \sigma_3(\alpha, R)$, то

$$\begin{aligned} \sigma_4(\alpha, R) &= \frac{\sigma_3(\alpha, R)}{R} + \int_1^R \frac{\sigma_3(\alpha, t)}{t^2} dt + O(1) \\ &= \frac{R}{\alpha + 1} - \frac{\alpha}{2(\alpha + 1)} \log R + O\left(\left(\frac{\log R}{q(\alpha)} + 1\right) s_1(\alpha)\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Для функции $c_1(\alpha)$, заданной формулой (27), справедливо равенство

$$\int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha + 1} d\alpha = \log 2 \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F(x) = \int f(x) dx$, то

$$\int_0^1 \rho(nx) f(x) dx = n \int_0^1 F(x) dx - \sum_{k=0}^n {}' F\left(\frac{k}{n}\right)$$

(здесь штрих в сумме означает, что при $k = 0$ и при $k = n$ слагаемые берутся с коэффициентом $1/2$). Таким образом, интеграл с функцией $h(\xi)$ выражается через сумму (22) и его вычисление сводится к равенству (23):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{h(x)}{(x+1)^2} dx &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{2q} - \log 2 + \frac{1}{4q} \right) \\ &= \sigma_0 + \frac{\zeta(2)}{4} = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Остальные интегралы считаются непосредственно.

Для матрицы $S = \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ через $f_S(t)$ будем обозначать функцию

$$f_S(t) = \frac{1}{(mt + n)((a + m)t + (b + n))}. \quad (31)$$

Штрих в суммах вида $\sum_{b,m=1}^n {}' \delta_n(bm \pm 1) \dots$ будет означать, что (в соответствии со свойством 2 множества $\mathcal{M}$) при $n = 1$ из двух знаков в символе $\pm$ выбирается знак “минус”, а при $n > 1$ оба знака берутся независимо; под a в таких суммах будет подразумеваться дробь $\frac{bm \pm 1}{n}$.

Для действительного $U \geq 1$ рассмотрим суммы

$$A_0(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f_S(0), \quad A_1(U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f_S(1),$$

$$\begin{aligned}
B(U, t) &= \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} f'_S(t), & W_1(U) &= \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 f_S(t) dt, \\
W_2(U) &= \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \log(mt + n) f_S(t) dt, \\
W_3(U) &= \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 c_1 \left(\frac{at + b}{mt + n} \right) f_S(t) dt.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 12. При $U \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned}
A_0(U) &= \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log U + C_{A_0} + O\left(\frac{\log U}{U}\right), \\
A_1(U) &= \frac{\log 2}{\zeta(2)} \log U + C_{A_1} + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right), \\
B(U, t) &= -\frac{2 \log 2}{\zeta(2)(t+1)^2} \log U + C_B(t) + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right), \\
W_1(U) &= \frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_1 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right), \\
W_2(U) &= \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(2 + \log 2 - \frac{\zeta(2)}{\log 2} \right) \log U + C_2 + O\left(\frac{\log^6 U}{U^{1/2}}\right), \\
W_3(U) &= \frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \log U + C_3 + O\left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}}\right),
\end{aligned}$$

где $C_B(t)$ – непрерывная функция от переменной t ; C_{A_0} , C_{A_1} , C_1 , C_2 , C_3 – абсолютные константы,

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum'_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 f_S(\xi) d\xi - 2 \log^2 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n^2} \right). \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотические формулы для сумм $A_0(U)$, $A_1(U)$, $B(U, t)$, $W_1(U)$ и $W_2(U)$ доказаны в работе [18, лемма 6, замечание 2, следствия 1 и 2].

Сумму $W_3(U)$ запишем в виде

$$W_3(U) = \sum_{n \leq U} w_3(n),$$

где

$$\begin{aligned}
w_3(n) &= \sum'_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \int_0^1 c_1 \left(\frac{at + b}{mt + n} \right) \frac{dt}{(mt + n)((a + m)t + (b + n))} \\
&= \sum'_{b,m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) c_1 \left(\frac{b}{n} \right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(mt + n)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

К возникшей двойной сумме нельзя непосредственно применить лемму 6, однако каждая из сумм

$$\sum_{b,m=1}^n{}' \delta_n(bm \pm 1) C_0 \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(mt + n)^2},$$

$$\sum_{b,m=1}^n{}' \delta_n(bm \pm 1) \left(C_0 + c_1 \left(\frac{b}{n} \right) \right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(mt + n)^2}$$

при достаточно большом C_0 удовлетворяет условиям леммы 6. Следовательно,

$$w_3(n) = 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{b,m=1}^n c_1 \left(\frac{b}{n} \right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{b}{n} + 1\right)(mt + n)^2} + O \left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}} \right)$$

$$= 2 \log 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^1 \frac{c_1(\alpha)}{\alpha + 1} d\alpha + O \left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}} \right).$$

Далее, по формуле (29) имеем

$$w_3(n) = 2 \log^2 2 \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \frac{\varphi(n)}{n^2} + O \left(\frac{\psi(n)}{n^{3/2}} \right).$$

Отсюда получаем

$$W_3(U) = 2 \log^2 2 \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \sum_{n \leq U} \frac{\varphi(n)}{n^2} + C'_3 + O \left(\frac{\log^5 U}{U^{1/2}} \right),$$

где

$$C'_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(w_3(n) - 2 \log^2 2 \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \frac{\varphi(n)}{n^2} \right).$$

Подставляя в полученное равенство соотношения

$$\sum_{n \leq U} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\log U + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O \left(\frac{\log U}{U} \right),$$

завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 13. Пусть $R, U \geq 2$ и R – полуцелое число. Тогда для суммы

$$W_4(R, U) = \sum_{S \in \mathcal{M}(U)} \sum_{q \leq R} \sum_{x=1}^q \frac{1}{q^2} f_S \left(\frac{x}{q} \right),$$

где функция $f_S(t)$ определена равенством (31), справедлива асимптотическая формула

$$W_4(R, U) = \frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \log R \log U + \left(\frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + C_1 \right) \log R + C_4$$

$$+ \frac{2 \log^2 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) \log U$$

$$+ \frac{1}{2R} \left(\frac{\log 2}{\zeta(2)} \log U + C_{A_0} - C_{A_1} \right) \\ + O\left(\frac{(\log^5 U) \log R}{U^{1/2}} \right) + O\left(\frac{\log U}{R^2} \right),$$

где C_4 – абсолютная константа и C_{A_0}, C_{A_1} – константы из леммы 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 5 к функции

$$g(x) = \frac{1}{(mx + nq)((a + m)x + (b + n)q)} = \frac{1}{q^2} f_S\left(\frac{x}{q}\right),$$

получаем

$$\sum_{x=1}^q \frac{1}{q^2} f_S\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q} \int_0^1 f_S(t) dt + \frac{1}{2q^2} (f(1) - f(0)) - \frac{1}{q^2} \int_0^1 \rho(qt) f'_S(t) dt.$$

Отсюда с учетом соотношения

$$\int_0^1 \rho(qt) f'_S(t) dt = -\frac{1}{q} \int_0^1 \sigma(qt) f''_S(t) dt \ll \frac{1}{n^2 q}$$

