Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Астахова, Равномерные оценки положительных решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 85–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:41:46

УДК 517.925.54

И. В. Астахова

Равномерные оценки положительных решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Для квазилинейного дифференциального уравнения высокого порядка получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов уравнения и не зависящие от самих коэффициентов.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x)y^{(i)} + p(x)|y|^{k-1}y = 0, \quad (0.1)$$

где $p(x)$ и $q_i(x)$ – непрерывные функции, $n \geq 1$, $k > 1$ и $|p(x)| \geq p_* > 0$, а также его частные случаи

$$y^{[n]} + |y|^{k-1}y = 0, \quad (0.2)$$

$$y^{[n]} - |y|^{k-1}y = 0, \quad (0.3)$$

где верхний индекс в квадратных скобках $[j]$ обозначает оператор j -й квази-производной:

$$y^{[j]}(x) = r_j(x) \frac{d}{dx} \left(\dots \frac{d}{dx} \left(r_1(x) \frac{d}{dx} \left(r_0(x)y \right) \right) \dots \right)$$

с достаточно гладкими положительными функциями $r_j(x)$.

Получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов уравнения и не зависящие от самих коэффициентов.

§ 1. Краткий обзор существующих результатов

Задачи о равномерных оценках решений, имеющих общую область определения, так же, как и задачи об описании асимптотического поведения решений данного уравнения, представляют интерес в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Асимптотическое поведение решений уравнения (0.1) при $q_i(x) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, а также вопросы продолжаемости

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-2538.2006.1).

и непродолжаемости, колеблемости и неколеблемости решений данного уравнения, оценки его продолжаемых и непродолжаемых решений исследовались многими авторами. Результаты, полученные до 1990 г., и подробная библиография содержатся в монографии [1]. В этой работе описано также асимптотическое поведение всех возможных решений уравнения (0.1) при $n = 2$, а в [2] – при $n = 3, 4$. В работах [3], [4] содержатся результаты о качественных свойствах решений уравнений более высокого порядка. В [5] при $q_i(x) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, приводятся оценки решений уравнения (0.1), обладающих некоторыми общими свойствами, например решений, имеющих вертикальную асимптоту. В работе [6] получены интегральные оценки решений полулинейных эллиптических уравнений. В [7] приводятся равномерные оценки положительных решений уравнения (0.1) при $q_i(x) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$. В [8] получены равномерные оценки модуля решений этого уравнения при $n = 2$ с комплекснозначным потенциалом $p(x)$, действительная часть которого меньше некоторой отрицательной константы. В работах [9]–[11] представлены некоторые достаточные условия приведения линейного дифференциального оператора к оператору квазипроизводной, используемому в настоящей работе. При этом здесь потребовалось доказать существование оператора квазипроизводной, коэффициенты которого на отрезке имеют соответствующие оценки. В [12] приведены, а в [13] доказаны равномерные оценки положительных решений квазилинейных уравнений (0.1) четного порядка с положительным потенциалом $p(x)$. В монографии [14] получены, в частности, условия отсутствия глобальных решений дифференциального неравенства $y^{(n)} \geq q_0|y|^k$, $k > 1$, $q_0 = \text{const}$. В [15] аналогичный результат доказан для неравенства $y^{(n)} \geq q_1(t)|y|^{k_1} + q_2(t)|y|^{k_2} + \dots + q_m(t)|y|^{k_m}$. В [16] получены априорные оценки уравнения (0.1) при $q_i(x) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, с нелинейностью более общего вида. В [17] приводятся формулировки основных результатов предлагаемой работы. Отметим, что в настоящей работе теоремы 3.3 и 3.4 будут доказаны в более сильной форме.

§ 2. Обозначения

Будем использовать следующие обозначения:

$$m_i^j = \prod_{l=i}^j \inf\{r_l(x) : x \in [a, b]\}, \quad M_i^j = \prod_{l=i}^j \sup\{r_l(x) : x \in [a, b]\},$$

$$\mu_i^j = \frac{M_i^j}{m_i^j}.$$

Таким образом, $0 < m_i^j \leq M_i^j$, $\mu_i^j \geq 1$. Для заданного на отрезке $[a, b]$ линейного дифференциального оператора

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x) \frac{d^j}{dx^j} \quad (2.1)$$

положим

$$Q_L = \sup \left\{ |q_j(x)| \left(\frac{b-a}{2} \right)^{\deg L - j} : x \in [a, b], 0 \leq j < \deg L \right\}.$$

Будем также использовать обозначение $Y_{nk} = 2^{n+1 + \frac{2n}{k-1}}$.

§ 3. Основные результаты

3.1. Оценки решений уравнений (0.2) и (0.3). Доказывается существование равномерных оценок положительных решений с общей областью определения уравнений с квазипроизводными.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $y(x)$ – заданное на отрезке $[a, b]$ положительное решение уравнения (0.2) или (0.3). Тогда для всех $x \in (a, b)$ справедлива оценка

$$y(x) \leq C_1 \delta_1^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_1 = (Y_{nk}^n M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \mu_0^i,$$

$$\delta_1 = \min \left\{ x - a, b - x, \frac{b - a}{3} \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть функции $r_j(x)$, $j = 0, \dots, n$, определены на всей прямой и удовлетворяют на ней неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < m_* < r_j(x), & \quad j = 0, \dots, n-1, \\ r_j(x) < M_* < +\infty, & \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда не существует заданных на всей прямой отличных от нуля знакопостоянных решений уравнений (0.2) и (0.3).

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения (0.2) справедлива оценка

$$y(x) \leq C_2 (x - a)^{-\frac{n}{k-1}}, \quad x \in (a, b],$$

где

$$C_2 = (3^n Y_{nk}^n M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \mu_0^i \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{(n+1)i} \mu_0^i}{i!}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения (0.3) с нечетным n справедлива оценка

$$y(x) \leq C_2 (b - x)^{-\frac{n}{k-1}}, \quad x \in [a, b),$$

где константа C_2 та же, что и в теореме 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения (0.2) с четным n справедлива оценка

$$y(x) \leq 2^{\frac{n}{k-1}} C_2 (b - a)^{-\frac{n}{k-1}} \quad \text{для всех } x \in [a, b],$$

где константа C_2 та же, что и в теореме 3.2.

ПРИМЕР 3.1. Заметим, что при нечетных n равномерная оценка общей константой для положительных решений уравнения (0.2), вообще говоря, невозможна. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда заданные на отрезке $[0, 1]$ функции

$$y_\varepsilon(x) = (x + \varepsilon)^{-\frac{n}{k-1}}$$

являются при нечетном n положительными решениями уравнения

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(j + \frac{n}{k-1} \right)^{-1} y^{(n)} + |y|^{k-1} y = 0.$$

При этом $y_\varepsilon(0) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть функции $r_j(x)$, $j = 0, \dots, n$, определены на неограниченном слева интервале и удовлетворяют на нем неравенствам (3.1). Тогда на этом интервале не существует отличных от нуля знакопостоянных решений уравнения (0.2).

