Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 3–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:29:02

УДК 517.937+517.983

А. Г. Баскаков

Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений

Исследуются линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами, действующие в однородных пространствах функций на полуоси. Получены необходимые и достаточные условия для их обратимости и фредгольмовости. В проводимых исследованиях существенно используется спектральная теория разностных отношений и полугрупп линейных отношений (многозначных линейных операторов).

Библиография: 46 наименований.

Ключевые слова: линейные дифференциальные операторы, спектр оператора, однородные пространства функций, функция Грина, фредгольмов оператор.

§ 1. Введение

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad (1.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.2)$$

где $A(t): D(A(t)) \subset X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}_+$, – семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X . Одним из центральных вопросов качественной теории таких уравнений является исследование асимптотического поведения решений, а также нахождение условий существования ограниченных решений. Изучение этих проблем в терминах экспоненциальной дихотомии решений (экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов, возникающих при разрешимости уравнения (1.1)) связывают с именем О. Перрона. В его статье [1] асимптотические свойства решений однородных уравнений (в конечномерном пространстве X) соотносились (если использовать более современную терминологию) с определенными свойствами дифференциального оператора

$$L = -\frac{d}{dt} + A(t),$$

рассматриваемого в банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций и принимающих свои значения в X . Для случая

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00131).

ограниченных операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, в монографиях [2] и [3] характеризовались экспоненциальная дихотомия решений в терминах сюръективности оператора L и условия замкнутости и дополняемости подпространства векторов из X , являющиеся начальными условиями для ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений дифференциального уравнения (1.1). В этих монографиях отмечена крайняя важность развития соответствующей теории дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Существенный вклад в теорию таких уравнений был сделан В. В. Жиковым в статье [4], где была доказана эквивалентность условия обратимости оператора L в пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, принимающих значения в X (им рассматривался случай, когда $t \in \mathbb{R}$), условию экспоненциальной дихотомии решений уравнения (1.1).

В последнее время возрос интерес к изучению качественных свойств решений дифференциальных уравнений вида (1.2) с неограниченными операторными коэффициентами (см. [5]–[24]). Следует отметить значительную роль работ Ю. Д. Латупкина в развитии новых подходов. В монографии [15] подведены итоги исследований, проведенных до 1999 г., и в ней содержится очень подробный обзор полученных результатов. При этом стал систематически применяться операторный подход, основанный на использовании оператора L в подходящих функциональных пространствах. Существенным стимулом развития качественной теории дифференциальных уравнений послужило появление полугруппы Хоулэнда (см. [6]), которая строилась по семейству эволюционных операторов, соответствующих уравнению (1.1). Для ее определения рассмотрим некоторые важные понятия.

Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков: $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}$, $[a, b]$ (иногда будем использовать запись $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}, [a, b]\}$), и пусть $\Delta_{\mathbb{J}} = \{(t, s) \in \mathbb{J} \times \mathbb{J} : s \leq t\} \subset \mathbb{R}^2$. Через Δ_+ обозначим множество $\Delta_{\mathbb{R}_+}$. Отображение $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$, где $\text{End } X$ – банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X , называется (сильно непрерывным и экспоненциально ограниченным) *семейством эволюционных операторов “вперед”* (слово “вперед” далее, как правило, не будет использоваться) на $\mathbb{J}$, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{J}$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $\tau \leq s \leq t$, $s, t, \tau \in \mathbb{J}$;
- 3) отображение $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow X$ непрерывно для любого $x \in X$;
- 4) существуют постоянные $M \geq 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq Me^{\alpha(t-s)}, \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{J}. \quad (1.3)$$

Если для семейства $\mathcal{U}$ выполнены условия 2), 3), но не выполнено условие 1), то оно называется *вырожденным* семейством. В этом случае $\mathcal{U}(t, t)$, $t > 0$, – сильно непрерывное семейство проекторов из алгебры $\text{End } X$.

Семейство операторов $\mathcal{V}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$ называется *семейством эволюционных операторов “назад”*, если для него выполнены условия 1), 3), 4), а условие 2) заменяется на следующее условие:

- 2') $\mathcal{V}(s, \tau)\mathcal{V}(\tau, t) = \mathcal{V}(s, t)$ для всех $s \leq \tau \leq t$ из $\mathbb{J}$.

Отметим, что если $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов “вперед” на $\mathbb{R}_-$, то семейство $\mathcal{V}(s, t) = \mathcal{U}(-s, -t)$, $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, является семейством эволюционных операторов “назад” на $\mathbb{R}_+$.

Эволюционные семейства операторов естественным образом появляются в связи с представлением решений абстрактной задачи Коши

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad t \geq s, \quad t, s \in \mathbb{J}, \quad (1.4)$$

для дифференциального уравнения (1.1) в предположении, что область определения $D(A(s))$ оператора $A(s)$ плотна в X для каждого $s \in \mathbb{J}$.

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$ решает абстрактную задачу Коши (1.1), (1.4), если для любого $s \in \mathbb{J}$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого $x_0 \in X_s$ функция $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x_0$, $t \in \mathbb{J}$, дифференцируема при всех $t \geq s$, $x(t) \in D(A(t))$ и выполнены равенства (1.1), (1.4).

Если функция $f: \mathbb{J} \rightarrow X$ принадлежит линейному пространству $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{J}, X)$ локально суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на промежутке $\mathbb{J}$ со значениями в X , то (слабым) решением уравнения (1.2) (при условии, что семейство $\mathcal{U}$ на $\mathbb{J}$ решает задачу Коши (1.1), (1.4)) называется любая непрерывная функция $x: \mathbb{J} \rightarrow X$, удовлетворяющая при всех $s \leq t$ из $\mathbb{J}$ равенствам

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad t, s \in \mathbb{J}. \quad (1.5)$$

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ – банахово пространство функций, которое содержится в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{J}, X)$ и принадлежит классу однородных пространств функций, описываемому в следующем параграфе. Хотя однородные пространства введены только для $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$, аналогичным образом определяются однородные пространства для $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}\}$. Однородные пространства функций разбиты на два класса, которые называются однородными пространствами измеримых функций (см. определение 2.1) и непрерывных функций (определение 2.5). К этим пространствам, в частности, относятся классические пространства $L^p(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty]$, пространства Степанова $S^p(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_b(\mathbb{R}_+, X)$.

Каждому семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$ (которое не обязательно решает абстрактную задачу Коши) можно сопоставить полугруппу операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ и оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$, который при определенных условиях является ее генератором (инфинитезимальным оператором [21]).

Пусть сначала $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}\}$. Тогда в банаховом пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ корректно определена полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ операторов взвешенного сдвига вида

$$(T(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s \in \mathbb{J}, \quad x \in \mathcal{F}, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Когда $\mathbb{J} = \mathbb{R}$, X – гильбертово пространство, такая полугруппа введена в рассмотрение Хоулэндом [6] в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, X)$ при условии, что операторы $\mathcal{U}(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, унитарны.

С полугруппой операторов T тесно связан оператор

$$\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{J}, X), \quad \mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\},$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция $x: \mathbb{J} \rightarrow X$, принадлежащая $\mathcal{F}$, включается в $D(\mathcal{L})$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для всех $s \leq t$ из $\mathbb{J}$ верны равенства (1.5). При этом полагается, что $\mathcal{L}x = f$. Функция f определяется однозначно, поэтому определение оператора $\mathcal{L}$ корректно.

Далее изучение оператора $\mathcal{L}$ будем осуществлять при условии, что он построен по произвольному семейству $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$ эволюционных операторов (“вперед”).

ТЕОРЕМА 1.1 [16], [17]. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \in \{L_p(\mathbb{R}, X), p \in [1, \infty); C_0(\mathbb{R}, X)\}$, то полугруппа операторов (1.6) сильно непрерывна, а ее генератором является оператор $\mathcal{L}$.

Генератор полугруппы T был определен в статьях [16]–[18].

ТЕОРЕМА 1.2 [8], [12], [16]–[18]. Спектры операторов $T(t) \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (где $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ – пространство из теоремы 1.1), и $\mathcal{L}$ связаны соотношением

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \exp(\sigma(\mathcal{L})t) = \{\exp(\lambda t); \lambda \in \sigma(\mathcal{L})\}. \quad (1.7)$$

Если $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$, то определение полугруппы операторов типа (1.6) в однородном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ зависит от вида пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и здесь возникают разные способы ее построения.

Сначала рассмотрим полугруппу операторов $T_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ вида

$$(T_0(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ 0, & 0 \leq s \leq t, \quad x \in \mathcal{F}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Формула (1.8) корректно определяет полугруппу операторов в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, $S^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, и многих других однородных пространствах измеримых функций, а также полугруппу операторов в подпространстве $C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}_+, X): x(0) = 0\}$ из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$. Такая полугруппа изучалась в статьях [7], [14], [18], [20]. Ее генератор (в случае, если она сильно непрерывна) тесно связан с классом определяемых ниже линейных операторов.

Далее через E будем обозначать замкнутое линейное подпространство из X . Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

который определяется в любом рассматриваемом здесь пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом. Непрерывная функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которой вектор $x(0)$ принадлежит E , относится к области определения $D(\mathcal{L}_E)$ оператора $\mathcal{L}_E$, если существует функция $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что x и f удовлетворяют на $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенствам (1.5), поэтому функция f единственна. Далее полагаем $\mathcal{L}_E x = f$. Если $E = \{0\}$, то оператор $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_E$ определяем с помощью равенств

$$x(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

и он является генератором полугруппы операторов (1.8) (например, в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$). Аналог теорем 1.1 и 1.2 был получен в статье [18], а затем в статье [14] для пространства $C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X)$.

Из приведенных определений следуют включения

$$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_E \subset \mathcal{L}_X. \quad (1.11)$$

В случае $E \neq \{0\}$ оператор $\mathcal{L}_E$ не является генератором полугруппы, но мы с ним связываем новый объект – полугруппу отношений. Для этой полугруппы удается установить аналог соотношения (1.7) (см. равенство (9.1)).

Линейным отношением на банаховом пространстве $\mathcal{X}$ называется любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Оно называется *замкнутым*, если $\mathcal{A}$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Обозначим совокупность всех (линейных) отношений на $\mathcal{X}$ через $LR(\mathcal{X})$ и совокупность замкнутых отношений через $LRC(\mathcal{X})$. Для любого вектора $x \in \mathcal{X}$ через $\mathcal{A}x$ обозначим множество $\{y \in \mathcal{X} : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Основные понятия и используемые результаты из теории линейных отношений содержатся в § 4 (в частности, вводятся операции умножения и сложения отношений).

Далее линейные операторы часто отождествляются с их графиком, т. е. рассматриваются в качестве линейных отношений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение $\mathcal{T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{X})$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\mathcal{T}(0) = I$ – тождественный оператор из $\text{End } \mathcal{X} \subset LRC(\mathcal{X})$,
- 2) $\mathcal{T}(t_1 + t_2) = \mathcal{T}(t_1)\mathcal{T}(t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,

называется *полугруппой* (замкнутых) линейных отношений на банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Все дальнейшие построения осуществляются с использованием семейства эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $E \in CS(X)$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство измеримых функций. Полугруппу отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F})$, определенную равенством

$$\mathcal{T}_E(t) = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : y(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ \mathcal{U}(s, 0)x_0(s), & 0 \leq s \leq t, \end{cases} \right.$$

где $x_0 : [0, t] \rightarrow E$ – некоторая функция из подпространства

$$\left. \mathcal{F}([0, t], E) = \{\chi_{[0, t]}x, x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, E)\} \right\}, \quad (1.12)$$

назовем *эволюционной полугруппой отношений* (на $\mathcal{F}$).

Если $\mathcal{F} \in \{C'_{b,E}(\mathbb{R}_+, X), C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X)\}$, то полугруппу $\mathcal{T}_E$, определяемую равенствами (1.12), где $x_0 : [0, t] \rightarrow E$ – некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $x_0(t) = x(0)$, назовем *эволюционной полугруппой отношений* на однородном пространстве $\mathcal{F}$ непрерывных функций.

Необычность ситуации состоит в том, что впервые (по крайней мере для автора этой статьи) возникла полугруппа линейных отношений, не являющихся линейными операторами (для $E \neq \{0\}$). Попытка получить (см. § 9) аналоги теорем 1.1 и 1.2 для $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}_E$ приводит к необходимости определения генератора полугруппы отношений.

Приводимые здесь исследования оператора $\mathcal{L}_E$ основаны на систематическом использовании разностного отношения $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ на однородном пространстве $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей векторов из X (ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, где действует оператор $\mathcal{L}_E$; см. § 2). Замкнутое отношение $\mathcal{K}_E$

определяется равенствами

$$\mathcal{K}_E = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : y(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), & n \geq 1, \\ x_0, & n = 0, \end{cases} \right. \\ \left. \text{для некоторого } x_0 \in E \right\}. \quad (1.13)$$

Если $E = \{0\}$, то отношение $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}_0$ является оператором, и этот оператор играл важную роль в проводимых в [20] исследованиях оператора $\mathcal{L}_0$. Ясно, что наряду с включениями (1.11) имеют место включения

$$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_E \subset \mathcal{D}_X. \quad (1.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Полугруппу отношений $\mathcal{T}_{d,E} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F})$ вида

$$\mathcal{T}_{d,E}(n) = \mathcal{K}_E^n = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F} : y(k) = \begin{cases} \mathcal{U}(k, k-n)x(k-n), & k \geq n, \\ \mathcal{U}(k, 0)x_k, & 0 \leq k \leq n-1, \end{cases} \right. \\ \left. \text{для некоторых } x_k \in E, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

назовем *дискретной эволюционной полугруппой*, отвечающей семейству $\mathcal{U} : \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ эволюционных операторов.

Полугруппу $\mathcal{T}_{d,E}$ можно рассматривать как дискретизацию полугруппы отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F})$. При этом их спектральные свойства во многом совпадают. Таким образом, имеет место следующая теорема (вытекающая из теорем 5.8, 6.6).

ТЕОРЕМА 1.3. Для спектров полугрупп отношений $\mathcal{T}_E$ и $\mathcal{T}_{d,E}$ верны равенства

$$\sigma(\mathcal{T}_{d,E}(n)) = \sigma(\mathcal{T}_E(n)), \quad n \geq 0.$$

Более глубокие связи между отношением $\mathcal{D}_E$ и оператором $\mathcal{L}_E$ установлены в ряде лемм из § 5. В частности, построены изоморфизмы ядер, образов, а также доказано свойство их дополняемости в соответствующих пространствах. Все результаты из § 5, имеющие место для отношения $\mathcal{K}_E$, верны также для отношения, которое введено в определении 1.4 по произвольному *дискретному* семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_d : \Delta_{d,+} = \{m \leq n, m, n \in \mathbb{Z}_+\} \rightarrow \text{End } X$, т. е. для $\mathcal{U}_d$ выполняются следующие свойства:

- 1) $\mathcal{U}_d(k, k) = I, \quad k \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $\mathcal{U}_d(n, m)\mathcal{U}_d(m, k) = \mathcal{U}_d(n, k), \quad 0 \leq k \leq m \leq n$;
- 3) $\sup_{k \geq 0} \|\mathcal{U}(k+1, k)\| = M < \infty$.

При использовании спектральных свойств отношения $\mathcal{K}_E$ в теореме 9.1 описан спектр оператора $\mathcal{L}_E$. Исследование условий обратимости, сюръективности и других свойств оператора $\mathcal{L}_E$ и соответствующего ему отношения $\mathcal{D}_E$ ведется, как правило, при использовании понятия экспоненциальной дихотомии семейства эволюционных операторов. Оно определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_{\mathbb{J}} \rightarrow \text{End } X$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на множестве Ω из $\mathbb{J}$, если существуют ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция $P : \Omega \rightarrow \text{End } X$ и постоянные $M_0, \gamma > 0$ такие, что выполнены следующие свойства:

- 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$, $t \geq s$, $t, s \in \Omega$;
- 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M_0 \exp(-\gamma(t-s))$ для $s \leq t$, $s, t \in \Omega$;
- 3) для $s \leq t$, $s, t \in \Omega$, сужение $\mathcal{U}_{t,s}: X'(s) \rightarrow X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на область значений $X'(s) = \text{Im } Q(s)$ дополнительного проектора $Q(s) = I - P(s)$ есть изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t)$ (мы определяем оператор $\mathcal{U}(s, t) \in \text{End } X$, равный $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и равный нулю на $X(t) = \text{Im } P(t) \subset X$);
- 4) $\|\mathcal{U}(s, t)\| \leq M_0 \exp(\gamma(s-t))$ для всех $t \geq s$ из Ω .

Пару проекторнозначных функций P, Q , участвующих в определении 1.4, назовем *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место *тривиальная дихотомия* на Ω .

Таким образом, имеют место равенства

$$X = X(t) \oplus X'(t), \quad X(t) = \text{Im } P(t), \quad X'(t) = \text{Im } Q(t), \quad t \in \Omega.$$

Аналогичным образом вводится понятие экспоненциальной дихотомии дискретного семейства $\mathcal{U}: \{m, n \in \mathbb{Z}_+, m \leq n\} \rightarrow \text{End } X$ эволюционных операторов.

Отметим, что условия ограниченности и сильной непрерывности функции $P: \Omega \rightarrow \text{End } X$ в определении 1.4 можно не использовать, так как они легко выводятся из других свойств этого определения (см., например, [3], [4]).

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ обратим, если и только если семейство $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с такой расщепляющей парой проекторнозначных функций P, Q , что $\text{Im } Q(0) = E$. Если $\mathcal{L}_E$ обратим, то обратный определяется формулой

$$(\mathcal{L}_E^{-1}f)(t) = \int_0^\infty G(t, s)f(s) ds, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X). \quad (1.15)$$

Функция (Грина) $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ определена равенствами

$$G(t, s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t, s)P(s), & 0 \leq s \leq t, \\ \mathcal{U}(t, s)Q(s), & s > t, \quad s, t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.16)$$

где (P, Q) – расщепляющая пара проекторнозначных функций со свойством $\text{Im } Q(0) = E$.

Теорема 1.4 доказывается в § 6 с помощью соответствующего результата для отношения $\mathcal{D}_E$ (теорема 6.1).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Оператор $\mathcal{L}_0: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P, Q) , где $Q = 0$, т. е. для некоторых $M, \gamma > 0$

$$\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M e^{-\gamma(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \quad (1.17)$$

Этот результат для действующего в $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ оператора $L = -d/dt + A(t)$ с ограниченными операторными коэффициентами $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, содержится в монографии [3, теорема III.5.1]. Утверждения следствия 1.1 для $\mathcal{L}_0$ в пространстве $C_{00}(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X): x(0) = 0\}$ установлено в статье [7], а для пространств $L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, – в работе [18].

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Оператор $\mathcal{L}_X: D(\mathcal{L}_X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (здесь $E = X$) непрерывно обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ состоит из непрерывно обратимых операторов алгебры $\text{End } X$ и существуют постоянные $\widetilde{M}, \widetilde{\gamma} > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t, s)^{-1}\| \leq \widetilde{M}e^{-\widetilde{\gamma}(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \quad (1.18)$$

В [14, теорема 2.5] это утверждение было получено для пространства $C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$, а первая часть следующей теоремы для того же пространства – в [14, теорема 4.5].

ТЕОРЕМА 1.5. Для оператора $\mathcal{L}_E$ верны следующие свойства:

1) если оператор $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \mathcal{F}$ сюръективен и подпространство

$$X_E(0) = \{x_0 \in E: x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x_0, t \geq 0 \in \mathcal{F}\} \quad (1.19)$$

замкнуто и дополняемо в E , то семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$;

2) если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) и $E \supset \text{Im } Q(0)$, то оператор $\mathcal{L}_E$ сюръективен;

3) если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) и $\mathcal{F}$ – однородное пространство измеримых функций, то образ $\text{Im } \mathcal{L}_E$ оператора $\mathcal{L}_E$ совпадает с подпространством $\{y \in \mathcal{F}: \int_0^\infty \mathcal{U}(0, t) \times Q(t)y(t) dt \in E + \text{Im } P(0)\}$ и обладает свойством $\chi_{[\alpha, \infty)} \text{Im } \mathcal{L}_E = \mathcal{F}_\alpha = \chi_{[\alpha, \infty)} \mathcal{F}$, где $\chi_{[\alpha, \infty)}$ – характеристическая функция промежутка $[\alpha, \infty)$ из $\mathbb{R}_+$. Если $E + \text{Im } P(0)$ – замкнутое подпространство, то $\text{Im } \mathcal{L}_E$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 1.5 проведено в конце § 8.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Если $E = X$, то следующие условия эквивалентны:

1) оператор $\mathcal{L}_E$ сюръективен и подпространство $X(0) = X_X(0)$ дополняемо в пространстве X ;

2) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$.

Последнее утверждение для дифференциального оператора $L = -d/dt + A(t)$ с ограниченными операторными коэффициентами для $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_b(\mathbb{R}_+, X)$ приводится в [3, теорема IV.3.3], а для такого же оператора, действующего в функциональных пространствах измеримых функций (в том числе для $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$), – в монографии [2]. Для оператора $\mathcal{L}_X$ результат следствия 1.3 впервые получен в [14, теорема 4.3] для пространства $C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X)$, а в статье [23] был распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$. Важно отметить, что этот результат до сих пор не был получен для пространств $L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ и $C_b(\mathbb{R}_+, X)$. Если $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов “назад”, то утверждение следствия 1.3 получено в статье автора [19, ч. II].

Трудная часть исследований относится к операторам, действующим в однородных пространствах функций, на которых операция сдвигов функций не является сильно непрерывной. К наиболее важным из них относятся пространства $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, $L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ и пространство Степанова $S^1(\mathbb{R}_+, X)$. Именно эти пространства наиболее важны, они рассматривались в классических работах [2]–[4] и остались вне рассмотрения большинства авторов, активно работающих в последнее время в этой области исследований. Сведение изучения

оператора $\mathcal{L}_E$ к изучению отношения $\mathcal{D}_E$ (теорема 5.8) позволило использовать технику, связанную с применением сопряженных операторов и отношений (свойства сопряженных отношений приведены в § 7). Соответствующие результаты изложены в § 8, 9.

До сих пор мы формулировали некоторые из полученных в § 5, 6 результатов, часто соприкасающихся с классическими. Приведем некоторые утверждения из § 8, где получены необходимые и достаточные условия для фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ – банахово пространство, называется *фредгольмовым*, если его ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерно, образ $\text{Im } \mathcal{A}$ замкнут и его коразмерность $\beta(\mathcal{A}) = \text{Codim Im } \mathcal{A} = \dim(\mathcal{X} / \text{Im } \mathcal{A})$ конечна. Число $\text{ind } \mathcal{A} = \alpha(\mathcal{A}) - \beta(\mathcal{A})$, где $\alpha(\mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A}$, называют *индексом* фредгольмова отношения $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Будем говорить, что два замкнутых пространства E_1 и E_2 из банахова пространства X образуют *фредгольмову пару*, если $E_1 + E_2$ – замкнутое подпространство и конечномерны подпространство $E_1 \cap E_2$ и факторпространство $X/(E_1 + E_2)$. Число $\text{ind}(E_1, E_2) = \alpha - \beta$, где $\alpha = \dim(E_1 \cap E_2)$, $\beta = \dim X/(E_1 + E_2)$, называется *индексом* фредгольмовой пары E_1, E_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Подпространство из $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*)$ вида

$$\begin{aligned} \ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) &= \ell_{\text{def}, \mathcal{U}}^\infty \\ &= \{ \xi \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(0) = 0, \xi(n) = \mathcal{U}(n+1, n)^* \xi(n+1), n \geq 0 \} \end{aligned}$$

назовем *дефектным подпространством* для семейства $\mathcal{U}$.

ТЕОРЕМА 1.6. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{L}_E : D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – фредгольмов оператор и выполнено равенство $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

2) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (или на $\mathbb{R}_+$) с такой расщепляющей парой (P, Q) , что подпространства $E, \text{Im } P(0)$ из X образуют фредгольмову пару.

Если выполнено условие 2), то $\text{ind } \mathcal{L}_E = \text{ind}(E, \text{Im } P(0))$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Тогда оператор $\mathcal{L}_0$ фредгольмов, если и только если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с такой расщепляющей парой (P, Q) , что $\dim \text{Im } Q(0) < \infty$ (и тогда $\text{ind } \mathcal{L}_0 = -\dim \text{Im } Q(0)$).

Утверждение следствия 1.4 получено в [24] при дополнительных условиях рефлексивности пространства X и обратимости операторов семейства $\mathcal{U}$ для оператора $\mathcal{L}_0$, действующего в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$.

В § 9 изучается структура полугруппы отношений

$$\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)).$$

В следующей теореме используется определение 9.1 гиперболической полугруппы отношений.

ТЕОРЕМА 1.7. Для того чтобы полугруппа отношений $\mathcal{T}_E$ была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathcal{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P, Q) , удовлетворяющей условию $\text{Im } Q(0) = E$.

Данная теорема следует из более общей теоремы 9.2.

§ 2. Однородные пространства функций

Рассмотрим несколько примеров наиболее используемых пространств функций. Все они являются банаховыми и содержатся в линейном пространстве $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{J}, X)$ локально суммируемых на $\mathbb{J}$ функций со значениями в (комплексном) банаховом пространстве X , где $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, [a, b]\}$. Приведем некоторые из них: $L^p = L^p(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty]$, – (банахово) пространство функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{J}, X)$, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{J}} \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty, \quad \|x\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathbb{J}} \|x(\tau)\|, \quad p = \infty;$$

$C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ – пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций (подпространство из $L^{\infty}(\mathbb{J}, X)$); $C_{0,b} = C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$ – подпространство функций x из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$; $C_{b,E} = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$ – подпространство функций x из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $x(0) \in E$, где $E \in CS(X)$;

$$C_{00} = C_{0,b} \cap C_{b,0}, \quad C_{b,0} = C_{b,0}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X), \quad E = \{0\};$$

$S^p = S^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, – пространство Степанова, состоящее из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^1 \|x(s+t)\|^p ds \right)^{1/p}.$$

Для одного из рассматриваемых пространств скалярных функций $\mathcal{F}(\mathbb{J}, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, будем использовать обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{J})$.

Далее через $\mathbb{Z}_+$ обозначается множество неотрицательных целых чисел.

Рассматриваются следующие банаховы пространства последовательностей векторов из банахова пространства Y : $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}_+, Y)$, $p \in [1, \infty]$, – пространство последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Y$, для которых конечны величины

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty); \quad \|x\|_{\infty} = \sup_{n \geq 0} \|x(n)\|, \quad p = \infty;$$

$c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, Y)$ – подпространство последовательностей x из $\ell_{\infty}(\mathbb{Z}_+, Y)$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n)\| = 0$.

Последовательность $x: \mathbb{N} \rightarrow Y$ будем иногда обозначать через (x_n) .

Введем в рассмотрение еще одно семейство банаховых пространств

$$L^{p,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X), \quad p = 0, \quad p \in [1, \infty], \quad q \in [1, \infty].$$

Каждой функции $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ сопоставим последовательность (x_n) , $n \in \mathbb{Z}_+$, где $x_n \in L^1([0, 1], X)$, $x_n(s) = x(s+n)$, $s \in [0, 1]$. Банахово пространство $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$ состоит из функций $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых $x_n \in L^q([0, 1], X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а сама последовательность (x_n) принадлежит $\ell_p(\mathbb{Z}_+, L^q([0, 1], X))$. При $p = 0$ последовательность (x_n) считается принадлежащей пространству $c_0(\mathbb{Z}_+, L^q([0, 1], X))$. Нормой функции $x \in L^{p,q}$ полагаем

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_q^p \right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty), \quad q \in [1, \infty], \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|(x_n)\|_q, & \text{если } p \in \{0, \infty\}, \quad q \in [1, \infty]. \end{cases}$$

Следует отметить, что банахово пространство $L^{\infty, q}$ совпадает с пространством Степанова $S^q(\mathbb{R}_+, X)$, $q \in [1, \infty)$. Ясно, что $L^{p, p}(\mathbb{R}_+, X) = L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$.