по лемме 5 находим

$$W_4(R, U) = (\log R + \gamma) W_1(U) + \frac{1}{2} \left(\zeta(2) - \frac{1}{R} \right) (A_1(U) - A_0(U)) \\ - \int_0^1 h(t) B(U, t) dt + O\left(\frac{\log U}{R^2} \right).$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для входящих в нее величин из леммы 12 и применяя формулу (30), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 14. Пусть $R, U \geq 2$. Тогда для суммы

$$W_5(R, U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leq R} \sum_{k \leq l} \left(\frac{R}{bk + nl} - \right. \\ \left. - \max \left\{ 1, \frac{R}{(a + b)k + (m + n)l} \right\} \right) [bk + nl \leq R]$$

справедлива асимптотическая формула

$$W_5(R, U) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)} R^2 \log U + \frac{R^2}{2} (C_{A_0} - C_{A_1}) + O(R^2 U^{-1/2} \log^5 U) + O(RU \log^2 U),$$

где C_{A_0}, C_{A_1} – константы из леммы 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем сумму $W_5(R, U)$ в виде

$$W_5(R, U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\sigma_5\left(\frac{b}{n}, \frac{R}{n}\right) - \sigma_5\left(\frac{a + b}{m + n}, \frac{R}{m + n}\right) \right),$$

где в обозначениях леммы 10

$$\sigma_5(\alpha, R) = R\sigma_4(\alpha, R) - \sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha + 1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right).$$

Значит, по лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} W_5(R, U) &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \left(\frac{R^2}{2n(b+n)} - \frac{R^2}{2(m+n)(a+b+m+n)} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{n^{5/2}} + \frac{R}{n}\right)s_1\left(\frac{b}{n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{R^2}{2}(A_0(U) - A_1(U)) + O(R^{3/2}) + O(RU \log^2 U). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство асимптотические формулы для $A_1(U)$ и $A_0(U)$ из леммы 12 и замечая, что $R^{3/2} \ll RU + R^2U^{-1/2}$, приходим к требуемой формуле для $W_5(R, U)$.

ЛЕММА 15. Пусть $R, U \geq 2$. Тогда для сумм

$$\begin{aligned} W_6(R, U) &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'} \frac{1}{mQ + nQ'}, \\ W_7(R, U) &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'} \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'} \end{aligned}$$

справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} W_6(R, U) &= RU + O(U \log R) + O(RU^{1/2} \log^5 U), \\ W_7(R, U) &= RU \log 2 + O(U \log R) + O(RU^{1/2} \log^5 U). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы для суммы $W_7(R, U)$. Асимптотическая формула для $W_6(R, U)$ проверяется аналогично.

Пользуясь равенством

$$\sum_{Q' \leq R} \sum_{Q \leq Q'} \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'} = R \int_0^1 \frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})} + O\left(\frac{\log R}{n}\right),$$

находим

$$W_7(R, U) = R \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{(mt+n)(1+\frac{b}{n})} + O(U \log R).$$

Далее, по лемме 6 имеем

$$W_7(R, U) = 2 \log 2 \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt \cdot R \sum_{n \leq U} \left(\frac{\varphi(n)}{n} + O\left(\frac{\psi(n)}{n^{1/2}}\right) \right) + O(U \log R).$$

Применяя равенства

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt = -\text{Li}_2(-1) = \frac{\zeta(2)}{2}, \quad \sum_{n \leq U} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{U}{\zeta(2)} + O(\log U),$$

приходим к нужной формуле для суммы $W_7(R, U)$.

ЛЕММА 16. Пусть $2 \leq U$, $R_1 \leq R$ и

$$W_8(R_1, U) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) dt.$$

Тогда

$$W_8(R_1, U) = \frac{R_1^2}{2} W_1(U) - \frac{R_1 U}{2} (1 - \log 2) + O(R_1 U^{1/2} \log^5 R) + O(U^2 \log^2 R). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \geq 2$ – простое число. По определению имеем, что $\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right)$ – невозрастающая функция от переменной t и $\sigma_3\left(\frac{at+b}{mt+n}, \frac{R_1}{mt+n}\right) \ll R_1^2/n^2$. Следовательно,

$$W_8(R_1, U) = \frac{1}{p} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^{p-1} \sigma_3\left(\frac{\frac{ax}{p} + b}{\frac{mx}{p} + n}, \frac{R_1}{\frac{mx}{p} + n}\right) + O\left(\frac{R_1^2 \log R}{p}\right).$$

Далее, применяя лемму 10 и замечая, что

$$q\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right) = mx+np \geq np, \quad s_1\left(\frac{ax+bp}{mx+np}\right) \ll s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right),$$

получаем следующее представление для $W_8(R_1, U)$:

$$\begin{aligned} W_8(R_1, U) &= \frac{1}{2p} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{x=1}^{p-1} \left(R_1^2 f_S\left(\frac{x}{p}\right) - \left(\frac{R_1}{\frac{mx}{p} + n} - \frac{R_1}{(a+m)\frac{x}{p} + b+n} \right) \right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{p} \sum_{n \leq U} \sum_{m \leq n}^* \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{R_1}{n^2 p} + 1 \right) \left(s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right) \right) \right) \\ &\quad + O\left(\frac{R_1^2 \log R}{p} \right). \end{aligned}$$

По лемме 4 имеем

$$\frac{1}{p} \sum_{n \leq U} \sum_{m \leq n}^* \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{R_1}{n^2 p} + 1 \right) \left(s_1\left(\frac{m}{n}\right) + s_1\left(\frac{x}{p}\right) \right) \ll \left(\frac{R_1}{p} \log R + U^2 \right) \log^2 R.$$

Таким образом, при p в пределах $R_1^2 \leq p \leq 2R_1^2$ получаем

$$\begin{aligned} W_8(R_1, U) &= \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(R_1^2 f_S(t) - \left(\frac{R_1}{mt+n} - \frac{R_1}{(a+m)t+b+n} \right) \right) dt \\ &\quad + O(U^2 \log^2 R). \end{aligned}$$

Как и при доказательстве леммы 15, находим, что

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{mt+n} = U + O(U^{1/2} \log^5 U),$$

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{dt}{(a+m)t+b+n} = U \log 2 + O(U^{1/2} \log^5 U).$$

Следовательно,

$$W_8(R_1, U) = \frac{R_1^2}{2} W_1(U) - \frac{R_1 U}{2} (1 - \log 2) + O(R_1 U^{1/2} \log^5 R) + O(U^2 \log^2 R).$$

§ 6. Асимптотическая формула для математического ожидания

Обозначим через $N(R)$ число решений неравенства

$$kQ + lQ' \leq R \quad (34)$$

относительно неизвестных

$$1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq Q \leq Q'. \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R \geq 2$. Тогда

$$N(R) = \frac{\log 2}{2} R^2 \log R + \frac{R^2}{4} (\log 2 (3 \log 2 + 4\gamma - 3) - \zeta(2)) + O(R \log^4 R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – полуцелое число, лежащее в пределах $1 \leq U \leq R$. Через $N_1(R, U)$ обозначим число решений неравенства (34) с ограничениями (35), удовлетворяющих дополнительному условию $Q' \leq U$. Число решений, для которых $Q' > U$, обозначим через $N_2(R, U)$. Таким образом,

$$N(R) = N_1(R, U) + N_2(R, U). \quad (36)$$

Для нахождения $N_1(R, U)$ заметим, что

$$N_1(R, U) = \sum_{d \leq U} N_1^* \left(\frac{R}{d}, \frac{U}{d} \right), \quad (37)$$

где

$$N_1^*(R, U) = \sum_{Q' \leq U} \sum_{Q \leq Q'}^* \sum_{l \leq R/Q'} \sum_{k \leq l} [kQ + lQ' \leq R].$$

По лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq R/Q'} \sum_{k \leq l} [kQ + lQ' \leq R] &= \sum_{l \leq R/(Q+Q')} l + \sum_{R/(Q+Q') \leq l \leq R/Q'} \left\lceil \frac{R - lQ'}{Q} \right\rceil \\ &= \sum_{l \leq R/Q'} \min \left\{ l, \frac{R - lQ'}{Q} \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Q'} - \frac{R}{Q+Q'} \right) \end{aligned}$$

$$+ O\left(\left(\frac{R}{(Q')^2} + 1\right) s_1\left(\frac{Q}{Q'}\right)\right).$$

Далее, по лемме 5 получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq R/Q'} \min\left\{l, \frac{R-lQ'}{Q}\right\} &= \int_0^{R/Q'} \min\left\{l, \frac{R-lQ'}{Q}\right\} dl + O\left(\frac{Q'}{Q}\right) \\ &= \frac{R}{2Q'(Q+Q')} + O\left(\frac{Q'}{Q}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} N_1^*(R, U) &= \frac{R^2}{2} \sum_{Q' \leq U} \sum_{Q \leq Q'}^* \frac{1}{Q'(Q+Q')} \\ &\quad - \frac{RU}{2\zeta(2)}(1 - \log 2) + O(R \log^3 R) + O(U^2 \log^2 R). \end{aligned}$$

По формуле (37) получаем

$$N_1(R, U) = \frac{R^2}{2} \Phi(U) - \frac{RU}{2}(1 - \log 2) + O(R \log^4 R) + O(U^2 \log^2 R),$$

где функция $\Phi(R)$ задается равенством (20). Применяя лемму 8, находим окончательную формулу для $N_1(R, U)$:

$$\begin{aligned} N_1(R, U) &= \frac{R^2}{2} \left(\log 2 (\log U + \log 2 + \gamma) - \frac{\zeta(2)}{2} \right) + \frac{R^2}{8U} - \frac{RU}{2}(1 - \log 2) \\ &\quad + O(R \log^4 R) + O(U^2 \log^2 R) + O(R^2 U^{-2}). \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть $R_1 = RU^{-1}$. Для величины $N_2(R, U)$ аналогично находим

$$N_2(R, U) = \sum_{d \leq R_1} N_2^*\left(\frac{R}{d}, U\right),$$

где

$$\begin{aligned} N_2^*(R, U) &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l}^* \sum_{U < Q' \leq R/l} \sum_{Q \leq Q'} [kQ + lQ' \leq R] \\ &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l}^* \left(\sum_{U < Q' \leq R/(k+l)} Q' + \sum_{\max\{U, R/(k+l)\} < Q' \leq R/l} \left\lfloor \frac{R-lQ'}{k} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Применяя последовательно леммы 3 и 4, находим

$$\begin{aligned} N_2^*(R, U) &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l}^* \sum_{U < Q' \leq R/l} \min\left\{Q', \frac{R-lQ'}{k}\right\} - \frac{1}{2} \sum_{l \leq R_1} \sum_{\substack{k \leq l \\ k+l \leq R_1}}^* \left(\frac{R}{l} - \frac{R}{k+l} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l \leq R_1} \sum_{\substack{k \leq l \\ k+l > R_1}} \left(\frac{R}{l} - U \right) + O(R \log^3 R) + O(R_1^2 \log^2 R). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 N_2(R, U) &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l} \sum_{U < Q' \leq R/l} \min \left\{ Q', \frac{R - lQ'}{k} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{l \leq R_1} \sum_{\substack{k \leq l \\ k+l \leq R_1}} \left(\frac{R}{l} - \frac{R}{k+l} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l \leq R_1} \sum_{\substack{k \leq l \\ k+l > R_1}} \left(\frac{R}{l} - U \right) + O(R \log^4 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R) \\
 &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l} \sum_{U < Q' \leq R/l} \min \left\{ Q', \frac{R - lQ'}{k} \right\} - \frac{R^2}{8U} \\
 &\quad + O(R \log^4 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R).
 \end{aligned}$$

Далее, по лемме 5 имеем

$$\begin{aligned}
 N_2(R, U) &= \sum_{l \leq R_1} \sum_{k \leq l} \int_U^R \int_0^{Q'} [kQ + lQ' \leq R] dQ dQ' \\
 &\quad - \frac{R^2}{8U} + O(R \log^4 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R).
 \end{aligned}$$

Для подсчета двойного интеграла сделаем последовательно замены переменных $w = kQ + lQ'$, $\xi = wU^{-1}$, $y = Q'U^{-1}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \int_U^R \int_0^{Q'} [kQ + lQ' \leq R] dQ dQ' &= \frac{1}{k} \int_U^R \int_0^R \left[\frac{w}{k+l} \leq Q' \leq \frac{w}{l} \right] dw dQ' \\
 &= \frac{U^2}{k} \int_1^{R_1} \int_0^{R_1} \left[\frac{\xi}{k+l} \leq y \leq \frac{\xi}{l} \right] d\xi dy \\
 &= \frac{U^2}{k} \int_0^{R_1} \xi \left(\frac{1}{l} - \max \left\{ \frac{1}{k+l}, 1 \right\} \right) [\xi \geq l] d\xi \\
 &= \frac{U^2}{k} \int_0^{R_1} \xi \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{k+l} \right) [\xi \geq k+l] d\xi \\
 &\quad + \frac{U^2}{k} \int_0^{R_1} \xi \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\xi} \right) [l \leq \xi < k+l] d\xi.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$N_2(R, U) = U^2 \int_0^{R_1} \xi F(\xi) d\xi - \frac{R^2}{8U} + O(R \log^4 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R),$$

где функция $F(\xi)$ определена равенством (24). По лемме 9 имеем

$$\begin{aligned}
 N_2(R, U) &= \frac{\log 2}{2} R^2 \left(\log \frac{R}{U} + \frac{\log 2}{2} + \gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{RU}{2} (1 - \log 2) \\
 &\quad - \frac{R^2}{8U} + O(R \log^4 R) + O(R^2 U^{-2} \log^2 R) + O(U^2 \log^2 R). \quad (39)
 \end{aligned}$$

Подставляя формулы (38), (39) в равенство (36) и выбирая $U = [R^{1/2}] + 1/2$, приходим к утверждению теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $R \geq 2$. Тогда

$$E(R) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log R + \frac{\log 2}{\zeta(2)} \left(3 \log 2 + 4\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3 \right) - \frac{3}{2} + O(R^{-1} \log^5 R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя результат теоремы 1 в формулу обращения

$$N^*(R) = \sum_{d \leq R} \mu(d) N\left(\frac{R}{d}\right),$$

находим

$$\begin{aligned} N^*(R) &= \frac{\log 2}{2\zeta(2)} R^2 \log R \\ &\quad + \frac{R^2}{4\zeta(2)} \left(\log 2 \left(3 \log 2 + 4\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3 \right) - \zeta(2) \right) + O(R \log^5 R). \end{aligned}$$

Подстановка этого результата в первое равенство леммы 2 приводит к равенству

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(R) &= \frac{\log 2}{\zeta(2)} R^2 \log R \\ &\quad + \frac{R^2}{2\zeta(2)} \left(\log 2 \left(3 \log 2 + 4\gamma - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 3 \right) - \frac{3}{2} \zeta(2) \right) + O(R \log^5 R). \end{aligned}$$

Подставляя его в (9), получаем утверждение следствия.