ПРИМЕР 3.2. Заметим, что второе из условий (3.1) является существенным. Уравнение

$$\frac{|x|^{n+1-k}|x+1|^k}{n!} y^{(n)} + |y|^{k-1} y = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (0.2), не удовлетворяющим условию (3.1), допускает положительное решение $y(x) = 1 + 1/x$, определенное на неограниченном слева интервале $(-\infty, -1)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть функции $r_j(x)$, $j = 0, \dots, n$, удовлетворяют неравенствам (3.1) на неограниченном справа интервале. Тогда на этом интервале не существует отличных от нуля знакопостоянных решений уравнения (0.2) с четным n и уравнения (0.3) с нечетным n .

ПРИМЕР 3.3. Заметим, что вместе с тем на неограниченном справа интервале могут существовать отличные от нуля знакопостоянные решения уравнения (0.2) с нечетным и уравнения (0.3) с четным n . Так, уравнение

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(j + \frac{n}{k-1} \right)^{-1} y^{(n)} + (-1)^{n+1} |y|^{k-1} y = 0$$

имеет определенное на неограниченном справа интервале $(0, \infty)$ положительное решение $y(x) = x^{-\frac{n}{k-1}}$.

3.2. Оценки решений уравнения (0.1). Доказывается существование равномерных оценок положительных решений с общей областью определения уравнения (0.1).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $y(x)$ – заданное на отрезке $[a, b]$ положительное решение уравнения (0.1), в котором

$$|p(x)| \geq p_*, \quad |q_j(x)| \leq Q^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

при некоторых $p_* > 0$ и $Q > 0$. Тогда для всех $x \in (a, b)$ справедлива оценка

$$y(x) \leq C_3 \delta_3^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_3 = \left(\frac{Y_{nk}^n}{p_*} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i^2+i+2+\frac{2(ni+1)}{k-1}},$$

$$\delta_3 = \min \left\{ x - a, b - x, \frac{b-a}{3}, \frac{2^{-n^2-n+1}}{3Q} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $y(x)$ – заданное на отрезке $[a, b]$ положительное решение уравнения (0.1), в котором

$$p(x) \geq p_*, \quad |q_j(x)| \leq Q^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

при некоторых $p_* > 0$ и $Q > 0$. Тогда для всех $x \in (a, b]$ справедлива оценка

$$y(x) \leq C_4 \delta_4^{-\frac{n}{k-1}},$$

где

$$C_4 = 16 \left(\frac{4(3Y_{nk})^n}{p_*} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{(n+1)i}}{i!},$$

$$\delta_4 = \min \left\{ x - a, \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q} \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения (0.1) с нечетным n при $p(x) \leq -p_* < 0$ и

$$|q_j(x)| \leq Q^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

справедлива оценка

$$y(x) \leq C_4 \delta_5^{-\frac{n}{k-1}}, \quad x \in [a, b],$$

где

$$\delta_5 = \min \left\{ b - x, \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q} \right\},$$

а константа C_4 та же, что и в теореме 3.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Для любого заданного на отрезке $[a, b]$ положительного решения $y(x)$ уравнения (0.1) с четным n при $p(x) \geq p_* > 0$ и

$$|q_j(x)| \leq Q^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

справедлива оценка

$$y(x) \leq C_5, \quad x \in [a, b],$$

где

$$C_5 = C_4 \min \left\{ b - a, \frac{2^{-n^2-n+1}}{Q} \right\}^{-\frac{n}{k-1}},$$

а константа C_4 та же, что и в теореме 3.4.

ПРИМЕР 3.4. Поскольку оценки в теоремах 3.3 и 3.4 используют ограниченные сверху δ_3 и δ_4 , получить для уравнения (0.1) следствия, аналогичные следствиям 3.1, 3.4 и 3.5 для уравнений (0.2) и (0.3), нельзя. Наоборот, можно привести примеры уравнений типа (0.1) произвольного порядка со сколь угодно малыми $q_j(x)$, имеющих положительные решения с неограниченной областью определения. Так, уравнения $y^{(n)} - \varepsilon^2 y + y^3 = 0$ и $y^{(n)} + \varepsilon^2 y - y^3 = 0$ имеют определенное на всей числовой прямой положительное решение $y(x) = \varepsilon$.

§ 4. Используемые вспомогательные утверждения

Приведем несколько вспомогательных лемм, которые используются для доказательства основных результатов.

ЛЕММА 4.1. Пусть на отрезке длиной $\Delta > 0$ выполняется неравенство $|y(x)| \leq A$ и существуют квазипроизводные $y^{[j]}$, $j = 0, \dots, n-1$. Тогда на этом отрезке существуют такие точки $\xi_0 \geq \xi_1 \geq \dots \geq \xi_{n-1}$, что

$$|y^{[j]}(\xi_j)| \leq AM_0^j \left(\frac{2^n}{\Delta} \right)^j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ это утверждение очевидно, поэтому далее будем считать, что $n > 1$. Пусть $\delta = \Delta/(2^n - 2)$. Индукцией по $j = 0, \dots, n-1$ докажем, что на любом подотрезке исходного отрезка длиной $2\delta(2^j - 1)$ найдется точка ξ , в которой выполняется неравенство

$$|y^{[j]}(\xi)| \leq AM_0^j \delta^{-j}. \quad (4.1)$$

Случай $j = 0$ тривиален: так как на всем отрезке выполняется неравенство $|y(x)| \leq A$, то в любой его точке ξ (на любом подотрезке длиной 0) имеем $|y^{[0]}(\xi)| \leq AM_0^0$.

Пусть для некоторого $j < n-1$ утверждение уже доказано. Докажем его для $j+1 \leq n-1$. Подотрезок длиной $2\delta(2^{j+1} - 1)$ можно разбить на три подотрезка длиной соответственно $2\delta(2^j - 1)$, 2δ , $2\delta(2^j - 1)$. На первом и третьем подотрезках найдем по одной точке, в которой выполняется (4.1). Расстояние между этими точками не меньше длины второго подотрезка, т. е. 2δ , а разность j -х квазипроизводных в них по модулю не больше удвоенной правой части неравенства (4.1). Поэтому по теореме Лагранжа между ними найдется точка ξ , в которой

$$|y^{[j+1]}(\xi)| = |r_{j+1}(\xi)(y^{[j]})'(\xi)| \leq \sup\{r_{j+1}(x)\} \frac{2AM_0^j \delta^{-j}}{2\delta} = AM_0^{j+1} \delta^{-(j+1)}.$$