Далее аксиоматизируем класс функциональных пространств, в которых действуют линейные операторы, построенные по заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ измеримых на $\mathbb{R}_+$ вещественных функций назовем *однородным пространством измеримых функций*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ содержится в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) = L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, причем $\int_0^1 |x(\tau)| d\tau \leq c \|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, где $c > 0$;
- 2) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ – банахова решетка (используется также термин “идеальное пространство” или “структура”; см. [25]), это означает, что если $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция такая, что $|\varphi(t)| \leq |\psi(t)|$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, то $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, причем $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$;
- 3) для любого $t > 0$ определены и ограничены операторы сдвигов функций $S(t), \tilde{S}(-t) \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$\begin{aligned} (S(t)x)(\tau) &= x(\tau + t), & \tau \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+), \\ (\tilde{S}(-t)x)(\tau) &= \begin{cases} x(\tau - t), & \text{если } \tau \geq t, \\ 0, & \text{если } 0 \leq \tau < t, \end{cases} \end{aligned}$$

при этом $\sup_{t \geq 0} \|S(t)\| + \sup_{t \geq 0} \|\tilde{S}(-t)\| < \infty$;

- 4) характеристическая функция $\chi_{[0,1]}$ отрезка $[0, 1]$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ функция $\tilde{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x}(t) = \|\chi_{[n, n+1]}x\|_{S^1(\mathbb{R}_+)}$, $t \in [n, n+1]$, $n \geq 0$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$.

Из свойств 2) и 3) однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ следует, что ему принадлежат характеристические функции $\chi_{[n, n+1]}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, интервалов $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и для удобства получения оценок далее полагаем, что $\|\chi_{[n, n+1]}\| = 1$, $n \geq 0$. Рассмотрим линейное подпространство $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+)$ функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, принимающих постоянное значение на каждом из интервалов $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По этому замкнутому подпространству определим банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ вещественных последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что функция $\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x}(t) = x(n)$, если $t \in [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит подпространству $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+)$, и положим $\|x\| = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$. Получившееся банахово пространство последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ назовем *пространством, ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$* . Оно в силу своего определения обладает свойствами, аналогичными свойствам однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ измеримых (по Бохнеру) функций $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которых функция $\bar{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x}(t) = \|x(t)\|$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ и $\|x\| = \|\bar{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, назовем *однородным пространством измеримых функций*, соответствующих однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство функций, соответствующих однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, то оно обладает соответствующими свойствами 1)–4) из определения 2.1. Через $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначим банахово пространство последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, обладающих следующими

свойствами: последовательность $\tilde{x}(n) = \|x(n)\|$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ и $\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)} = \|\tilde{x}\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)}$. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ можно определить (получим то же пространство, которое мы только что определили) как совокупность последовательностей функций $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ таких, что функция $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, $y(t) = x(n)$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит подпространству $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X)$ функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, постоянных на каждом промежутке $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)} = \|y\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)}$. Получившееся пространство последовательностей будем называть *однородным пространством последовательностей*, ассоциированным с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, где $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ – ассоциированная пара.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Банаховы пространства

$$S^p(\mathbb{R}_+, X), \quad p \in [1, \infty), \quad L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X), \quad p = 0, \quad p \in [1, \infty], \quad q \in [1, \infty],$$

являются однородными пространствами измеримых функций, а ассоциированными к $S^p(\mathbb{R}_+, X)$ и $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$ пространствами последовательностей являются соответственно пространства $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ и $\ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$, если $p \neq 0$. Если $p = 0$, то пространству $L^{0,q}(\mathbb{R}_+, X)$ соответствует пространство $c_0(\mathbb{Z}_+, X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Непосредственно из определения 2.2 следует, что верны включения

$$L^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \subset S^1(\mathbb{R}_+, X) \quad (2.1)$$

для любого однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и верны включения

$$\ell^1(\mathbb{Z}_+, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X) \quad (2.2)$$

для однородного пространства последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (ассоциированного с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$).

Приведем определение однородного пространства последовательностей векторов из банахова пространства X , не обязательно полученного из некоторого однородного пространства функций (см. замечание 2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Банахово пространство $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$, где Y – банахово пространство, последовательностей векторов из Y назовем *однородным пространством последовательностей*, если выполнены следующие условия:

- 1) если $y \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Y$ – такая последовательность, что $\|x(n)\| \leq \|y(n)\|$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то $x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $\|x\| \leq \|y\|$;
- 2) операторы сдвигов последовательностей $S(n)$, $\tilde{S}(-n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вида

$$(S(n)x)(k) = x(k+n), \quad k, n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y),$$

$$(\tilde{S}(-n)x)(k) = \begin{cases} x(k-n), & \text{если } k \geq n, \\ 0, & \text{если } 0 \leq k < n, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y),$$

корректно определены, ограничены и их нормы равномерно ограничены (по $n \in \mathbb{Z}_+$) числом 1;

- 3) для любого вектора $x_0 \in Y$ последовательность $\bar{x}_0: \mathbb{Z}_+ \rightarrow Y$, $\bar{x}_0(0) = x_0$, $\bar{x}_0(k) = 0$ для $k \geq 1$, принадлежит $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ и $\|\bar{x}_0\| \leq \|x_0\|$.

Ясно, что банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательностей, ассоциированное с однородным пространством измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, является однородным пространством последовательностей согласно определению 2.3. Отметим еще, что для однородного пространства последовательностей $\Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ имеют место включения вида (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Банахово пространство $\mathcal{F}(0, 1)$ вещественных функций, определенных на $[0, 1]$, назовем *однородным пространством*, если выполнены условия:

- 1) $\mathcal{F}(0, 1) \subset L^1(0, 1) = L^1([0, 1], \mathbb{R})$, и это вложение непрерывно;
- 2) корректно определены и равномерно ограничены операторы $S(t) \in \text{End } \mathcal{F}(0, 1)$ вида

$$(S(t)x)(\tau) = \begin{cases} x(\tau + t), & \text{если } t + \tau \leq 1; \\ x(\tau + t - 1), & \text{если } t + \tau > 1, \end{cases} \quad t, \tau \in [0, 1], \quad x \in \mathcal{F}(0, 1);$$

- 3) $\mathcal{F}(0, 1)$ – банахова решетка, причем $\varphi \in \mathcal{F}(0, 1)$ для $\varphi \equiv 1$.

Примерами однородных пространств на отрезке $[0, 1]$ являются симметрические банаховы пространства функций, определенных на $[0, 1]$ (см. [25]), в частности пространства Марцинкевича, Орлича и пространства $L_p(0, 1)$, $p \in [1, \infty]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Наиболее используемые однородные пространства измеримых функций можно получить из двух пространств: однородного пространства $\mathcal{F}(0, 1)$ функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, и однородного пространства вещественных последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ (см. определение 2.3). Вначале определим однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ вещественных функций. К нему отнесем любую функцию $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, для которой последовательность $\bar{x} = (x_n)$ функций вида $x_n(t) = x(t + n)$, $t \in [0, 1]$, принадлежит $\mathcal{F}(0, 1)$, а последовательность $\alpha = (\|x_n\|)$ их норм принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$. При этом полагается $\|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)} = \|\alpha\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)}$. Теперь однородное пространство векторных функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ определяется по построенному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ согласно определению 2.2.

К пространствам, построенным по правилу, описанному в замечании 2.4, относятся пространства $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$, $p = 0$, $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty]$, которые при $p \neq 0$ строятся из пространств $\mathcal{F}(0, 1) = L^q(0, 1)$, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = \ell_p(\mathbb{Z}_+)$. При $p = 0$ следует положить $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = c_0(\mathbb{Z}_+)$.

Кроме однородных пространств измеримых функций рассматриваются однородные пространства непрерывных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ называется *однородным пространством непрерывных функций*, если:

- 1) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – замкнутое подпространство пространства $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ с нормой из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, содержащее ненулевую функцию;
- 2) определены и равномерно ограничены семейства операторов вида

$$(\tilde{S}(-t)x)(s) = \begin{cases} x(s - t), & \text{если } s \geq t, \\ x(0), & \text{если } 0 \leq s \leq t, \end{cases} \quad s, t \geq 0,$$

где $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$;

- 3) $\Phi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|\Phi x\| \leq \|\Phi\|_{\infty} \|x\|$ для любой сильно непрерывной ограниченной функции $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, $\Phi(0) = 0$, и любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Далее будем рассматривать только однородные пространства вида $C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$ и $C_{0,b} = \{x \in C_b: \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\}$ непрерывных функций. Через $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим как однородное пространство измеримых функций, так и однородное пространство непрерывных функций. Ассоциированными с пространствами $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, $C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$ будут являться пространства последовательностей $\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $c_0(\mathbb{Z}_+, X)$ соответственно.

§ 3. Матричный анализ операторов в однородных пространствах измеримых функций. Ограниченность некоторых классов операторов

Рассмотрим однородное пространство измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (соответствующее однородному пространству вещественных измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$), подпространство $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X)$ и однородное пространство последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. определение 2.2, замечание 2.1). Через $\mathcal{F}([0, 1], X)$ обозначим банахово пространство измеримых на $[0, 1]$ функций со значениями в X , которые при их продолжении на $\mathbb{R}_+$ (нулевой функцией на промежутке $(1, \infty)$) принадлежат $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, и норма продолженной функции считается нормой функции из $\mathcal{F}([0, 1], X)$.

Каждой функции x из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ поставим в соответствие последовательность функций $\bar{x} = (x_n)$ из $\mathcal{F}([0, 1], X)$ вида

$$x_n(t) = (S(n)x)(t) = x(t + n), \quad t \in [0, 1],$$

и получившееся таким образом линейное пространство последовательностей $\bar{\mathcal{F}}$ нормируем, положив $\|\bar{x}\| = \|x\|_{\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)}$. Полученное пространство последовательностей $\bar{\mathcal{F}}$ является банаховым, оно изометрически изоморфно пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. При этом $\bar{\mathcal{F}}$ – однородное пространство последовательностей функций из $\mathcal{F}([0, 1], X)$.

Пусть $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ – однородное пространство последовательностей векторов из банахова пространства Y . Рассмотрим изометрическое представление $V: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } \Phi$, где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ – единичная окружность, определенное равенствами

$$(V(\gamma)y)(n) = \gamma^n y(n), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in \Phi. \quad (3.1)$$

Корректность определения представления V и его изометричность следуют из определения 2.3 однородного пространства последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Через $\Phi_c(\mathbb{Z}_+, Y)$ обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей $y \in \Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ (см. определение 2.3), для которых функция $\gamma \mapsto V(\gamma)y: \mathbb{T} \rightarrow \Phi$ непрерывна. Через $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим подпространство однородного пространства измеримых функций x из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которых последовательность $\bar{x} \in \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_+, \mathcal{F}([0, 1], X))$ принадлежит $(\bar{\mathcal{F}})_c$. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$, то положим $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) = C_{0,E}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X) \cap C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)$. Однородные пространства $L^{p,q}(\mathbb{R}_+, X)$, $p = 0$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, и $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, таковы, что для них $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Пространство $(S^p(\mathbb{R}_+, X))_c$, $p \in [1, \infty)$, совпадает с $L^{0,p}(\mathbb{R}_+, X)$, а $(L^\infty(\mathbb{R}_+, X))_c = L^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$.

ЛЕММА 3.1. Пространство $\mathcal{F}_c$ совпадает с подпространством таких функций $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \mathcal{F}$, для которых непрерывна функция $\lambda \mapsto V_{\mathbb{R}}(\lambda)x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$, где $V_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}$ – изометрическое представление группы $\mathbb{R}$ вида

$$(V_{\mathbb{R}}(\lambda)y)(s) = \exp(i\lambda s)y(s), \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X). \quad (3.2)$$

Кроме того, $\mathcal{F}_c$ совпадает с замыканием подпространства $\mathcal{F}_{\text{comp}}$ функций из $\mathcal{F}$, имеющих компактный носитель, а $(\bar{\mathcal{F}})_c$ есть замыкание подпространства финитных последовательностей из $\bar{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соответствующее определению 3.1 понятие использовалось в работах [26], [27, определение 3.2.3] и [28, определение 2.6] для банаховых модулей. Из [28, лемма 4.3] следует, что $\mathcal{F}_c = \overline{\mathcal{F}_{\text{comp}}}$, а $\overline{\mathcal{F}}_c$ есть замыкание финитных последовательностей из $\overline{\mathcal{F}}$. При построенном изометрическом изоморфизме подпространство $\mathcal{F}_c$ переходит в $(\overline{\mathcal{F}})_c$, причем функциям с компактным носителем соответствуют финитные последовательности. Осталось только заметить, что если $x \in \mathcal{F}_{\text{comp}}$, то функция $\lambda \mapsto V_{\mathbb{R}}(\lambda)x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$ непрерывна. Лемма доказана.

Пусть $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ – некоторое однородное пространство последовательностей векторов из банахова пространства Y . Для любой последовательности $f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } Y)$ определим оператор $\overline{V}(f) \in \text{End } \Phi$ следующими равенствами:

$$(\overline{V}(f)x)(n) = f(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \Phi. \quad (3.3)$$

Ясно, что $\|\overline{V}(f)\| = \|f\|_\infty$.

Далее рассмотрим последовательность вида

$$f_n(k) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n}, & \text{если } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{если } k \geq n+1, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.2. *Подпространство Φ_c совпадает с подпространством последовательностей из $\Phi = \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ вида $\{x \in \Phi: \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{V}(f_n)x = x\}$.*

Утверждение леммы 3.2 следует из [27, лемма 4.3]. Доказательство следующей леммы дублирует доказательство лемм 2 и 3 из статьи [26].

ЛЕММА 3.3. *Пусть $A \in \text{End } \Phi(\mathbb{Z}_+, Y)$ – оператор, перестановочный с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, определенными равенствами (3.1), и выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $\Phi = \Phi_c$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\overline{V}(f_n) - \overline{V}(f_n)A\| = 0$.

Тогда существует ограниченная функция $\mathcal{A}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } Y$ такая, что оператор A может быть представлен в виде

$$(Ay)(n) = \mathcal{A}(n)y(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in \Phi(\mathbb{Z}_+, Y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Двойственным пространством к однородному пространству последовательностей $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R})$ называется совокупность $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ таких последовательностей $y: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, для которых*

$$\|y\| = \sup_{\|x\|=1, x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)} \sum_{n \geq 0} |x(n)y(n)| < \infty.$$

Двойственное к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ также является однородным пространством. Оно канонически вкладывается в сопряженное к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)^*$, являясь в нем замкнутым подпространством. Банахово пространство $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{\xi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X^* \mid \text{последовательность } \bar{\xi}(n) = \|\xi(n)\|, n \in \mathbb{Z}_+, \text{ принадлежит } \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+) \text{ и } \|\xi\| = \|\bar{\xi}\|_{\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)}\}$ естественным образом отождествляется с замкнутым подпространством из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$, где $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется с помощью $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ (и, значит, $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$), то банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$ изометрически изоморфно банахову пространству $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ – произвольная последовательность из пространства $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$. Функционал $\Lambda_\xi: \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathbb{C}$, определенный формулой

$$\Lambda_\xi(x) = \langle x, \Lambda_\xi \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle x(n), \xi(n) \rangle, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (3.5)$$

где $\langle x(n), \xi(n) \rangle$ – значение функционала $\xi(n) \in X^*$ на векторе $x(n) \in X$, принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$. Это следует из оценки

$$|\Lambda_\xi(x)| \leq \sum_{n \geq 0} \|x(n)\| \|\xi(n)\| \leq \|\xi_0\| \|x\|, \quad (3.6)$$

где $\xi_0(n) = \|\xi(n)\|$, $n \geq 0$, принадлежит $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$, и определения 3.2. Из теоремы Хана–Банаха (о продолжении линейных функционалов) следует, что $\|\Lambda_\xi\| = \|\xi_0\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)} = \|\xi\|$.

Докажем, что любой функционал $\Lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$ представим в виде

$$\Lambda(x) = \sum_{n \geq 0} \langle x(n), \xi(n) \rangle, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (3.7)$$

где $\xi \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$. Последовательность $\xi \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$ определим равенствами $\langle x_0, \xi(n) \rangle = \Lambda(\bar{x}_n)$, $x_0 \in X$, где последовательность $\bar{x}_n \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет следующий вид: $\bar{x}_n(n) = x_0$, $\bar{x}_n(k) = 0$, $k \neq n$. Тогда формула (3.7) будет верна для любой финитной последовательности $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \mathcal{F}$. Поскольку финитные последовательности плотны в $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}$ (лемма 3.2) и для таких последовательностей верна оценка (3.6), то установлено представление (3.7) для любого функционала из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$, причем $\|\Lambda_\xi\| = \|\xi\|$, $\xi \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для характеристической функции $\chi_{[a,b]}$ любого промежутка $[a, b]$ из $\mathbb{R}_+$ и любого однородного пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ оператор $x \mapsto \chi_{[a,b]}x: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ является ограниченным проектором. Его образ обозначим через $\mathcal{F}([a, b], X)$ или $\chi_{[a,b]}\mathcal{F}$.

В однородном пространстве измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ равенствами

$$P_n x = \chi_{[n, n+1]} x, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

определим семейство проекторов $\mathcal{P} = \{(P_n); n \in \mathbb{Z}_+\}$. Имеет место

ЛЕММА 3.4. Для любой функции $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}_+, X)$ ряд $\sum_{k \geq 0} P_k x$ безусловно сходится к x . Кроме того, $C(\mathcal{P}) = \sup \left\| \sum_{k \geq 0} \alpha_k P_k \right\| < \infty$, где супремум берется по всем конечным наборам чисел $\alpha_k \in \mathbb{T}$, $k \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения леммы следуют из свойств 2) и 3) определения 2.1, замечания 2.1 и условия плотности функций с компактным носителем в $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ (см. лемму 3.1). Лемма доказана.

Систему проекторов $\mathcal{P} = (P_n)$ назовем *разложением единицы* в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Через $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим совокупность таких функций $x \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+, X)$, что $\chi_{[n, n+1]}x \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, и, значит, $\chi_{[n, n+1]}x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, причем $\|\chi_{[n, n+1]}x\|_{\mathcal{F}} \leq \|x\|_{L^\infty([n, n+1], X)}$.

Линейному оператору $A: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ сопоставим бесконечную матрицу $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})$, составленную из операторных блоков $\mathcal{A}_{ij} = P_i A P_j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, которые будем рассматривать как операторы из S^1 в L^∞ .

Далее рассматривается такой оператор A , что все операторы $\mathcal{A}_{ij}: S^1 \rightarrow L^\infty$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, ограничены. Определим двустороннюю последовательность $(d_A(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, полагая $d_A(k) = \sup_{i-j=k, i, j \geq 0} \|\mathcal{A}_{ij}\|$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3.5. Пусть линейный оператор $A: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ имеет матрицу $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})$ с суммируемыми диагоналями, т. е. конечна величина

$$\varkappa(A) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_A(k) < \infty, \quad (3.8)$$

и для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m A(I - P_{(n)})x = 0, \quad (3.9)$$

где $P_{(n)} = P_0 + P_1 + \dots + P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\text{Im } A \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, оператор A принадлежит алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|A\| \leq \varkappa(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторный ряд $\sum_{n+k \geq 0, n \geq 0} P_{n+k} A P_n$ для $k \in \mathbb{Z}$ и докажем, что он определяет некоторый оператор A_k из $\text{End } \mathcal{F}$. Для любой функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ числовая последовательность $\alpha_n = \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+)}$, $n \geq 0$, где $x_n = P_n x$, $n \geq 0$, принадлежит пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ и выполнено $\|(\alpha_n)\|_{\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)} \leq \|x\|$ (см. свойство 4) определения 2.1 и определение 2.2). Поскольку нормы операторов $P_{n+k} A P_n: S^1(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$, $n \geq 0$, $n+k \geq 0$, не превосходят величины $d_A(k)$, то из определения 2.2 (см. также свойство 2) определения 2.1) следует, что пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ принадлежит функция $y \in L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$, для которой верны равенства

$$\begin{aligned} \chi_{[n+k, n+k+1]} y &= P_{n+k} A P_n x, & n+k \geq 0, \quad n \geq 0, \\ \chi_{[m, m+1]} y &= 0 & \text{для } 0 \leq m < k, \quad \text{если } k \geq 1, \end{aligned}$$

и верна оценка $\|y\| \leq d_A(k)\|x\|$. Положим $A_k x = y$. Полученный таким образом оператор A_k принадлежит алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, причем $(\mathcal{A}_k)_{ij} = \mathcal{A}_{ij}: S^1(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ для $i-j=k$ и $(\mathcal{A}_k)_{ij} = 0$ для $i-j \neq k$.

Из условия (3.8) следует, что оператор $\bar{A} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ принадлежит алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, $\|\bar{A}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{A}_k\| \leq \varkappa(A)$, и операторы A и $\bar{A}$ имеют одинаковые матрицы. Осталось доказать, что $A = \bar{A}$. Для этого достаточно установить, что $P_m A = P_m \bar{A}$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Из совпадения их матриц следует, что $P_m A P_{(n)} = P_m \bar{A} P_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из оценок

$$\|P_m \bar{A}(I - P_{(n)})\| \leq \varkappa(P_m \bar{A}(I - P_{(n)})) \leq \sum_{k \geq n-m} d_k(A) \quad (3.10)$$

следует, что условие (3.9) выполнено и для $\bar{A}$. Из равенств

$$\begin{aligned} P_m A x &= P_m A(I - P_{(n)})x + P_m A P_{(n)}x = P_m A(I - P_{(n)})x + P_m \bar{A} P_{(n)}x, \\ P_m \bar{A} x &= P_m \bar{A}(I - P_{(n)})x + P_m \bar{A} P_{(n)}x, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \end{aligned}$$

а также из условия (3.9) и оценок (3.10) получаем доказываемые равенства $P_m A x = P_m \bar{A} x$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Если для линейного оператора $A: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}, X)$ выполнены оценки

$$\|(Ax)(t)\|_X \leq |(B\tilde{x})(t)|, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad (3.11)$$

где $\tilde{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{x}(t) = \|x(t)\|_X$, $t \in \mathbb{R}_+$, и оператор $B: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет условиям леммы 3.5, то оператор A принадлежит алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\|A\| \leq \|B\|$.

Утверждение леммы 3.6 непосредственно следует из определения однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Если для операторов $A: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, X)$, $B: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$ выполнены оценки (3.11), то будем говорить, что оператор A мажорируется оператором B .

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ — сильно измеримая функция, удовлетворяющая оценкам

$$\|G(t, s)\| \leq C \exp(-\delta|t - s|), \quad 0 \leq s, t < \infty, \quad (3.12)$$

для некоторых $C, \delta > 0$. Тогда оператор

$$(Ay)(t) = \int_0^\infty G(t, s)y(s) ds, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad (3.13)$$

принадлежит банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и его норма допускает оценку вида

$$\|A\| \leq 4Ce^\delta(1 - e^{-\delta})^{-1}. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.13) и оценки (3.12) следует, что оператор A мажорируется оператором $B: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$, $(Bx)(t) = C \int_0^\infty e^{-\delta|t-s|} \times x(s) ds$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$. Проверяя для оператора B выполнение условий леммы 3.5, представим его в виде суммы двух операторов: $(Bx)(t) = C((B_1x)(t) + (B_2x)(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, где $(B_1x)(t) = e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s} x(s) ds$, $(B_2x)(t) = e^{\delta t} \int_t^\infty e^{-\delta s} x(s) ds$. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$(B_1P_nx)(t) = \begin{cases} e^{-\delta t} \int_n^{n+1} e^{\delta s} x(s) ds, & \text{если } t > n+1, \\ e^{-\delta t} \int_n^t e^{\delta s} x(s) ds, & \text{если } t \in [n, n+1], \\ 0, & \text{если } t < n, \end{cases}$$

$$(B_2P_nx)(t) = \begin{cases} e^{\delta t} \int_n^{n+1} e^{-\delta s} x(s) ds, & \text{если } t < n, \\ e^{\delta t} \int_t^{n+1} e^{-\delta s} x(s) ds, & \text{если } t \in [n, n+1], \\ 0, & \text{если } t > n+1. \end{cases}$$

Из этих равенств и оценок

$$\left| \int_n^{n+1} e^{-\delta s} x(s) ds \right| \leq e^{-\delta n} \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+)},$$

$$\left| \int_t^{n+1} e^{-\delta s} x(s) ds \right| \leq e^{-\delta n} \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+)}, \quad t \in [n, n+1],$$

$$\left| \int_n^{n+1} e^{\delta s} x(s) ds \right| \leq e^{\delta(n+1)} \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+)},$$

$$\left| \int_n^t e^{\delta s} x(s) ds \right| \leq e^{\delta(n+1)} \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+)}, \quad x_n = \chi_{[n, n+1]} x, \quad x \in S^1(\mathbb{R}_+),$$

получаем, что операторы $P_m B P_n: S^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, ограничены и их нормы допускают оценки $\|P_m B P_n\| \leq 2C e^{-\delta(|n-m|-1)}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, причем $\kappa(B) \leq 4C e^\delta (1 - e^{-\delta})^{-1}$.

Теперь рассмотрим операторы $P_m B(I - P_{(n)})$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, которые мажорируют соответствующие операторы $P_m A(I - P_{(n)})$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Для операторов $P_m B_k(I - P_{(n)})$, $k = 1, 2$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $n > m + 1$, верны представления

$$(P_m B_2(I - P_{(n)})x)(t) = \begin{cases} e^{\delta t} \int_{n+1}^{\infty} e^{-\delta s} x(s) ds, & \text{если } m \leq t \leq m+1, \\ 0, & \text{если } t \notin [m, m+1], \end{cases}$$

$$P_m B_1(I - P_{(n)}) = 0.$$

Поскольку $|\int_{n+1}^{\infty} e^{-\delta s} x(s) ds| \leq \sum_{k \geq n+1} e^{-\delta k} \|x_k\|_{S^1(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{e^{-\delta(n+1)}}{1 - e^{-\delta}} \|x\|_{\mathcal{F}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_m A(I - P_{(n)})\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_m B(I - P_{(n)})\| = 0$.

Итак, для оператора A выполнены условия леммы 3.5. Поэтому оператор A ограничен и его норма допускает оценку (3.14). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство измеримых функций. Операторы

$$(A_1 x)(t) = \int_t^{t+1} x(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad A_1: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

$$(A_2 x)(n) = \int_n^{n+1} x(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad A_2: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

$$(A_3 x)(t) = \int_n^t x(\tau) d\tau, \quad t \in [n, n+1), \quad A_3: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

корректно определены и ограничены, причем $\|A_2\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения и ограниченность оператора A_1 следуют из его представления в виде (3.13), где $G(t, s) = \chi_{[0,1]}(s - t)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$. Аналогично обосновываются свойства оператора A_3 .

Оператор A_2 корректно определен и ограничен ввиду оценок

$$\|(A_2 x)(n)\| \leq \int_n^{n+1} \|x(\tau)\| d\tau \leq \|x_n\|_{S^1(\mathbb{R}_+, X)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $x_n = \chi_{[n, n+1]} x$, свойства 4) определения 2.1 и определения 2.2. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функция $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Тогда корректно определен и ограничен оператор

$$A_d: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (A_d x)(n) = \int_0^{\infty} G(n, s) x(s) ds, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.15)$$

и верна оценка

$$\|A_d\| \leq 4C e^{\delta+1} (1 - e^{-\delta})^{-1}. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с функцией G рассмотрим функцию $\tilde{G}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, $\tilde{G}(t, s) = G(n, s)$, $s \in \mathbb{R}_+$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, которая, как и G , сильно измерима, и для нее верны оценки

$$\|\tilde{G}(t, s)\| \leq C \exp(-\delta|t - s| + 1) = C e \exp(-\delta|t - s|), \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Рассмотрим оператор $\tilde{A}_d: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, $(\tilde{A}_d x)(t) = \int_0^\infty \tilde{G}(t, s)x(s) ds$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Для него выполнены условия теоремы 3.2. Следовательно, он ограничен, и верна оценка (3.16). Из вида функции $\tilde{G}$ следует, что он действует в подпространство $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X)$, изометрически изоморфное банахову пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. замечание 2.1). Из вида (3.15) оператора A_d следует, что $A_d = J\tilde{A}_d$, где $J: \mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – указанный изоморфизм. Теорема доказана.

Аналогично (и даже еще проще) доказывается

ТЕОРЕМА 3.4. *Если функция $G_d: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ допускает оценки вида*

$$\|G_d(n, m)\| \leq M_0 \exp(-\alpha_0 |n - m|), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

для некоторых $M_0, \alpha_0 > 0$, то оператор

$$A_d: \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (A_d x)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_d(n, m)x(m),$$

корректно определен, ограничен и $\|A_d\| \leq 2M_0 e^{\alpha_0} (1 - e^{-\alpha_0})^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \in \{C_b, C_{0,b}\}$, то все классы операторов, рассматриваемые выше, корректно определены, а их ограниченность следует из ограниченности этих операторов в $L^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ и $L^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, X)$.

§ 4. Некоторые сведения из теории линейных отношений

Здесь приводятся наиболее используемые далее понятия и некоторые результаты из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов). Большинство из них содержится в статье [29] (см. также монографии [30] и [31]). Изложение понятий и результатов, связанных с сопряженными отношениями, представлено в § 7.