§ 7. Вычисление двух вспомогательных величин

Для подсчета дисперсии $D(R)$ понадобится знать асимптотические формулы для двух вспомогательных величин. Они исследуются тем же способом, что и величина $N(R)$.

Пусть $\alpha, \beta \in [0, 1]$ – действительные числа. Обозначим через $T(R) = T(\alpha, \beta; R)$ сумму

$$T(R) = \sum_{l, Q' \leq R} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} [(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leq R],$$

которая, очевидно, совпадает с числом решений неравенства

$$(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R \tag{40}$$

относительно неизвестных k, l, m и n , связанных условиями

$$1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq m \leq n. \tag{41}$$

ЛЕММА 17. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1]$ – рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R \geq 1$

$$\begin{aligned} T(R) &= \frac{R^2}{2(\alpha + 1)(\beta + 1)} \left(\log R + c_1(\alpha) + c_1(\beta) - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + O\left(R^{3/2} \left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)} \right) + R(s_1(\alpha) + s_1(\beta)) \right), \end{aligned}$$

где $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$ определены равенством (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha \leq \beta$. Положим $U = [\sqrt{R}] + 1/2$. Обозначим через $T_1(R, U)$ число тех решений неравенства (40) с ограничениями (41), для которых $l \leq U$. Число решений, для которых $l > U$, обозначим, соответственно, через $T_2(R, U)$. Таким образом,

$$T(R) = T_1(R, U) + T_2(R, U). \quad (42)$$

Для нахождения $T_1(R, U)$ заметим, что по лемме 3 при фиксированных k и l число решений неравенства (40) относительно m и n равно

$$\frac{1}{2(\alpha+1)} \left(\frac{R}{\beta k + l} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{R}{\beta k + l} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \right) + O \left(\left(\frac{R}{q(\alpha)l} + 1 \right) s_1(\alpha) \right).$$

Поэтому

$$T_1(R, U) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} \sigma_2(\beta, U) - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)} \sum_{l \leq U} \sum_{k=1}^l \frac{1}{\beta k + l} + O \left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R \right) s_1(\alpha) \right).$$

Применяя лемму 10 и равенство

$$\sum_{l \leq U} \sum_{k=1}^l \frac{1}{\beta k + l} = \frac{\log(\beta+1)}{\beta} U + O(\log U),$$

следующее из леммы 5, получаем

$$\begin{aligned} T_1(R, U) &= \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log U + c_1(\beta) - \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + 1 + \frac{1}{U} \frac{\beta^2 + \beta}{2(\beta+1)} \right) \\ &\quad - \frac{R\alpha}{2(\alpha+1)} \frac{\log(\beta+1)}{\beta} + O \left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R \right) s_1(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Полагая $R_1 = RU^{-1}$, для величины $T_2(R, U)$ аналогично находим

$$\begin{aligned} T_2(R, U) &= \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \sum_{U < l \leq \frac{R}{\alpha m + n}} \min \left\{ l, \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{R}{\alpha m + n} - l \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \sum_{U < l \leq \frac{R}{\alpha m + n}} \min \left\{ l, \frac{1}{\beta} \left(\frac{R}{\alpha m + n} - l \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \left(\frac{R}{\alpha m + n} - \max \left\{ U, \frac{R}{(\alpha m + n)(\beta+1)} \right\} \right) \\ &\quad + O \left(\left(\frac{R}{q(\beta)n} + 1 \right) s_1(\beta) \right). \end{aligned}$$

По лемме 5 с учетом того, что U – полуцелое число, получаем

$$\begin{aligned} T_2(R, U) &= \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \int_U^R \int_0^l [(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R] dk dl \\ &\quad - \frac{U}{2} \left(\sigma_5(\alpha, R_1) - \sigma_5 \left(\alpha, \frac{R_1}{\beta+1} \right) \right) + O \left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\beta)} + R \right) s_1(\beta) \right), \quad (43) \end{aligned}$$

где в обозначениях леммы 10

$$\sigma_5(\alpha, R) = R\sigma_4(\alpha, R) - \sigma_3(\alpha, R) = \frac{R^2}{2(\alpha+1)} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right),$$

откуда получаем

$$\frac{U}{2} \left(\sigma_5(\alpha, R_1) - \sigma_5\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta+1}\right) \right) = \frac{\beta^2 + 2\beta}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2} \frac{R^2}{U} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right). \quad (44)$$

Для вычисления двойного интеграла из формулы (43) сделаем замены переменных $k = tl$, $l = U\xi$. Тогда в обозначениях леммы 10

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \int_U^R \int_0^l [(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R] dk dl \\ &= U^2 \int_0^1 \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \int_1^{R_1} \xi [\xi(\alpha m + n)(\beta t + 1) \leq R_1] d\xi dt \\ &= \frac{U^2}{2} \int_0^1 \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \left(\frac{R_1^2}{(\beta t + 1)^2 (\alpha m + n)^2} - 1 \right) [(\alpha m + n)(\beta t + 1) \leq R_1] dt \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(\beta t + 1)^2} \cdot \sigma_1\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t + 1}\right) - \frac{U^2}{2} \int_0^1 \sigma_3\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t + 1}\right) dt. \end{aligned}$$

По лемме 10 имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dt}{(\beta t + 1)^2} \cdot \sigma_1\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t + 1}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log R_1 + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - 1 \right) \\ & \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)R_1} \left(\frac{\log(\beta+1)}{2\beta} + \int_0^1 \frac{dt}{\beta t + 1} \rho\left(\frac{R_1}{\beta t + 1}\right) \right) + O\left(\frac{1}{R}\right), \\ & \int_0^1 \sigma_3\left(\alpha, \frac{R_1}{\beta t + 1}\right) dt = \frac{R_1^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} - \frac{\alpha R_1}{2(\alpha+1)} \frac{\log(\beta+1)}{\beta} \\ & \quad + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right). \end{aligned}$$

По предположению выполнено $\alpha \leq \beta$. Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^1 \frac{dt}{\beta t + 1} \cdot \rho\left(\frac{R_1}{\beta t + 1}\right) \ll \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{R_1} \ll \frac{1}{R_1}, \\ & \sum_{n \leq R_1} \sum_{m \leq n} \int_U^R \int_0^l [(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R] dk dl \\ &= \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log R_1 + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - \frac{3}{2} \right) \\ & \quad + \frac{\alpha}{(\alpha+1)RU} \frac{\log(\beta+1)}{2\beta} + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{q(\alpha)} + R\right)s_1(\alpha)\right). \quad (45) \end{aligned}$$

Объединяя вместе равенства (43)–(45), приходим к асимптотической формуле для $T_2(R, U)$:

$$\begin{aligned} T_2(R, U) = & \frac{R^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\log \frac{R}{U} + c_1(\alpha) + \frac{\log(\beta+1)}{\beta} - \frac{3}{2} \right) \\ & + \frac{\alpha}{(\alpha+1)RU} \frac{\log(\beta+1)}{2\beta} - \frac{R^2 U^{-1}(\beta^2 + 2\beta)}{4(\alpha+1)(\beta+1)^2} \\ & + O\left(R^{3/2} \left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)} \right) + R(s_1(\alpha) + s_1(\beta))\right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные асимптотические формулы для $T_1(R, U)$ и $T_2(R, U)$ в формулу (42), приходим к утверждению леммы.