Заметим, что при $j = n-1$ подотрезок, фигурирующий в утверждении, имеет самую большую длину, равную Δ . Итак, на исходном отрезке существует последовательность точек ξ_j , $j = 1, \dots, n-1$, для которых выполняется (4.1). При этом каждый раз $(j+1)$ -ю точку последовательности мы выбирали между двумя точками, каждую из которых можно взять в качестве j -го члена этой последовательности. Поэтому, двигаясь по j в обратном направлении, можем из двух возможных точек с меньшим номером выбирать правую и тогда получим монотонно убывающую последовательность $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_{n-1}$. В качестве ξ_0 возьмем правый конец исходного отрезка. Поскольку $\delta > \Delta/2^n$, лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть функция $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам $y(x) \geq 0$ и $y^{[n]}(x) \leq 0$. Пусть также $a < a' \leq b' < b$ и

$$A = \sup\{y(x) : x \in [a, a']\}, \quad \eta = \inf\{|y^{[n]}(x)| : x \in [b', b]\}.$$

Тогда на отрезке $[b', b]$ выполняется неравенство

$$y(x) \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_0^i}{i!} \left(\frac{x-a}{\delta} \right)^i - \frac{\eta(x-b')^n}{n! M_0^n}, \quad \delta = \frac{a' - a}{2^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.1 на отрезке $[a, a']$ существуют такие точки $\xi_{n-1} \leq \xi_{n-2} \leq \dots \leq \xi_0$, что $|y^{[j]}(\xi_j)| \leq A\delta^{-j}M_0^j$, $j = 0, \dots, n-1$.

Положим $\xi_n = a$ и обратной индукцией по $j = n, \dots, 0$ докажем, что на $[\xi_j, b]$ выполняется неравенство

$$y^{[j]}(x) \leq A \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{M_0^{i+j}(x-a)^i}{i! m_{j+1}^{i+j} \delta^{i+j}} - \frac{\eta(x-b')_+^{n-j}}{(n-j)! M_{j+1}^n}, \quad (4.2)$$

где

$$(x-b')_+ = \begin{cases} x-b' & \text{при } x-b' > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $j = n$ неравенство (4.2) превращается в $y^{[n]}(x) \leq 0$ на $[a, b']$ и $y^{[n]}(x) \leq -\eta$ на $[b', b]$, т. е. непосредственно вытекает из условия доказываемой леммы.

Предположим, что для некоторого j неравенство (4.2) уже доказано. Тогда для $x \in [\xi_{j-1}, b]$ имеем

$$\begin{aligned} y^{[j-1]}(x) &= y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + \int_{\xi_{j-1}}^x (y^{[j-1]})'(t) dt = y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + \int_{\xi_{j-1}}^x \frac{y^{[j]}(t)}{r_j(t)} dt \\ &\leq y^{[j-1]}(\xi_{j-1}) + A \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{M_0^{i+j}}{m_{j+1}^{i+j} \delta^{i+j}} \int_a^x \frac{(t-a)^i}{i! r_j(t)} dt \\ &\quad - \frac{\eta}{M_{j+1}^n} \int_{b'}^x \frac{(t-b')_+^{n-j}}{(n-j)! r_j(t)} dt \\ &\leq A\delta^{-(j-1)} M_0^{j-1} + A \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{M_0^{i+j}(x-a)^{i+1}}{(i+1)! m_j^{i+j} \delta^{i+j}} - \frac{\eta(x-b')_+^{n-j+1}}{(n-j+1)! M_j^n} \\ &= A \frac{\delta^{-(0+j-1)} M_0^{0+j-1}}{m_j^{0+j-1}} + A \sum_{i=1}^{n-j} \frac{M_0^{i-1+j}(x-a)^i}{i! m_j^{i-1+j} \delta^{i-1+j}} - \frac{\eta(x-b')_+^{n-j+1}}{(n-j+1)! M_j^n} \\ &= A \sum_{i=0}^{n-(j-1)-1} \frac{M_0^{i+j-1}(x-a)^i}{i! m_{j-1+1}^{i+j-1} \delta^{i+j-1}} - \frac{\eta(x-b')_+^{n-(j-1)}}{(n-(j-1))! M_{j-1+1}^n}, \end{aligned}$$

т. е. неравенство (4.2) доказано для $j-1$, а значит, и для всех j вплоть до нуля.

В частности, когда $j = 0$ и $x \in [b', b]$, получается неравенство

$$y^{[0]}(x) \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_0^i(x-a)^i}{i! m_1^i \delta^i} - \frac{\eta(x-b')^n}{n! M_1^n},$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{y^{[0]}(x)}{r_0(x)} \leq A \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_0^i(x-a)^i}{i! m_0^i \delta^i} - \frac{\eta(x-b')^n}{n! M_0^n} \\ &= A \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_0^i}{i!} \left(\frac{x-a}{\delta} \right)^i - \frac{\eta(x-b')^n}{n! M_0^n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4.3. В условиях и обозначениях леммы 4.2 имеет место неравенство

$$\eta \leq \frac{AM_0^n n!}{(b-b')^n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni} \mu_0^i}{i!} \left(\frac{b-a}{a'-a} \right)^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается непосредственно из леммы 4.2 с учетом неотрицательности функции $y(x)$, в частности, в точке b .

ЛЕММА 4.4. Пусть функция $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет неравенствам $y(x) \geq 0$ и $y^{[n]}(x) \leq 0$, а c – середина отрезка $[a, b]$. Тогда справедлива оценка

$$\sup\{y(x): x \in [a, c]\} \geq \sup\{y(x): x \in [c, b]\} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni+i} \mu_0^i}{i!} \right]^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.2 на отрезке $[c, b]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} y(x) &\leq \sup\{y(x): x \in [a, c]\} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_0^i}{i!} \left(2^n \cdot \frac{b-a}{c-a} \right)^i \\ &= \sup\{y(x): x \in [a, c]\} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni+i} \mu_0^i}{i!}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает настоящая лемма.

ЛЕММА 4.5. Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет неравенству $|y^{[j]}(x)| \geq W > 0$ на отрезке I длиной Δ . Тогда существует такой отрезок $I' \subset I$ длиной $4^{-j} \Delta$, на котором выполняется неравенство

$$|y(x)| \geq W \frac{(2^{-1-j} \Delta)^j}{M_0^j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. При $j = 0$ получаем непосредственное следствие определения $y^{[0]}$. Предположим, что для некоторого j утверждение уже доказано и на отрезке I длиной Δ выполняется неравенство $|y^{[j+1]}(x)| \geq W > 0$. Тогда на этом отрезке

$$|(y^{[j]})'(x)| = \left| \frac{y^{[j+1]}(x)}{r_{j+1}(x)} \right| \geq W' = \frac{W}{\sup\{r_{j+1}(x): x \in I\}} = \frac{W}{M_{j+1}^{j+1}}.$$

Поэтому функция $y^{[j]}(x)$ является на отрезке I монотонной и обращается в нуль не более чем в одной точке этого отрезка. Пусть c – середина отрезка I . Если $y^{[j]}(c) \geq 0$ и $(y^{[j]})'(c) \geq 0$, то

$$y^{[j]}(x) \geq y^{[j]}(c) + W'(x-c) \geq \frac{W'\Delta}{4} \quad \text{для всех } x \in \left[c + \frac{\Delta}{4}, c + \frac{\Delta}{2} \right].$$