Линейным отношением на комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ назовем любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Совокупность всех замкнутых линейных отношений на $\mathcal{X}$ обозначим через $LRC(\mathcal{X})$, а множество всех линейных отношений на $\mathcal{X}$ – через $LR(\mathcal{X})$. Подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{X}: \exists y \in \mathcal{X} \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$ называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in \mathcal{X}: (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Подпространства $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}): (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, $\text{Im } \mathcal{A} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$ называются соответственно *ядром* и *образом* линейного (этот термин часто будет не использоваться) отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого $y \in \mathcal{A}x$.

Если $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, то обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} \in LR(\mathcal{X})$ определяется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Ясно, что $D(\mathcal{A}^{-1}) = \text{Im } \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A}^{-1} = D(\mathcal{A})$.

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}.$$

Значит, $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$; под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$. Произведением отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}: \exists y \in D(\mathcal{B}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}, (y, z) \in \mathcal{B}\}.$$

Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ является графиком многозначного отображения $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset X \rightarrow 2^X$, где $D(\tilde{A}) = D(\mathcal{A})$ и $\tilde{A}x = \mathcal{A}x$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(\mathcal{X})$ линейных замкнутых операторов можно считать включенным в $LRC(\mathcal{X})$. Итак, $\text{End } \mathcal{X} \subset LO(\mathcal{X}) \subset LRC(\mathcal{X}) \subset LR(\mathcal{X})$. В отличие от монографий [30], [31] здесь не используется термин “многозначный линейный оператор”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Отношение $\mathcal{A}$ из $LRC(\mathcal{X})$ назовем *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно). *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Отметим, что множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ замкнут. Если $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ и $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$, то $\mathcal{A}$ – замкнутое отношение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}, \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$.

Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [21, § 4.8]), причем $\mathcal{A}0 = \text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $D(\mathcal{A}) = \text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра, далее используется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Расширенным спектром* отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in \text{End } \mathcal{X}$. Если $\mathcal{A} \notin \text{End } \mathcal{X}$ (т.е. когда $D(\mathcal{A}) \neq \mathcal{X}$ либо $\mathcal{A}0 \neq \{0\}$), то полагаем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называется *расширенным резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 4.1 [29]. Если $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ называется *инвариантным* относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, если $\mathcal{A}x_0 \cap \mathcal{X}_0 \neq \{0\}$ для любого $x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{X}_0$. *Сужением* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ на инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0$ называется линейное отношение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0) \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ на подпространстве $\mathcal{X}_0$. Для него будет использоваться обозначение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_0$.

Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ – прямая сумма двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_1$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой* отношений $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Будем говорить, что линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ *перестановочно* с оператором $B \in \text{End } \mathcal{X}$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для любой пары $(x, y) \in \mathcal{A}$.

Отметим, что если $P_0 \in \text{End } \mathcal{X}$ – проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ пространства $\mathcal{X}$ (т.е. $\text{Im } P_0 = \mathcal{X}_0$, $\text{Ker } P_0 = \text{Im}(I - P_0) = \mathcal{X}_1$), то подпространства $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ инвариантны относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ перестановочно с P_0 .

В § 6 существенно используется

ТЕОРЕМА 4.2 [29]. Пусть $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ и расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A}$ представим в виде $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0 – компактное подмножество из $\mathbb{C}$, σ_1 – замкнутое подмножество из $\tilde{\mathbb{C}}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда банахово пространство $\mathcal{X}$ допускает представление в виде

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1 \quad (4.1)$$

прямой суммы замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_1 \in LRC(\mathcal{X}_1)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{A}_0 \in \text{End } \mathcal{X}_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;
- 2) $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A}_0$, $D(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_0 \oplus D(\mathcal{A}_1)$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$.

Разложение (4.1) осуществляет перестановочный с отношением $\mathcal{A}$ проектор Рисса $P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda \in \text{End } \mathcal{X}$, где γ – замкнутая жорданова кривая (или несколько таких кривых), лежащая в $\rho(\mathcal{A})$ и такая, что σ_0 лежит внутри γ , а σ_1 – вне. При этом $\mathcal{X}_0 = \text{Im } P_0$, $\mathcal{X}_1 = \text{Im}(I - P_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Для отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ величина

$$\begin{aligned} \gamma(\mathcal{A}) &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \{ \| \mathcal{A}x \| \geq \lambda d(x, \text{Ker } \mathcal{A}) \quad \forall x \in D(\mathcal{A}) \} \\ &= \inf_{x \in D(\mathcal{A}) \setminus \text{Ker } \mathcal{A}} \frac{\| \mathcal{A}x \|}{d(x, \text{Ker } \mathcal{A})}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\| \mathcal{A}x \| = \inf_{y \in \mathcal{A}x} \| y \|$, $x \in D(\mathcal{A})$, $d(x, \text{Ker } \mathcal{A}) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } \mathcal{A}} \| x - x_0 \|$, называется *инфинимумом модуля* отношения $\mathcal{A}$. Отношение $\mathcal{A}$ называется *корректным* (равномерно инъективным), если $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{A}) > 0$.

Если $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$, то $D(\mathcal{A})$ – банахово пространство с нормой графика $\| x \|_{\mathcal{A}} = \| x \| + \| \mathcal{A}x \|$, $x \in D(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ и для отношения $\mathcal{A}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$;
- 2) $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$, т. е. отношение инъективно;
- 3) отношение $\mathcal{A}$ корректно;
- 4) $\dim \text{Ker } \mathcal{A} < \infty$;
- 5) $\text{Ker } \mathcal{A}$ – замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{X}$;
- 6) $\overline{\text{Im } \mathcal{A}} = \text{Im } \mathcal{A}$;
- 7) $\text{Im } \mathcal{A}$ – замкнутое дополняемое в $\mathcal{X}$ подпространство;
- 8) $\text{Im } \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – замкнутое подпространство конечной коразмерности;
- 9) $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{A}$ – сюръективное отношение;
- 10) отношение $\mathcal{A}$ непрерывно обратимо.

Если для $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 10$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ находится в состоянии S . В частности, если отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ находится в состоянии $F = \{4, 8\}$, то отношение $\mathcal{A}$ будет фредгольмовым (см. определение 1.5). Следует отметить, что определение 4.6 состояний отношения отличается от общепринятого (см. [30]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Отношения $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LRC(\mathcal{X})$ называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{X}$ такой, что $\mathcal{A} = \{(Ux, Uy) : (x, y) \in \mathcal{B}\}$, последнее эквивалентно равенству $\mathcal{A} = U^{-1}\mathcal{B}U$.

Подобные отношения обладают многими совпадающими свойствами. Например, они имеют одинаковые множества состояний. В частности, верна

ТЕОРЕМА 4.3. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – подобные отношения из $LRC(\mathcal{X})$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \tilde{\sigma}(\mathcal{B})$, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.

В заключение параграфа отметим используемые далее равенства для отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in LR(\mathcal{X})$ (см. [30]):

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}, \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \mathcal{C}\mathcal{A} + \mathcal{C}\mathcal{B},$$

где для выполнения второго равенства считается выполненным условие $\text{Im } \mathcal{C} \subset D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$ и для третьего – условие $\mathcal{C} \in \text{End } \mathcal{X}$.

§ 5. Оператор $\mathcal{L}_E$ и разностное отношение $\mathcal{D}_E$

Пусть $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – линейный оператор, построенный по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ (см. § 1). Здесь $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство измеримых функций либо $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \in \{C_b(\mathbb{R}_+, X), C_{0,b}(\mathbb{R}_+, X)\}$. Для определенности всюду в настоящем параграфе считается, что $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство измеримых функций. С несущественными изменениями в доказательствах почти все утверждения (кроме теоремы 5.6) остаются верными и для однородных пространств непрерывных функций.

Далее рассматриваются ассоциированное с $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ однородное пространство последовательностей (см. замечание 2.1) и линейное отношение $\mathcal{D}_E$, определенное в § 1. Областью определения последнего является пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Основные результаты этого параграфа связаны с доказательством утверждений о том, что большинство свойств из определения 4.6 выполняются для $\mathcal{L}_E$ и $\mathcal{D}_E$ одновременно. Отношение $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ будем называть *разностным*, а отношение $\mathcal{K}_E$ – *отношением взвешенного сдвига*.

Введем в рассмотрение два линейных оператора

$$\mathcal{B}: \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad \mathcal{C}: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$$

с помощью следующих равенств:

$$(\mathcal{B}x)(s) = -\varphi(s)\mathcal{U}(s, n)x(n), \quad s \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (5.1)$$

$$(\mathcal{C}y)(n) = \begin{cases} -\int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, s)y(s) ds, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0, y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \end{cases} \quad (5.2)$$

где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная периодическая функция с периодом 1, для которой $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\int_0^1 \varphi(s) ds = 1$. В качестве такой функции можно взять $\varphi(s) = 6s(1-s)$, $s \in [0, 1]$, именно так мы будем поступать далее.

ЛЕММА 5.1. Операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ ограничены, причем $\|\mathcal{B}\| \leq \frac{3}{2}Me^\alpha$, $\|\mathcal{C}\| \leq Me^\alpha$, где постоянные M, α взяты из оценки (1.3) семейства $\mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\tilde{x}$ из подпространства $\mathcal{F}_s(\mathbb{R}_+, X) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (см. замечание 2.1), изометрически изоморфного пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, построенную по $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, т.е. $\tilde{x}(t) = x(n)$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что $\mathcal{B}x$ есть функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, полученная умножением функции $\tilde{x}$ на ограниченную, сильно непрерывную функцию $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, $F(s) = -\varphi(s)\mathcal{U}(s, n)$, $s \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при

$$\|F\|_\infty \leq \max_{s \in [0,1]} |\varphi(s)| \sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| \leq \frac{3}{2} M e^\alpha.$$

Теперь из свойства 2) определения 2.1 следуют ограниченность оператора $\mathcal{B}$ и доказываемая оценка. Оператор $\mathcal{C}$ есть произведение оператора умножения на ограниченную сильно измеримую функцию, оператора A_2 из следствия 3.1 и оператора $\tilde{S}(-1) \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Лемма доказана.

Поскольку оператор $\mathcal{L}_0$ определяется равенствами (1.10), он является инъ-ективным. Имеет место

ЛЕММА 5.2. *Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ удовлетворяет оценкам вида (1.17), то оператор $\mathcal{L}_0: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (непрерывно) обратим и обратный $\mathcal{L}_0^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ представим в виде*

$$(\mathcal{L}_0^{-1}f)(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения и ограниченность определенного формулой (5.3) оператора следуют из теоремы 3.2 (здесь $G(t, s) = -\mathcal{U}(t, s)$ при $0 \leq s \leq t$ и $G(t, s) = 0$ при $0 \leq t \leq s$). Непосредственно из равенств (1.10), определяющих оператор $\mathcal{L}_0$, следует, что формула (5.3) задает обратный оператор к $\mathcal{L}_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. *Каждая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ удовлетворяет равенствам*

$$x(t) = ((\mathcal{L}_0 - \lambda_0 I)^{-1}(\mathcal{L}_E - \lambda_0 I)x)(t) + e^{-\lambda_0 t} \mathcal{U}(t, 0)x(0), \quad x(0) \in E, \quad t \geq 0, \quad (5.4)$$

где α – такое, как в оценке (1.3), λ_0 удовлетворяет условию $-\text{Re } \lambda_0 + \alpha < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.2 следует обратимость оператора $\mathcal{L}_0 - \lambda_0 I$, который вместе с $\mathcal{L}_E - \lambda_0 I$ определяется по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_0(t, s) = \exp(-\lambda_0(t-s))\mathcal{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t$ (см. [18], [20] и замечание 6.1), и верна формула

$$((\mathcal{L}_0 - \lambda_0 I)^{-1}f)(t) = - \int_0^t e^{-\lambda_0(t-s)} \mathcal{U}(t, s) f(s) ds, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X). \quad (5.5)$$

Согласно определению оператора $\mathcal{L}_E - \lambda_0 I$ каждая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ удовлетворяет равенствам (см. равенства (1.9))

$$x(t) = e^{-\lambda_0 t} \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int_0^t e^{-\lambda_0(t-s)} \mathcal{U}(t, s) f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5.6)$$

где $f = (\mathcal{L}_E - \lambda_0 I)x$. Из (5.5) и (5.6) следует представление (5.4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Любая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ представима в виде $x = x_0 + f_0$, где $x_0 \in D(\mathcal{L}_0)$ (в частности, $x_0(0) = 0$) – непрерывная ограниченная функция и $f_0(t) = e^{-\lambda_0 t} \mathcal{U}(t, 0)x(0)$, $t \geq 0$, – экспоненциально убывающая непрерывная функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

ЛЕММА 5.4. Если оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим, то оператор $\mathcal{L}_E^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ является левым обратным для оператора $\mathcal{L}_0$ и правым обратным для оператора $\mathcal{L}_X$. При этом оператор $\mathcal{L}_0$ является корректным, а оператор $\mathcal{L}_X$ – сюръективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из включений (1.11); см. [19], [20].

Оператор $\mathcal{L}_E$ не всегда замкнут.

ПРИМЕР 5.1. Пусть $A = A^* < 0$ – отрицательно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X , имеющий компактную резольвенту. Рассмотрим ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в X , составленный из собственных векторов оператора A , т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$, предполагая, что $\lambda_k \leq -k^3$, $k \geq 1$. Тогда A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, для которой $U(t)e_k = \exp(\lambda_k t)e_k$, $k \geq 1$, $t \geq 0$. Пусть $x_0 = \sum_{k \geq 1} k^{-1}e_k$ и $E = \{x \in X: (x, x_0) = 0\}$ – подпространство векторов из X , перпендикулярных вектору x_0 . В качестве семейства эволюционных операторов возьмем семейство $\mathcal{U}(t, s) = U(t - s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$. Последовательность векторов из X вида

$$x_n = \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k} e_k - \left(n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) e_n$$

принадлежит подпространству E . Все функции вида $\varphi_n(t) = U(t)x_n$, $n \geq 1$, $t \geq 0$, содержатся (см. лемму 5.5) в $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ при любом выборе однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, в котором действует оператор $\mathcal{L}_E = -d/dt + A$. Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = L^2(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда для функции $\varphi_0(t) = U(t)x_0$, $t \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_0\|_2^2 &= \int_0^\infty \|U(t)x_n - U(t)x_0\|^2 dt \\ &= \left(\frac{1}{n} + n \sum_{k \geq 1, k \neq n} \frac{1}{k^2} \right)^2 \int_0^\infty e^{2\lambda_n t} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_0(0) = x_0 \notin E$, то $\varphi_0 \notin \text{Ker } \mathcal{L}_E$. Итак, $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ – незамкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, и поэтому $\mathcal{L}_E$ – незамкнутый оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При введении в $D(\mathcal{L}_E)$ нормы

$$\|x\| = \|x(0)\|_X + \|x\|_{\mathcal{F}} + \|\mathcal{L}_E x\|_{\mathcal{F}} \quad (5.7)$$

(более сильной, чем норма графика оператора $\mathcal{L}_E$) подпространство $\mathcal{D}(\mathcal{L}_E)$ будет замкнутым (по этой норме). Значит, $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ – замкнутое пространство в $D(\mathcal{L}_E)$. Следовательно, если оператор $\mathcal{L}_E$ биективен, то он непрерывно обратим и $\mathcal{L}_E^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Из представления (5.4) и следствия 5.1 получаем, что замкнутость оператора $\mathcal{L}_E$ эквивалентна замкнутости его ядра. Здесь же отметим, что отношение $\mathcal{K}_E$ и, следовательно, отношение $\mathcal{D}_E$ всегда замкнуты. Значит, замкнуто $\text{Ker } \mathcal{D}_E$.

Непосредственно из определений оператора $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и разностного отношения $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ следует

ЛЕММА 5.5. *Имеют место представления вида*

$$\begin{aligned}\text{Ker } \mathcal{L}_E &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) : f(t) = \mathcal{U}(t, 0)x_0, \ t \geq 0, \ x_0 \in E\}, \\ \text{Ker } \mathcal{D}_E &= \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : x(n) = \mathcal{U}(n, 0)x_0, \ n \in \mathbb{Z}_+, \ x_0 \in E\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$J = J_E : D(\mathcal{L}_E) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (Jx)(n) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in D(\mathcal{L}_E).$$

ЛЕММА 5.6. *Оператор J корректно определен и ограничен (при норме (5.7) в $D(\mathcal{L}_E)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.3 следует, что любая функция $x \in D(\mathcal{L}_E)$ представима в виде (5.4). Используя формулу (5.5), получаем, что x можно определить с помощью равенств (5.6), где $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям из леммы 5.3. Таким образом, оператор J допускает представление

$$(Jx)(n) = (A_d(\mathcal{L}_E - \lambda_0 I)x)(n) + e^{-\lambda_0 n} \mathcal{U}(n, 0)x(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где оператор A_d определен формулой (3.15) с функцией

$$G(n, s) = \exp(-\lambda_0(n-s))\mathcal{U}(n, s), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad s \leq n,$$

и $G(n, s) = 0$ при $s > n$. Таким образом, из теоремы 3.3 следует корректность определения оператора J и его ограниченность. При этом учитывались экспоненциальное убывание внеинтегрального слагаемого и включение (2.2). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение оператор $B : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ вида

$$(Bx)(s) = \mathcal{U}(s, n)x(n), \quad s \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

Из доказательства леммы 5.1 следует ограниченность B , причем $\|B\| \leq Me^\alpha$. Отметим, что $Bx = -\varphi Bx$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство непрерывных функций, то оператор B не определен корректно, но утверждение следующей леммы остается верным. В этом случае оператор B рассматривается как оператор из $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ в $\text{Ker } \mathcal{L}_E$.

ЛЕММА 5.7. *Ядра оператора $\mathcal{L}_E$ и разностного отношения $\mathcal{D}_E$ изоморфны, а их изоморфизм осуществляет оператор B . При этом $BJx = x$, $x \in \text{Ker } \mathcal{L}_E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что оператор B инъективен (используются свойства 1) и 3) семейства $\mathcal{U}$). Из леммы 5.5 следует, что $Bx \in \text{Ker } \mathcal{L}_E$ для любого $x \in \text{Ker } \mathcal{D}_E$. Если $y \in \text{Ker } \mathcal{L}_E$, то из леммы 5.6 следует, что $Jy \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $Jy \in \text{Ker } \mathcal{D}_E$. Поскольку $BJy = y$, то $B(\text{Ker } \mathcal{D}_E) = \text{Ker } \mathcal{L}_E$, т.е. B осуществляет изоморфизм подпространств $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ и $\text{Ker } \mathcal{L}_E$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.8. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{C}B = I - \mathcal{D}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, то

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}By)(n) &= \int_{n-1}^n U(n, \tau) \varphi(\tau) U(\tau, n-1) y(n-1) d\tau \\ &= U(n, n-1) y(n-1), \quad n \geq 1, \quad (\mathcal{C}By)(0) = 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь построим линейный оператор $\Phi_E: \mathcal{D}_E \rightarrow D(\mathcal{L}_E)$.

Каждой паре (x_0, f) из $\mathcal{D}_E$ поставим в соответствие функцию $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, определяя ее равенствами

$$y(t) = \mathcal{U}(t, n)(x_0(n) - f(n)) - \int_n^t \mathcal{U}(t, \tau)(\mathcal{B}f)(\tau) d\tau, \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.9)$$

Поскольку $y(0) = x_0(0) - f(0)$, то $y(0) \in E$ (см. определение $\mathcal{D}_E$). Подставляя выражение (5.1) для $\mathcal{B}f$ в (5.9), получим

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{U}(t, n)(x_0(n) - f(n)) + \left(\int_n^t \mathcal{U}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right) f(n) \\ &= \mathcal{U}(t, n)(x_0(n) - f(n)) + \left(\int_n^t \varphi(\tau) d\tau \right) \mathcal{U}(t, n) f(n) \\ &= (B(x_0 - f))(t) + f_n(t)(Bf)(t), \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $f_n(t) = \int_n^t \varphi(\tau) d\tau$, $t \in [n, n+1)$. Из этих равенств следует, что функция y принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (см. следствие 3.1 для оператора A_3) и непрерывна на промежутках $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из (5.10) получаем, что $y(n) = x_0(n) - f(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Из равенств

$$y(t) = \mathcal{U}(t, n)y(n) - \int_n^t \mathcal{U}(t, \tau)(\mathcal{B}f)(\tau) d\tau, \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

следует, что $y(t) = \mathcal{U}(t, 0)y(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)(\mathcal{B}f)(\tau) d\tau$, $t \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, $y \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\mathcal{L}_E y = \mathcal{B}f$.

Из изложенного следует, что построенный линейный оператор $(x_0, f) \mapsto y: \mathcal{D}_E \rightarrow D(\mathcal{L}_E)$ ограничен (с нормой в $D(\mathcal{L}_E)$, индуцируемой из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$). Этот оператор далее обозначается через Φ_E . Итак, верна

ЛЕММА 5.9. *Оператор $\Phi_E: \mathcal{D}_E \rightarrow D(\mathcal{L}_E)$ ограничен (в $D(\mathcal{L}_E)$ выбрана норма из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$), и имеют место равенства*

$$(\mathcal{L}_E \Phi_E)(x_0, f) = \mathcal{B}f, \quad (x_0, f) \in \mathcal{D}_E. \quad (5.11)$$

ЛЕММА 5.10. *Имеет место включение $\mathcal{B}^{-1}(\text{Im } \mathcal{L}_E) \subset \text{Im } \mathcal{D}_E$, т.е. $f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$, если $\mathcal{B}f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. В частности, отношение $\mathcal{D}_E$ сюръективно, если сюръективен оператор $\mathcal{L}_E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = \mathcal{B}f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$, где $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Докажем, что $f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Из условия $g \in \text{Im } \mathcal{L}_E$ следует существование функции $x \in D(\mathcal{L}_E)$ такой, что $\mathcal{L}_E x = g$, т.е. для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}_+$ верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)(\mathcal{B}f)(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Тогда для последовательности $\tilde{x} = Jx$, принадлежащей в силу леммы 5.6 пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, верны равенства

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \mathcal{U}(n, n-1)\tilde{x}(n-1) + \int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, \tau)\varphi(\tau)\mathcal{U}(\tau, n-1)f(n-1) d\tau \\ &= \mathcal{U}(n, n-1)\tilde{x}(n-1) + \mathcal{U}(n, n-1)f(n-1), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{x}(0) = x(0) \in E$, то из этих равенств следует, что $(Jx + f, f) \in \mathcal{D}_E$, т.е. $f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.11. Для оператора $\mathcal{L}_E$ и отношения $\mathcal{D}_E$ имеет место включение $\mathcal{C}\mathcal{L}_E \subset \mathcal{D}_E J$. В частности, $\mathcal{C}(\text{Im } \mathcal{L}_E) \subset \text{Im } \mathcal{D}_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f = \mathcal{L}_E x$, то x и f связаны соотношениями (1.9), из которых получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}f)(n) &= - \int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, \tau) f(\tau) d\tau = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad n \geq 1, \\ (\mathcal{C}f)(0) &= 0 = x(0) - x(0), \quad x(0) \in E. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.12. Верно включение $\mathcal{C}^{-1}(\text{Im } \mathcal{D}_E) \subset \text{Im } \mathcal{L}_E$, т.е. если функция $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такова, что $\mathcal{C}f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$, то $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. В частности, сюръективность отношения $\mathcal{D}_E$ влечет сюръективность оператора $\mathcal{L}_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x_0, \mathcal{C}f) \in \mathcal{D}_E$ для некоторых $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Поскольку $(\mathcal{C}f)(0) = 0$, то $x_0(0) \in E$. Определим функцию $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ равенствами

$$x(t) = \mathcal{U}(t, n)x_0(n) - \int_n^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad t \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.12)$$

Непрерывность функции x следует из равенств

$$\begin{aligned} x(n) &= \mathcal{U}(n, n-1)x_0(n-1) - \int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, \tau)f(\tau) d\tau \\ &= \mathcal{U}(n, n-1)x_0(n-1) + (\mathcal{C}f)(n) = x_0(n), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

которые вытекают из условия $(x_0, \mathcal{C}f) \in \mathcal{D}_E$. Отсюда и из равенств (5.12) получаем, что функции x и f удовлетворяют равенствам (1.9), причем $x(0) = x_0(0) \in E$. Принадлежность функции x пространству измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следует из ее представимости в виде $x = Bx_0 - \mathcal{C}f$, где оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{C}: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \quad (\mathcal{C}y)(t) = \int_n^t \mathcal{U}(t, \tau)y(\tau) d\tau, \\ t &\in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \end{aligned}$$

корректно определен и ограничен. Это следует из его мажорируемости оператором $(\tilde{\mathcal{C}}y)(t) = Me^\alpha \int_n^t y(\tau) d\tau$, $t \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, который, в свою очередь, корректно определен и ограничен в силу следствия 3.1. Таким образом, $x \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\mathcal{L}_E x = f$. Если же $\mathcal{F} = C_b$, то из проведенных рассуждений следует, что $x \in L^\infty \cap C_b$. Лемма доказана.

Из лемм 5.7, 5.10 и 5.12 вытекает следующая теорема (см. также замечание 5.1).

ТЕОРЕМА 5.1. Оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимо разностное отношение $\mathcal{D}_E$.

ТЕОРЕМА 5.2. Образ $\text{Im } \mathcal{L}_E$ оператора $\mathcal{L}_E$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ $\text{Im } \mathcal{D}_E$ разностного отношения $\mathcal{D}_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Im } \mathcal{D}_E$ – замкнутое пространство в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Докажем замкнутость подпространства $\text{Im } \mathcal{L}_E$ в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Рассмотрим произвольную сходящуюся к $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ последовательность (f_n) из $\text{Im } \mathcal{L}_E$.

Тогда из леммы 5.11 вытекает, что $\mathcal{C}f_n \in \text{Im } \mathcal{D}_E$, $n \geq 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}f_n = \mathcal{C}f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$, и поэтому из леммы 5.12 получаем, что $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$.

Предположим теперь, что $\text{Im } \mathcal{L}_E$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и (y_n) – сходящаяся к $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ последовательность из $\text{Im } \mathcal{D}_E$. Тогда $(x_n, y_n) \in \mathcal{D}_E$ для некоторой последовательности (x_n) из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Из леммы 5.9 следует, что последовательность $(\mathcal{B}y_n)$ представима в виде $\mathcal{B}y_n = (\mathcal{L}_E \Phi_E)(x_n, y_n) = \mathcal{L}_E u_n$, $n \geq 1$, где $u_n = \Phi_E(x_n, y_n)$, $n \geq 1$. Из замкнутости $\text{Im } \mathcal{L}_E$ следует, что $\mathcal{B}y = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}y_n \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. Теперь из леммы 5.10 получаем, что $y \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. *Если одно из подпространств $\text{Im } \mathcal{L}_E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, $\text{Im } \mathcal{D}_E \subset \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ замкнуто, то факторпространства (являющиеся банаховыми пространствами) $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\text{Im } \mathcal{L}_E$, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\text{Im } \mathcal{D}_E$ изоморфны. Изоморфизм осуществляют фактороператоры (построенные по $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ соответственно)*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\text{Im } \mathcal{L}_E &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\text{Im } \mathcal{D}_E, & \widehat{\mathcal{C}}f &= \widehat{\mathcal{C}}f, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \\ \widehat{\mathcal{B}}: \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\text{Im } \mathcal{D}_E &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\text{Im } \mathcal{L}_E, & \widehat{\mathcal{B}}g &= \widehat{\mathcal{B}}g, \quad g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \end{aligned}$$

где $\widehat{f}$ – класс эквивалентности, содержащий f . При этом $\widehat{\mathcal{C}} = (\widehat{\mathcal{B}})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что фактороператор $\widehat{\mathcal{C}}$ определен корректно в силу леммы 5.11. Докажем корректность определения $\widehat{\mathcal{B}}$, т.е. имеет место включение $\mathcal{B}(\text{Im } \mathcal{D}_E) \subset \text{Im } \mathcal{L}_E$. Пусть $f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Из леммы 5.8 получаем $\mathcal{C}(\mathcal{B}f) = f - \mathcal{D}_0 f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Тогда из леммы 5.12 следует, что $\mathcal{B}f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$.

Докажем, что $\widehat{\mathcal{C}}$ – изоморфизм. Если $\widehat{\mathcal{C}}f$, где $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – нулевой элемент в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\text{Im } \mathcal{D}_E$, то $\mathcal{C}f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$, следовательно (в силу леммы 5.12), $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$, т.е. $\widehat{f}$ – нулевой элемент в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)/\text{Im } \mathcal{L}_E$. Значит, $\widehat{\mathcal{C}}$ – инъективный оператор.