Для действительных $\alpha, \beta \in (0, 1]$ обозначим через $L(R) = L(\alpha, \beta; R)$ сумму

$$L(R) = \sum_{l, n \leq R} \sum_{k \leq l} \sum_{m \leq n} \frac{[(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R]}{(\alpha m + n)^2 (\beta k + l)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1]$ – рациональные числа со знаменателями $q(\alpha)$ и $q(\beta)$ соответственно. Тогда при любом $R \geq 1$ для суммы $L(R)$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} L(R) = & \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} \left(\frac{\log^2 R}{2} + \log R(c_1(\alpha) + c_1(\beta)) + c(\alpha, \beta) \right) \\ & + O\left(R^{-1/2} \left(\frac{s_1(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{s_1(\beta)}{q(\beta)} \right) + R^{-1}(s_1(\alpha) + s_1(\beta))\right), \end{aligned}$$

где $c_1(\alpha)$ – функция из леммы 10 и $c(\alpha, \beta)$ – величина, не зависящая от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия получается из леммы 17 с помощью интегрального преобразования Абеля (28). Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность $\lambda_1, \dots, \lambda_P$ значений произведения $(\alpha m + n)(\beta k + l)$, когда $1 \leq m \leq n$, $1 \leq k \leq l$, $(\alpha m + n)(\beta k + l) \leq R$, и положить $a_j = 1$, $j = 1, \dots, P$, $g(t) = 1/t^2$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $R \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R) d\alpha d\beta &= \frac{\log^2 2}{2} R^2 \left(\log R + 2\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 \right) + O(R \log^2 R), \\ \int_0^1 \int_0^1 L(\alpha, \beta; R) d\alpha d\beta &= \frac{\log^2 2}{2} \log^2 R + 2 \log^2 2 (\log R) \left(\gamma - 1 + \frac{\log 2}{2} \right) \\ &\quad + C_L + O(R^{-1} \log^2 R), \end{aligned}$$

где C_L – абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \geq 2$ – натуральное число. Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R) d\alpha d\beta = \frac{1}{p^2} \sum_{a, b=1}^{p-1} T\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}; R\right) + O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right).$$

Для простого p по лемме 17 имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R) d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{a,b=1}^{p-1} \frac{R^2}{2(1+\frac{a}{p})(1+\frac{b}{p})} \left(\log R + c_1\left(\frac{a}{p}\right) + c_1\left(\frac{b}{p}\right) - \frac{1}{2} \right) \\ & \quad + O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right) + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p} + R\right) \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} s_1\left(\frac{a}{p}\right)\right). \end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью функции $c_1(\alpha)$ и леммой 4, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 T(\alpha, \beta; R) d\alpha d\beta &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{R^2}{2(1+\alpha)(1+\beta)} \left(\log R + c_1(\alpha) + c_1(\beta) - \frac{1}{2} \right) \\ & \quad + O\left(\left(\frac{R^{3/2}}{p} + R\right) \log^2 p\right) + O\left(\frac{R^2 \log R}{p}\right). \end{aligned}$$

Выбирая p в пределах $R \leq p \leq 2R$ и применяя равенство (29), получаем первое равенство следствия.

Второе равенство доказывается аналогично. Интегрируемость $c(\alpha, \beta)$ вытекает из интегрируемости $L(\alpha, \beta; R)$, $c_1(\alpha)$ и $c_1(\beta)$.

§ 8. Асимптотическая формула для дисперсии

Обозначим через $M(R)$ число решений неравенства (13), в котором

$$1 \leq k \leq l, \quad 1 \leq Q \leq Q', \quad \begin{pmatrix} a & m \\ b & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}. \quad (46)$$

Пусть U и U_0 — действительные числа в пределах от 1 до R . Все решения неравенства (13) с ограничениями (46) разобьем на три группы, для которых выполняются дополнительные условия:

- 1) $n \leq U$, $Q' \leq U_0$;
- 2) $n \leq U$, $Q' > U_0$;
- 3) $n > U$.

Величину $M(R)$, соответственно, представим в виде

$$M(R) = M_1(R, U, U_0) + M_2(R, U, U_0) + M_3(R, U).$$

Каждое из слагаемых в этой сумме исследуем отдельно.

Проведем вычисление $M_1(R, U, U_0)$.

ЛЕММА 18. Пусть $2 \leq U, U_0 \leq R$, U_0 — полуцелое число. Тогда

$$\begin{aligned} M_1(R, U, U_0) &= \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} R^2 \log U \log U_0 \\ & \quad + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log U_0 + \frac{C_4}{2} R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) R^2 \log U \\
& + \frac{R^2}{4U_0} \left(\frac{\log 2}{\zeta(2)} \log U + C_{A_0} - C_{A_1} \right) - \frac{1 - \log 2}{2} RUU_0 \\
& + O(R^2 U_0^{-2} \log R) + O(R^2 U^{-1/2} \log^6 R) \\
& + O(RU_0 U^{1/2} \log^5 R) + O(U^2 U_0^2 \log^2 R),
\end{aligned}$$

где C_1, C_{A_0}, C_{A_1} – константы из леммы 12, а C_4 – из леммы 13.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть переменные a, b, m, n, Q, Q' фиксированы и

$$f(l) = \min \left\{ l, \frac{R - l(mQ + nQ')}{aQ + bQ'} \right\}.$$

Тогда число решений неравенства

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leq R$$

с ограничениями (46) относительно переменных k и l равно

$$\sum_{l \leq R/(mQ+nQ')} f(l) - \sum_{l \leq R/(mQ+nQ')} \{f(l)\}.$$

Применяя к первой из этих сумм лемму 3, а ко второй – лемму 5, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{R^2}{2(mQ + nQ')((a+m)Q + (b+n)Q')} - \frac{R}{2} \left(\frac{1}{mQ + nQ'} - \frac{1}{(a+m)Q + (b+n)Q'} \right) \\
& + O \left(\left(\frac{R}{nQ'} q^{-1} \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) + 1 \right) s_1 \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) \right). \quad (47)
\end{aligned}$$

Замечая, что

$$s_1 \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) \ll s_1 \left(\frac{m}{n} \right) + s_1 \left(\frac{Q}{Q'} \right),$$

и применяя лемму 4, получаем следующую оценку суммы остаточных членов:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{Q' \leq U_0} \sum_{Q \leq Q'} \left(\frac{R}{nQ'} q^{-1} \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) + 1 \right) s_1 \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) \\
& = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{\delta \leq U_0} \sum_{Q' \leq U_0/\delta} \sum_{Q \leq Q'}^* \left(\frac{R}{n\delta Q'(mQ + nQ')} + 1 \right) s_1 \left(\frac{aQ + bQ'}{mQ + nQ'} \right) \\
& \ll \sum_{n \leq U} \sum_{m \leq n}^* \sum_{\delta \leq U_0} \sum_{Q' \leq U_0/\delta} \sum_{Q \leq Q'}^* \left(\frac{R}{\delta n^2 (Q')^2} + 1 \right) \left(s_1 \left(\frac{m}{n} \right) + s_1 \left(\frac{Q}{Q'} \right) \right) \\
& \ll R \log^5 R + U^2 U_0^2 \log^2 R.
\end{aligned}$$

Таким образом, суммируя (47), находим

$$M_1(R, U, U_0) = \frac{R^2}{2} W_4(U_0, U) - \frac{R}{2} (W_6(U_0, U) - W_7(U_0, U))$$

$$+ O(R \log^5 R) + O(U^2 U_0^2 \log^3 R).$$

Применяя леммы 13, 15 и учитывая оценку $RU \ll R^2 U_0^{-2} + U^2 U_0^2$, получаем требуемую формулу для $M_1(R, U, U_0)$.

Проведем вычисление $M_2(R, U, U_0)$.