При других комбинациях знаков $y^{[j]}(c)$ и $(y^{[j]})'(c)$ аналогично доказывается, что на некотором отрезке $I' \subset I$ длиной $\Delta' = \Delta/4$, имеющем общий конец с I , выполняется неравенство

$$|y^{[j]}(x)| \geq \frac{W'\Delta}{4} > 0.$$

Тогда по предположению индукции существует отрезок $I'' \subset I'$ длиной $4^{-j}\Delta' = 4^{-(j+1)}\Delta$, на котором выполняется неравенство

$$|y(x)| \geq \frac{W'\Delta}{4} \frac{(2^{-1-j}\Delta/4)^j}{M_0^j} = W \frac{2^{-j-j^2-2j-2}\Delta^{j+1}}{M_0^{j+1}} = W \frac{(2^{-2-j}\Delta)^{j+1}}{M_0^{j+1}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. Пусть $y(x)$ на отрезке I длиной δ является решением уравнения (0.2) или (0.3). Тогда в некоторой точке $x_* \in I$ выполняется неравенство

$$|y(x_*)| \leq y_* = \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого решения $y(x)$ неравенство (4.3) не выполняется ни в одной точке отрезка I . По лемме 4.5 и с учетом уравнения (0.2) или (0.3) найдется отрезок $I' \subset I$ длиной $\delta' = 4^{-n}\delta$, на котором выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |y(x)| &\geq y_*^k \frac{(2^{-1-n}\delta)^n}{M_0^n} = \delta^{n - \frac{nk}{k-1}} (M_0^n)^{\frac{k}{k-1} - 1} \cdot 2^{(n^2+n+\frac{2n^2}{k-1})\frac{k}{k-1} - n^2 - n} \\ &= \delta^{-\frac{n}{k-1}} (M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \cdot 2^{\frac{2n^2}{k-1}} \cdot 2^{(n^2+n+\frac{2n^2}{k-1})\frac{1}{k-1}} \\ &= \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{4^{-n^2}\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{(\delta')^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись еще раз уравнением (0.2) или (0.3) и леммой 4.5, получим отрезок $I'' \subset I'$ длиной $\delta'' = 4^{-n}\delta'$, на котором выполняется неравенство

$$|y(x)| \geq \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{(\delta'')^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Повторяя эту операцию, получим последовательность вложенных отрезков длиной $\delta_j \rightarrow 0$, на которых $|y(x)|$ оценивается снизу величиной, стремящейся к бесконечности при $j \rightarrow \infty$. Таким образом, заданное на конечном отрезке решение уравнения (0.2) или (0.3) оказывается неограниченным. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 4.7. В условиях и обозначениях леммы 4.6 существуют точки $x'_j \in I$, $j = 0, \dots, n-1$, в которых

$$|y^{[j]}(x'_j)| \leq M_0^j \delta^{-j} \cdot 2^{j(j+1)} \left(\frac{4^{nj} Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $j = 0$ утверждение непосредственно вытекает из леммы 4.6.

Пусть для некоторого j оно уже доказано. Рассмотрим произвольный отрезок длиной δ и разобьем его на три отрезка длиной соответственно $\delta/4$, $\delta/2$ и $\delta/4$. На первом и третьем отрезках выберем по точке, в которой выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |y^{[j]}(x)| &\leq M_0^j \left(\frac{\delta}{4} \right)^{-j} \cdot 2^{j(j+1)} \left(\frac{4^{nj} Y_{nk}^n M_0^n}{(\delta/4)^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ &= M_0^j \delta^{-j} \cdot 2^{j^2+3j} \left(\frac{4^{nj+n} Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку расстояние между этими точками не меньше $\delta/2$, по теореме Лагранжа между ними найдется точка, в которой

$$\begin{aligned} |y^{[j+1]}(x)| &= |r_{j+1}(x)(y^{[j]})'(x)| \\ &\leq M_{j+1}^{j+1} \cdot 2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-1} M_0^j \delta^{-j} \cdot 2^{j^2+3j} \left(\frac{4^{nj+n} Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ &= M_0^{j+1} \delta^{-j-1} \cdot 2^{(j+1)(j+2)} \left(\frac{4^{n(j+1)} Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Леммы 4.1–4.7 используются в доказательствах теорем 3.1 и 3.2. Для перехода от уравнений (0.2) и (0.3) к уравнению (0.1) используются вспомогательные утверждения, касающиеся представления заданного формулой (2.1) оператора L в виде оператора квазипроизводной с указанием оценок для коэффициентов последнего через коэффициенты оператора L .

ЛЕММА 4.8. Пусть функция $y(x)$ является решением задачи Коши

$$Ly(x) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (4.5)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (4.6)$$

Пусть также выполняется неравенство $Q_L < 1/n$. Тогда на отрезке $[-1, 1]$ справедливы оценки

$$|y^{(i)}(x) - y^{(i)}(0)| \leq \frac{Q_L}{1 - nQ_L}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$\eta = \sup\{|y^{(i)}(x) - y^{(i)}(0)| : x \in [-1, 1], i = 0, \dots, n-1\}.$$

Тогда ввиду условий (4.5), (4.6) имеем

$$y^{(i)}(x) - y^{(i)}(0) = - \int_0^x dt_{n-i} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t_1) y^{(j)}(t_1),$$

и так как для рассматриваемого отрезка выполнено $(b-a)/2 = 1$, получаем

$$\begin{aligned} |y^{(i)}(x) - y^{(i)}(0)| &\leq \int_0^x dt_{n-i} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \sum_{j=0}^{n-1} |q_j(t_1)| |y^{(j)}(t_1)| \\ &\leq Q_L \int_0^x dt_{n-i} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \sum_{j=0}^{n-1} (|y^{(j)}(0)| + |y^{(j)}(t_1) - y^{(j)}(0)|) \\ &\leq Q_L \frac{|x|^{n-i}}{(n-i)!} (1 + n\eta) \leq Q_L (1 + n\eta). \end{aligned}$$

Решая возникающее таким образом неравенство $\eta \leq Q_L(1 + n\eta)$ относительно η , получаем оценку (4.7).

ЛЕММА 4.9. Оператор L , заданный формулой (2.1) на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющий условию $Q_L < 1/(n+1)$, представляется в виде композиции:

$$L = s_1(x) \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ s_2(x),$$

где L' – оператор порядка $n-1$, старший коэффициент которого, как и у L , равен 1, и выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1 - (n+1)Q_L}{1 - nQ_L} &\leq s_1(x) \leq \frac{1 - (n-1)Q_L}{1 - nQ_L}, \\ \frac{1 - nQ_L}{1 - (n-1)Q_L} &\leq s_2(x) \leq \frac{1 - nQ_L}{1 - (n+1)Q_L}, \\ Q_{L'} &\leq Q_L \frac{1 + 2^{n-1}(1 + Q_L)}{1 - (n+1)Q_L}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_1(x)$ – решение задачи (4.5), (4.6).