Докажем его сюръективность. Пусть y – произвольная последовательность из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $f = \mathcal{B}y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Из равенства (5.11) получаем, что $\mathcal{C}\mathcal{B}y = y - \mathcal{D}_0 y$. Следовательно, $\widehat{\mathcal{C}}(\widehat{\mathcal{B}}y) = \widehat{y} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)/\text{Im } \mathcal{D}_E$, т.е. $\widehat{\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{B}}$ – тождественный оператор, и поэтому $\widehat{\mathcal{C}}$ – сюръективный оператор. Поскольку $\widehat{\mathcal{C}}$ – инъективный оператор и $\widehat{\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{B}} = I$, то $\widehat{\mathcal{B}} = (\widehat{\mathcal{C}})^{-1}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Если $\text{Im } \mathcal{L}_E$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $z \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, то $\mathcal{B}\mathcal{C}z - z \in \text{Im } \mathcal{L}_E$.*

ТЕОРЕМА 5.4. *Если $\text{Im } \mathcal{L}_E$ – замкнутое дополняемое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\mathcal{F}_1$ – некоторое замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, для которого*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \text{Im } \mathcal{L}_E \oplus \mathcal{F}_1, \quad (5.13)$$

то $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ представимо в виде

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \text{Im } \mathcal{D}_E \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_1), \quad (5.14)$$

причем $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1)$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.11 следует, что $\mathcal{C}(\text{Im } \mathcal{L}_E) \subset \text{Im } \mathcal{D}_E$. Пусть $y \in \text{Im } \mathcal{D}_E \cap \mathcal{C}(\mathcal{F}_1)$, значит, существует функция $f \in \mathcal{F}_1$ такая, что $y = \mathcal{C}f \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Из леммы 5.12 получаем, что $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$, значит, из условия $\text{Im } \mathcal{L}_E \cap \mathcal{F}_1 = \{0\}$ следует, что $f = 0$, т.е. $y = 0$.

Пусть теперь y – произвольная последовательность из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $f = \mathcal{B}y$. Тогда из леммы 5.8 следует, что $\mathcal{C}f = \mathcal{C}\mathcal{B}y = y - \mathcal{D}_0 y$, т.е. $y = \mathcal{C}f + \mathcal{D}_0 y =$

$\mathcal{C}(f_1 + f_2) + \mathcal{D}_0 y = \mathcal{C}f_1 + (\mathcal{C}f_2 + \mathcal{D}_0 y) \in \mathcal{C}(\mathcal{F}_1) \oplus \text{Im } \mathcal{D}_E$, где $f = f_1 + f_2$ – разложение функции f согласно (5.13), т. е. $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \text{Im } \mathcal{L}_E$ (используется лемма 5.11). Итак, получено разложение (5.14). Замкнутость подпространства $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1)$ следует из критерия Като (см. [32, теорема 7.4.20]). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.5. *Если пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ представимо в виде прямой суммы:*

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \text{Im } \mathcal{D}_E \oplus \mathcal{F}_0, \quad (5.15)$$

в предположении замкнутости $\text{Im } \mathcal{D}_E$, где $\mathcal{F}_0$ – замкнутое подпространство, то

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \text{Im } \mathcal{L}_E \oplus \mathcal{B}(\mathcal{F}_0), \quad (5.16)$$

где $\mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$ является замкнутым подпространством из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in \text{Im } \mathcal{L}_E \cap \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$, то существует функция $x \in \mathcal{F}_0$ такая, что $y = \mathcal{B}x \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. Из леммы 5.10 следует, что $x \in \text{Im } \mathcal{D}_E$. Значит, $x = 0$, и поэтому $y = 0$, т. е. $\text{Im } \mathcal{L}_E \cap \mathcal{B}(\mathcal{F}_0) = \{0\}$.

Пусть теперь z – произвольная функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, и пусть $y = \mathcal{C}z \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Из следствия 5.2 получаем, что $u = \mathcal{B}\mathcal{C}z - z \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. Представляя последовательность $\mathcal{C}z$ согласно (5.15) в виде $\mathcal{C}z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in \text{Im } \mathcal{D}_E$ и $z_2 \in \mathcal{F}_0$, получим $z = \mathcal{B}\mathcal{C}z - u = \mathcal{B}(z_1 + z_2) - u = (\mathcal{B}z_1 - u) + \mathcal{B}z_2$, где $\mathcal{B}z_1 - u \in \text{Im } \mathcal{L}_E$, кроме того, $\mathcal{B}z_1 \in \text{Im } \mathcal{L}_E$ согласно лемме 5.9. Итак, доказано разложение (5.16). Замкнутость $\mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$ следует из критерия Като [32] о замкнутости подпространства из прямой суммы, являющегося образом линейного ограниченного оператора. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.6. *Если $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ – замкнутое дополняемое подпространство в однородном пространстве измеримых функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = \text{Ker } \mathcal{L}_E \oplus \mathcal{F}_1, \quad (5.17)$$

где $\mathcal{F}_1$ – замкнутое подпространство, то $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ – (замкнутое) дополняемое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = \text{Ker } \mathcal{D}_E \oplus B^{-1}(\mathcal{F}_1). \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство $B^{-1}(\mathcal{F}_1)$ замкнуто как прообраз замкнутого подпространства $\mathcal{F}_1$ при непрерывном отображении B .

Пусть $y_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}_E \cap B^{-1}(\mathcal{F}_1)$. Поскольку $By_0 \in \text{Ker } \mathcal{L}_E$ (см. лемму 5.7) и $By_0 \in \mathcal{F}_1$, то $By_0 = 0$, значит, $y_0 = 0$ в силу инъективности оператора B . Ввиду того, что B осуществляет изоморфизм подпространств $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ и $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ (лемма 5.7), из (5.17) следует разложение (5.18). Теорема доказана.

Из теорем 5.3–5.5 и леммы 5.7 следует

ТЕОРЕМА 5.7. *Оператор $\mathcal{L}_E$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}_E$. Если один из них фредгольмов, то их индексы совпадают.*

Поскольку теорема 5.6 доказана только для пространств измеримых функций, то для оператора $\mathcal{L}_E$, действующего в однородном пространстве непрерывных функций, из десяти свойств определения 4.6 следует исключить свойство 5). Таким образом, в следующей теореме имеются в виду оставшиеся девять свойств.

Из полученных в этом параграфе лемм и теорем следует

ТЕОРЕМА 5.8. *Если для оператора $\mathcal{L}_E$, действующего в однородном пространстве измеримых функций, выполнено одно из приведенных в определении 4.6 десяти свойств (девяти свойств, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – пространство непрерывных функций), то соответствующим свойством обладает разностное отношение $\mathcal{D}_E$. Любое из десяти свойств определения 4.6, выполненное для $\mathcal{D}_E$, исключая, быть может, свойства 1) и 5), выполнено и для оператора $\mathcal{L}_E$.*

Таким образом, если оператор $\mathcal{L}_E$ находится в некотором состоянии $S = \{i_1, \dots, i_k\}$, то в этом же состоянии находится и разностное отношение $\mathcal{D}_E$. Обратное заключение верно для любого состояния S , не содержащего свойств 1) и 5). В частности, теоремы 5.1 и 5.7 являются следствиями такого заключения. Если учесть замечание 5.1 и оператор $\mathcal{L}_E$ рассматривать как непрерывный оператор из $D(\mathcal{L}_E)$ с нормой (5.7), то и свойства 1) и 5) будут выполнены для $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{L}_E$ одновременно.

§ 6. Спектральный анализ разностных отношений

В этом параграфе изучаются спектральные свойства линейного разностного отношения $\mathcal{K}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ и разностных отношений $\mathcal{T}_E(t) \in LR(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$, $t \in \mathbb{R}_+$, которые были определены в § 1 (см. (1.12) и (1.13)).

ЛЕММА 6.1. *Спектры $\sigma(\mathcal{K}_E), \sigma(\mathcal{T}_E(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, отношений $\mathcal{K}_E, \mathcal{T}_E(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, инвариантны относительно вращений вокруг нуля в $\mathbb{C}$, т.е. имеют место равенства*

$$\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(\mathcal{K}_E)\}, \quad (6.1)$$

$$\sigma(\mathcal{T}_E(t)) = \{\gamma\lambda : \gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(\mathcal{T}_E(t))\}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (1.13) отношения $\mathcal{K}_E$ следует, что верны равенства $V(\gamma)\mathcal{K}_E V(\gamma^{-1}) = \gamma\mathcal{K}_E$, $\gamma \in \mathbb{T}$, где $V : \mathbb{T} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – представление, определенное равенствами (3.1). Таким образом, отношение $\mathcal{K}_E$ подобно отношениям $\gamma\mathcal{K}_E$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и поэтому $\sigma(\mathcal{K}_E) = \sigma(\gamma\mathcal{K}_E)$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Значит, имеют место равенства (6.1).

Равенства (6.2) следуют из аналогичных соображений. Рассмотрим изометрическое представление $V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ вида (3.2). Имеют место соотношения

$$V_{\mathbb{R}}(\alpha)\mathcal{T}_E(t)V_{\mathbb{R}}(-\alpha) = e^{i\alpha t}\mathcal{T}_E(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (6.3)$$

из которых следуют равенства (6.2). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Если отношение $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ непрерывно обратимо, то*

$$\sigma(\mathcal{K}_E) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \quad (6.4)$$

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Если $1 \notin \sigma(\mathcal{T}_E(t))$, $t > 0$, то*

$$\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \quad (6.5)$$

Утверждение следующей леммы было получено в статьях автора [19, ч. II], [20], а затем в статьях [33], [34]. Она позволяет применить полученные результаты об отношениях $\mathcal{K}_E$ и $\mathcal{D}_E$ к исследованию оператора $\mathcal{L}_E$ и полугруппы отношений $\mathcal{T}_E$.

ЛЕММА 6.2. Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, то оно допускает экспоненциальную дихотомию и на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что в условиях леммы 6.2 расщепляющая пара $(P, Q): \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ допускает продолжение до расщепляющей пары $(\tilde{P}, \tilde{Q}): \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, для которой сохраним старое обозначение (P, Q) .

ТЕОРЕМА 6.1. Отношение $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратимо тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с такой расщепляющей парой $(P, Q): \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$, что $\text{Im } Q(0) = E$. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , то оператор $\mathcal{D}_E^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, где $E = \text{Im } Q(0)$, допускает представление вида

$$(\mathcal{D}_E^{-1}f)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m)f(m), \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (6.6)$$

где функция $G: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ имеет вид

$$G(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m)P(m), & 0 \leq m \leq n, \\ -\mathcal{U}(n, m)Q(m), & 0 \leq n < m. \end{cases} \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из непрерывной обратимости отношения $\mathcal{D}_E$ следует, что $1 \in \rho(\mathcal{K}_E)$, и поэтому из следствия 6.1 получаем равенство (6.4). Значит, расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E)$ отношения $\mathcal{K}_E$ представим в виде

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (6.8)$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}_E): |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \sigma_{\text{int}}$. При этом отметим, что $\infty \notin \sigma_{\text{out}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}_E \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, т. е. когда $E = \{0\}$.

Теперь появилась возможность применения теоремы 4.2 для отношения $\mathcal{K}_E$ с использованием разложения (6.8). Проектор Рисса $\mathcal{P} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, построенный по $\sigma_0 = \sigma_{\text{int}}$, имеет вид

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (\mathcal{K}_E - \lambda I)^{-1} d\lambda. \quad (6.9)$$

Он осуществляет разложение пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ вида

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1, \quad (6.10)$$

где $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ – инвариантные относительно $\mathcal{K}_E$ подпространства из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, $\mathcal{F}_0 = \text{Im } \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_1 = \text{Ker } \mathcal{P}$. Относительно разложения (6.10) отношение $\mathcal{K}_E$ запишется в виде

$$\mathcal{K}_E = \mathcal{K}_E^0 \oplus \mathcal{K}_E^1, \quad (6.11)$$

где $\mathcal{K}_E^0 \in \text{End } \mathcal{F}_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E^0) = \sigma_{\text{int}}$, $\mathcal{K}_E^1 \in LRC(\mathcal{F}_1)$, $\mathcal{K}_E^1 0 = \mathcal{K}_E 0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E^1) = \sigma_{\text{out}}$. Значит, $r(\mathcal{K}_E^0) < 1$ для спектрального радиуса оператора $\mathcal{K}_E^0$. Поскольку $\mathcal{K}_E x = \mathcal{K}_0 x + \mathcal{K}_E 0$, $x \in \mathcal{F}$, и $\mathcal{K}_E^1 0 = \mathcal{K}_E 0$, то оператор $\mathcal{K}_E^0$ совпадает с сужением $\mathcal{K}_0^0 = \mathcal{K}_0|_{\mathcal{F}_0}$ оператора $\mathcal{K}_0$ на $\mathcal{F}_0$, где $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_E$ для $E = \{0\}$. Из включения $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E^1) \subset \sigma_{\text{out}}$ и теоремы 4.1 следует, что $r((\mathcal{K}_E^1)^{-1}) < 1$. Из всего сказанного

следует, что обратный к отношению $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E$ оператор $\mathcal{D}_E^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}$ допускает относительно разложения (6.10) (при использовании (6.11)) представление вида

$$\mathcal{D}_E^{-1} = (I_- - \mathcal{K}_E^0)^{-1} \oplus (I_+ - \mathcal{K}_E^1)^{-1} = \sum_{j \geq 0} (\mathcal{K}_E^0)^j \oplus \left(- \sum_{j \leq -1} (\mathcal{K}_E^1)^j \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{K}}_j, \quad (6.12)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, принадлежат алгебре $\text{End } \mathcal{F}$ и

$$\tilde{\mathcal{K}}_j = (\mathcal{K}_E^0)^j \oplus 0 = \mathcal{K}_0^j \mathcal{P}, \quad j \geq 0, \quad (6.13)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_j = 0 \oplus -(\mathcal{K}_E^1)^j, \quad j \leq -1. \quad (6.14)$$

Проектор $\mathcal{P}$ перестановочен с операторами $R(\lambda, \mathcal{K}_E)$, $\lambda \in \mathbb{T}$, что вытекает из формулы (6.9). В итоге из равенств (6.10)–(6.14) получаем следующие соотношения:

$$\tilde{\mathcal{K}}_0 = \mathcal{P}, \quad \tilde{\mathcal{K}}_j = \mathcal{K}_0^j \mathcal{P} = \mathcal{P} \mathcal{K}_0^j = (\mathcal{P} \mathcal{K}_0)^j, \quad j \geq 1, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{K}_E^j \tilde{\mathcal{K}}_j = (I - \mathcal{P}), \quad j \leq -1, \quad (6.16)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_j \mathcal{P} = \mathcal{P} \tilde{\mathcal{K}}_j = 0, \quad j \leq -1. \quad (6.17)$$

Используя функциональное исчисление для линейных отношений [29] или теорему 5.9.3 из [21] для псевдорезольвент, получим представление операторов $\tilde{\mathcal{K}}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, в виде

$$\tilde{\mathcal{K}}_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j R(\lambda, \mathcal{K}_E) d\lambda, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (6.18)$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} V(\gamma^{-1}) \tilde{\mathcal{K}}_j V(\gamma) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j V(\gamma^{-1}) (\tilde{\mathcal{K}}_E - \lambda I)^{-1} V(\gamma) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j (\mathcal{K}_E - \lambda \gamma^{-1})^{-1} d\lambda = \gamma^j \tilde{\mathcal{K}}_j, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

следует (согласно $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{K}}_0$; см. формулу (6.15)), что проектор $\mathcal{P}$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, изометрического представления $V: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, определенного равенствами (3.1) (где $\Phi = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$).

Следовательно, для пространства $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, удовлетворяющего условию $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, из леммы 3.3 следует, что проектор $\mathcal{P}$ представим в виде

$$(\mathcal{P}x)(n) = P(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad (6.20)$$

где $P: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ – ограниченная проекторнозначная функция. Чтобы получить формулу (6.20) для произвольного однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, достаточно проверить выполнение условия 2) леммы 3.3 для проектора $\mathcal{P}$. Пусть (f_n) – последовательность вида (3.4). При непосредственном подсчете получим, что $\bar{V}(f_n)(\mathcal{K}_E - \lambda I) - (\mathcal{K}_E - \lambda I)\bar{V}(f_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, есть отношение вида $\bar{V}(\tilde{f}_n)\mathcal{K}_E$, $n \geq 1$ (не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}$), где $\tilde{f}_n(k) = f_n(k) - f_n(k-1)$, $k \geq 1$, $\tilde{f}_n(0) = 1$. Умножая слева и справа эти отношения на операторы $R(\lambda, \mathcal{K}_E)$, $\lambda \in \rho(\mathcal{K}_E)$, и учитывая, что $R(\lambda, \mathcal{K}_E)x = 0$ для любой последовательности

$x \in \mathcal{K}_E 0$ (т. е. $x(0) \in E$ и $x(k) = 0$, $k \geq 1$), получим равенства

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mathcal{K}_E) \bar{V}(f_n) - \bar{V}(f_n) R(\lambda, \mathcal{K}_E) &= R(\lambda, \mathcal{K}_E) \bar{V}(\tilde{f}_n) \mathcal{K}_E R(\lambda, \mathcal{K}_E) \\ &= R(\lambda, \mathcal{K}_E) \bar{V}(\psi_n) (I + \lambda R(\lambda, \mathcal{K}_E)), \quad \lambda \in \mathbb{T} \subset \rho(\mathcal{K}_E), \end{aligned} \quad (6.21)$$

где $\psi_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$, $\psi_n(k) = \tilde{f}_n(k) = f_n(k) - f_n(k-1)$, $k \geq 1$, и $\psi_n(0) = 0$.

Поскольку $\|\bar{V}(\psi_n)\| \leq n^{-1}$ и резольвента отношения $\mathcal{K}_E$ ограничена на окружности $\mathbb{T}$, то из равенств (6.21) следует предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} \|R(\lambda, \mathcal{K}_E) \bar{V}(f_n) - \bar{V}(f_n) R(\lambda, \mathcal{K}_E)\| = 0,$$

из которого в силу формулы (6.9) следует выполнение условия 2) леммы 3.3 для оператора $\mathcal{P}$. Итак, (6.20) верно для любого пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

Из равенств (6.15) получаем, что операторы $\mathcal{K}_j$, $j \geq 0$, представимы в виде

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{K}}_j x)(n) &= \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-j) P(n-j) x(n-j), & n \geq j, \\ 0, & 0 \leq n \leq j-1, \end{cases} \\ n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Поскольку проектор $\mathcal{P}$ перестановочен с операторами $\mathcal{K}_0^j$, $j \geq 1$ (это свойство имеется в тех же равенствах (6.15)), получаем соотношения

$$P(n) \mathcal{U}(n, m) = \mathcal{U}(n, m) P(m), \quad 0 \leq m \leq n < \infty. \quad (6.23)$$

Так как $r(\mathcal{K}_E^0) = r(\mathcal{K}_0 \mathcal{P}) < 1$, $\tilde{\mathcal{K}}_j = (\mathcal{K}_0 \mathcal{P})^j$, $j \geq 1$, и выполнено равенство $\|\tilde{\mathcal{K}}_j\| = \sup_{n \geq j} \|\mathcal{U}(n, n-j) P(n-j)\|$, то существуют постоянные M_1 , $\alpha_1 > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(n, m) P(m)\| \leq M_1 \exp(-\alpha_1(n-m)), \quad n \geq m. \quad (6.24)$$

Теперь опишем структуру операторов $\tilde{\mathcal{K}}_j$, $j \leq -1$. Для этих целей используем равенства (6.19) и соотношения (6.16) и (6.17). Для фиксированных $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x_0 \in X$ пусть $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – такая последовательность, что $x(n) = x_0$ и $x(k) = 0$ для $k \neq n$. Тогда из (6.19) получаем

$$(V(\gamma^{-1}) \tilde{\mathcal{K}}_j V(\gamma) x)(k) = \gamma^{n-k} (\tilde{\mathcal{K}}_j x) = \gamma^j (\tilde{\mathcal{K}}_j x)(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Следовательно, $(\tilde{\mathcal{K}}_j x)(k) = 0$ для $k \neq n-j$. Для $m > n$ определим линейный оператор $\mathcal{U}(n, m) \in \text{End } X$, положив

$$\mathcal{U}(n, m) x_0 = (\tilde{\mathcal{K}}_j x)(m), \quad j = n - m.$$

Таким образом, оператор $\tilde{\mathcal{K}}_j$ для $j \leq -1$ представим в виде

$$(\tilde{\mathcal{K}}_j y)(m) = \mathcal{U}(m+j, m) y(m+j), \quad m+j \geq 0, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (6.25)$$

Это представление очевидно, если $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (поскольку финитные последовательности плотны в $\mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)$). В общем случае из (6.18) получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{V}(f_n) \tilde{\mathcal{K}}_j - \tilde{\mathcal{K}}_j \bar{V}(f_n)\| = 0$ (подобно тому, как это проводилось для $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{K}}_0$), и поэтому операторы $\tilde{\mathcal{K}}_j$, $j \leq -1$, вполне определяются своими значениями на финитных последовательностях.

Из представления (6.25) и равенств (6.16), (6.17) (расшифровки этих равенств с учетом перестановочности $\mathcal{P}$ с $\mathcal{K}_E$) получаем

$$\mathcal{U}(m, n)\mathcal{U}(n, m) = -(I - P(n)) = -Q(n) = \mathcal{U}(n, m)\mathcal{U}(m, n), \quad (6.26)$$

$$\mathcal{U}(m, n)P(m) = P(m)\mathcal{U}(m, n) = 0, \quad (6.27)$$

$$\mathcal{U}(m, n)Q(n) = Q(m)\mathcal{U}(m, n) = \mathcal{U}(m, n), \quad 0 \leq m < n. \quad (6.28)$$

Из равенств (6.26)–(6.28) следует, что операторы $\mathcal{U}(n, m)$, $0 \leq m < n$, осуществляют изоморфизм подпространств $\text{Im } Q(m)$ и $\text{Im } Q(n)$, а оператор $-\mathcal{U}(m, n)$ (равный нулю на $\text{Im } P(n)$) совпадает на подпространстве $\text{Im } Q(n)$ с обратным оператором $\mathcal{U}_{n,m}^{-1}$ к сужению $\mathcal{U}_{n,m}: \text{Im } Q(m) \rightarrow \text{Im } Q(n)$ оператора $\mathcal{U}(n, m)$ на подпространство $\text{Im } Q(m)$. Из представления (6.25) следует, что для операторов $\tilde{\mathcal{K}}_j$, $j \leq -1$, верны равенства

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_j\| = \sup_{m \geq |j|} \|\mathcal{U}(m + j, m)\|.$$

Поскольку $r(\tilde{\mathcal{K}}_{-1}) < 1$ и $\tilde{\mathcal{K}}_j = (\tilde{\mathcal{K}}_{-1})^{|j|}$, то существуют постоянные M_2 , $\gamma_2 > 0$ такие, что $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq M_2 \exp(-\gamma_2(n - m))$, $n \geq m \geq 0$. Итак, установлена экспоненциальная дихотомия семейства $\mathcal{U}$ на $\mathbb{Z}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) . Поскольку $\mathcal{K}_E 0 = \mathcal{K}_E^1 0 = \{x \in \mathcal{F}: x(0) \in E, x(k) = 0, k \geq 1\}$ и в разложении (6.10) пространства $\mathcal{F}$ имеют место равенства $x(0) = P(0)x(0) + Q(0)x(0) = P(0)(\mathcal{P}x)(0) + Q(0)((I - \mathcal{P})x)(0)$, то $\text{Im } Q(0) = E$. Необходимость условия доказана.

Достаточность. Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с расщепляющей парой $P, Q: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$, удовлетворяющей условию $\text{Im } Q(0) = E$. Если $x \in \text{Ker } \mathcal{D}_E$, то последовательность x может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} x(n) &= P(n)x(n) + Q(n)x(n) = P(n)\mathcal{U}(n, 0)x(0) + Q(n)\mathcal{U}(n, 0)x(0) \\ &= \mathcal{U}(n, 0)P(0)x(0) + \mathcal{U}(n, 0)Q(0)x(0) = \mathcal{U}(n, 0)Q(0)x(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Поскольку $\|x(0)\| = \|\mathcal{U}(0, n)\mathcal{U}(n, 0)x(0)\| \leq M \exp(-\alpha n) \sup_{k \geq 0} \|\mathcal{U}(k, 0)x(0)\|$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ (используется условие 4) из определения 1.4), то $x(0) = 0$. Следовательно, отношение $\mathcal{D}_E$ инъективно.

Из инъективности $\mathcal{D}_E$ следует, что для доказательства обратимости $\mathcal{D}_E$ и для установления того факта, что формула (6.6) определяет обратный к $\mathcal{D}_E$ оператор, достаточно доказать, что любая пара вида (y, f) , где $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и $y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m)f(m)$, $n \geq 0$, принадлежит $\mathcal{D}_E$. Ограниченность оператора, определенного формулой (6.6), следует из оценок функции G (свойства 2) и 4) определения 1.4) и теоремы 3.4. Из формулы (6.6) следует, что $y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} G(0, m)f(m)$, а из равенств (6.28) получаем

$$\begin{aligned} y(0) &= P(0)f(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)f(m) \\ &= f(0) - Q(0) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)f(m) = f(0) + x_0, \quad x_0 \in E. \end{aligned}$$

Пусть теперь $n \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 y(n) - \mathcal{U}(n, n-1)y(n-1) &= \sum_{m=0}^n \mathcal{U}(n, m)P(m)f(m) \\
 &- \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(n, m)Q(m)f(m) - \mathcal{U}(n, n-1) \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{U}(n-1, m)P(m)f(m) \\
 &+ \mathcal{U}(n, n-1) \sum_{m=n}^{\infty} \mathcal{U}(n-1, m)Q(m)f(m) = P(n)f(n) + Q(n)f(n) = f(n).
 \end{aligned}$$

Итак, $(y, f) \in \mathcal{D}_E$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Из теоремы 5.1 (см. также теорему 5.8) следует, что обратимость оператора $\mathcal{L}_E$ эквивалентна обратимости отношения $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$. Поэтому если оператор $\mathcal{L}_E$ (непрерывно) обратим, то непрерывно обратимо отношение $\mathcal{D}_E$, поэтому в силу теоремы 6.1 семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, следовательно, на $\mathbb{R}_+$ (см. лемму 6.2) с расщепляющей парой (P, Q) , удовлетворяющей условию $\text{Im } Q(0) = E$. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , причем $\text{Im } Q(0) = E$, то оператор, определенный формулой (1.15), ограничен в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ в силу теоремы 3.2. Поскольку

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} G(0, s)f(s) ds &= - \int_0^{\infty} \mathcal{U}(s)Q(s)f(s) ds = -Q(0) \int_0^{\infty} \mathcal{U}(s)Q(s)f(s) ds, \\
 \text{Im } Q(0) &= E,
 \end{aligned}$$

то $(\mathcal{L}_E^{-1}f)(0) \in E$ для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Так как отношение $\mathcal{D}_E$ инъективно, то инъективным будет оператор $\mathcal{L}_E$. Поэтому осталось проверить, что для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ пара функций (x, f) , где $x(t) = \int_0^{\infty} G(t, s)f(s) ds$, $t \geq 0$, удовлетворяет соотношениям (1.9) (и тем самым будет получена формула (1.15) для $\mathcal{L}_E^{-1}$). Доказываемое следует из равенств

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau &= \mathcal{U}(t, 0) \int_0^{\infty} \mathcal{U}(0, s)Q(s)f(s) ds \\
 &- \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)(P(\tau) + Q(\tau))f(\tau) d\tau = \int_t^{\infty} \mathcal{U}(t, s)Q(s)f(s) ds \\
 &- \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau)P(\tau)f(\tau) d\tau = x(t), \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Если разностное отношение $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратимо и (P, Q) – расщепляющая пара для $\mathcal{U}$ при $\text{Im } Q(0) = E$, то пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ представимо в виде (6.10), где $\mathcal{F}_0 = \text{Im } \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_1 = \text{Ker } \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ – оператор умножения на функцию P . Подпространства $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ являются инвариантными для $\mathcal{D}_E$, и отношение $\mathcal{K}_E$ представимо (относительно (6.11)) в виде

$$\mathcal{K}_E = \mathcal{K}_E^0 \oplus \mathcal{K}_E^1, \tag{6.29}$$

где оператор $\mathcal{K}_E^0 \in \text{End } \mathcal{F}_0$ и отношение $\mathcal{K}_E^1 \in LRC(\mathcal{F}_1)$ определяются равенствами

$$(\mathcal{K}_E^0 x)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \quad x \in \mathcal{F}_0, \quad (6.30)$$

$$\mathcal{K}_E^1 = \{(x, y) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1: y(n) = \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad n \geq 1, \quad y(0) = x_0, x_0 \in E\}.$$

При этом $r(\mathcal{K}_E^0) < 1$, $\mathcal{K}_E^1 0 = \mathcal{K}_E 0$, $(\mathcal{K}_E^1)^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}_1$, $r((\mathcal{K}_E^1)^{-1}) < 1$.