ЛЕММА 19. Пусть $2 \leq U, U_0 \leq R$, U_0 – полуцелое число. Тогда

$$\begin{aligned} M_2(R, U, U_0) &= \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} R^2 \log U \log \frac{R}{U_0} \\ &+ \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log \frac{R}{U_0} - \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 U \\ &+ \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{5}{2} + \frac{\zeta(2)}{2 \log 2} \right) R^2 \log U \\ &+ C'_2 R^2 - \frac{R^2}{4U_0} \left(\frac{\log 2}{\zeta(2)} \log U + C_{A_0} - C_{A_1} \right) + \frac{1 - \log 2}{2} R U U_0 \\ &+ O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R) + O(R^2 U^{-1/2} \log^6 R) \\ &+ O(R U_0 U^{1/2} \log^5 R) + O(U^2 U_0^2 \log^2 R), \end{aligned}$$

где C'_2 – абсолютная постоянная, а C_{A_0} , C_{A_1} , C_1 – константы из леммы 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R_1 = R U_0^{-1}$. Как и при доказательстве леммы 18, предположим, что переменные a , b , m , n , k , l фиксированы и удовлетворяют условиям (46). Рассмотрим функцию

$$f(l) = \min \left\{ Q', \frac{R - Q'(bk + nl)}{ak + ml} \right\}.$$

Тогда число решений неравенства

$$k(aQ + bQ') + l(mQ + nQ') \leq R$$

относительно переменных Q и Q' таких, что $Q' > U_0$, $1 \leq Q \leq Q'$, равно

$$\sum_{U_0 < Q' \leq R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leq R/(bk+nl)} \{f(l)\}.$$

Снова к первой из сумм применим лемму 3, а ко второй – лемму 5. Пользуясь тем, что U_0 – полуцелое число и

$$q\left(\frac{ak + ml}{bk + nl}\right) = \frac{bk + nl}{(k, l)},$$

получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{U_0 < Q' \leq R/(bk+nl)} f(Q') - \sum_{U_0 < Q' \leq R/(bk+nl)} \{f(l)\} \\ &= \int_{U_0}^R \int_0^{Q'} [Q(ak + ml) + Q'(bk + nl) \leq R] dQ dQ' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{U_0}{2} \left(\frac{R_1}{bk + nl} - \max \left\{ 1, \frac{R_1}{(a+b)k + (m+n)l} \right\} \right) [bk + nl \leq R_1] \\
 & + O \left(\left(\frac{(k, l)R}{l^2 n^2} + 1 \right) s_1 \left(\frac{ak + ml}{bk + nl} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Сумма остатков оценивается так же, как и в доказательстве леммы 18. Поэтому в обозначениях леммы 14 имеем

$$\begin{aligned}
 M_2(R, U, U_0) &= \\
 &= \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leq R} \sum_{k \leq l} \int_{U_0}^R \int_0^{Q'} [Q(ak + ml) + Q'(bk + nl) \leq R] dQ dQ' \\
 & - \frac{U_0}{2} W_5(R_1, U) + O(R \log^5 R) + O(R^2 U_0^2 \log^2 R).
 \end{aligned}$$

Возникшая сумма после замены переменных $Q = tQ'$ и $Q' = \xi U_0$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & U_0^2 \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leq R} \sum_{k \leq l} \int_0^1 \int_1^{R_1} \xi [\xi(t(ak + ml) + bk + nl) \leq R_1] d\xi dt \\
 &= \frac{U_0^2}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \sum_{l \leq R} \sum_{k \leq l} \int_0^1 \left(\left(\frac{R_1}{t(ak + ml) + bk + nl} \right)^2 - 1 \right) \\
 & \quad \times [t(ak + ml) + bk + nl \leq R_1] dt \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(\frac{R^2}{(mt + n)^2} \sigma_1 \left(\frac{at + b}{mt + n}, \frac{R_1}{mt + n} \right) \right. \\
 & \quad \left. - U_0^2 \sigma_3 \left(\frac{at + b}{mt + n}, \frac{R_1}{mt + n} \right) \right) dt.
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 M_2(R, U, U_0) &= \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{R^2}{(mt + n)^2} \sigma_1 \left(\frac{at + b}{mt + n}, \frac{R_1}{mt + n} \right) dt \\
 & - \frac{U_0^2}{2} W_8(R_1, U) - \frac{U_0}{2} W_5(R_1, U) + O(R \log^5 R) + O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R). \quad (48)
 \end{aligned}$$

Применяя лемму 10, в обозначениях леммы 12 получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \frac{1}{(mt + n)^2} \sigma_1 \left(\frac{at + b}{mt + n}, \frac{R_1}{mt + n} \right) dt \\
 &= W_1(U) \log R_1 - W_2(U) + W_3(U) + \frac{U}{2R_1} (1 - \log 2) \\
 & \quad + I(U) + O(R_1^{-1} U^{1/2} \log^5 U) + O(R_1^{-2} U^2), \quad (49)
 \end{aligned}$$

где

$$I(U) = \frac{1}{R_1} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ b & n \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(U)} \int_0^1 \left(\frac{1}{mt+n} - \frac{1}{(a+m)t+b+n} \right) \rho\left(\frac{R_1}{mt+n}\right) dt.$$

Интегрирование по частям приводит к оценке

$$I(U) \ll \frac{U \log U}{R_1^2} + \frac{\log U}{R_1}.$$

Таким образом, $I(U)$ по порядку не превосходит имеющихся остаточных членов.

Подставляя равенства (33) и (49) в соотношение (48), находим

$$\begin{aligned} M_2(R, U, U_0) &= \frac{R^2}{2} \left(\left(\log R_1 - \frac{1}{2} \right) W_1(U) - W_2(U) + W_3(U) \right) \\ &\quad - \frac{U_0}{2} W_5(R_1, U) + \frac{RUU_0}{2} (1 - \log 2) \\ &\quad + O(R^2 U_0^{-2} \log^2 R) + O(U^2 U_0^2 \log^2 R) + O(RU_0 U^{1/2} \log^5 R). \end{aligned}$$

Применяя лемму 12, приходим к нужной формуле для $M_2(R, U, U_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 \leq U \leq R$. Тогда

$$\begin{aligned} M_1(R, U, U_0) + M_2(R, U, U_0) &= \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} R^2 \log R \log U \\ &\quad + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log R + C_0 R^2 \\ &\quad - \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 U + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 - \frac{5}{2} + 2\gamma \right) R^2 \log U \\ &\quad + O(RU \log^2 R) + O(R^2 U^{-1/2} \log^6 R). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия получается, если объединить результаты лемм 18, 19 и выбрать $U_0 = [R^{1/2} U^{-1/2}] + 1/2$.

Проведем вычисление $M_3(R, U)$.