Ввиду ограничения $Q_L < 1/(n+1) < 1/n$ и согласно лемме 4.8 для производных функции $y_1(x)$ справедливы оценки

$$|y_1^{(j)}(x)| \leq \frac{Q_L}{1 - nQ_L}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

а для нее самой имеем

$$\begin{aligned} y_1(x) &\leq 1 + \frac{Q_L}{1 - nQ_L} = \frac{1 - (n-1)Q_L}{1 - nQ_L}, \\ y_1(x) &\geq 1 - \frac{Q_L}{1 - nQ_L} = \frac{1 - (n+1)Q_L}{1 - nQ_L}, \\ \frac{1 - nQ_L}{1 - (n-1)Q_L} &\leq \frac{1}{y_1(x)} \leq \frac{1 - nQ_L}{1 - (n+1)Q_L}. \end{aligned}$$

В частности, функция $y_1(x)$ положительна на отрезке $[-1, 1]$. Рассмотрим композицию оператора L и оператора умножения на функцию $y_1(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{L} = L \circ y_1 &= \left(\frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j \frac{d^j}{dx^j} \right) \circ y_1 = \sum_{i=0}^n C_n^i y_1^{(n-i)} \frac{d^i}{dx^i} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j \sum_{i=0}^j C_j^i y_1^{(j-i)} \frac{d^i}{dx^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(C_n^i y_1^{(n-i)} + \sum_{j=i}^{n-1} C_j^i q_j y_1^{(j-i)} \right) \frac{d^i}{dx^i}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение, стоящее в последних скобках, равно нулю при $i = 0$, так как $Ly_1 = 0$, и равно y_1 при $i = n$. Поэтому

$$\hat{L} = y_1 \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(C_n^i y_1^{(n-i)} + \sum_{j=i}^{n-1} C_j^i q_j y_1^{(j-i)} \right) \frac{d^i}{dx^i} = y_1 \circ L' \circ \frac{d}{dx},$$

где

$$L' = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{C_{n+1}^{i+1} y_1^{(n-1-i)}}{y_1} + \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{C_j^{i+1} q_j y_1^{(j-1-i)}}{y_1} \right) \frac{d^i}{dx^i}.$$

Таким образом,

$$L = L \circ y_1 \circ \frac{1}{y_1} = y_1 \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ \frac{1}{y_1}.$$

Требуемое разложение и оценки для участвующих в нем функций $s_1(x) = y_1(x)$ и $s_2(x) = 1/y_1(x)$ получены. Осталось оценить коэффициенты $q'_i(x)$ оператора L' , чтобы получить (4.8). Для этого будем использовать свойства биномиальных коэффициентов

$$C_n^j \leq 2^{n-1}, \quad \sum_{j=i}^n C_j^i = C_{n+1}^{i+1},$$

которые легко доказываются индукцией по $n \geq 1$ с использованием тождества

$$C_{n+1}^j = C_n^{j-1} + C_n^j.$$

Итак,

$$\begin{aligned} |q'_i(x)| &\leq \frac{1 - nQ_L}{1 - (n+1)Q_L} \left(C_n^{i+1} \frac{Q_L}{1 - nQ_L} + \sum_{j=i+1}^{n-1} C_j^{i+1} \frac{Q_L^2}{1 - nQ_L} \right) + Q_L \\ &= \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L} \left(C_n^{i+1} + Q_L \sum_{j=i+1}^{n-1} C_j^{i+1} \right) + Q_L \\ &= \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L} (C_n^{i+1} + Q_L C_n^{i+2}) + Q_L \leq Q_L \frac{1 + 2^{n-1}(1 + Q_L)}{1 - (n+1)Q_L}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.10. *Оператор L , заданный на отрезке $[-1, 1]$ формулой (2.1) и удовлетворяющий условию $Q_L \leq 2^{-n^2-n}$, представляется в виде композиции:*

$$L = r_n(x) \frac{d}{dx} \circ \cdots \circ r_1(x) \frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где функции $r_j(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{2} \leq r_n(x) \leq 2, \quad (4.9)$$

$$(1 + 2^{-(n-j)^2})^{-1} \leq r_j(x) \leq 1 + 2^{-(n-j)^2}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по $n \geq 1$ докажем утверждение леммы с заменой оценки (4.9) на оценку

$$\prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2})^{-1} \leq r_n(x) \leq \prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2}), \quad (4.11)$$

которая, как будет показано далее, является более сильной.

Отметим, что при $n \geq 1$ выполняется неравенство $Q_L \leq 2^{-n^2-n} < 1/(n+1)$. Поэтому и в случае $n = 1$, и при переходе $n-1 \Rightarrow n$ можно применить лемму 4.9, согласно которой оператор L представляется в виде композиции:

$$L = s_1(x) \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ s_2(x).$$

С учетом ограничения Q_L и для более удобного использования ослабим неравенства, которым по лемме 4.9 должны удовлетворять функции $s_1(x)$ и $s_2(x)$:

$$\begin{aligned} s_2(x) &\leq \frac{1 - nQ_L}{1 - (n+1)Q_L} = 1 + \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L} \\ &\leq 1 + \frac{2^{-n^2-n}}{1 - (n+1)2^{-n^2-n}} = 1 + \frac{2^{-n^2}}{2^n - (n+1)2^{-n^2}}. \end{aligned}$$

Знаменатель в последнем выражении при $n = 1$ имеет вид $2^1 - 2 \cdot 2^{-1} = 1$ и возрастает при $n \geq 1$. Поэтому

$$s_2(x) \leq 1 + 2^{-n^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} s_2(x) &\geq \frac{1 - nQ_L}{1 - (n-1)Q_L} = \left(1 + \frac{Q_L}{1 - nQ_L}\right)^{-1} \\ &\geq \left(1 + \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L}\right)^{-1} \geq (1 + 2^{-n^2})^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$s_1(x) \leq \frac{1 - (n-1)Q_L}{1 - nQ_L} = 1 + \frac{Q_L}{1 - nQ_L} \leq 1 + \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L} \leq 1 + 2^{-n^2},$$

а также

$$\begin{aligned} s_1(x) &\geq \frac{1 - (n+1)Q_L}{1 - nQ_L} = \left(1 + \frac{Q_L}{1 - nQ_L}\right)^{-1} \\ &\geq \left(1 + \frac{Q_L}{1 - (n+1)Q_L}\right)^{-1} \geq (1 + 2^{-n^2})^{-1}. \end{aligned}$$

В случае $n = 1$, когда L' оказывается тождественным оператором, получаем готовое представление

$$L = s_1(x) \circ \frac{d}{dx} \circ s_2(x),$$

в котором функции $s_1(x)$ и $s_2(x)$ можно взять в качестве множителей $r_1(x)$ и $r_0(x)$, удовлетворяющих соответственно неравенствам (4.11) и (4.10).