Отметим, что теорема 6.2 следует из доказательства теоремы 6.1 и предопределяет один из основных результатов §9 – теорему 9.2.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Если отношение $\mathcal{D}_E$ (непрерывно) обратимо в одном из однородных пространств последовательностей, то оно обратимо во всех остальных.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Если E недополняемо в X , то $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из равенств (1.9), определяющих оператор $\mathcal{L}_E$, следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\mathcal{L}_E - \lambda I$ задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_\lambda: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ вида

$$\mathcal{U}_\lambda(t, s) = \exp(-\lambda(t-s))\mathcal{U}(t, s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Соответствующее разностное отношение $\mathcal{D}_{E,\lambda} \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ имеет вид $\mathcal{D}_{E,\lambda} = I - \mathcal{K}_{E,\lambda}$, где отношение $\mathcal{K}_{E,\lambda}$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{E,\lambda} &= \{(x, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X): \\ &y(n) = \exp(-\lambda)\mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad n \geq 1, \quad y(0) = x_0, \quad x_0 \in E\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Число $\chi_g(\mathcal{U})$ из $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное формулой

$$\chi_g(\mathcal{U}) = \overline{\lim}_{\tau, s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathcal{U}(\tau + s, \tau)\|}{s},$$

называется *верхним генеральным показателем* (возможно, вырожденного) семейства $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ эволюционных операторов (ср. с [3, гл. III]).

Отметим следующий результат, полученный в [18, теоремы 4 и 5]. Доказательство, проведенное в [18] для пространств $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, и $\ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$ остается в силе и для любых однородных пространств.

ТЕОРЕМА 6.3. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_0)$ оператора $\mathcal{L}_0: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ имеет вид $\sigma(\mathcal{L}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Re } \lambda \leq \chi_g(\mathcal{U})\}$, а для спектральных радиусов операторов $\mathcal{K}_0$ и $T_0(1)$ (здесь $E = \{0\}$) имеют место равенства

$$\begin{aligned} r(\mathcal{K}_0) &= r(T_0(1)) = \exp \chi_g(\mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} \|\mathcal{U}(n, n-m)\|^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\tau \geq m} \|\mathcal{U}(\tau, \tau-m)\|^{1/m}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6.4. Спектр $\sigma(\mathcal{K}_E)$ отношения $\mathcal{K}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ допускает одно из следующих представлений:

- 1) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C}$;
- 2) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leq \chi_g(\mathcal{U})\}$ (это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $E = \{0\}$);

3) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \geq r\}$ для некоторого $r > 0$ (это равенство верно тогда и только тогда, когда $E = X$ и семейство $\mathcal{U}$ состоит из непрерывно обратимых операторов, удовлетворяющих оценкам

$$\|\mathcal{U}(t, s)^{-1}\| \leq C e^{\gamma(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (6.31)$$

для некоторых $C > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$); при этом $\sigma(\mathcal{K}_X) = \emptyset \Leftrightarrow \chi_g(\mathcal{U}) = -\infty$ тогда и только тогда, когда оценки вида (6.31) верны для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ (см. теорему 9.1);

4) $\sigma(\mathcal{K}_E) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}(r_1, r_2)$, где $\mathbb{T}(r_1, r_2) = \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 \leq r_1 < |\lambda| < r_2\}$ и $0 \leq r_1 < r_2$ – некоторые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим существование чисел $0 < r_1 < r_2$ таких, что окружности $\mathbb{T}(r_i) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = r_i\}$, $i = 1, 2$, лежат в $\rho(\mathcal{K}_E)$ и $\sigma(\mathcal{K}_E) \cap \mathbb{T}(r_1, r_2) \neq \emptyset$. Рассмотрим два проектора Рисса

$$\mathcal{P}_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(r_k)} (\mathcal{K}_E - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad k = 1, 2. \quad (6.32)$$

Они перестановочны с резольвентой отношения $\mathcal{K}_E$ (и, значит, с $\mathcal{K}_E$), и имеют место равенства $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1$, причем $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$. Так же, как и в теореме 6.1, устанавливаются представления

$$(\mathcal{P}_i x)(n) = P_i(n)x(n), \quad n \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

где $P_i: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$, $i = 1, 2$, – ограниченные проекторнозначные функции, причем $P_1(n)P_2(n) = P_2(n)P_1(n) = P_1(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для функций $Q_i = I - P_i: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$, $i = 1, 2$, выполнены равенства

$$Q_1(n)Q_2(n) = Q_2(n)Q_1(n) = Q_2(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.33)$$

Делая в интеграле (6.32) замену переменной $\lambda = r_i \mu$, $i = 1, 2$, получим

$$\mathcal{P}_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (e^{\alpha_k} \mathcal{K}_E - \mu I)^{-1} d\mu, \quad k = 1, 2,$$

где числа α_k , $k = 1, 2$, удовлетворяют равенствам $\exp(\alpha_k) = r_k^{-1}$, $k = 1, 2$. Из замечания 6.1, включений $\mathbb{T}(r_i) \subset \rho(\mathcal{K}_E)$, $i = 1, 2$, и из теоремы 6.1 следует, что семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}_i(t, s) = \exp(\alpha_i(s-t))\mathcal{U}(t, s)$, $i = 1, 2$, допускают экспоненциальную дихотомию с соответствующей расщепляющей парой (P_i, Q_i) , $i = 1, 2$. При этом $\text{Im } Q_i(0) = E$, $i = 1, 2$. Из определения экспоненциальной дихотомии эволюционных семейств следует, что подпространства $\text{Im } Q_i(k)$, $k \geq 1$, изоморфны подпространству $E = \text{Im } Q_1(0) = \text{Im } Q_2(0)$, причем $\text{Im } Q_2(k) = \text{Im } Q_1(k)$, $k \geq 1$. Из равенств (6.33) следует, что $Q_1(k) = Q_2(k)$, $k \geq 0$. Таким образом, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, что противоречит предположению $\sigma(\mathcal{K}_E) \cap \mathbb{T}(r_1, r_2) \neq \emptyset$.

Из доказанного и леммы 6.1 следует, что множество $\sigma(\mathcal{K}_E)$ допускает одно из четырех указанных в теореме представлений. Представление 1) возможно, что вытекает из следствия 6.4. Если $E = \{0\}$, то представление 2) вытекает из теоремы 6.3. Оно было установлено в статье [18] для пространств $\ell^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, и доказательство остается верным (с учетом результатов из § 3 об ограниченности операторов в однородных пространствах) для любого однородного пространства. Если $E \neq \{0\}$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ при $|\lambda| > \chi_g(\mathcal{U})$ последовательность вида $\varphi_\lambda(n) = \lambda^{-n}\mathcal{U}(n, 0)x_0$, $n \geq 0$, $x_0 \in E$, принадлежит

ядру $\text{Ker}(\mathcal{K}_E - \lambda I)$ отношения $\mathcal{K}_E - \lambda I$. Следовательно, $\sigma(\mathcal{K}_E)$ не может быть компактным множеством.

Представление 3) имеет место, если и только если $E = X$ и верны оценки (6.31), что следует из теоремы 6.1 и доказанного свойства спектра отношения $\mathcal{K}_E$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.5. *Если $|\lambda| > \chi_g(\mathcal{U})$, то отношение $\mathcal{K}_E - \lambda I$ сюръективно, его ядро дополняемо и оператор $\mathcal{K}_0 - \lambda I$ непрерывно обратим. Правым обратным к отношению $\mathcal{K}_E - \lambda I$ является оператор*

$$((\mathcal{K}_0 - \lambda I)^{-1}x)(n) = - \sum_{k=0}^n \lambda^{-k-1} \mathcal{U}(n, n-k)x(n-k), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (6.34)$$

Проектор $\mathcal{P}_\lambda$ на $\text{Ker}(\mathcal{K}_E - \lambda I)$ может быть записан в виде

$$(\mathcal{P}_\lambda x)(n) = \lambda^{-n} \mathcal{U}(n, 0)x(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (6.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\lambda I - \mathcal{K}_0$ определен равенствами

$$((\lambda I - \mathcal{K}_0)x)(n) = \begin{cases} \lambda x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), & n \geq 1, \\ \lambda x(0), & n = 0, \end{cases} \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

Отсюда следует его инъективность. Непосредственной проверкой показываем, что формула (6.34) определяет ограниченный оператор (используется условие $|\lambda| > \chi_g(\mathcal{U})$), который является обратным к оператору $\mathcal{K}_0 - \lambda I$ (см. также [18]). Поскольку $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_E$, то оператор $(\mathcal{K}_0 - \lambda I)^{-1}$ является правым обратным для отношения $\mathcal{K}_E - \lambda I$, что означает включение $((\mathcal{K}_0 - \lambda I)^{-1}f, f) \in \mathcal{K}_E - \lambda I$ для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Формула (6.35) очевидна. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Участвующие в условиях теоремы 6.4 числа r, r_1, r_2 можно выразить с помощью подходящего понятия нижнего генерального показателя семейства $\mathcal{U}$ эволюционных операторов, а также с помощью нижнего и верхнего генеральных показателей подпространств векторов из X , которые вводятся аналогично соответствующим понятиям из [3].

Далее рассматривается полугруппа отношений $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LR(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$, определенная равенствами (1.12).

ТЕОРЕМА 6.6. *Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , для которой $\text{Im } Q(0) = E$, то разностные отношения $I - \mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$, непрерывно обратимы в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и обратные к ним операторы из $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ имеют вид*

$$((I - \mathcal{T}_E(t))^{-1}f)(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} G(s, s+kt-nt)x(s+kt-nt) \quad (6.36)$$

для $s \in [nt, (n+1)t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где функция $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ имеет вид (1.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 6.2 следует наличие экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}_+$ для семейства $\mathcal{U}$. Именно продолженная на $\mathbb{R}_+$ расщепляющая пара (P, Q) , $P, Q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$, участвует в формулах (1.16). Следовательно, верны оценки вида $\sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|G(s, s-kt)\| \leq M_0 e^{-\alpha_0 kt}$, $k > 0$, для некоторых $M_0, \alpha_0 > 0$. Поэтому формула (6.36) определяет ограниченный оператор

в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Ядро отношения $I - \mathcal{T}_E(t)$ состоит из функций, принадлежащих $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, вида

$$x(s) = \mathcal{U}(s, s - nt)x_0(s), \quad s \in [nt, (n+1)t), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (6.37)$$

где $x_0 \in \mathcal{F}([0, 1], E)$. Так же, как и при доказательстве достаточности условий теоремы 6.1, рассмотрим представление $x(s) = (P(s) + Q(s))x(s)$ и из формулы (6.37) получим оценки вида $\|x_0\|_{\mathcal{F}([0, 1], E)} \leq M_1 e^{-\alpha_1 n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для некоторых M_1 , $\alpha_1 > 0$. Поэтому $x_0 = 0$ и, следовательно, $x = 0$, т.е. $\text{Ker}(I - \mathcal{T}_E(t)) = \{0\}$.

Таким же образом, как и при доказательстве достаточности теоремы 6.1, убеждаемся в том, что определяемый формулой (6.36) оператор является обратным для линейного отношения $I - \mathcal{T}_E(t)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.7. *Оператор $\mathcal{L}_E$ обратим тогда и только тогда, когда обратимо одно из отношений $I - \mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимость оператора $\mathcal{L}_E$ влечет экспоненциальную дихотомию семейства $\mathcal{U}$ (теорема 1.4), а из теоремы 6.6 следует обратимость отношений $I - \mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$.

Пусть теперь обратимо отношение $I - \mathcal{T}_E(t)$ при некотором $t > 0$. Вначале докажем инъективность оператора $\mathcal{L}_E$. Допустим, что $x \in \text{Ker } \mathcal{L}_E$ и, значит, $x(s) = \mathcal{U}(s, 0)x_0$, $s \geq 0$, где $x_0 \in E$. Тогда для любой функции $y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ такой, что $(x, y) \in I - \mathcal{T}_E(t)$, имеют место равенства $y(s) = x(s) - \mathcal{U}(s, s-t)\mathcal{U}(s-t, 0)x_0 = 0$, $s \geq t$, и $y(s) = x(s) - \mathcal{U}(s, 0)y_0(s)$, $0 \leq s < t$, где $y_0 \in \mathcal{F}([0, 1], E)$. Если $y_0(s) \equiv x_0$, $s \in [0, t]$, то $y(s) = 0$ при $s \in [0, t]$. Следовательно, $(x, 0) \in I - \mathcal{T}_E(t)$, т.е. $x \in \text{Ker}(I - \mathcal{T}_E(t)) = \{0\}$.

Построим непрерывный обратный оператор к $\mathcal{L}_E$ по следующему правилу. Пусть y – произвольная функция из $\mathcal{F}$ и $x = (I - \mathcal{T}_E(t))^{-1}y$. Следовательно, функции x , y связаны равенствами (1.12), в которых $x_0 \in \mathcal{F}([0, t], E)$. Функции x сопоставим функцию $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ вида

$$\tilde{x}(s) = \begin{cases} -\int_0^s \mathcal{U}(s, \tau)x(\tau) d\tau - \mathcal{U}(s, 0) \int_s^t x_0(\tau) d\tau, & 0 \leq s \leq t, \\ -\int_{s-t}^s \mathcal{U}(s, \tau)x(\tau) d\tau, & s \geq t. \end{cases}$$

Ясно, что отображение $x \mapsto \tilde{x}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ является линейным ограниченным оператором, причем $\tilde{x}(0) = -\int_0^t x_0(\tau) d\tau \in E$ и $\tilde{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – непрерывная функция. Непосредственным подсчетом получим, что пара $(\tilde{x}, y)$ удовлетворяет равенствам (1.9) (с заменой t на s) на промежутке $[0, t]$ и равенствам

$$\tilde{x}(s) = \mathcal{U}(s, t)\tilde{x}(t) - \int_t^s \mathcal{U}(s, \tau)y(\tau) d\tau, \quad s \in [t, \infty).$$

Следовательно, пара $(\tilde{x}, y)$ удовлетворяет равенствам (1.9) на $\mathbb{R}_+$. Итак, построен обратный оператор к $\mathcal{L}_E$. Теорема доказана.

§ 7. О сопряженных отношениях

При исследовании таких важных свойств линейных отношений (операторов), как, например, фредгольмовость, корректность, сюръективность, существенно то, что используется сопряженное линейное отношение. Рассмотрим некоторые

свойства сопряженных отношений. Многие из утверждений можно найти в монографиях [35]–[41] (а для линейных отношений – в [30]), либо доказательство свойств сопряженных линейных отношений несущественно отличается от доказательства соответствующих свойств для сопряженных линейных операторов.

Если E – линейное подпространство из банахова пространства $\mathcal{X}$, то обозначим через $E^\perp$ аннулятор этого подпространства, т. е. $E^\perp = \{\xi \in \mathcal{X}^*: \langle x, \xi \rangle = 0 \ \forall x \in E\}$. Для подпространства $F \subset \mathcal{X}^*$ через ${}^\perp F$ обозначим подпространство ${}^\perp F = \{x \in \mathcal{X}: \langle x, \eta \rangle = 0 \ \forall \eta \in F\}$. Ясно, что $E^\perp = \overline{E}^\perp$ и ${}^\perp F = {}^\perp \overline{F}$ для замыканий $\overline{E}$ и $\overline{F}$ подпространств E и F соответственно. Следуя [35], приведем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Подпространство $F \subset \mathcal{X}^*$ называется *насыщенным*, если верно равенство $({}^\perp F)^\perp = F$.

При наделении пространства $\mathcal{X}^*$ топологией слабой* сходимости $(\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ -топологией [35]–[39]) получаем, что подпространство $F \subset \mathcal{X}^*$ является насыщенным тогда и только тогда, когда F – слабо* замкнутое подпространство из $\mathcal{X}^*$. Кроме того, для любого подпространства $F_0 \subset \mathcal{X}^*$ имеет место равенство $({}^\perp F_0)^\perp = w^*\text{-cl} F_0$, где $w^*\text{-cl} F_0$ – слабое* замыкание F_0 . Отметим, что $E^\perp$ – насыщенное подпространство в $\mathcal{X}^*$ для любого подпространства $E \subset \mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Пусть $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. *Сопряженным* к $\mathcal{A}$ называется отношение $\mathcal{A}^* \in LR(\mathcal{X}^*)$, определяемое формулой

$$\mathcal{A}^* = \{(\eta, \xi) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*: \langle y, \eta \rangle = \langle x, \xi \rangle \ \forall (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{A}^*$ – замкнутое отношение на $\mathcal{X}^*$. При каноническом отождествлении сопряженного пространства $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$ с банаховым пространством $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$ сопряженное к $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ отношение $\mathcal{A}^* \in LRC(\mathcal{X}^*)$ можно определить также равенством $\mathcal{A}^* = (-\mathcal{A}^{-1})^\perp \subset \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$. Следовательно, $\mathcal{A}^*$ – насыщенное подпространство из $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$.

ЛЕММА 7.1. Для $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ верны равенства:

- 1) $\text{Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$; 4) $(\text{Ker } \mathcal{A})^\perp = w^*\text{-cl } \text{Im } \mathcal{A}^* \supset \overline{\text{Im } \mathcal{A}^*}$;
- 2) $\text{Ker } \mathcal{A} = {}^\perp(\text{Im } \mathcal{A}^*)$; 5) $\mathcal{A}0 = {}^\perp \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$;
- 3) ${}^\perp(\text{Ker } \mathcal{A}^*) = \overline{\text{Im } \mathcal{A}}$; 6) $\mathcal{A}^*0 = D(\mathcal{A})^\perp$.

Следующая теорема для линейных операторов известна как теорема Банаха–Хаусдорфа (см. [40, теорема 1.2.6]), а также как теорема о замкнутых образах [30].

ТЕОРЕМА 7.1. Для отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $\overline{\text{Im } \mathcal{A}} = \text{Im } \mathcal{A}$; 4) $w^*\text{-cl}(\text{Im } \mathcal{A}^*) = \text{Im } \mathcal{A}^*$;
- 2) $\text{Im } \mathcal{A} = {}^\perp(\text{Ker } \mathcal{A}^*)$; 5) $\overline{\text{Im } \mathcal{A}^*} = \text{Im } \mathcal{A}^*$;
- 3) $\text{Im } \mathcal{A}^* = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp$; 6) $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;
- 7) $\gamma(\mathcal{A}^*) > 0$.

ТЕОРЕМА 7.2. Для любого отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ верны следующие равенства: $\sigma(\mathcal{A}^*) = \sigma(\mathcal{A})$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^*) = \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$.

§ 8. О некоторых спектральных свойствах отношений $\mathcal{D}_E$, $\mathcal{K}_E$ и оператора $\mathcal{L}_E$

Рассмотрим подробнее разностное отношение $\mathcal{D}_E = I - \mathcal{K}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ и оператор $\mathcal{L}_E$ на однородном пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Однако при использовании сопряженного отношения $\mathcal{D}_E^*$ возникают проблемы, связанные с тем, что $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^*$ не является однородным пространством, если $\mathcal{F}_c \neq \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Чтобы преодолеть эту трудность, будем, используя теорему 3.1, изучать сужение $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}_c$ и при этом доказывать, что некоторыми свойствами сужения обладает и отношение $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}$. Отметим, что поскольку отношение $\mathcal{D}_E$ имеет область определения, совпадающую со всем пространством $\mathcal{F}$, то $\mathcal{D}_E^*$ – линейный оператор (см. свойство 6) леммы 7.1).

Вначале предположим, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, следовательно, в силу теоремы 3.1 пространство $\mathcal{F}^*$ можно отождествить с однородным пространством последовательностей $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$ (здесь $\mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+)$ – двойственное к $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+)$ пространство; см. § 3).

Из определения 7.2 следует, что сопряженное к $\mathcal{D}_E$ отношение $\mathcal{D}_E^* \subset \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$ состоит из пар $(\eta, \xi) \in \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$ таких, что $\langle y, \eta \rangle = \langle x, \xi \rangle$ для всех $(x, y) \in \mathcal{D}_E$. При этом ввиду свойства $D(\mathcal{D}_E) = \mathcal{F}$ из свойства 6) леммы 7.1 следует, что $\mathcal{D}_E^*$ является линейным оператором. Таким образом, верны равенства

$$\langle x_0, \eta(0) \rangle + \sum_{k \geq 1} \langle y(k), \eta(k) \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle x(k), \xi(k) \rangle,$$

где $y(k) = \mathcal{U}(k, k-1)x(k-1)$, $k \geq 1$, и $y(0) = x_0 \in E$. Перепишав их в виде

$$\langle x_0, \eta(0) \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle x(k), \xi(k) - \mathcal{U}(k+1, k)^* \eta(k+1) \rangle$$

и учитывая произвольность выбора последовательности $x \in \mathcal{F}$ и вектора x_0 из E , получим, что оператор $\mathcal{D}_E^*: D(\mathcal{D}_E^*) \subset \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$ определяется формулой

$$(\mathcal{D}_E^* \eta)(n) = \eta(n) - \mathcal{U}(n+1, n)^* \eta(n+1), \quad n \geq 0, \quad (8.1)$$

где $\eta \in D(\mathcal{D}_E^*) = \{\eta \in \mathcal{F}': \eta(0) \in E^\perp\}$. Корректность его определения следует из определения пространства $\mathcal{F}'$ и ограниченности последовательности $n \mapsto \mathcal{U}(n+1, n)^*: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X^*$. Итак, имеет место

ЛЕММА 8.1. *Сопряженное к $\mathcal{D}_E$ отношение $\mathcal{D}_E^*$ является линейным оператором вида (8.1).*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Все утверждения этого параграфа, в которых участвует отношение $\mathcal{D}_E$, верны и в случае, если оно строится по любому дискретному семейству $\mathcal{U}: \Delta_{d,+} \rightarrow \text{End } X$ эволюционных операторов (см. § 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Ядро оператора $\mathcal{D}_E^*$ состоит из последовательностей $\xi \in \mathcal{F}' = \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*)$, для которых выполнены соотношения

$$\xi(n) = \mathcal{U}(n+1, n)^* \xi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi(0) \in E^\perp. \quad (8.2)$$

Теперь рассмотрим один очень важный вспомогательный результат, используемый при исследовании ядер отношения $\mathcal{D}_E$ и оператора $\mathcal{D}_E^*$. Оператор $\mathcal{D}_E^*$ иногда будет также обозначаться через $\mathcal{D}_{*,F}$, где $F = E^\perp$.

Пусть $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ и $x_0 \in D(\mathcal{A}^\infty) = \bigcap_{n=1}^\infty D(\mathcal{A}^n)$. Орбитой вектора x_0 (относительно $\mathcal{A}$) называется любая последовательность $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$, для которой

$x(n) \in \mathcal{A}^n x_0$, $x(0) = x_0$, при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, для x выполнены включения $x(n+1) \in \mathcal{A}x(n)$, $n \geq 0$.

Будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ *равномерно корректно* на окружности $\mathbb{T}$, если все отношения $\mathcal{A} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{T}$, корректны (см. определение 4.5 и равенство (4.2)) и выполнено условие

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{T}} \gamma(\mathcal{A} - \lambda I) = \varkappa(\mathcal{A}) > 0. \quad (8.3)$$

ЛЕММА 8.2. Пусть $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ – равномерно корректное на $\mathbb{T}$ отношение и $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$ – ограниченная орбита вектора $0 \neq x_0 \in D(\mathcal{A}^\infty)$. Тогда для $\varkappa = \min\{1, \varkappa(\mathcal{A})\}$ имеют место оценки

$$\|x(n)\| \leq \frac{2(1 - \varkappa/4)^{n+1} \|x_0\|}{\varkappa}. \quad (8.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия ограниченности последовательности $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{X}$ следует голоморфность функции $r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{z^{n+1}}$, $|z| > 1$. Отметим, что из замкнутости отношения $\mathcal{A}$ следует включение

$$x_0 = x(0) = zr(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n+1)}{z^{n+1}} \in (zI - \mathcal{A})r(z), \quad |z| > 1,$$

т. е. верны включения

$$(r(z), zr(z) - x_0) \in \mathcal{A}, \quad |z| > 1. \quad (8.5)$$

Используя линейность отношения $\mathcal{A}$ и его замкнутость, из (8.5) получаем

$$(r^{(n)}(z), zr^{(n)}(z) + nr^{(n-1)}(z)) \in \mathcal{A}, \quad |z| > 1,$$

и, значит,

$$(r^{(n)}(z), nr^{(n-1)}(z)) \in \mathcal{A} - zI, \quad |z| > 1. \quad (8.6)$$

Из условия (8.3) следует, что отношение $\mathcal{A}$ равномерно корректно для всех $z \in \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| - 1| < \varkappa/2\}$, т. е.

$$\inf_{||z|-1| \leq \varkappa/2} \varkappa(\mathcal{A} - zI) \geq \frac{\varkappa}{2}. \quad (8.7)$$

Поскольку из (8.5) следуют включения $(r(z), x_0) \in (\mathcal{A} - zI)$, $|z| > 1$, то из соотношений (8.6) и (8.7) получаем оценки

$$\|r^{(n)}(z)\| \leq \frac{n! 2^{n+1}}{\varkappa^n} \|x_0\|, \quad 1 < |z| < 1 + \frac{\varkappa}{2}.$$

Следовательно, функция r допускает продолжение в область $U = \{z \in \mathbb{C}: ||z| - 1| < \varkappa/4\}$, определенное формулой $\tilde{r}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{(n)}(z_k)(z - z_k)^n}{n!}$, $k = 1, \dots, m$, где числа z_k , $1 \leq k \leq m$, выбраны из условий $|z_k| > 1$, $1 \leq k \leq m$, и открытые множества $\{z \in \mathbb{C}: |z - z_k| < \varkappa/2\}$, $1 \leq k \leq m$, покрывают U .

Итак, функция $\tilde{r}: \{z \in \mathbb{C}: |z| \geq 1 - \varkappa/4\} \rightarrow \mathcal{X}$ как продолжение функции r может быть представлена формулой

$$\tilde{r}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{z^{n+1}}, \quad |z| \geq 1 - \frac{\varkappa}{4}. \quad (8.8)$$

Значит, включение (8.5) имеет место при $|z| \geq 1 - \varkappa/4$, и из него получаем, что $(\tilde{r}(z), -x_0) \in \mathcal{A} - zI$, $|z| > 1 - \varkappa/4$. Поэтому из (8.7) следует оценка $\|\tilde{r}(z)\| \leq 2\|x_0\|/\varkappa$, $|z| \geq 1 - \varkappa/4$. Из формулы (8.8) получаем, что $\tilde{r}(\alpha e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n-1} e^{-it(n+1)} x(n)$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1 - \varkappa/4$. Следовательно, при $\alpha = 1 - \varkappa/4$ имеют место оценки

$$\left(1 - \frac{\varkappa}{4}\right)^{-n-1} \|x(n)\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| r \left(\left(1 - \frac{\varkappa}{4}\right) e^{it} \right) \right\| \leq \frac{2\|x_0\|}{\varkappa}, \quad n \geq 0.$$

Лемма доказана.

Теперь применим лемму 8.2 к исследованию ядер отношения $\mathcal{D}_E$ и операторов $\mathcal{D}_E^*$, $\mathcal{L}_E$. Временно, в условиях следующей леммы и последующих двух следствиях, не предполагается, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$.