ЛЕММА 20. Пусть $8R^{1/2} \leq U \leq R/2$. Тогда

$$\begin{aligned} M_3(R, U) &= \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \left(\log^2 \frac{R}{U} + 2 \log \frac{R}{U} \left(2\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 \right) + C'_3 \right) \\ &\quad + O(RU \log^2 R) + O(R^{2+\varepsilon} U^{-1/3}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_2 = R/U$. Согласно определению величины $M_3(R, U)$ имеем

$$M_3(R, U) = \sum_{lQ' \leq R_1} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{n > U} T_{\pm}(k, l, Q, Q', n), \quad (50)$$

где

$$T_{\pm}(k, l, Q, Q', n) = \sum_{b, m=1}^n \delta_n(bm \pm 1) \left[k \left(\frac{bm \pm 1}{n} Q + bQ' \right) + l(mQ + nQ') \leq R \right].$$

Для вычисления $T_{\pm}(k, l, Q, Q', n)$ предположим сначала, что $l/k \leq Q'/Q$. Рассмотрим функцию

$$m(b) = \min \left\{ n, \frac{1}{Q} \left(\frac{R \mp \frac{k}{n} Q}{\frac{k}{n} b + l} - nQ' \right) \right\}$$

на том отрезке внутри $[0, n]$, на котором эта функция неотрицательна. Если $m(b) = \frac{1}{Q} \left(\frac{R \mp \frac{k}{n} Q}{\frac{k}{n} b + l} - nQ' \right)$, то

$$m''(b) = \frac{2}{Q} \left(R \mp \frac{k}{n} Q \right) \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{k}{n} b + l \right)^3} \in \left[\frac{1}{c}, \frac{w}{c} \right],$$

где $c = \frac{Q}{2} \left(R \mp \frac{k}{n} Q \right)^{-1} \left(\frac{k}{n} \right)^2 l^3$, $w = 8$. Поскольку $m(b) \leq n$ и $lQ' \leq R_2$, то $R \mp \frac{k}{n} Q \leq 4lnQ'$ и при $U \geq 8R^{1/2}$ имеем

$$c \geq \frac{Qnl^2}{8Q'k^2} \geq \frac{n}{8Q'} \geq \frac{U}{8R_2} = \frac{U^2}{8R} \geq 8 = w.$$

Поэтому к $m(b)$ применима лемма 7. Для такой функции

$$\begin{aligned} n^{\varepsilon} (nc^{-1/3} + c^{2/3}) &\ll n^{2/3+\varepsilon} \left(\left(\frac{Q'}{Q} \right)^{1/3} \left(\frac{k}{l} \right)^{2/3} + \left(\frac{Q}{Q'} \right)^{2/3} \left(\frac{l}{k} \right)^{4/3} \right) \\ &\ll n^{2/3+\varepsilon} \left(\frac{lQ'}{kQ} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

На участке, где $m(b) = n$, воспользуемся равенством

$$\sum_{\substack{1 \leq b \leq x \\ (b, n)=1}} 1 = \frac{\varphi(n)}{n} x + O(\sigma_0(n))$$

(см. [19, гл. II, задача 19]). Таким образом,

$$T_{\pm}(k, l, Q, Q', n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{x=1 \\ (x, n)=1}}^n f(x) + O \left(n^{2/3+\varepsilon} \left(\frac{lQ'}{kQ} \right)^{1/3} \right).$$

Далее,

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{x=1 \\ (x, n)=1}}^n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{\delta|n} \mu(\delta) \sum_{x=1}^{n/\delta} f(\delta x),$$

и по лемме 5 имеем

$$\sum_{x=1}^{n/\delta} f(\delta x) = \frac{1}{\delta} \int_0^n f(t) dt + O \left(\frac{1}{\delta} \frac{lQ'}{kQ} \right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\substack{x=1 \\ (x,n)=1}}^n f(x) &= \frac{\varphi(n)}{n^2} \int_0^n f(t) dt + O\left(\frac{\log R}{n} \frac{lQ'}{kQ}\right), \\ T_{\pm}(k, l, Q, Q', n) &= \frac{\varphi(n)}{n^2} V_{\pm}(k, l, Q, Q', n) \\ &\quad + O\left(\frac{\log R}{n} \frac{lQ'}{kQ}\right) + O\left(n^{2/3+\varepsilon} \left(\frac{lQ'}{kQ}\right)^{1/3}\right), \end{aligned} \quad (51)$$

где $V_{\pm}(k, l, Q, Q', n)$ – площадь области $\Omega_{\pm}(k, l, Q, Q', n)$ на плоскости Obm , задаваемой условиями

$$0 \leq b, m \leq n, \quad k\left(\frac{bm \pm 1}{n}Q + bQ'\right) + l(mQ + nQ') \leq R. \quad (52)$$

Если же $l/k \geq Q'/Q$, то формула (51) доказывается путем применения аналогичных рассуждений к функции

$$b(m) = \min\left\{n, \frac{1}{k} \left(\frac{R \mp \frac{k}{n}}{\frac{Q}{n}m + Q'} - ln\right)\right\}.$$

Подставляя равенство (51) в формулу (50), получаем

$$M_3(R, U) = \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{U < n \leq R/(lQ')} \frac{\varphi(n)}{n^2} V_{\pm}(k, l, Q, Q', n) + O(R^{2+\varepsilon} U^{-1/3}).$$

Обозначим через $\Omega(k, l, Q, Q', n)$ область, которая получается, если в условиях (52) убрать ± 1 :

$$0 \leq b, m \leq n, \quad \left(\frac{kb}{n} + l\right)(mQ + nQ') \leq R,$$

а через $V(k, l, Q, Q', n)$ – ее площадь. Поскольку

$$\Omega_+(k, l, Q, Q', n) \subset \Omega(k, l, Q, Q', n) \subset \Omega_-(k, l, Q, Q', n),$$

то при замене $V_{\pm}(k, l, Q, Q', n)$ на $V(k, l, Q, Q', n)$ возникнет погрешность, не превосходящая разности $V_-(k, l, Q, Q', n) - V_+(k, l, Q, Q', n)$. Но при фиксированном m разность между величинами b_- и b_+ такими, что

$$k\left(\frac{b_{\pm}m \pm 1}{n}Q + b_{\pm}Q'\right) + l(mQ + nQ') = R,$$

есть $O(1/n)$. Следовательно, $V_-(k, l, Q, Q', n) - V_+(k, l, Q, Q', n) = O(1)$ и

$$M_3(R, U) = 2 \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{U < n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} V(k, l, Q, Q', n) + O(R^{2+\varepsilon} U^{-1/3}). \quad (53)$$

Далее,

$$\sum_{U < n \leq R} \frac{\varphi(n)}{n^2} V(k, l, Q, Q', n) = \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{\substack{U \\ \frac{U}{\delta} < n \leq \frac{R}{\delta}}} \frac{V(k, l, Q, Q', \delta n)}{n}.$$

Поэтому сумма главных членов в формуле (53) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{\frac{U}{\delta} < n \leq \frac{R}{\delta}} \frac{1}{n} \\
 & \quad \times \int_0^{\delta n} \int_0^{\delta n} \left[\left(\frac{b}{\delta n} k + l \right) \left(\frac{m}{\delta n} Q + Q' \right) \leq \frac{R}{\delta n} \right] dm db \\
 & = 2 \sum_{\delta \leq R} \mu(\delta) \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{\frac{U}{\delta} < n \leq \frac{R}{\delta}} n \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 \left[(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leq \frac{R}{\delta n} \right] d\alpha d\beta = 2 \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \sum_{\frac{U}{\delta} < n \leq \frac{R}{\delta}} n \left[n \leq \frac{R}{\delta(\alpha k + l)(\beta Q + Q')} \right] d\alpha d\beta \\
 & = \sum_{\delta \leq R} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{lQ' \leq R_2} \sum_{k \leq l} \sum_{Q \leq Q'} \left(\frac{R^2}{(\alpha k + l)^2 (\beta Q + Q')^2} - U^2 \right) \\
 & \quad \times [(\alpha k + l)(\beta Q + Q') \leq R_2] d\alpha d\beta + O(R^2 U^{-1} \log R).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M_3(R, U) = \frac{U^2}{\zeta(2)} \int_0^1 \int_0^1 (R_2^2 L(\alpha, \beta; R_2) - T(\alpha, \beta; R_2)) d\alpha d\beta + O(R^{2+\varepsilon} U^{-1/3}).$$

Подставляя в последнюю формулу равенства из следствия 3, приходим к утверждению леммы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 M(R) &= \frac{\log^2 2}{2\zeta(2)} R^2 \log^2 R + \left(\frac{C_1}{2} + \frac{\log^2 2}{\zeta(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log R \\
 &\quad + CR^2 + O(R^{2-1/4+\varepsilon})
 \end{aligned}$$

с абсолютными константами C и C_1 , где C_1 – константа из леммы 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства формулы достаточно объединить равенства из следствия 4 и леммы 20, а потом выбрать $U = R^{3/4}$.