Рассмотрим случай $n > 1$. Согласно лемме 4.9 для оператора L' порядка $n - 1$ справедлива оценка

$$Q_{L'} \leq 2^{-n^2-n} \cdot \frac{1 + 2^{n-1}(1 + 2^{-n^2-n})}{1 - (n+1)2^{-n^2-n}}.$$

Чтобы воспользоваться для этого оператора предположением индукции, достаточно доказать, что правая часть в последнем неравенстве не превосходит $2^{-(n-1)^2-(n-1)}$. Для $n > 1$ это равносильно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 2^{-n^2-n} \cdot \frac{1 + 2^{n-1} + 2^{-n^2-1}}{1 - (n+1)2^{-n^2-n}} &\leq 2^{-n^2+n}, \\ 2^{-n}(1 + 2^{n-1} + 2^{-n^2-1}) &\leq 2^n(1 - (n+1)2^{-n^2-n}), \\ 2^{-n} + 2^{-1} + 2^{-n^2-n-1} + (n+1)2^{-n^2} &\leq 2^n. \end{aligned}$$

Справедливость последнего неравенства для $n = 2$ проверяется непосредственно, а для $n > 2$ вытекает из того, что левая часть в этом неравенстве убывает, а правая – возрастает.

Итак, по предположению индукции оператор L' можно представить в виде композиции:

$$L' = r'_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \circ \cdots \circ r'_1(x) \frac{d}{dx} \circ r'_0(x),$$

множители которой удовлетворяют неравенствам

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1 + 2^{-j^2})^{-1} \leq r'_{n-1}(x) \leq \prod_{j=1}^{n-1} (1 + 2^{-j^2}),$$

$$(1 + 2^{-(n-1-j)^2})^{-1} \leq r'_j(x) \leq 1 + 2^{-(n-1-j)^2}, \quad j = 0, \dots, n-2.$$

Отсюда получается аналогичное представление для L :

$$L = s_1(x) \circ L' \circ \frac{d}{dx} \circ s_2(x) = r_n(x) \frac{d}{dx} \circ \cdots \circ r_1(x) \frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} r_n(x) &= s_1(x) r'_{n-1}(x), \\ r_j(x) &= r'_{j-1}(x), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ r_0(x) &= s_2(x). \end{aligned}$$

Выполнение неравенств (4.10) следует из соответствующих свойств функций $s_2(x)$ и $r'_j(x)$. Доказательство неравенства (4.11) также несложно:

$$r_n(x) = s_1(x) r'_{n-1}(x) \leq (1 + 2^{-n^2}) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + 2^{-j^2}) = \prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2}),$$

аналогично в другую сторону.

Для доказательства леммы осталось проверить, что неравенство (4.11) и в самом деле сильнее, чем (4.9). Имеем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2}) &\leq \prod_{j=1}^n \exp\{2^{-j^2}\} \leq \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j^2}\right\} = \exp\left\{2^{-1} + \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j^2}\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-2j}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2} + \frac{2^{-4}}{1 - 2^{-2}}\right\} = \exp\left\{\frac{7}{12}\right\} \\ &\approx 1.792 < 2, \end{aligned}$$

аналогично в другую сторону. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.11. Оператор L , заданный на произвольном отрезке $[a, b]$ формулой (2.1) и удовлетворяющий условию $Q_L \leq 2^{-n^2-n}$, представляется в виде композиции:

$$L = r_n(x) \frac{d}{dx} \circ \cdots \circ r_1(x) \frac{d}{dx} \circ r_0(x),$$

где функции $r_0(x), \dots, r_{n-1}(x)$ удовлетворяют неравенству (4.10), а функция $r_n(x)$ – неравенству (4.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив к оператору L замену переменных

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1, 1],$$

получим оператор

$$\left(\frac{2}{b-a} \frac{d}{dt}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \left(\frac{2}{b-a} \frac{d}{dt}\right)^j = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n L',$$

где

$$L' = \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} q_j \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \left(\frac{2}{b-a}\right)^{j-n} \frac{d^j}{dt^j},$$

причем

$$\begin{aligned} Q_{L'} &= \sup \left\{ \left| q_j \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \left(\frac{2}{b-a}\right)^{j-n} \right| \cdot 1^{n-j} : t \in [-1, 1], 0 \leq j < n \right\} \\ &= \sup \left\{ |q_j(x)| \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n-j} : x \in [a, b], 0 \leq j < n \right\} = Q_L \leq 2^{-n^2-n}. \end{aligned}$$

Таким образом, к оператору L' можно применить лемму 4.10 и представить его в виде

$$L' = r'_n(t) \frac{d}{dt} \circ \cdots \circ r'_1(t) \frac{d}{dt} \circ r'_0(t),$$

где функции $r'_j(t)$ удовлетворяет неравенству (4.9) при $j = n$ и неравенству (4.10) при $j < n$. Делая обратную замену переменных

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a},$$

получим представление оператора L в виде

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^n \left(r'_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \frac{b-a}{2} \frac{d}{dx}\right) \circ \cdots \circ \left(r'_1 \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \frac{b-a}{2} \frac{d}{dx}\right) \\ &\quad \circ r'_0 \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = r_n(x) \frac{d}{dx} \circ \cdots \circ r_1(x) \frac{d}{dx} \circ r_0(x) \end{aligned}$$

с функциями $r_j(x) = r'_j\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$, удовлетворяющими соответствующим неравенствам (4.9) и (4.10).

§ 5. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0, (b - a)/3\}$ совпадает с $(b - a)/3$. Если это не так, вместо всего решения $y(x)$ будем рассматривать его ограничение на отрезок $[a, a + 3\delta_1] \subset [a, b]$ в случае $\delta_1 = x_0 - a$ либо на отрезок $[b - 3\delta_1, b] \subset [a, b]$ в случае $\delta_1 = b - x_0$. Разобьем рассматриваемый отрезок на три равные части I', I и I'' (слева направо) длиной δ_1 и заметим, что $x_0 \in I$. Будем доказывать утверждение теоремы для всех $x \in I$.

Обозначим через Z_j выражение, получающееся из правой части неравенства (4.4), если вместо δ подставить δ_1 . Докажем обратной индукцией по $j = n - 1, \dots, 0$, что на отрезке I выполняется неравенство

$$|y^{[j]}(x)| \leq Z_j \sum_{i=j}^{n-1} \mu_{j+1}^i \cdot 2^{(i-j)(i+j+1+\frac{2n}{k-1})}. \quad (5.1)$$

Для доказательства первого шага заметим, что при $j = n - 1$ сумма в неравенстве (5.1) состоит из единственного слагаемого, равного 1, и по лемме 4.7 это неравенство должно выполняться в некоторых точках $x' \in I'$ и $x'' \in I''$. Поскольку $y(x)$ – положительное решение уравнения (0.2) или (0.3), его $(n - 1)$ -я квазипроизводная является монотонной функцией и поэтому удовлетворяет неравенству (5.1) на всем отрезке $[x', x''] \supset I$.