ЛЕММА 8.3. Пусть оператор $\mathcal{D}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ корректен и $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, $x(n) = \mathcal{U}(n, 0)x_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_0 \in X$, — ограниченная последовательность (в частности, $x \in \text{Ker } \mathcal{D}_E$). Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|x(n)\| &\leq \frac{2(1 - \varkappa(\mathcal{D}_0)/4)^{n+1-m}}{\varkappa(\mathcal{D}_0)} \|x(m)\|, & 0 \leq m \leq n, \\ \|x(n)\| &\leq \frac{2(1 - \varkappa(\mathcal{D}_0)/4)^{n+1}}{\varkappa(\mathcal{D}_0)} \|x_0\|, & n \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

где $\varkappa(\mathcal{D}_0) = \min\{\gamma(\mathcal{D}_0), 1\}$ и $\gamma(\mathcal{D}_0)$ определена формулой (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\mathcal{D}_0$ представим в виде $\mathcal{D}_0 = I - A$, где $A = \mathcal{K}_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Рассмотрим последовательность x_m , $m \in \mathbb{N}$, из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ вида $x_m(m) = \mathcal{U}(m, 0)x_0$, $x_m(k) = 0$ для $k \neq m$. При любом $j \geq 1$ верны равенства

$$(A^j x_m)(k) = \begin{cases} \mathcal{U}(j+m, 0)x_0 = x(m+j), & k = j+m, \\ 0, & k \neq j+m, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому последовательность $(A^j x_m)$ ограничена в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Поскольку $V(\gamma)\mathcal{D}_0 V(\gamma^{-1}) = I - \gamma A$, $\gamma \in \mathbb{T}$ (см. доказательство леммы 6.1), то оператор A равномерно корректен на окружности $\mathbb{T}$ и постоянная $\varkappa$ из формулы (8.3) будет совпадать (ввиду изометричности операторов $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$) с $\varkappa(\mathcal{D}_0)$. Применяя лемму 8.2 к ограниченной последовательности $(A^j x_m)$, $j \geq 1$, получим

$$\|x(n)\| = \|\mathcal{U}(n, 0)x_0\| \leq \|A^j x_m\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{2(1 - \varkappa(\mathcal{D}_0)/4)^{j+1}}{\varkappa(\mathcal{D}_0)} \|x(m)\|,$$

где $n = j + m$. Лемма доказана.

Из лемм 8.3, 5.5 и теоремы 5.8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Если оператор $\mathcal{L}_0: D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ корректен, то любая функция x из $\text{Ker } \mathcal{L}_X$ допускает оценки вида

$$\|x(t)\| \leq c e^{-\alpha_0(t-s)} \|x(s)\|, \quad 0 \leq s \leq t < \infty,$$

для некоторых постоянных c , $\alpha_0 > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Если оператор $\mathcal{L}_0$ корректен в одном из однородных пространств, то ядро $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ отношения $\mathcal{D}_E$ (соответственно, ядро $\text{Ker } \mathcal{L}_E$ оператора $\mathcal{L}_E$) принадлежит любому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (соответственно, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Аналог результата из следствия 8.1 при условии ограниченности семейства $\mathcal{U}$, определенного на $\Delta_{\mathbb{R}}$, был впервые получен В. В. Жиковым [4] для дифференциального оператора $\mathcal{L}$, действующего в $C_b(\mathbb{R}, X)$. В статье [14] условие ограниченности семейства $\mathcal{U}$ было снято, а оператор $\mathcal{L}_X$ рассматривался в $C_{0b}(\mathbb{R}_+, X)$ (для пространств $L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, он был получен в [23]).

ЛЕММА 8.4. Для любого отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \text{Ker}(I - \mathcal{A}) &= \text{Ker}(I - \mathcal{A}^{-1}), & \text{Im}(I - \mathcal{A}) &= \text{Im}(I - \mathcal{A}^{-1}), \\ \gamma(I - \mathcal{A}^{-1}) &\geq \gamma(I - \mathcal{A})(1 + \gamma(I - \mathcal{A}))^{-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемые равенства и неравенство непосредственно следуют из представлений $I - \mathcal{A} = \{(x, x - y), (x, y) \in \mathcal{A}\}$, $I - \mathcal{A}^{-1} = \{(y, y - x), (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Например, если $x_0 \in \text{Ker}(I - \mathcal{A})$, то $(x_0, x_0) \in \mathcal{A}$, и поэтому $x_0 \in \text{Ker}(I - \mathcal{A}^{-1})$, т. е. выполнено $\text{Ker}(I - \mathcal{A}) \subset \text{Ker}(I - \mathcal{A}^{-1})$. Из доказанного следует, что $\text{Ker}(I - \mathcal{A}^{-1}) \subset \text{Ker}(I - (\mathcal{A}^{-1})^{-1}) = \text{Ker}(I - \mathcal{A})$. Равенство для образов отношений очевидно. Теперь из полученных представлений для $I - \mathcal{A}$ и $I - \mathcal{A}^{-1}$ следует третье доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Далее снова считается выполненным предположение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$.

ЛЕММА 8.5. Пусть оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X^*: D(\mathcal{D}_X^*) &= \{\eta \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*) : \eta(0) = 0\} \subset \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X^*), \\ (\mathcal{D}_X^* \eta)(n) &= \eta(n) - \mathcal{U}(n+1, n)^* \eta(n+1), \quad n \geq 0, \quad \eta \in D(\mathcal{D}_X^*), \end{aligned}$$

является корректным. Тогда каждая ограниченная последовательность $\eta_0: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X^*$, для которой $\eta_0(n) = \mathcal{U}(n+1, n)^* \eta_0(n+1)$, $n \geq 0$, допускает оценку

$$\|\eta_0(n)\| \leq 2 \left(1 - \frac{\kappa(\mathcal{D}_X^*)}{4}\right)^{n-m+1} \|\eta_0(m)\|, \quad n \geq m, \quad (8.9)$$

где $\kappa(\mathcal{D}_X^*) = \gamma(D_X^*)(\gamma(D_X^* + 1))$ и величина $\gamma(\mathcal{D}_X^*)$ определена в (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\mathcal{D}_X^*$ представим в виде $\mathcal{D}_X^* = I - A_0$, где $A_0: D(A_0) = D(\mathcal{D}_X^*) \subset \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$ имеет вид $(A_0 \eta)(k) = \mathcal{U}(k+1, k)^* \eta(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\eta \in \mathcal{F}'$, $\eta(0) = 0$. Из леммы 8.4 следует, что корректным будет отношение $\tilde{\mathcal{A}} = I - \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = A_0^{-1}$ (так как $\text{Ker } \tilde{\mathcal{A}} = \{0\}$ и $\text{Im } \tilde{\mathcal{A}} = \text{Im}(I - \mathcal{A})$ – замкнутое подпространство из $\mathcal{F}'$). Из леммы 6.1 следуют равенства $V(\gamma)\tilde{\mathcal{A}}V(\gamma^{-1}) = I - \gamma^{-1}\mathcal{A}$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и поэтому отношение $\mathcal{A}$ является равномерно корректным на окружности $\mathbb{T}$, причем выполнены условия леммы 8.2 при $\kappa = \kappa(\mathcal{D}_X^*)$.

Отношение $\mathcal{A} = A_0^{-1}$ представимо в виде $\mathcal{A} = \{(A_0 \xi, \xi); \xi \in \mathcal{F}', \xi(0) = 0\}$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано и η_m – последовательность из $\mathcal{F}'$, для которой $\eta_m(m) = \eta_0(m)$, $\eta_m(k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{m\}$. Используя равенства (вытекающие из вида последовательности η_0)

$$\eta_0(k) = \mathcal{U}(k+j, k)^* \eta_0(k+j), \quad k \geq 0, \quad j \geq 1,$$

получаем, что $\eta_{j+m} \in \mathcal{A}^j \eta_m$, $m \geq 1$, $j \geq 0$. Последовательность $\tilde{\eta}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{F}'$ вида $j \mapsto \eta_{j+m}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{F}'$ ограничена, отношение $\mathcal{A}$ равномерно корректно на $\mathbb{T}$, и поэтому из лемм 8.2 и 8.4 следуют оценки

$$\|\eta_0(n)\| = \|\tilde{\eta}(j)\|_{\mathcal{F}'} \leq \frac{2(1 - \kappa(\mathcal{D}_X^*)/4)^{j+1}}{\kappa(\mathcal{D}_X^*)} \|\eta_0(m)\|,$$

где $n \geq m$, $j = n - m$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. Любая последовательность η_0 из $\text{Ker } \mathcal{D}_E^*$ удовлетворяет оценкам (8.9), если $\mathcal{D}_X^*$ – корректный оператор.

СЛЕДСТВИЕ 8.4. В условиях леммы 8.5 замыкание образа $\text{Im } \mathcal{D}_E$ отношения $\mathcal{D}_E$ допускает представление вида

$$\overline{\text{Im } \mathcal{D}_E} = {}^\perp \text{Ker } \mathcal{D}_E^* = \left\{ y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : \sum_{n=0}^{\infty} \langle y(n), \eta_0(n) \rangle = 0 \right\}$$

для любого $\eta_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из свойства 3) леммы 7.1 и доказанной леммы 8.5 (см. замечание 8.2).

В дальнейшем не предполагается выполненным условие $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Пространство $\mathcal{F}'_c = \mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X)$ канонически отождествляется (в силу теоремы 3.1) с пространством $\mathcal{F}_c^* = \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)^*$, а оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$ рассматривается на $\mathcal{F}'_c$.

Далее рассматриваются оператор вложения $J_c: \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и сопряженный оператор $\Phi_c = J_c^*: \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)^* = \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}_c^*$, который мы рассматриваем, учитывая канонический изоморфизм пространств $\mathcal{F}'_c$ и $\mathcal{F}_c^*$, как отображение $\Phi_c: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}'_c$, причем $\Phi_c(\xi) = \xi_c \in \mathcal{F}'_c$, где ξ_c – последовательность из $\mathcal{F}'_c$, с помощью которой определяется сужение $\xi|_{\mathcal{F}_c}$ функционала ξ на подпространство $\mathcal{F}_c$. Ясно, что J_c – инъективный, а Φ_c – сюръективный операторы.

ЛЕММА 8.6. Подпространство $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)$ является инвариантным для отношения $\mathcal{D}_E$, и имеют место равенства

$$J_c \mathcal{D}_{E,c} = \mathcal{D}_E J_c, \quad \mathcal{D}_E^* \xi = \mathcal{D}_0^* \xi, \quad \xi \in D(\mathcal{D}_E^*) = \{\xi \in \mathcal{F}^*: (\Phi_c \xi)(0) \in E^\perp\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство непосредственно следует из определения сужения $\mathcal{D}_{E,c}$. Из него вытекает инвариантность подпространства $\mathcal{F}_c$ для отношения $\mathcal{D}_E$. Второе равенство следует из включения $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_E$ и вида $\mathcal{D}_E$. Лемма доказана.

Сужение отношения $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}_c$ далее обозначается через $\mathcal{D}_{E,c}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. Как было выяснено в теореме 5.8 (и в теоремах 5.1–5.7), большинство свойств оператора $\mathcal{L}_E$ (состояний оператора $\mathcal{L}_E$) наследует отношение $\mathcal{D}_E$. В свою очередь, леммы 8.3, 8.5 и 8.6 позволяют доказывать, что многие свойства отношения $\mathcal{D}_E$ наследует также и его сужение $\mathcal{D}_{E,c}$ на $\mathcal{F}_c$. Например, если $\mathcal{D}_0$ – корректный оператор, то $\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c} = \text{Ker } \mathcal{D}_E$ в силу леммы 8.3. Если же $\mathcal{D}_E$ обладает дополнительным свойством $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_E} = \text{Im } \mathcal{D}_{E,c}$, то $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$, и поскольку $\text{Ker } \mathcal{D}_E = \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}$, то $\gamma(\mathcal{D}_{E,c}) > 0$, т. е. $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_{E,c}} = \text{Im } \mathcal{D}_{E,c}$. Другие наследуемые свойства будут рассматриваться в последующих утверждениях.

ТЕОРЕМА 8.1. *Отношение $\mathcal{K}_E$ и его сужение $\mathcal{K}_{E,c}$ на $\mathcal{F}_c$ имеют совпадающие спектры: $\sigma(\mathcal{K}_E) = \sigma(\mathcal{K}_{E,c})$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{K}_E) = \tilde{\sigma}(\mathcal{K}_{E,c})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.1 достаточно установить, что $0 \in \rho(\mathcal{D}_E) \Leftrightarrow 0 \in \rho(\mathcal{D}_{E,c})$. Поскольку $\mathcal{F}_c$ является однородным пространством, то из теоремы 6.1 следует, что обратимость каждого из операторов $\mathcal{D}_E$, $\mathcal{D}_{E,c}$ эквивалентна экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ (см. также следствие 6.3). Необходимо также отметить, что если $E \neq \{0\}$, то $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_{E,c}$ не являются линейными операторами, и поэтому $\infty \in \tilde{\sigma}(\mathcal{D}_E)$, $\infty \in \tilde{\sigma}(\mathcal{D}_{E,c})$. Если же $E = \{0\}$, то $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_{0,c}$ – ограниченные операторы, и поэтому $\infty \notin \tilde{\sigma}(\mathcal{D}_E) \cup \tilde{\sigma}(\mathcal{D}_{E,c})$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8.2. *Если отношение $\mathcal{D}_E$ корректно (инъективно) и оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$ инъективен (соответственно, корректен), то отношения $\mathcal{D}_E$, $\mathcal{D}_{E,c}$ и операторы $\mathcal{D}_E^*$, $\mathcal{D}_{E,c}^*$ непрерывно обратимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть корректно отношение $\mathcal{D}_E$ и инъективен оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$. Тогда корректно отношение $\mathcal{D}_{E,c}$, а из леммы 7.1 вытекает непрерывная обратимость отношения $\mathcal{D}_{E,c}$, следовательно, непрерывно обратимо отношение $\mathcal{D}_E$ (см. следствие 6.3). Если же корректен оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$ и отношение $\mathcal{D}_E$ инъективно, то из теоремы 7.1 следует корректность отношения $\mathcal{D}_E$, и по доказанному последнее и отношение $\mathcal{D}_{E,c}$ непрерывно обратимы, а вместе с ними (в силу теоремы 7.2) обратимы их сопряженные операторы. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим дефектное подпространство $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*)$, введенное в определении 1.7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Подпространство

$$\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) \cap \mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X^*)$$

назовем *дефектным подпространством* из $\mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Из определения дефектного подпространства следует, что $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \text{Ker } \mathcal{D}_{X,c}^*$. Поэтому в силу свойства 1) теоремы 7.1 получаем, что $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*)$ – насыщенное подпространство из $\mathcal{F}'_c = (\mathcal{F}_c)^*$, причем из свойства 1) леммы 7.1 вытекает, что $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_{X,c}} = {}^\perp \mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*)$.

ЛЕММА 8.7. *Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию, то $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (P, Q) – расщепляющая пара для семейства $\mathcal{U}$, и пусть $E = \text{Im } Q(0)$. Тогда из теоремы 6.1 следует обратимость отношения $\mathcal{D}_E$, рассматриваемого на пространстве $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X)$. Из теоремы 7.2 получаем обратимость оператора $\mathcal{D}_E^* \in LO(\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*))$, следовательно, обратим оператор $\mathcal{D}_{E,c}^*$ (см. теорему 8.2). Таким образом, получаем, что $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Лемма доказана.

ПРИМЕР 8.1. Пусть $U \in \text{End } X$ – оператор, для которого существует ненулевая ограниченная последовательность $\xi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X^*$ такая, что $\xi(0) = 0$, $U^*\xi(n+1) = \xi(n)$, $n \geq 0$. Такая последовательность существует, если U – необратимая изометрия в гильбертовом пространстве X . Пусть $\mathcal{U}(n, m) = U^{n-m}$, $0 \leq m \leq n$, – дискретное семейство эволюционных операторов (см. замечание 8.1). Рассмотрим голоморфную функцию $f: \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < 1\} \rightarrow X^*$ вида $f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \xi(n+1)\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда $U^*f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{D}$, и,

значит, $\mathbb{D} \subset \sigma(U)$. При этом все $\lambda \in \mathbb{D}$, за исключением не более счетного множества, являются собственными значениями оператора U . Ясно, что $\xi \in \ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset \text{Ker } \mathcal{D}_X^*$, где отношение $\mathcal{D}_X$ строится по семейству $\mathcal{U}$ и рассматривается на пространстве $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X)$. Таким образом, $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) \neq \{0\}$. Поскольку $\text{Ker } \mathcal{D}_X^* \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*)$ – ненулевое подпространство, то из свойства 3) леммы 7.1 следует, что $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_X} \neq \ell^1(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. следующую лемму).

ЛЕММА 8.8. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_{X,c}} = \mathcal{F}_c$;
- 2) $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$.

Если $\overline{\text{Im } \mathcal{U}(k, k-1)} = X$, $k \geq 1$, то $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_{X,c}} = \mathcal{F}_c$ (и, следовательно, $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^) = \{0\}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность свойств следует из замечания 8.5 и равенства 1) леммы 7.1. Если выполнено свойство плотности образов операторов $\mathcal{U}(k, k-1)$, $k \geq 1$, то $\text{Ker } \mathcal{U}(k, k-1)^* = \{0\}$, $k \geq 1$, и поэтому из замечания 8.2 (см. формулу (8.2)), где $E^\perp = \{0\}$, следует, что $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \text{Ker } \mathcal{D}_{X,c}^* = \{0\}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. *Если оператор $\mathcal{D}_{X,c}^*$ корректен в одном из однородных пространств $\mathcal{F}'_c$, то $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c}$ – замкнутое подпространство для любого однородного пространства $\tilde{\mathcal{F}}$.*

Для каждого функционала $\eta \in \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$ последовательность $\eta_c = \Phi_c(\eta) \in \mathcal{F}'_c = \mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X^*)$ принадлежит $\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$ (этот факт следует, в частности, из равенств леммы 8.6). Следовательно, определено сужение $\tilde{\Phi}_c: \text{Ker } \mathcal{D}_E^* \rightarrow \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$ оператора $\Phi_c: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}'_c$, определенного перед леммой 8.6.

Отметим (и это будет использовано в дальнейшем), что $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ непрерывно вкладывается в $\mathcal{F}^*$. А именно, каждой последовательности $\xi \in \ell^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ сопоставляется функционал $\bar{\xi} \in \mathcal{F}^*$, определяемый последовательностью ξ , т. е. $\langle x, \bar{\xi} \rangle = \sum_{n=0}^\infty \langle x(n), \xi(n) \rangle$.

ЛЕММА 8.9. *Если $\text{Codim } \overline{\text{Im } \mathcal{D}_X} = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_X^* = m < \infty$, то $\dim \text{Ker } \tilde{\Phi}_c \leq m$. Если $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{F}_c$, то $\tilde{\Phi}_c$ – сюръективный оператор, причем $\tilde{\Phi}_c$ – изоморфизм при дополнительном условии $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_X} = \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$ такой, что $\eta_c = \Phi_c(\eta) = 0$. Тогда из леммы 7.1 следует, что $\eta \in (\text{Im } \mathcal{D}_E)^\perp$. Поскольку $\text{Im } \mathcal{D}_0 \subset \text{Im } \mathcal{D}_E$, то $\eta \in (\text{Im } \mathcal{D}_0)^\perp$. Ввиду равенства $\text{Im } \mathcal{D}_X = \text{Im } \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_X 0$ и включения $\mathcal{D}_X 0 \subset \mathcal{F}_c$ получаем, что $\eta \in (\text{Im } \mathcal{D}_X)^\perp$. Поскольку $\dim(\text{Im } \mathcal{D}_X)^\perp = m$, то $\dim \text{Ker } \tilde{\Phi}_c \leq m$. Из доказанного следует, что если $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_X} = \mathcal{F}$, то $\text{Ker } \tilde{\Phi}_c = \{0\}$.

Пусть теперь $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{F}_c$. Докажем сюръективность оператора $\tilde{\Phi}_c$.

Рассмотрим $\eta_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$. Поскольку оператор $\mathcal{D}_{X,c}^*$ корректен (см. свойство 1) леммы 7.1 и теорему 7.1), то из следствия 8.3 получаем, что последовательность $\eta_0 \in \mathcal{F}'_c$ обладает оценками (8.11). Значит, функционал $\tilde{\eta}_0 \in \mathcal{F}_c^*$, определяемый последовательностью η_0 , допускает расширение до функционала $\eta \in \mathcal{F}^*$, определяемого равенствами $\langle x, \eta \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle x(n), \eta_0(n) \rangle$, $x \in \mathcal{F}$. Ясно, что $\eta \in \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$, причем $\tilde{\Phi}_c(\eta) = \eta_0$ (см. также лемму 8.6). Если $\overline{\text{Im } \mathcal{D}_X} = \mathcal{F}$, то $\tilde{\Phi}_c$ – изоморфизм. Лемма доказана.

Далее рассматривается содержащееся в E (см. лемму 5.5) подпространство $X_E(0)$, определенное равенствами (1.19), которое совпадает с подпространством $\{x_0 \in E: x(n) = \mathcal{U}(n, 0)x_0 \in \mathcal{F}(Z_+, X), n \geq 0\}$.

ЛЕММА 8.10. *Подпространство $X_E(0)$ замкнуто, если $\mathcal{D}_0$ – корректный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость подпространства $X_E(0)$ следует из леммы 8.3 и включения (2.2). Лемма доказана.

Далее для отношения $\mathcal{D}_E$ (оператора $\mathcal{L}_E$) используется

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 8.1. Подпространство $E_0 = X_E(0)$ – замкнутое дополняемое в E подпространство и

$$E = E_0 \oplus E_a = X_E(0) \oplus E_a, \quad (8.10)$$

где E_a – замкнутое подпространство из E .

ЛЕММА 8.11. *Если для отношения $\mathcal{D}_E$ выполнено предположение 8.1, то отношение $\mathcal{D}_{E_a}$ инъективно и $\text{Im } \mathcal{D}_{E_a} = \text{Im } \mathcal{D}_E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы непосредственно следует из определения подпространства E_0 и разложения (8.10).

Пусть $\tilde{F}$ – насыщенное подпространство из X^* и $\tilde{E} = {}^\perp \tilde{F}$. В дальнейших исследованиях важную роль будет играть подпространство из $\tilde{F}$ вида

$$X_{\tilde{F}}^*(0) = \{\xi(0): \xi \in \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*\}. \quad (8.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Пусть для $\mathcal{D}_E$ выполнено предположение 8.1. Подпространство E_a из (8.10) называется *допустимым*, если подпространство $X_{\tilde{F}}^*(0)$, где $\tilde{F} = E_a^\perp \subset X^*$, является замкнутым дополняемым в $\tilde{F}$ подпространством, причем подпространство $\tilde{F}$ представимо в виде

$$\tilde{F} = E_a^\perp = X_{\tilde{F}}^*(0) \oplus F_s, \quad (8.12)$$

где F_s – насыщенное подпространство из X^* . Подпространство $E_s = {}^\perp F_s$ из X называется *разрешающим* для отношения $\mathcal{D}_E$ (оператора $\mathcal{L}_E$).

ЛЕММА 8.12. *Если $\mathcal{D}_X^*$ – корректный оператор, то подпространство $X_{\tilde{F}}^*(0)$ замкнуто в X^* для любого насыщенного подпространства $\tilde{F}$ из X^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 8.3 (из оценок (8.9)) и непрерывности вложения $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ в $\mathcal{F}_c^*(\mathbb{Z}_+, X^*)$ (см. включения (2.2)).

ТЕОРЕМА 8.3. *Пусть выполнено одно из следующих двух (эквивалентных) условий:*

- 1) для оператора $\mathcal{L}_E$ выполнено предположение 8.1 и $\gamma(\mathcal{L}_E) > 0$,
- 2) для отношения $\mathcal{D}_E$ выполнено предположение 8.1 и $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$,

и, кроме того, выполнены условия:

- 3) $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$,
- 4) подпространство E_a из разложения (8.10) является допустимым.

Тогда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$, оператор $\mathcal{L}_{E_s}$ и отношение $\mathcal{D}_{E_s}$ непрерывно обратимы для разрешающего подпространства $E_s = {}^\perp F_s \subset X$, где F_s взято из разложения (8.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 5.8 все рассмотрения можно вести для отношения $\mathcal{D}_E$. Из леммы 8.11 следует, что $\text{Im } \mathcal{D}_E = \text{Im } \mathcal{D}_{E_a} = \overline{\text{Im } \mathcal{D}_{E_a}}$ и $\text{Ker } \mathcal{D}_{E_a} = \{0\}$. Поэтому $\mathcal{D}_{E_a}$ – корректное отношение и таким же будет его сужение $\mathcal{D}_{E_a,c}$ на $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\mathbb{Z}_+, X)$. Следовательно, из свойства 3) теоремы 7.1 получаем сюръективность оператора $\mathcal{D}_{E_a,c}^*$. Из разложения (8.12) следует, что оператор $\mathcal{D}_{E_s,c}^*$ будет инъективным (используется условие $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$), причем $\text{Im } \mathcal{D}_{E_s,c}^* = \text{Im } \mathcal{D}_{E_a,c}^* = \mathcal{F}_c$, т. е. он сюръективен. Таким образом, оператор $\mathcal{D}_{E_s,c}^*$ непрерывно обратим, а из теоремы 7.2 следует непрерывная обратимость отношения $\mathcal{D}_{E_s,c}$. Теперь из теоремы 6.1 вытекает, что $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, а из леммы 6.2 получаем, что она имеет место на $\mathbb{R}_+$. Непрерывная обратимость отношения $\mathcal{D}_{E_s}$ следует из теоремы 6.1 и ее следствия 6.3. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.6. Пусть X – гильбертово пространство, $\mathcal{D}_0$ – корректный оператор, а $\mathcal{D}_X$ – сюръективное отношение. Тогда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 8.13. Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P, Q) и E – замкнутое подпространство из X . Тогда имеют место следующие равенства:

$$\text{Ker } \mathcal{D}_E = \{x \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : x(n) = \mathcal{U}(n, 0)x_0, \ n \geq 0, \ x_0 \in \text{Im } P(0) \cap E\}, \quad (8.13)$$

$$\text{Im } \mathcal{D}_E = \left\{ \tilde{y} \in \mathcal{F} : \tilde{y}(n) = y(n), \ n \geq 1, \ \tilde{y}(0) = P(0)y(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)y(m) + x_0, \ y \in \mathcal{F}, \ x_0 \in E \right\}, \quad (8.14)$$

$$\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^* = \{\xi \in \mathcal{F}'_c(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(n) = \mathcal{U}(0, n)^* \xi_0, \ n \geq 0, \ \xi_0 \in \text{Im } Q(0)^* \cap E^\perp\}. \quad (8.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (8.13) следует из леммы 5.5 и равенства $\text{Ker } \mathcal{D}_X = \{x \in \mathcal{F} : x(n) = \mathcal{U}(n, 0)P(0)x_0, \ n \geq 0, \ x_0 \in X\}$, вытекающего из определения экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ (с помощью представления вектора $x_0 \in E$ в виде $x_0 = P(0)x_0 + Q(0)x_0$).

Далее используется непрерывная обратимость отношения $\mathcal{D}_{\tilde{E}}$, где $\tilde{E} = \text{Im } Q(0)$, которая следует из теоремы 6.1. Получим представление (8.14) подпространства $\text{Im } \mathcal{D}_E$. Для этого используем [20, лемма 4], где доказано, что $\mathcal{D}_{\tilde{E}}^{-1}\mathcal{D}_0 = I$. Следовательно, $\mathcal{P} = \mathcal{D}_0\mathcal{D}_{\tilde{E}}^{-1}$ – проектор, верно равенство $\text{Im } \mathcal{P} = \text{Im } \mathcal{D}_0$, и проектор $\mathcal{P}$ допускает представление [20, лемма 4]

$$(\mathcal{P}y)(n) = \begin{cases} y(n), & n \geq 1, \\ P(0)y(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)y(m), & n = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Поскольку $\text{Im } \mathcal{D}_{\tilde{E}}^{-1} = \mathcal{F}$, то равенства (8.14) вытекают из представления проектора $\mathcal{P}$ формулой (8.16) и равенства $\text{Im } \mathcal{D}_E = \text{Im}(\mathcal{D}_E\mathcal{D}_{\tilde{E}}^{-1})$.

Рассматривая сужение $\mathcal{D}_{E,c}$ отношения $\mathcal{D}_E$ на $\mathcal{F}_c$, докажем равенство (8.15). Без ограничения общности полагая $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, заметим, что из равенства $\mathcal{P}^* = (\mathcal{D}_{\tilde{E}}^{-1})^*\mathcal{D}_0^*$ следует, что оператор $I - \mathcal{P}^*$ является проектором на подпространство

$\text{Ker } \mathcal{D}_0^* = \text{Ker } \mathcal{D}_{*,X}$ из $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}'$, которое содержит $\text{Ker } \mathcal{D}_{*,E^\perp} = \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$. Из формулы (8.16) следует, что проектор $I - \mathcal{P}^*$ определяется равенствами

$$((I - \mathcal{P}^*)\xi)(n) = (\mathcal{U}(0, n)Q(n))^* \xi(0) = \mathcal{U}(0, n)^* Q(0)^* \xi(0).$$

Следовательно, имеет место доказываемое представление (8.15). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.7. Если $E \supset \text{Im } Q(0)$, то $\text{Im } \mathcal{D}_E = \mathcal{F}$.