Проведем вычисление $D(R)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $R \geq 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$D(R) = \delta_1 \log R + \delta_0 + O_\varepsilon(R^{-1/4+\varepsilon}),$$

где δ_1, δ_0 – абсолютные константы,

$$\delta_1 = \frac{8 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log 2}{2} - 1 \right) + \frac{4}{\zeta(2)} \left(C_1 + \frac{3 \log 2}{2} \right),$$

и константа C_1 определена равенством (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 2, находим

$$\begin{aligned} M^*(R) &= \sum_{d \leq R} \mu(d) M\left(\frac{R}{d}\right) = \frac{\log^2 2}{2\zeta^2(2)} R^2 \log^2 R \\ &\quad + \left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) R^2 \log R \\ &\quad + C' R^2 + O(R^{2-1/4+\varepsilon}). \end{aligned}$$

По формуле (16) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(R) &= \frac{2 \log^2 2}{\zeta^2(2)} \log^2 R + 4 \left(\frac{C_1}{2\zeta(2)} + \frac{\log^2 2}{\zeta^2(2)} \left(3\gamma - \frac{5}{2} + \log 2 - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \right) \log R \\ &\quad + C' + O(R^{-1/4+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Подставляя последнюю формулу в равенство (10), приходим к утверждению теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае иррационального числа аналогом $s(\alpha)$ можно считать величину

$$N(\alpha, R) = \#\{j \geq 1: Q_j(\alpha) \leq R\},$$

где $Q_j(\alpha)$ – знаменатель j -й подходящей дроби к числу α . В работе [18] для среднего значения $N(\alpha, R)$:

$$N(R) = \int_0^1 N(\alpha, R) d\alpha,$$

доказана асимптотическая формула с двумя значащими членами:

$$N(R) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \log R + \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \left(\log 2 + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) - \frac{3}{2} + O\left(\frac{\log R}{R}\right),$$

и для дисперсии

$$D(R) = \int_0^1 (N(\alpha, R) - N(R))^2 d\alpha = \int_0^1 N^2(\alpha, R) d\alpha - N^2(R)$$

доказана асимптотическая формула

$$D(R) = \delta_1 \log R + \delta'_0 + O(R^{-1/3} \log^5 R)$$

с абсолютными константами δ_1 , δ'_0 , причем константа δ_1 та же, что и в следствии 5.

Компьютерные вычисления дают следующее приближенное значение константы δ_1 :

$$\delta_1 = 0.51606 \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Более общими характеристиками, чем длина цепной дроби, являются статистики Гаусса–Кузьмина $s_x(r)$, которые для фиксированного $x \in [0, 1]$ и рационального $r = [t_0; t_1, \dots, t_s]$ задаются равенством

$$s_x(r) = \#\{j: 1 \leq j \leq s(r), [0; t_j, \dots, t_s] \leq x\}.$$

С помощью идей из работ [15], [20] аналогично следствию 1 может быть доказана асимптотическая формула для среднего значения величины $s_x(c/d)$:

$$\frac{2}{[R]([R] + 1)} \sum_{d \leq R} \sum_{c \leq d} s\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{2 \log(1+x)}{\zeta(2)} \log R + \frac{2}{\zeta(2)} C(x) + O(R^{-1} \log^5 R),$$

где

$$\begin{aligned} C(x) &= \log(1+x) \left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{\log(1+x)}{2} - \log x - \frac{3}{2} \right) \\ &\quad + f_1(x) + f_2(x) - \frac{x\zeta(2)}{2(x+1)} + \frac{x\zeta(2)}{2} [x < 1], \\ f_1(x) &= \sum_{Q'=1}^{\infty} \frac{1}{Q'} \left(\sum_{Q=1}^{Q'} \frac{x}{Q' + Qx} - \log(1+x) \right), \\ f_2(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\sum_{\frac{m}{x} \leq n < \frac{m}{x} + m} \frac{1}{n} - \log(1+x) \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Д. Э. Кнут, *Искусство программирования*, т. 2: *Получисленные алгоритмы*, М.–СПб.–Киев, Вильямс, 2000; пер. с англ.: D. E. Knuth, *The art of computer programming*. Vol. 2: *Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
2. H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number Theory and Analysis*, (Papers in Honor of Edmund Landau), Plenum, New York, 1969, 87–96.
3. J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
4. D. E. Knuth, “Evaluation of Porter’s constant”, *Comput. Math. Appl.*, **2**:2 (1976), 137–139.
5. J. D. Dixon, “The number of steps in the Euclidean algorithm”, *J. Number Theory*, **2**:4 (1970), 414–422.
6. D. Hensley, “The number of steps in the Euclidean algorithm”, *J. Number Theory*, **49**:2 (1994), 142–182.
7. B. Vallée, “A unifying framework for the analysis of a class of Euclidean algorithms”, *Theoretical informatics. 4th Latin American symposium* (Uruguay, 2000), Lect. Notes Comput. Sci., **1776**, Springer, Berlin, 2000, 343–354.
8. V. Baladi, B. Vallée, “Euclidean algorithms are Gaussian”, *J. Number Theory*, **110**:2 (2005), 331–386.
9. В. А. Быковский, “Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 15–26; англ. пер.: V. A. Bykovskii, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:2 (2007), 5634–5643.
10. А. Я. Хинчин, *Избранные труды по теории чисел. Одна теорема о непрерывных дробях и ее арифметические приложения*, МЦНМО, М., 2006; A. Ya. Khintchine, “Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen”, *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 289–306.
11. D. E. Knuth, A. C. Yao, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **72**:12 (1975), 4720–4722.

12. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер.: A. A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
13. М. О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: M. O. Avdeeva, “On the statistics of partial quotients of finite continued fractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.
14. Т. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
15. А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Зап. науч. сем. ПОМИ*, **322** (2005), 186–211; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On statistical properties of finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:2 (2006), 4722–4738.
16. В. А. Быковский, “Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **112** (1981), 5–25; англ. пер.: *J. Soviet Math.*, **25** (1984), 975–988.
17. L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York, 1981.
18. А. В. Устинов, “Вычисление дисперсии в одной задаче из теории цепных дробей”, *Матем. сб.*, **198**:6 (2007), 139–158; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Calculation of the variance in a problem in the theory of continued fractions”, *Sb. Math.*, **198**:6, 887–907.
19. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1972; англ. пер. 5-го изд.: I. M. Vinogradov, *Elements of number theory*, Dover Publ., New York, 1954.
20. А. В. Устинов, “О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 195–208; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On Gauss–Kuz’min statistics for finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:2 (2007), 5771–5781.

А. В. УСТИНОВ (A. V. USTINOV)
Хабаровское отделение
Института прикладной математики
Дальневосточного отделения РАН
E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
27.03.2007