Пусть для некоторого $j > 0$ выполнение неравенства (5.1) на отрезке I уже доказано. Докажем его для $j - 1$. По лемме 4.7 существует точка $x_{j-1} \in I$, в которой

$$|y^{[j-1]}(x_{j-1})| \leq Z_{j-1} = Z_{j-1} \sum_{i=j-1}^{j-1} \mu_{(j-1)+1}^i \cdot 2^{(i-(j-1))(i+(j-1)+1+\frac{2n}{k-1})},$$

а для всех $x \in I$ в силу предположения индукции справедлива оценка

$$\begin{aligned} |y^{[j-1]}(x) - y^{[j-1]}(x_{j-1})| &= \left| \int_{x_{j-1}}^x \frac{y^{[j]}(t) dt}{r_j(t)} \right| \leq \frac{\delta_1 Z_j}{m_j^j} \sum_{i=j}^{n-1} \mu_{j+1}^i \cdot 2^{(i-j)(i+j+1+\frac{2n}{k-1})} \\ &= \frac{\delta_1 (Z_{j-1} M_j^j \delta_1^{-1} \cdot 2^{2j} \cdot 4^{\frac{n}{k-1}})}{m_j^j} \sum_{i=j}^{n-1} \mu_{j+1}^i \cdot 2^{(i-j)(i+j+1+\frac{2n}{k-1})} \\ &= Z_{j-1} \sum_{i=j}^{n-1} \mu_j^i \cdot 2^{(i-j)(i+j+1+\frac{2n}{k-1})+2j+\frac{2n}{k-1}} \\ &= Z_{j-1} \sum_{i=j}^{n-1} \mu_{(j-1)+1}^i \cdot 2^{(i-(j-1))(i+(j-1)+1+\frac{2n}{k-1})}. \end{aligned}$$

Суммируя оценки для $|y^{[j-1]}(x_{j-1})|$ и $|y^{[j-1]}(x) - y^{[j-1]}(x_{j-1})|$, получим требуемое утверждение. Из его частного случая для $j = 0$ получается заключение теоремы:

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left| \frac{y^{[0]}(x)}{r_0(x)} \right| \leq \frac{Z_0}{m_0^0} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_1^i \cdot 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \\ &= \frac{M_0^0}{m_0^0} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta_1^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_1^i \cdot 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \\ &= (Y_{nk}^n M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0^i \cdot 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \delta_1^{-\frac{n}{k-1}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Предположим, что теорема не верна, т. е. для некоторого $b' \in (a, b]$ выполняется неравенство $y(b') > C_2(b' - a)^{-\frac{n}{k-1}}$.

Разобьем отрезок $[a, b']$ на три равные части I', I, I'' (слева направо) длиной $\delta = (b' - a)/3$ и докажем существование точек $x_j'' \in I$, $j = 0, \dots, n-1$, для которых

$$|y^{[j]}(x_j'')| > m_0^j \delta^{-j} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=j}^{n-1} \widehat{\mu}_0^i, \quad (5.2)$$

где $\widehat{\mu}_0^i = 2^{i(i+1) + \frac{2ni}{k-1}} \mu_0^i$.

При $j = 0$ получается непосредственное следствие леммы 4.4:

$$\begin{aligned} \sup\{y^{[0]}(x) : x \in I\} &\geq m_0^0 \sup\{y(x) : x \in I''\} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni+i} \mu_0^i}{i!} \right]^{-1} \\ &> m_0^0 C_2 (3\delta)^{-\frac{n}{k-1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^{ni+i} \mu_0^i}{i!} \right]^{-1} \\ &= m_0^0 (3^n Y_{nk}^n M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0^i \cdot 2^{i(i+1) + \frac{2ni}{k-1}} (3\delta)^{-\frac{n}{k-1}} \\ &= m_0^0 \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{\mu}_0^i. \end{aligned}$$

Предположим, что для $j < n-1$ уже доказано существование точки $x_j'' \in I$. Согласно лемме 4.7 существует также точка $x_j' \in I$, для которой

$$|y^{[j]}(x_j')| \leq M_0^j \delta^{-j} \cdot 2^{j(j+1)} \left(\frac{4^{nj} Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} = m_0^j \delta^{-j} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \widehat{\mu}_0^j.$$

По теореме Лагранжа между точками $x_j' \in I$ и $x_j'' \in I$ найдется точка $x_{j+1}'' \in I$, в которой

$$\begin{aligned} |y^{[j+1]}(x_{j+1}'')| &\geq r_{j+1}(x_j'') \frac{|y^{[j]}(x_j'')| - |y^{[j]}(x_j')|}{\delta} \\ &> \frac{m_{j+1}^{j+1}}{\delta} \delta^{-j} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} m_0^j \left(\sum_{i=j}^{n-1} \widehat{\mu}_0^i - \widehat{\mu}_0^j \right) \\ &= m_0^{j+1} \delta^{-(j+1)} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=j+1}^{n-1} \widehat{\mu}_0^i, \end{aligned}$$

и, таким образом, утверждение доказано для $j+1$.

Из него, в частности, следует, что существует точка $x_{n-1}'' \in I$, в которой выполняется неравенство (5.2) при $j = n-1$, т. е.

$$\begin{aligned} |y^{[n-1]}(x_{n-1}'')| &> m_0^{n-1} \delta^{-n+1} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \widehat{\mu}_0^{n-1} \\ &= M_0^{n-1} \delta^{-n+1} \left(\frac{Y_{nk}^n M_0^n}{\delta^n} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot 2^{(n-1)n + \frac{2n(n-1)}{k-1}} > 0. \end{aligned}$$

В то же время согласно лемме 4.7 найдутся точки $q'_{n-1} \in I'$ и $b'_{n-1} \in I''$, в каждой из которых $(n-1)$ -я квазипроизводная не превосходит по модулю средней части последней цепочки неравенств.

Если $y^{[n-1]}(x''_{n-1}) > 0$, то

$$y^{[n-1]}(x''_{n-1}) = |y^{[n-1]}(x''_{n-1})| > |y^{[n-1]}(q'_{n-1})| \geq y^{[n-1]}(q'_{n-1}).$$

Если же $y^{[n-1]}(x''_{n-1}) < 0$, то

$$y^{[n-1]}(x''_{n-1}) = -|y^{[n-1]}(x''_{n-1})| < -|y^{[n-1]}(b'_{n-1})| \leq y^{[n-1]}(b'_{n-1}).$$

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что положительное решение $y(x)$ уравнения (0.2) должно иметь отрицательную n -ю квазипроизводную. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Пусть $x \in (a, b)$. Рассмотрим ограничение решения $y(x)$ на отрезок $[a', b'] \subset [a, b]$ длиной $3\delta_3$, равный

$$[a', b'] = \begin{cases} [a, a + 3\delta_3] & \text{при } x < a + \frac{3}{2}\delta_3, \\ [b - 3\delta_3, b] & \text{при } x > b - \frac{3}{2}\delta_3, \\ [x - \frac{3}{2}\delta_3, x + \frac{3}{2}\delta_3] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку на этом отрезке выполняются неравенства

$$|q_j(x)| \left(\frac{b' - a'}{2} \right)^{n-j} \leq \left(\frac{3\delta_3 Q}{2} \right)^{n-j} \leq (2^{-n^2-n})^{n-j} \leq 2^{-n^2-n},$$

то на нем согласно лемме 4.11 оператор L , заданный формулой (2.1), можно представить в виде n -й квазипроизводной. Разделив уравнение (0.1) на нигде не обращающуюся в нуль функцию $p(x)$, получим, в зависимости от знака этой функции, уравнение (0.2) или (0.3), к которому можно применить теорему 3.1.