ЛЕММА 8.14. Пусть выполнены условия леммы 8.13 и $\gamma(\mathcal{D}_E) > 0$. Тогда $\text{Im } P(0) + E$ – замкнутое подпространство из X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x_n) – сходящаяся к $z_0 \in X$ последовательность из подпространства $\text{Im } P(0) + E$, значит, она представима в виде $x_n = x_{n0} + x_{n1}$, где $x_{n0} \in \text{Im } P(0)$ и $x_{n1} \in E$, $n \geq 1$. Поскольку $P(0)x_{n0} = x_{n0}$, то $x_n = P(0)x_{n0} + x_{n1}$, $n \geq 1$. Для любого $n \geq 1$ последовательность $\bar{x}_n: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, $\bar{x}_n(0) = x_n$, $\bar{x}_n(k) = 0$, $k \geq 1$, принадлежит однородному пространству $\mathcal{F}$, причем $\bar{x}_n \in \mathcal{D}_E \bar{y}_n$, $n \geq 1$, где $\bar{y}_n \in \mathcal{F}$, $\bar{y}_n(k) = \mathcal{U}(k, 0)P(0)x_{n0} = \mathcal{U}(k, 0)x_{n0}$ при $k \geq 0$.

Из замкнутости $\text{Im } \mathcal{D}_E$ и сходимости последовательности $(\bar{x}_n)$ в $\mathcal{F}$ следует, что последовательность $\bar{z}_0 \in \mathcal{F}$, $\bar{z}_0(0) = z_0$, $\bar{z}_0(k) = 0$, $k \geq 1$, являющаяся ее пределом, принадлежит $\text{Im } \mathcal{D}_E$, т.е. $\bar{z}_0 \in \mathcal{D}_E \bar{y}_0$ для некоторой последовательности $\bar{y}_0 \in \mathcal{F}$. Следовательно, $\bar{z}_0(0) = z_0 = \bar{y}_0(0) + x_0$, где $x_0 \in E$ и $\bar{y}_0(k) = \mathcal{U}(k, 0)\bar{y}_0(0)$, $k \geq 1$, т.е. $\bar{y}_0(0) \in \text{Im } P(0)$. Итак, $z_0 \in P(0) + E$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.15. Пусть $\mathcal{L}_E$ – фредгольмов оператор (или, что эквивалентно, $\mathcal{D}_E$ – фредгольмово отношение) и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Тогда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ и пара подпространств $(E, \text{Im } P(0))$, где (P, Q) – расщепляющая пара для $\mathcal{U}$, является фредгольмовой. При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{L}_E) &= \alpha(\mathcal{D}_E) = \dim(\text{Im } P(0) \cap E), \\ \beta(\mathcal{L}_E) &= \beta(\mathcal{D}_E) = \text{Codim}(\text{Im } P(0) + E), \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\text{ind } \mathcal{D}_E = \text{Ind } \mathcal{L}_E = \text{ind}(\text{Im } P(0), E). \quad (8.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим фредгольмовость отношения $\mathcal{D}_{E,c}$. Из конечномерности ядра $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ отношения $\mathcal{D}_E$ следует, что $X_E(0)$ является конечномерным подпространством в X и $\dim X_E(0) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_E$. Тогда имеет место разложение (8.10), где E_a – некоторое замкнутое подпространство из X . Ясно, что отношение $\mathcal{D}_{E_a}$ будет корректным. Таким же будет и его сужение $\mathcal{D}_{E_a,c}$ на $\mathcal{F}_c$, причем верны равенства (см. замечание 8.4)

$$\text{Im } \mathcal{D}_{E_a} = \text{Im } \mathcal{D}_E = \overline{\text{Im } \mathcal{D}_E}, \quad \text{Im } \mathcal{D}_{E_a,c} = \overline{\text{Im } \mathcal{D}_{E_a,c}} = \text{Im } \mathcal{D}_{E,c}.$$

Поскольку $\text{Im } \mathcal{D}_E$ имеет конечную коразмерность, то отношение $\mathcal{D}_X$ также имеет замкнутую область значений (конечной коразмерности), т.е. $\gamma(\mathcal{D}_X) > 0$. Так как $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ – конечномерное подпространство из $\mathcal{F}$, то $\gamma(\mathcal{D}_0) > 0$, т.е. $\mathcal{D}_0$ – корректный оператор. Поэтому из леммы 8.3 следует, что $\text{Ker } \mathcal{D}_E = \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}$ и, следовательно, $\gamma(\mathcal{D}_{X,c}) > 0$. Из замкнутости подпространства $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c} \subset \mathcal{F}_c$, равенства $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и леммы 8.8 получаем $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{F}_c$ (см. также замечание 8.4). Теперь из леммы 8.9 получаем, что $\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$ – конечномерное

подпространство из $\mathcal{F}'_c$. Таким образом, установлена фредгольмовость отношения $\mathcal{D}_{E,c}$.

Проверим выполнение условий теоремы 8.3 для отношения $\mathcal{D}_{E,c}$. Осталось установить допустимость подпространства E_a . Из условия $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и конечномерности подпространства $\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$ следует конечномерность подпространства $X_F^*(0)$, где $\tilde{F} = E_a^\perp$, причем $\dim X_F^*(0) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$. Следовательно, имеет место разложение (8.12), где F_s – некоторое замкнутое подпространство из $\tilde{F}$. Для доказательства насыщенности F_s в X^* достаточно заметить, что насыщенность подпространства из X^* эквивалентна его слабой* замкнутости (см. [34, теорема 4.62-A]). Поскольку $\tilde{F}$ насыщено и насыщенным является конечномерное подпространство $X_F^*(0)$, то слабо* замкнутым будет и $F_s = \tilde{F} \ominus X_F^*(0)$. Таким образом, E_a – допустимое подпространство, а $E_s = {}^\perp F_s$ является разрешающим подпространством из X для отношения $\mathcal{D}_{E,c}$.

Итак, для отношения $\mathcal{D}_{E,c}$ выполнены условия теоремы 8.3 и, следовательно, семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (на $\mathbb{R}_+$) с некоторой расщепляющей парой (P, Q) , для которой $\text{Im } Q(0) = E_s = {}^\perp F_s$ (см. теорему 6.1). Значит, отношение $\mathcal{D}_{E_s,c}$ непрерывно обратимо и вместе с ним будет непрерывно обратимо отношение $\mathcal{D}_{E_s}$ (свойство независимости обратимости отношений от выбора однородного пространства; см. следствие 6.3). Следовательно, отношение $\mathcal{D}_X$ сюръективно. Снова обратимся к лемме 8.9, из которой следует, что $\beta(\mathcal{D}_E) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_E^* = \beta(\mathcal{D}_{E,c}) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^* = \dim X_F^*(0)$. Поэтому индексы фредгольмовых отношений $\mathcal{D}_E$ и $\mathcal{D}_{E,c}$ совпадают.

Итак, выполнены условия лемм 8.13 и 8.14. Из равенства (8.13) следует, что $\alpha(\mathcal{D}_E) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_E = \dim(\text{Im } P(0) \cap E)$. Значит, подпространство $\text{Im } P(0) \cap E$ конечномерно, причем ясно, что $\text{Ker } \mathcal{D}_E$ изоморфно подпространству $\text{Im } P(0) \cap E$.

Из равенства (8.15) получаем, что $\beta(\mathcal{D}_E) = \beta(\mathcal{D}_{E,c}) = \dim(\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*) = \dim(\text{Im } Q(0)^* \cap E^\perp)$. Докажем, что $\text{Im } Q(0)^* \cap E^\perp = (\text{Im } P(0) + E)^\perp$. Если выполнено $\eta \in \text{Im } Q(0)^* \cap E^\perp$, то $\eta = Q(0)^* \xi$, $\xi \in X^*$, и $\eta \in E^\perp$. Для любого вектора $z = P(0)x + y$, где $x \in X$, $y \in E$, верны равенства

$$\langle z, \eta \rangle = \langle P(0)x + y, Q(0)^* \xi \rangle = \langle Q(0)(P(0)x + y), \xi \rangle = \langle y, \eta \rangle = 0,$$

т.е. $\eta \in (\text{Im } P(0) + E)^\perp$. Обратно, пусть $\eta \in (\text{Im } P(0) + E)^\perp$. Тогда имеем $\langle P(0)x + y, \eta \rangle = 0$ для любых $x \in X$ и $y \in E$. Представив функционал η в виде $\eta = (P^*(0) + Q^*(0))\eta$, получим

$$0 = \langle P(0)x + y, \eta \rangle = \langle P(0)(x + y), \eta \rangle + \langle Q(0)y, \eta \rangle, \quad x \in X, \quad y \in E.$$

При $y = 0$ приходим к равенству $P^*(0)\eta = 0$, т.е. $\eta \in \text{Im } Q^*(0)$. При $x = 0$ и любом $y \in E$ из тех же равенств следует, что $\eta \in E^\perp$. Из приведенных равенств получаем равенства (8.17), причем ясно, что $\text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$ изоморфно подпространству $(\text{Im } P(0) + E)^\perp$.

Из леммы 8.14 следует замкнутость подпространства $\text{Im } P(0) + E_a$ (отношение $\mathcal{D}_{E_a}$ корректное). Из конечномерности подпространства $X_E(0)$ и разложения (8.10) следует, что замкнутым будет являться подпространство $\text{Im } P(0) + E = (\text{Im } P(0) + E_a) + X_E(0)$.

Итак, $(\text{Im } P(0), E)$ – фредгольмова пара подпространств из X и получены равенства (8.17), (8.18), из которых следует совпадение индекса отношения $\mathcal{D}_E$ с индексом пары $(\text{Im } P(0), E)$ подпространств из X . Лемма доказана.

Непосредственно при доказательстве леммы 8.15 были получены следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 8.8. Если $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и $\mathcal{D}_E$ – фредгольмово отношение, то фредгольмовым является отношение $\mathcal{D}_{E,c}$ и верны равенства: $\alpha(\mathcal{D}_{E,c}) = \alpha(\mathcal{D}_E)$, $\beta(\mathcal{D}_{E,c}) = \beta(\mathcal{D}_E)$, $\text{ind } \mathcal{D}_E = \text{ind } \mathcal{D}_{E,c}$.

СЛЕДСТВИЕ 8.9. Если $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ и $\mathcal{D}_E$ – фредгольмово отношение, то $\text{Im } \mathcal{D}_X = \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 8.4. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{L}_E$ – фредгольмов оператор и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;
- 2) $\mathcal{D}_E$ – фредгольмово отношение и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;
- 3) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (или на $\mathbb{R}_+$) с такой расщепляющей парой (P, Q) , что пара подпространств $(E, \text{Im } P(0))$ из X является фредгольмовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5.7 и леммы 8.15 следует, что осталось доказать импликацию 3) $\Rightarrow$ 2). Равенство $\ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$ следует из леммы 8.7. Поскольку выполнены условия леммы 8.13, то имеют место равенства (8.13)–(8.15). Из равенств (8.13) и конечномерности подпространства $\text{Im } P(0) \cap E$ следует конечномерность ядра отношения $\mathcal{D}_E$.

Поскольку $\text{Im } \mathcal{D}_X = \mathcal{F}$ и $\text{Im } \mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{F}_c$, то из леммы 8.9 следует, что $\dim \text{Ker } \mathcal{D}_E^* = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_{E,c}^*$. Из доказанного в лемме 8.15 равенства $\text{Im } Q(0)^* \cap E^\perp = (\text{Im } P(0) + E)^\perp$ и равенства (8.15) следует конечномерность подпространства $\text{Ker } \mathcal{D}_E^*$.

Замкнутость подпространства $\text{Im } \mathcal{D}_E$ вытекает из равенств (8.14), из которых ввиду конечной коразмерности подпространства $\text{Im } P(0) + E$ в X следует, что $\text{Im } \mathcal{D}_E$ имеет также конечную коразмерность в $\mathcal{F}$.

Таким образом, $\mathcal{D}_E$ – фредгольмово отношение. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.10. Если оператор $\mathcal{L}_E$ и отношение $\mathcal{D}_E$ фредгольмовы на одном из однородных пространств и $\ell_{\text{def}, \mathcal{U}}^\infty = \{0\}$, то $\mathcal{L}_E$ и $\mathcal{D}_E$ фредгольмовы на любом однородном пространстве и их индекс не зависит от выбора однородного пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Докажем свойство 1). Пусть $E = X_E(0) \oplus \tilde{E}$, где $\tilde{E}$ – замкнутое подпространство из E . Тогда отношение $\mathcal{D}_{\tilde{E}}$ будет иметь нулевое ядро. Оно будет также сюръективным, так как $\text{Im } \mathcal{D}_{\tilde{E}} = \text{Im } \mathcal{D}_E = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ (использовалась сюръективность оператора $\mathcal{L}_E$). Следовательно, $\mathcal{D}_{\tilde{E}}$ непрерывно обратимо, и поэтому в силу теоремы 6.1 семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ и, значит, на $\mathbb{R}_+$. Свойство 2) следует из включения $\mathcal{L}_E \supset \mathcal{L}_{\text{Im } Q(0)}$ и обратимости оператора $\mathcal{L}_{\text{Im } Q(0)}$.

Докажем свойство 3). Пусть $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. Тогда существуют функции $x \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\tilde{x} \in D(\mathcal{L}_{\tilde{E}})$, где $\tilde{E} = \text{Im } Q(0)$, такие, что $\mathcal{L}_E x = \mathcal{L}_{\tilde{E}} \tilde{x} = f$. Следовательно, $x(t) - \tilde{x}(t) = U(t, 0)(x(0) - \tilde{x}(0))$, $t \geq 0$, есть функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, и поэтому $x(0) - \tilde{x}(0) \in \text{Im } P(0)$. Тогда

$$\tilde{x}(0) = \int_0^\infty G(0, s)f(s) ds = \int_0^\infty U(0, s)Q(s)f(s) ds \in E + \text{Im } P(0).$$

Обратно, пусть $\int_0^\infty U(0, \tau)Q(\tau)f(\tau) d\tau = \tilde{x}_0 \in E + \text{Im } P(0)$ для некоторой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда $\tilde{x}_0 = x_0 + y_0$, где $x_0 \in E$ и $y_0 \in \text{Im } P(0)$. Пусть $\tilde{x} = \mathcal{L}_{\tilde{E}}^{-1}f$, $y(t) = U(t, 0)y_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $x = \tilde{x} - y$. Поскольку $x(0) = x_0 =$

$\tilde{x}_0 - y_0 \in E$, то $x \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\mathcal{L}_E x = f$, т. е. $f \in \text{Im } \mathcal{L}_E$. Если $\text{Im } P + E$ – замкнутое подпространство в X , то из доказанного следует замкнутость подпространства $\text{Im } \mathcal{L}_E$.

Условие из свойства 3) выполнено при $E = \{0\}$ для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, представимой в виде

$$f(t) = f_\alpha(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [\alpha, \infty), \\ x(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(t, t + m\alpha) Q(t + m\alpha) x(t + m\alpha), & 0 \leq t < \alpha, \end{cases}$$

где x – некоторая функция из $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\alpha > 0$. Следовательно, $\mathcal{F}_\alpha \subset \text{Im } \mathcal{L}_0 \subset \text{Im } \mathcal{L}_E$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Если семейство U обладает свойством

$$\overline{\text{Im } U(k, k-1)} = \bar{X}, \quad k \geq 1,$$

то из леммы 8.8 следует свойство $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Поэтому для такого семейства $\mathcal{U}$ во всех утверждениях этого параграфа (теоремы 8.3, 8.4, лемма 8.15, следствие 8.10) не нужно требовать, чтобы $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$.

§ 9. Полугруппа отношений $\mathcal{T}_E$ и оператор $\mathcal{L}_E$

Пусть $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F})$ – отображение, определенное формулой (1.12), $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство функций. При доказательстве формулируемых здесь утверждений приходится учитывать несколько различающиеся подходы к определению полугруппы $\mathcal{T}_E$ на пространствах измеримых и непрерывных функций $C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$. При исследовании оператора $\mathcal{L}_E$ методами теории полугрупп отношений существуют проблемы, связанные с тем, что полугруппы отношений до сих пор не рассматривались. Здесь учитывается специфика полугруппы $\mathcal{T}_E$, что позволяет при определенных условиях свести ее изучение к изучению двух полугрупп операторов.

Далее используется определение 1.1 полугруппы отношений.

ЛЕММА 9.1. *Отображение $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F})$ является полугруппой отношений на однородном пространстве $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения произведения отношений следует, что для любых $t_1, t_2 > 0$ отношение $\mathcal{T}_E(t_1)\mathcal{T}_E(t_2)$ может быть представлено в виде

$$\mathcal{T}_E(t_1)\mathcal{T}_E(t_2) = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}: \right. \\ y(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s - t_1 - t_2)x(s - t_1 - t_2), & s \geq t_1 + t_2, \\ \mathcal{U}(s, 0)y_0(s), & t_1 \leq s < t_1 + t_2, \\ \mathcal{U}(s, 0)y_1(s), & 0 \leq s < t_1, \end{cases} \\ \left. \text{где } y_0 \in \mathcal{F}([t_1, t_1 + t_2], E), y_1 \in \mathcal{F}([0, t_1], E) \right\} = \mathcal{T}_E(t_1 + t_2).$$

Если $\mathcal{F} = C_{b,E}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство непрерывных функций, то участвующие в этих равенствах функции y_0, y_1 непрерывны и удовлетворяют условиям $y_0(t_1 + t_2) = x(0)$, $y_1(t_1) = y_0(t_1)$. Лемма доказана.

Несмотря на то, что в общем случае отсутствует определение генератора полугруппы отношений, тем не менее, оператор $\mathcal{L}_E$ обычно играет роль генератора полугруппы отношений $\mathcal{T}_E$. Подтверждением этого факта служит следующая теорема об отображении спектра для полугруппы $\mathcal{T}_E$ (см. также теорему 9.3).

ТЕОРЕМА 9.1. *Для любого $t > 0$ спектр $\sigma(\mathcal{T}_E(t))$ отношения $\mathcal{T}_E(t)$ и оператора $\mathcal{L}_E$ связаны равенством*

$$\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \setminus \{0\} = \exp(t\sigma(\mathcal{L}_E)) = \{\exp(\lambda t) : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_E)\}. \quad (9.1)$$

Спектр $\sigma(\mathcal{L}_E)$ оператора $\mathcal{L}_E$ допускает одно из следующих представлений:

- 1) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \mathbb{C}$;
- 2) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(\mathcal{U})\}$, если и только если $E = \{0\}$; при этом если $\chi_g(\mathcal{U}) = -\infty$, то $\sigma(\mathcal{L}_0) = \emptyset$;
- 3) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha_0\}$ для некоторого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, причем это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $E = X$ и семейство $\mathcal{U}$ состоит из непрерывно обратимых операторов $\mathcal{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$, удовлетворяющих оценкам (6.31); при этом $\sigma(\mathcal{L}_X) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда оценки вида (6.31) верны для любого $\gamma \in \mathbb{R}$;
- 4) $\sigma(\mathcal{L}_E) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 < \operatorname{Re} \lambda < \alpha_2\}$ для некоторых $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из равенств (1.9), с помощью которых определяется оператор $\mathcal{L}_E$, следуют равенства $V_{\mathbb{R}}(\lambda)\mathcal{L}_E V_{\mathbb{R}}(-\lambda) = \mathcal{L}_E - i\lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, причем $V_{\mathbb{R}}(-\lambda)D(\mathcal{L}_E) = D(\mathcal{L}_E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где представление $V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{F}$ определено формулой (3.2). Таким образом, оператор $\mathcal{L}_E$ подобен каждому из операторов $\mathcal{L}_E - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и, значит, его спектр инвариантен относительно сдвигов $\mathbb{C}$ вдоль $i\mathbb{R}$.

Из этого свойства спектра оператора $\mathcal{L}_E$, леммы 6.1, теорем 6.1, 6.3–6.7 следуют все утверждения данной теоремы. При этом существенно используется замечание 6.1, позволяющее свести вопрос об обратимости оператора $\mathcal{L}_E - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, к вопросу об обратимости оператора $\mathcal{L}_{E,\lambda}$, который строится по семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}_{\lambda}$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Будем говорить, что полугруппа отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{X})$ ($\mathcal{X}$ – банахово пространство) *гиперболична*, если существует разложение пространства $\mathcal{X}$ в прямую сумму $\mathcal{X} = \mathcal{X}_- \oplus \mathcal{X}_+$ замкнутых инвариантных относительно отношений $\mathcal{T}_E(t)$, $t \geq 0$, подпространств $\mathcal{X}_-$ и $\mathcal{X}_+$ таких, что сужения $\mathcal{T}_-(t) = \mathcal{T}_E(t) | \mathcal{X}_-$, $\mathcal{T}_+(t) = \mathcal{T}_E(t) | \mathcal{X}_+$, $t \geq 0$, порождают полугруппы $\mathcal{T}_-$, $\mathcal{T}_+$ со следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{T}_- : \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{X}_-$ – полугруппа операторов;
- 2) отношения $\mathcal{T}_+(t)$, $t \geq 0$, непрерывно обратимы;
- 3) полугруппы операторов $\mathcal{T}_-$, $\tilde{\mathcal{T}}_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{X}_+$, $\tilde{\mathcal{T}}_+(t) = (\mathcal{T}_+(t))^{-1}$, $t \geq 0$, допускают оценки вида

$$\max\{\|\mathcal{T}_-(t)\|, \|\tilde{\mathcal{T}}_+(t)\|\} \leq M_0 e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad (9.2)$$

для некоторых постоянных $M_0 > 0$, $w < 0$.

Полученные разложения назовем *ассоциированными* с гиперболической полугруппой $\mathcal{T}_E$.

ТЕОРЕМА 9.2. *Полугруппа отношений $\mathcal{T}_E : \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ гиперболична тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих (эквивалентных) условий:*

- 1) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , для которой $\text{Im } Q(0) = E$;
- 2) $0 \in \rho(\mathcal{L}_E)$;
- 3) $1 \in \rho(\mathcal{T}_E(t))$ при некотором $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность формулируемых условий следует из теорем 1.6 и 6.7. Пусть полугруппа $\mathcal{T}_E$ гиперболична. Тогда однородное пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \oplus \mathcal{F}_+ \quad (9.3)$$

инвариантных относительно отношений $\mathcal{T}_E(t)$, $t > 0$, подпространств $\mathcal{F}_-$ и $\mathcal{F}_+$. Пусть

$$\mathcal{T}_E(t) = \mathcal{T}_-(t) \oplus \mathcal{T}_+(t), \quad t > 0, \quad (9.4)$$

– разложение полугруппы $\mathcal{T}_E$, отвечающее разложению (9.3) пространства $\mathcal{F}$. Из оценок (9.2) следует, что спектральные радиусы $r(\mathcal{T}_-(t))$, $r(\tilde{\mathcal{T}}_+(t))$, $\tilde{\mathcal{T}}_+(t) = (\mathcal{T}_+(t))^{-1}$, операторов $\mathcal{T}_-(t)$, $\tilde{\mathcal{T}}_+(t)$, $t > 0$, меньше единицы. Тогда имеем $\sigma(\mathcal{T}_-(t)) \cup \sigma(\tilde{\mathcal{T}}_+(t)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, а из теоремы 4.1 следует, что $\sigma(\mathcal{T}_+(t)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$, $t > 0$. Поскольку $\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \subset \sigma(\mathcal{T}_-(t)) \cup \sigma(\mathcal{T}_+(t))$, $t > 0$, то $\sigma(\mathcal{T}_E(t)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, и поэтому отношение $I - \mathcal{T}_E(t)$ непрерывно обратимо. Теперь из теоремы 6.7 получаем обратимость оператора $\mathcal{L}_E$.

Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , для которой $\text{Im } Q(0) = E$. Тогда однородное пространство $\mathcal{F}$ допускает разложение вида (9.3), где $\mathcal{F}_- = \text{Im } \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_+ = \text{Im}(I - \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ – оператор умножения в $\mathcal{F}$ на проекторнозначную функцию $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$. Ясно, что если $(x, y) \in \mathcal{T}_E(t)$, то $(\mathcal{P}x, \mathcal{P}y) \in \mathcal{T}_E(t)$ и, значит, оператор $\mathcal{P}$ перестановочен с отношениями $\mathcal{T}_E(t)$, $t \geq 0$. Полугруппа $\mathcal{T}_E$ допускает разложение вида (9.4), где

$$(\mathcal{T}_-(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t, \end{cases} \quad x \in \mathcal{F}_- = \text{Im } \mathcal{P}, \quad (9.5)$$

$$\mathcal{T}_+(t) = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F}_+ \times \mathcal{F}_+ : y(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ \mathcal{U}(s, 0)x_0(s), & 0 \leq s < t, \end{cases} \right. \\ \left. x_0 \in \mathcal{F}([0, t], E) \right\}, \quad t > 0. \quad (9.6)$$

Из определения 1.1 экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ (свойства 3)) следует, что отношения $\mathcal{T}_+(t)$, $t > 0$, непрерывно обратимы, причем

$$(\tilde{\mathcal{T}}_+(t))(s) = (\mathcal{T}_+(t)^{-1}y)(s) = \mathcal{U}(s, s+t)y(s+t), \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathcal{F}_+. \quad (9.7)$$

При этом из свойства 4) определения 1.1 следуют оценки вида (9.2), где $w = -\gamma$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Если выполнено условие 1) теоремы 9.2, то полугруппа отношений $\mathcal{T}_E$ допускает представление (9.4) относительно (9.3), где полугруппы операторов $\mathcal{T}_-$ и $\mathcal{T}_+$ имеют вид (9.5) и (9.6) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Если $\rho(\mathcal{L}_E) \neq \emptyset$, то из теоремы 9.1 имеем $\rho(\mathcal{L}_E) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Пусть $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_E) \cap \mathbb{R}$. Тогда из теоремы 9.2 следует, что полугруппы $\mathcal{T}_{E, \lambda}(t) = e^{-\lambda t} \mathcal{T}_E(t)$ гиперболичны (в силу свойства обратимости оператора $\mathcal{L}_E - \lambda I$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Полугруппу отношений $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{X})$ назовем *гиперболической в точке α* из $\mathbb{R}$, если полугруппа $\mathcal{T}_\alpha(t) = e^{-i\alpha t} \mathcal{T}_E(t)$, $t \geq 0$, гиперболическа. Дополнение в $\mathbb{R}$ множества гиперболических точек называется *спектром Боля* полугруппы $\mathcal{T}_E$ (или семейства $\mathcal{U}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Пусть $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{X})$ – гиперболическая в некоторой точке $\alpha \in \mathbb{R}$ полугруппа отношений, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\alpha,-} \oplus \mathcal{X}_{\alpha,+}$, $\mathcal{T}_\alpha(t) = \mathcal{T}_{\alpha,-}(t) \oplus \mathcal{T}_{\alpha,+}(t)$, $t \geq 0$, – ассоциированные с гиперболической полугруппой $\mathcal{T}_\alpha$ разложения. Допустим, что полугруппы операторов $\mathcal{T}_{\alpha,-}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}_{\alpha,-}$, $\mathcal{T}_{\alpha,+}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{X}_{\alpha,+}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{\alpha,+}(t) = (\mathcal{F}_{\alpha,+}(t))^{-1}$, $t \geq 0$, – полугруппы класса C_0 и $A_{\alpha,-}: D(A_{\alpha,-}) \subset \mathcal{X}_{\alpha,-} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha,-}$, $A_{\alpha,+}: D(A_{\alpha,+}) \subset \mathcal{X}_{\alpha,+} \rightarrow \mathcal{X}_{\alpha,+}$ – их генераторы. Тогда оператор

$$A_\alpha = A_{\alpha,-} \oplus (-A_{\alpha,+}) + \alpha I: D(A_\alpha) = D(A_{\alpha,-}) \oplus D(A_{\alpha,+}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

назовем *генератором полугруппы отношений $\mathcal{F}$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Из замечания 9.1 и теоремы 9.2 следует, что гиперболичность в точке $\alpha \in \mathbb{R}$ полугруппы отношений $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ эквивалентно тому, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_\alpha(t, s) = e^{-\alpha(t-s)} \mathcal{U}(t, s)$, $s, t \in \Delta_+$, допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P_α, Q_α) , $\text{Im } Q_\alpha(0) = E$. Далее без ограничения общности можно считать $\alpha = 0$. Возникающие при этом ассоциированные разложения связаны с подпространствами $\mathcal{F}_- = \text{Im } \mathcal{P}$, $\mathcal{F}_+ = \text{Ker } \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – проектор умножения на функцию P , а соответствующие полугруппы $\mathcal{T}_- = \mathcal{T}_{E,-}$, $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T}_{E,+}$ определены равенствами (9.5) и (9.6). Пусть однородное пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ и операторы $S(t)$, $t \geq 0$, и $\tilde{S}(-t)$, $t \geq 0$, сильно непрерывны в $\mathcal{F}$. Такими пространствами являются, например, $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_{00}(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда полугруппы $\mathcal{T}_-$, $\mathcal{T}_+$ принадлежат классу C_0 и из статьи [20] (для полугруппы $\mathcal{T}_-$) и статьи [19, ч. I] (для полугруппы $\mathcal{T}_+$) следует, что генератором полугруппы $\mathcal{T}_-: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}_-$ является сужение $\mathcal{L}_E|_{\mathcal{F}_-}$ оператора $\mathcal{L}_E$ на $\mathcal{F}_-$, а генератором полугруппы $\mathcal{T}_+: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}_+$ – оператор $-\mathcal{L}_E|_{\mathcal{F}_+}$.

Из замечания 9.2 следует

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть однородное пространство функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обладает свойствами из замечания 9.2 и $\mathcal{T}_E: \mathbb{R}_+ \rightarrow LRC(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X))$ – группа отношений, гиперболическая в точке α . Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ – генератор этой полугруппы.

§ 10. Операторы с периодическими и постоянными коэффициентами.

Некоторые дополнительные результаты. Примеры

Рассмотрим периодического периода 1 семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$, т.е. $\mathcal{U}(t+1, s+1) = \mathcal{U}(t, s)$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию $0 \leq s \leq t < \infty$. В частности, периодическое семейство $\mathcal{U}$ отвечает дифференциальному уравнению (1.1) с периодической периода 1 функцией A . Если семейство $\mathcal{U}$ зависит только от разности аргументов, то оно представимо в виде

$$\mathcal{U}(t, s) = U(t - s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \quad (10.1)$$

где $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ – сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 (см. [21]), ее генератор обозначим через A_0 .

Для периодического семейства $\mathcal{U}$ отношение $\mathcal{D}_E \in LRC(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$ имеет вид

$$\mathcal{D}_E = \left\{ (x, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \times \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) : \right. \\ \left. y(n) = \begin{cases} x(n) - \mathcal{U}(1, 0)x(n-1), & n \geq 1, \\ x(0) + x_0, & n = 0, \end{cases} \quad x_0 \in E \right\},$$

где $\mathcal{U}(1, 0) = U(1)$, если семейство $\mathcal{U}$ имеет вид (10.1), т. е. отвечает дифференциальному оператору $\mathcal{L}_E = -d/dt + A_0$.

Следующая теорема позволяет заменить условие экспоненциальной дихотомии периодического семейства $\mathcal{U}$ условием

$$\sigma(\mathcal{U}(1, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \quad (10.2)$$

ТЕОРЕМА 10.1. *Для того чтобы периодическое периода 1 семейство $\mathcal{U}$ допускало экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) , и пусть $E = \text{Im } Q(0)$. Тогда имеют место разложения пространства X вида

$$X = X_n \oplus X^{(n)}, \quad X_n = \text{Im } P(n), \quad X^{(n)} = \text{Im } Q(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Используя равенства $\mathcal{U}(n, 0) = \mathcal{U}(1, 0)^n$, $n \geq 0$, из определения 1.4 экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ получаем

$$X_0 = \{x \in X: \|\mathcal{U}(1, 0)^n x\| \leq Mq^n \|x\|, \quad n \geq 0\}, \\ E = X^{(0)} \subset \{y \in X: \|\mathcal{U}(1, 0)^n y\| \geq Mq^{-n} \|y\|, \quad n \geq 0\},$$

где $M, q = \exp(-\gamma)$ – постоянные из определения 1.4. Отсюда следует, что подпространства X_0 и $X^{(0)}$ являются инвариантными для оператора $\mathcal{U}(1, 0)$, причем для спектрального радиуса его сужения U_0 на X_0 верна оценка $r(U_0) \leq q < 1$. Следовательно, операторы $\gamma I - \mathcal{U}(1, 0)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, являются корректными. Доказанная корректность оператора $\mathcal{U}(1, 0)$ на окружности $\mathbb{T}$ следует также из [20, лемма 6].

Теперь в силу свойства 1) леммы 7.1 для доказательства обратимости операторов $\gamma I - \mathcal{U}(1, 0)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, достаточно установить, что $\text{Ker}(\gamma I^* - \mathcal{U}(1, 0)^*) = \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Допустим, что $\mathcal{U}(1, 0)^* \xi_0 = \gamma_0 \xi_0$ для некоторых $\gamma_0 \in \mathbb{T}$ и $\xi_0 \in X^*$. Из экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ следует непрерывная обратимость отношения $\gamma_0 I - \mathcal{K}_E$ на любом однородном пространстве последовательностей, в частности на $\ell^1(\mathbb{Z}_+, X)$ (см. теорему 6.1). Поэтому из включения $\gamma_0 I - \mathcal{K}_E \subset \gamma_0 I - \mathcal{K}_X$ следует сюръективность отношения $\gamma_0 I - \mathcal{K}_X$. Значит (см. свойство 6) из теоремы 7.1), оператор $\gamma_0 I^* - \mathcal{K}_X^*$ является корректным на $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+, X^*)$. Поскольку последовательность $\xi(n) = \gamma_0^n \xi_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит $\text{Ker}(\gamma_0 I^* - \mathcal{K}_0^*)$, то $\xi_0 = 0$ в силу леммы 8.5. Итак, доказано, что все операторы $\gamma I - \mathcal{U}(1, 0)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, непрерывно обратимы, т. е. выполнено условие (10.2).

Пусть выполнено условие (10.2). Тогда семейство $\mathcal{U}(n, m) = \mathcal{U}(1, 0)^{n-m}$, $0 \leq m \leq n$, допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой (P, Q) , где $P(n) = P_{\text{int}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, P_{int} – проектор Рисса, построенный по множеству $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{U}(1, 0)): |\lambda| < 1\}$. Теорема доказана.

При выполнении условия (10.2) для оператора $\mathcal{U}(1, 0)$ подпространство $X_s = \text{Im } P_{\text{int}}$ называется *устойчивым*, а подпространство $X = \text{Ker } P_{\text{int}}$ – *неустойчивым*.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Доказанная теорема 10.1 позволяет переформулировать все утверждения данной статьи, в которых использовалось условие экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$, заменив его условием (10.2) для оператора $\mathcal{U}(1, 0)$ (для оператора $U(1)$, если семейство $\mathcal{U}$ имеет вид (10.1)).

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Непосредственно из определения 1.7 дефектного подпространства для $\mathcal{U}$ следует, что оно представимо в виде

$$\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{\xi \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) : \xi(0) = 0, \xi(n) = \mathcal{U}(1, 0)^* \xi(n+1), n \geq 0\}.$$

Тогда функция

$$f: \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \rightarrow X^*, \quad f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \xi(n+1) \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{D},$$

является голоморфной и имеют место равенства $(\mathcal{U}(1, 0)^* - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{D}$. Следовательно, если $\ell_{\text{def}}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*) \neq \{0\}$, то $\sigma(\mathcal{U}(1, 0)) = \sigma(\mathcal{U}(1, 0)^*) \supset \overline{\mathbb{D}}$, причем дискретный спектр оператора $\mathcal{U}(1, 0)^*$ заполняет $\mathbb{D}_r = \{\lambda \in \mathbb{D} : |\lambda| < r\}$ для $r < 1$, за исключением, быть может, конечного числа точек.

В связи с замечанием 10.1 отметим, например, следующий результат, вытекающий из теорем 8.4 и 10.1.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$ – периодическое семейство эволюционных операторов. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{L}_E$ – фредгольмов оператор и $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;
- 2) $\sigma(\mathcal{U}(1, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ и подпространства $E, \text{Im } P_{\text{int}}$, где P_{int} – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{U}(1, 0)) : |\lambda| < 1\}$ для оператора $\mathcal{U}(1, 0)$, образуют фредгольмову пару.

При выполнении одного из этих условий $\text{Ind } \mathcal{L}_E = \text{ind}(E, \text{Im } P_{\text{int}})$. Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$, то условие 2) эквивалентно условию фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует только установить, что условие $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ для фредгольмова оператора $\mathcal{L}_E$ (соответственно, отношения $\mathcal{D}_E$) влечет равенство $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Для этого воспользуемся замечанием 10.2, из которого для любой ненулевой последовательности $\xi \in \mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X^*)$ следует, что она удовлетворяет равенствам $\xi(0) = 0$, $\xi(n) = \mathcal{U}(1, 0)^* \xi(n+1)$, $n \geq 0$. Таким же равенствам будут удовлетворять последовательности $\xi_k = \tilde{S}(-k)\xi$, $k \geq 2$ (см. определение 2.3), т. е. $\xi_k \in \mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*)$, $k \geq 1$. Следовательно, $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \text{Ker } \mathcal{D}_E^*$ – бесконечномерное пространство, что противоречит условию фредгольмовости отношения $\mathcal{D}_E$. Таким образом, $\xi = 0$, т. е. $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Если оператор $\mathcal{L}_{E,c}$ фредгольмов, то фредгольмов оператор $\mathcal{L}_E$ и их индексы совпадают.

Непосредственно из теоремы 8.3 и леммы 8.13 следует

ТЕОРЕМА 10.3. Семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}_0$ в одном из однородных пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обладает следующими свойствами:

- 1) оператор $\mathcal{L}_0$ корректен;

2) $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+, X^*) = \{0\}$;

3) *подпространство $X^*(0) = \{\xi(0) : \xi \in \text{Ker } \mathcal{D}_{0,c}^*\}$ замкнуто и существует насыщенное подпространство F_s из X^* такое, что $X^* = X^*(0) \oplus F_s$.*

ТЕОРЕМА 10.4. *Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$ с расщепляющей парой (P, Q) . Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\overline{\text{Im } \mathcal{L}_E} = \text{Im } \mathcal{L}_E$;

2) $\overline{\text{Im } P(0) + E} = \text{Im } P(0) + E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий непосредственно следует из леммы 8.14 и теоремы 1.5 (см. свойство 3)).

Использованию сопряженного оператора $\mathcal{L}_E^*$ мешает несколько обстоятельств. Во-первых, это описание сопряженных пространств к однородным пространствам функций (см. [42, гл. 8] для пространств $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$). Кроме того, при определении $\mathcal{L}_E^*$ используется сопряженное семейство $\mathcal{U}^*: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X^*$, $\mathcal{U}^*(t, s) = \mathcal{U}(t, s)^*$, $(t, s) \in \Delta_+$, эволюционных операторов, которое может не быть сильно непрерывным для нереклексивного пространства X . Однако если оно сильно непрерывно, то $\mathcal{U}^*$ является семейством эволюционных операторов “назад” и с его помощью естественным образом определяется оператор $\mathcal{L}'_{E,c} : \mathcal{D}_E(\mathcal{L}'_E) \subset \mathcal{F}'_c \rightarrow \mathcal{F}'_c = \mathcal{F}'_c(\mathbb{R}_+, X^*)$ (см. [19]), который является сопряженным к оператору $\mathcal{L}_{E,c}$ для рефлексивного X . Для операторов $\mathcal{L}'_{E,c}$ и $\mathcal{D}_{E,c}^*$ верны аналоги соответствующих результатов из § 5, и на их основе доказан следующий аналог теоремы 8.2.

ТЕОРЕМА 10.5. *Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ и семейство $\mathcal{U}^*: \Delta_+ \rightarrow \text{End } X^*$ сильно непрерывно. Если оператор $\mathcal{L}_E$ корректен (инъективен) и оператор $\mathcal{L}'_E$ инъективен (соответственно, корректен), то операторы $\mathcal{L}_E$, $\mathcal{L}'_E$ непрерывно обратимы в любом однородном пространстве функций.*

Рассмотрим несколько примеров операторов, к которым применимы полученные результаты.

ПРИМЕР 10.1. Пусть функция $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ принадлежит пространству Степанова $S^1(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$. Тогда (см. [3]) существует семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} : \Delta_+ \rightarrow \text{End } X$, которое решает задачу Коши (1.1), (1.4). Следовательно, для любого однородного пространства функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ определен оператор $\mathcal{L}_E$. Если $A \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – однородное пространство измеримых функций, то $D(\mathcal{L}_E) = \mathcal{F}^1(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) : x \text{ абсолютно непрерывна и } x' \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)\}$. Это же равенство задает область определения оператора $\mathcal{L}_E$, если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и $A \in C_b(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$.

ПРИМЕР 10.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1), где $X = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ и Ω – ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$. Семейство линейных дифференциальных операторов

$$A(t) : H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad t \geq 0$$

(где $H_0^m(\Omega)$, $H^{2m}(\Omega)$ – пространства Соболева, $m \geq 1$ [5]), определено с помощью семейства дифференциальных выражений

$$(\ell_t y)(n) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, u)(D^\alpha y)(u), \quad t \geq 0,$$

и задачей Дирихле на границе $\partial\Omega$ области Ω . Функции $a_\alpha: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, где $|\alpha| \leq 2m$, принадлежат пространству $C_b(\mathbb{R}_+, C^k(\Omega))$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и удовлетворяют условию Липшица как функции первой переменной. Более того, предположим, что семейство дифференциальных выражений ℓ_t , $t \geq 0$, равномерно эллиплично.

Из сделанных предположений следует, что эллиптические операторы $A(t)$, $t \geq 0$, являются генераторами аналитических полугрупп операторов, более того, выполнены условия теоремы Соболевского–Танабе, из которой следует, что рассматриваемая задача Коши на $\mathbb{R}_+$ корректно определена и существует семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow \text{End } L_2(\Omega)$, позволяющее решить рассматриваемую задачу Коши. Поэтому определен оператор $\mathcal{L}_E = -d/dt + A(t)$ в любом из однородных пространств функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, следовательно, к нему применимы полученные здесь результаты.

ПРИМЕР 10.3 (системы дифференциальных уравнений, корректные по Петровскому). Пусть $p(\xi) = (p_{kj})_{k,j=1}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, – матрица, элементами которой служат полиномы $p_{kj}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $p_{kj}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq N_{kj}} a_{\alpha} \xi^\alpha$. Здесь $\alpha \in \mathbb{N}_+^n$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, они зависят от k и j . В гильбертовом пространстве оператор $A = p(i\partial)$, $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$, $i^2 = -1$, определяется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}$ формулой $A = \mathcal{F}^{-1}p(\cdot)\mathcal{F}$, он является оператором с матричными коэффициентами, имеющим символ p . Говорят, что A *корректен по Петровскому*, если для некоторого $\omega \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(p(\xi))$ матрицы $p(\xi)$ удовлетворяет включению $\sigma(p(\xi)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Re } \lambda \leq \omega\}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае A порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } L_2(\mathbb{R}^n)$ и имеет область определения $D(A)$, совпадающую с пространством Соболева $W_2^N(\mathbb{R}^n)$ порядка N . Эта полугруппа гиперболична (оператор $T(1)$ обладает свойством $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$), если множества $\sigma(p(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, равномерно отделены от $i\mathbb{R}$. Тогда семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t-s)$, $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$. В этом случае устойчивые и неустойчивые подпространства бесконечномерны, если они ненулевые.

ПРИМЕР 10.4. Как уже отмечалось в § 1, изучение спектральных свойств дифференциального оператора $\mathcal{L}_E$ связано с изучением оператора Винера–Хопфа. Пусть $S: L^p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, X) = L^p$ – оператор Винера–Хопфа,

$$(Sx)(t) = x(t) - \int_0^\infty \mathcal{K}(t-s)x(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in L^p,$$

ядро которого $\mathcal{K}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ суммируемо и имеет символ W вида

$$W(\lambda) = I - \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \mathcal{K}(t) dt = I - NR(\lambda, A)M, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (10.3)$$

где $iA: D(A) \subset Y \rightarrow Y$ (здесь Y – вспомогательное банахово пространство) – генератор полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } Y$ класса C_0 , для которой выполнено условие $\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (и, следовательно, $\sigma(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.) Линейные операторы $M: X \rightarrow Y$, $N: Y \rightarrow X$ являются ограниченными. В частности, при $X = \mathbb{C}^m$ в работе [22, разд. XIII.4] доказано, что если символ W является рациональной функцией, то такое представление возможно для некоторых операторов $A \in \text{End } \mathbb{C}^n$, $M: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, $N: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ и некоторого $n \in \mathbb{N}$. Выбор подходящего банахова пространства X позволяет любую функцию $W = I - \hat{\mathcal{K}}$, голоморфную в области $\mathbb{C}_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\text{Im } \lambda| < \alpha\}$, представить в виде (10.3)

при $Y = \mathbb{C}$. Нетрудно установить (см. [22, лемма 18.5.1] для $X = \mathbb{C}^n$), что оператор S представим в виде $S = I + i\tilde{N}\tilde{\mathcal{L}}_E^{-1}\tilde{M}$, где $\tilde{M}: L^p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, Y)$, $\tilde{N}: L^p(\mathbb{R}_+, Y) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, X)$ – операторы умножения на операторы M и N соответственно,

$$\mathcal{L}_E = -\frac{d}{dt} + iA: D(\mathcal{L}_E) \subset L^p(\mathbb{R}_+, Y) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, Y), \quad E = \text{Im } P_{\text{out}},$$

где P_{out} – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)): |\lambda| > 1\}$ для оператора $T(1)$. Это представление позволяет установить, что имеет место (см. [22, теорема 18.5.3] для $X = \mathbb{C}^n$) следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10.6. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_E = \mathcal{L}_E - MN = -d/dt + A - MN: D(\mathcal{L}_E) \subset L^p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$. Тогда

$$\text{Ker } S = N(\text{Ker } \tilde{\mathcal{L}}_E), \quad \text{Im } S = M^{-1}(\text{Im } \tilde{\mathcal{L}}_E)$$

и оператор S фредгольмов, если и только если фредгольмов оператор $\tilde{\mathcal{L}}_E$, при этом их индексы совпадают. В частности, S обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\tilde{\mathcal{L}}_E$, и в этом случае $S^{-1} = I - i\tilde{N}\tilde{\mathcal{L}}_E^{-1}\tilde{M}$.

Возникает естественный вопрос: влечет ли свойство фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_E$ (отношения $\mathcal{D}_E$) для $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ свойство экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$. Отрицательный ответ на этот вопрос дает

ПРИМЕР 10.5. Пусть $A_0: \mathcal{D}_E(A_0) \subset X \rightarrow X$ – генератор полугруппы операторов $T_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ класса C_0 , для которой $T_0(1)$ – фредгольмов оператор, причем $\text{Ker } T_0(1)^* \neq \{0\}$. Рассмотрим функцию $A(t) = A_0$, $t \in [0, 1)$, $A(t) = (\ln 2)I$, $t \in [1, \infty)$, и дифференциальный оператор $\mathcal{L}_X = -d/dt + A(t)$ в одном из однородных пространств функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ со свойством $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$. Тогда $\mathcal{U}(1, 0) = T_0(1)$, $\mathcal{U}(n, n-1) = 2I$, $n \geq 2$, и соответствующее разностное отношение $\mathcal{D}_X \in LRC\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X &= \{(x, y) \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X): \\ &y(n) = x(n) - 2x(n-1), \quad n \geq 2, \quad y(1) = x(1) - T_0(1)x(0)\}. \end{aligned}$$

Семейство $\mathcal{U}$ допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{N}$ при $P = 0$ и $Q = I$, и поэтому имеют место представления

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{D}_X &= \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X): x(0) \in \text{Ker } T_0(1), x(k) = 0, \quad k \geq 1\}, \\ \text{Im } \mathcal{D}_X &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X): f(1) \in \text{Im } T_0(1)\} = \overline{\text{Im } \mathcal{D}_X}, \\ \ell_{\text{def}}^\infty(\mathbb{Z}_+, X) &= \text{Ker } \mathcal{D}_X^* = \{\xi \in \mathcal{F}'(\mathbb{Z}_+, X): \xi(0) = 0, \\ &\xi(1) \in \text{Ker } T_0(1)^*, \quad \xi(n) = 2^{-n+1}\xi(1), \quad n \geq 2\} \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{D}_X$ – фредгольмово отношение, а из леммы 8.7 следует, что семейство $\mathcal{U}$ не допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$.

Кроме отмеченных примеров 10.1–10.4, свойство фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_X$ (и его индекса) естественным образом возникает в бесконечномерной

теории Морса (см. [43] и приведенный в этой работе список литературы) при изучении линеаризованного уравнения бегущих волн [44].

Проверка условий большинства приведенных утверждений существенно упрощается в случае асимптотически постоянных коэффициентов, т. е. при условии существования предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{U}(t, t-1) = B_+ \in \text{End } X \quad (10.4)$$

в равномерной операторной топологии. Следующий результат существенно ориентирован именно на этот случай. Это утверждение следует из теоремы 8.4, если учесть, что $\mathcal{F}_{\text{def}}(\mathbb{Z}_+ \setminus \{0, 1, \dots, m\}, X^*) = \{0\}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 10.7. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) оператор $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ фредгольмов;
- 2) существует число $b \in \mathbb{R}$ такое, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $[b, \infty)$ с такой расщепляющей парой проекторнозначных функций $P_+, Q_+: [b, \infty) \rightarrow \text{End } X$, что оператор

$$N_b: E \rightarrow \text{Im } Q_+(b), \quad N_b x = Q_+(b) \mathcal{U}(b, 0)x, \quad x \in E, \quad (10.5)$$

является фредгольмовым.

СЛЕДСТВИЕ 10.2. *Пусть для семейства $\mathcal{U}$ выполнено условие (10.4). Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ фредгольмов, если и только если выполнены условия:*

- 1) $\sigma(B_+) \cap \mathbb{T} = \emptyset$;
- 2) существует $b \geq 0$ такое, что оператор N_b вида (10.5), где $Q_+(b)$ – проектор Рисса, построенный по множеству $\{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \sigma(B_+), |\lambda| > 1\}$, фредгольмов.

Многие полученные здесь результаты существенно используются для нахождения условий фредгольмовости (определенного в § 1) оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 10.8. *Оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда существуют числа $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$, такие, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ с такими расщепляющими парами $P_-, Q_-: (-\infty, a] \rightarrow \text{End } X$, $P_+, Q_+: [b, \infty) \rightarrow \text{End } X$, что узловой оператор*

$$N_{a,b}: \text{Im } Q_-(a) \rightarrow \text{Im } Q_+(b), \quad N_{a,b} x = Q_+(b) \mathcal{U}(b, a)x, \quad x \in \text{Im } Q_-(a),$$

является фредгольмовым. Если $\mathcal{L}$ фредгольмов, то $\text{ind } \mathcal{L} = \text{ind } N_{a,b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия теоремы была установлена в статьях [45], [46]; там же возникло понятие узлового оператора.

Необходимость условий существенно использует фредгольмовость оператора $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ для подходящего замкнутого подпространства E , что ведет к экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ на промежутке $[b, \infty)$, $b \geq 0$. Аналогичная теория строится для операторов в $\mathcal{F}(\mathbb{R}_-, X)$ с последующим применением к доказательству наличия экспоненциальной дихотомии на промежутке $(-\infty, a]$ для некоторого $a \leq b$.

Список литературы

1. O. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **32**:3 (1930), 465–473.
2. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: J. L. Massera, J. J. Schäffer, *Linear differential equations and function spaces*, Academic Press, New York–London, 1966.
3. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Dalec’kii, M. G. Krein., *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
4. В. В. Жиков, “Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1380–1408; англ. пер.: V. V. Žikov, “Some admissibility and dichotomy questions. The averaging principle”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:6 (1976), 1307–1332.
5. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
6. J. S. Howland, “Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians”, *Math. Ann.*, **207**:4 (1974), 315–335.
7. R. T. Rau, “Hyperbolic evolution semigroups on vector valued function spaces”, *Semigroup Forum*, **48**:1 (1994), 107–118.
8. Yu. Latushkin, S. Montgomery-Smith, “Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces”, *J. Funct. Anal.*, **127**:1 (1995), 173–197.
9. Yu. Latushkin, T. Randolph, R. Schnaubelt, “Exponential dichotomy and mild solutions of nonautonomous equations in Banach spaces”, *J. Dynam. Differential Equations*, **10**:3 (1998), 489–510.
10. R. Nagel, “Semigroup methods for nonautonomous Cauchy problems”, *Evolution equations* (Baton Rouge, LA, 1992), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **168**, Dekker, New York, 1995, 301–316.
11. В. М. Тюрин, “Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:3 (1991), 160–165; англ. пер.: V. M. Tyurin, “Invertibility of linear differential operators in certain functional spaces”, *Siberian Math. J.*, **32**:3 (1991), 485–490.
12. F. Răbiger, R. Schnaubelt, “The spectral mapping theorem for evolution semigroups on spaces of vector-valued functions”, *Semigroup Forum*, **52**:1 (1996), 225–239.
13. Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2 (1991), 85–143; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stëpin, “Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems”, *Russian Math. Surveys*, **46**:2 (1991), 95–165.
14. N. Van Minh, F. Răbiger, R. Schnaubelt, “Exponential stability, exponential expansiveness, and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line”, *Integral Equations Operator Theory*, **32**:3 (1998), 332–353.
15. C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
16. А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов”, *Докл. РАН*, **343**:3 (1995), 295–298; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of linear differential operators and semigroups of difference operators”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **52**:1 (1995), 30–32.
17. А. Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996),

- 1–11; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:3 (1996), 149–157.
18. А. Г. Баскаков, “Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 811–820; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators”, *Math. Notes*, **59**:6 (1996), 586–593.
19. А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов. I”, *Дифференц. уравнения*, **33**:10 (1997), 1299–1306; II, **37**:1 (2001), 3–11; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of linear differential operators, and semigroups of difference operators. I”, *Differential Equations*, **33**:10 (1997), 1305–1312; II, **37**:1 (2001), 1–10.
20. А. Г. Баскаков, “О корректности линейных дифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 3–28; англ. пер.: A. G. Baskakov, “On correct linear differential operators”, *Sb. Math.*, **190**:3 (1999), 323–348.
21. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.
22. I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators*, vol. I, Oper. Theory Adv. Appl., **49**, Birkhäuser, Basel, 1990.
23. N. Van Minh, N. Th. Huy, “Characterizations of dichotomies of evolution equations on the half-line”, *J. Math. Anal. Appl.*, **261**:1 (2001), 28–44.
24. Yu. Latushkin, Yu. Tomilov, “Fredholm properties of evolution semigroups”, *Illinois J. Math.*, **48**:3 (2004), 999–1020.
25. С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
26. А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, “Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1231–1243; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. I. Pastukhov, “Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42**:6 (2001), 1026–1035.
27. А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, “Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 3–54; англ. пер.: A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, “Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 439–486.
28. А. Г. Баскаков, *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов*, СМФН, **9**, МАИ, М., 2004; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:4 (2006), 4885–5036.
29. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, “Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
30. R. Cross, *Multivalued linear operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Dekker, New York, 1998.
31. A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **215**, Dekker, New York, 1998.
32. С. С. Кутателадзе, *Основы функционального анализа*, 4-е изд., Изд-во ин-та матем. СО РАН, Новосибирск, 2001; англ. пер. 2-го изд.: S. S. Kutateladze, *Fundamentals of functional analysis*, Kluwer Texts Math. Sci., **12**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

33. M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu, “Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **9**:2 (2003), 383–397.
34. Yu. Latushkin, Yu. Tomilov, “Fredholm differential operators with unbounded coefficients”, *J. Differential Equations*, **208**:2 (2005), 388–429.
35. A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*, Wiley, New York; Chapman and Hall, London, 1958.
36. S. Goldberg, *Unbounded linear operators. Theory and applications*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
37. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
38. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
39. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
40. З. Пресдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений*, Мир, М., 1979; пер. с нем.: S. Prössdorf, *Einige Klassen singularer Gleichungen*, Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1974.
41. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
42. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965.
43. A. Abbondandolo, *Morse theory for Hamiltonian systems*, Chapman Hall/CRC Res. Notes Math., **425**, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2001.
44. B. Sandstede, “Stability of travelling waves”, *Handbook of dynamical systems*, vol. 2, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2002, 983–1055.
45. А. Г. Баскаков, “Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов”, *Матем. заметки*, **67**:6 (2000), 816–827; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Invertibility and the Fredholm property of difference operators”, *Math. Notes*, **67**:6 (2000), 690–698.
46. А. Г. Баскаков, “Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов”, *Докл. РАН*, **383**:5 (2002), 583–585; англ. пер.: A. G. Baskakov, “On invertibility and the Fredholm property of parabolic differential operators”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **65**:2 (2002), 245–247.

А. Г. БАСКАКОВ (A. G. BASKAKOV)
 Воронежский государственный университет
 E-mail: mmio@amm.vsu.ru

Поступило в редакцию
 28.03.2007
 21.11.2007