Покажем, что величина δ_1 из теоремы 3.1, равная в данном случае

$$\delta_1 = \min \left\{ x - a', b' - x, \frac{b' - a'}{3} \right\} = \min \{ x - a', b' - x, \delta_3 \},$$

совпадает с δ_3 из теоремы 3.3.

Действительно, если $x < a + \frac{3}{2}\delta_3$, то $x - a' = x - a \geq \delta_3$ (по определению величины δ_3) и $b' - x = a + 3\delta_3 - x > -\frac{3}{2}\delta_3 + 3\delta_3 > \delta_3$.

Аналогично, если $x > b - \frac{3}{2}\delta_3$, то $x - a' = x - b + 3\delta_3 > -\frac{3}{2}\delta_3 + 3\delta_3 > \delta_3$ и $b' - x = b - x \geq \delta_3$.

Наконец, в третьем случае имеем $x - a' = b' - x = \frac{3}{2}\delta_3 > \delta_3$.

Таким образом, в любом из трех случаев $\min \{ x - a', b' - x, \delta_3 \} = \delta_3$.

Далее оценим константу C_1 из теоремы 3.1. Для этого, пользуясь неравенствами (4.9), (4.10) и условием, налагаемым на функцию $p(x)$, получим оценки для M_0^n :

$$M_0^n \leq \frac{2}{p_*} \prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2}) < \frac{4}{p_*}$$

(такое произведение уже оценивалось при доказательстве леммы 4.10), а также для μ_0^i при $i = 0, \dots, n-1$:

$$\mu_0^i \leq \prod_{j=0}^i (1 + 2^{-(n-j)^2})^2 = \prod_{j=n-i}^n (1 + 2^{-j^2})^2 \leq \left(\prod_{j=1}^n (1 + 2^{-j^2}) \right)^2 < 4.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_1 &= (Y_{nk}^n M_0^n)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_0^i \cdot 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \leq \left(\frac{4Y_{nk}^n}{p_*} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 4 \cdot 2^{i(i+1+\frac{2n}{k-1})} \\ &= \left(\frac{Y_{nk}^n}{p_*} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i^2+i+2+\frac{2(ni+1)}{k-1}} = C_3. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4 аналогично доказательству теоремы 3.3. Для произвольной точки $x \in (a, b]$ рассматривается ограничение решения уравнения (0.1) на отрезок $[a', b'] = [x - \delta_4, x] \subset [a, b]$. На этом отрезке с помощью леммы 4.10, учитывая условие $p(x) \geq p_* > 0$, уравнение (0.1) можно привести к виду (0.2), а затем применить теорему 3.2. Константа C_2 из этой теоремы не превосходит ввиду неравенств (4.9), (4.10) константы C_4 , а разность $x - a'$ совпадает с δ_4 .

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву за полезное обсуждение.

Список литературы

1. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **89**, Kluwer, Dordrecht, 1993.
2. И. В. Астахова, “Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков”, *Судзальская конференция–2*, Современ. матем. и ее прил., **8**, АН Грузии, Тбилиси, 2003, 3–33; англ. пер.: I. V. Astashova, “Application of dynamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **126**:5 (2005), 1361–1391.
3. Т. А. Чантурия, “О существовании сингулярных и неограниченных колеблющихся решений дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Дифференц. уравнения*, **28**:6 (1992), 1009–1022; англ. пер.: Т. А. Chanturiya, “Existence of singular and unbounded oscillating solutions of differential equations of Emden–Fowler type”, *Differential Equations*, **28**:6 (1992), 811–824.
4. V. A. Kozlov, “On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations”, *Ark. Mat.*, **37**:2 (1999), 305–322.
5. Г. Г. Квиникадзе, И. Т. Кигурадзе, “О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Сообщ. АН ГССР*, **106**:3 (1982), 465–468.
6. В. А. Кондратьев, “О качественных свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1991, 186–190; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, “On qualitative properties of the solutions of semilinear elliptic equations”, *J. Math. Sci.*, **69**:3 (1994), 1068–1071.
7. И. В. Астахова, “О качественных свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера”, Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, *УМН*, **51**:5 (1996), 185; англ. пер.: О. А. Oleinik, “Joint sessions of the Petrovskii Seminar on differential equations and related problems and the Moscow Mathematical Society”, *Russian Math. Surveys*, **51**:5 (1996), 911–998.

8. I. V. Astashova, "Estimates of solutions to one-dimensional Schrödinger equation", *Progress in analysis*, vol. II (Berlin, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 955–960.
9. G. Pólya, "On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **24**:4 (1922), 312–324.
10. J. de la Vallée-Poussin, "Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n ", *Journ. de Math.*, **9**:8 (1929), 125–144.
11. А. Ю. Левин, "Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ", *УМН*, **24**:2 (1969), 43–96; англ. пер.: A. Yu. Levin, "Non-oscillation of solutions of the equation $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ ", *Russian Math. Surveys*, **24**:2 (1969), 43–99.
12. И. В. Асташова, "О равномерных оценках положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений", *Дифференц. уравнения*, **41**:11 (2005), 1579–1580; англ. пер.: I. V. Astashova, "On uniform estimates of positive solutions of quasilinear differential equations", On the seminar on qualitative theory of differential equations at Moscow State University, *Differ. Equ.*, **41**:11 (2005), 1656–1657.
13. И. В. Асташова, "Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений четного порядка", Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 21–34; англ. пер.: I. V. Astashova, "Uniform estimates for positive solutions to quasi-linear differential equations of even order", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **135**:1 (2006), 2616–2624.
14. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 1–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, "A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234**:3 (2001), 1–362.
15. Дж. Хей, "О необходимых условиях существования глобальных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных неравенств высокого порядка", *Дифференц. уравнения*, **38**:3 (2002), 344–350; англ. пер.: J. Hay, "Necessary conditions for the existence of global solutions of higher-order nonlinear ordinary differential inequalities", *Differ. Equ.*, **38**:3 (2002), 362–368.
16. А. А. Коньков, "О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 81–126; англ. пер.: A. A. Kon'kov, "On solutions of non-autonomous ordinary differential equations", *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 285–327.
17. И. В. Асташова, "Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений", *Докл. РАН*, **409**:5 (2006), 586–590; англ. пер.: I. V. Astashova, "Uniform estimates for positive solutions of quasilinear differential equations", *Dokl. Math.*, **74**:1 (2006), 555–558.

И. В. АСТАШОВА (I. V. ASTASHOVA)
 Московский государственный университет экономики,
 статистики и информатики
E-mail: ast@diffiety.ac.ru

Поступило в редакцию
 28.03.2007