Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, Слабо выпуклые и прокси-
мально гладкие множества в банаховых пространствах,
Изв. РАН. Сер. матем., 2009, том 73, выпуск 3, 23–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:45:54

УДК 517.982.252

М. В. Балашов, Г. Е. Иванов

Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах

Установлена взаимосвязь условий слабой выпуклости по Виалю, слабой выпуклости по Ефимову–Стечкину и проксимальной гладкости множеств в банаховых пространствах. Получена теорема об отделимости сферой двух непересекающихся множеств, одно из которых слабо выпукло по Виалю, а другое сильно выпукло. Доказана локальная связность слабо выпуклых и проксимально гладких множеств. Исследованы вопросы, связанные с сохранением условий слабой выпуклости и проксимальной гладкости при предельном переходе.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: проксимальная гладкость, слабая выпуклость, равномерная выпуклость, равномерная гладкость, порождающее множество, отделимость сферой, опорный шар.

§ 1. Введение

Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [1] в связи с исследованием чебышевских множеств ввели понятие a -выпуклого множества как множества в нормированном пространстве, которое получается в результате исключения из пространства произвольного набора открытых шаров с фиксированным радиусом a . В настоящей работе вместо термина “ a -выпуклое множество” используется термин “множество, слабо выпуклое по Ефимову–Стечкину с константой a ”.

Ж.-Ф. Виаль [2] ввел другое определение слабо выпуклого множества. Легко видеть, что замкнутое множество A в топологическом векторном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ существует точка $x \in [x_0, x_1] \cap A$, не совпадающая с точками x_0 и x_1 . Заменяя в этом условии отрезок $[x_0, x_1]$ некоторым специальным множеством $D_R(x_0, x_1)$, которое называется *сильно выпуклым отрезком*, получаем определение слабой выпуклости по Виалю [2]. Ж.-Ф. Виаль, рассматривая слабо выпуклые множества лишь в конечномерном евклидовом пространстве, изучил некоторые свойства таких множеств. Была доказана локальная топологическая связность слабо выпуклых множеств и выявлена связь свойств слабой выпуклости и гладкости множеств в $\mathbb{R}^n$. В доказательствах основных результатов Ж.-Ф. Виаль существенно использовал то, что пространства являются конечномерными и евклидовыми.

Ф. Кларк, Р. Штерн и П. Воленски [3] определили понятие *проксимально гладкого множества* как множества, функция расстояния до которого от точки пространства непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности этого

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00156) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/500).

множества, за исключением самого множества. Ими были изучены некоторые свойства проксимально гладких множеств в гильбертовом пространстве и показано, что для функции, удовлетворяющей условию Липшица на выпуклом открытом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$, условие слабой выпуклости (или нижнее C^2 -свойство) эквивалентно проксимальной гладкости надграфика этой функции.

Р. Поликвин, Р. Рокафеллар и Л. Тибольт [4] рассматривали в гильбертовом пространстве свойство проксрегулярности множеств и функций, которое является локальным вариантом свойства проксимальной гладкости. Ф. Бернард, Л. Тибольт и Н. Златева [5] изучали проксрегулярные и проксимально гладкие множества в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах с модулями выпуклости и гладкости степенного вида. В работе [5], в частности, показано, что в таких пространствах условие проксимальной гладкости множества эквивалентно тому, что метрическая проекция на это множество любой точки из достаточно малой окрестности множества существует, единственна и непрерывно зависит от проектируемой точки.

В монографии Г. Е. Иванова [6] изучены топологические и аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве. Исследована взаимосвязь условий слабой выпуклости и гладкости. Построено исчисление параметров сильной и слабой выпуклости множеств в связи с применением к множествам геометрических операций Минковского. Рассмотрены приложения теории слабо выпуклых множеств в экстремальных задачах, задачах оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории аппроксимаций и теории многозначных отображений.

Е. С. Половинкин [7] ввел понятие порождающего множества. Исследованию порождающих множеств посвящена значительная часть монографии [8], а также работ [9]–[11]. Известно, что любое выпуклое замкнутое множество на плоскости, шар в гильбертовом пространстве, а также множества, получаемые в результате достаточно малых гладких деформаций шара в гильбертовом пространстве, являются порождающими множествами.

В настоящей работе показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве из свойства слабой выпуклости (по Виялю) замкнутого множества следует свойство проксимальной гладкости этого множества. Обратное верно тогда и только тогда, когда шар пространства является порождающим множеством. В частности, для замкнутого множества в гильбертовом пространстве условия слабой выпуклости и проксимальной гладкости эквивалентны.

Показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве из условия проксимальной гладкости множества (а значит, и из условия слабой выпуклости по Виялю) следует условие слабой выпуклости по Ефимову–Стечкину, а обратное неверно. Также показано, что для проксимально гладких множеств метрическая проекция непрерывно зависит не только от проектируемой точки, но и от множества в смысле метрики Хаусдорфа.

Получена теорема об отделимости, утверждающая, что если в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве с порождающим шаром заданы два непересекающихся множества, одно из которых сильно выпукло, а другое слабо выпукло, то при определенном соотношении параметров выпуклости эти множества можно разделить сферой. Показано, что порождаемость шара нормы необходима для того, чтобы в рассматриваемом пространстве выполнялось указанное условие отделимости.

Доказаны теоремы о локальной связности слабо выпуклых и проксимально гладких множеств. Показано, что в равномерно выпуклом банаховом пространстве замкнутое множество A является слабо выпуклым (соответственно, проксимально гладким) тогда и только тогда, когда все связные компоненты множества A являются слабо выпуклыми (соответственно, проксимально гладкими) множествами и расстояние между любыми двумя различными связными компонентами множества A достаточно велико. Получены достаточные условия, налагаемые на пространство, обеспечивающие сохранение условий слабой выпуклости и проксимальной гладкости при предельном переходе по множествам (в смысле метрики Хаусдорфа) и по параметрам слабой выпуклости. Рассмотрены вопросы сохранения слабой выпуклости при пересечении множеств.

Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 введены определения и обозначения, в § 2 сформулированы основные результаты, в § 3 сформулированы и доказаны вспомогательные результаты, в § 4 доказаны основные результаты.

Введем следующие определения и обозначения. Пусть E – нормированное пространство. Через $\langle p, x \rangle$ обозначим значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$. Для вектора $a \in E$ и функционала $p_0 \in E^*$ через $\mathfrak{B}_R(a)$ и $\mathfrak{B}_R^*(p_0)$ обозначим замкнутые шары с радиусом R в пространствах E и E^* соответственно:

$$\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E: \|x - a\| \leq R\}, \quad \mathfrak{B}_R^*(p_0) = \{p \in E^*: \|p - p_0\| \leq R\}.$$

Модулем выпуклости нормированного пространства E называется функция $\delta_E: (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\| : x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Нормированное пространство E называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon \in (0, 2]$.

Модулем гладкости нормированного пространства E называется функция $\varrho_E: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\varrho_E(\tau) = \sup \left\{ \left\| \frac{x + y}{2} \right\| + \left\| \frac{x - y}{2} \right\| - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}.$$

Нормированное пространство E называется *равномерно гладким*, если

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\varrho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Любое равномерно выпуклое или равномерно гладкое банахово пространство рефлексивно [12, гл. 2, § 4, теорема 2 и следствие 2].

Через $\text{int } A$, $\bar{A}$, ∂A будем обозначать соответственно *внутренность*, *замыкание* и *границу* множества $A \subset E$. *Нормальным конусом* к выпуклому множеству $A \subset E$ в точке $x_0 \in A$ называется множество

$$N(x_0; A) = \{p \in E^*: \langle p, x \rangle \leq \langle p, x_0 \rangle \quad \forall x \in A\}.$$

Диаметром множества $A \subset E$ называется величина

$$\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

Расстояние Хаусдорфа между двумя множествами $A, B \subset E$ будем обозначать через $h(A, B)$:

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}.$$

Для множеств $A, B \subset E$ определим

$$\varrho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|.$$

Расстоянием от точки $u \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho(u, A) = \inf_{x \in A} \|u - x\|.$$

Метрической проекцией точки $u \in E$ на множество $A \subset E$ называется любой элемент множества

$$\pi(u, A) = \{x \in A : \|u - x\| = \varrho(u, A)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество A в нормированном пространстве E называется *сильно выпуклым с константой $R > 0$* , если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} \mathfrak{B}_R(a).$$

Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин в работе [1] ввели понятие “ a -выпуклых” множеств. Эти множества мы будем называть слабо выпуклыми по Ефимову–Стечкину.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество A в нормированном пространстве E называется *слабо выпуклым по Ефимову–Стечкину с константой $R > 0$* , если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} (E \setminus \text{int } \mathfrak{B}_R(a)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $x_0, x_1 \in E$, $\|x_1 - x_0\| \leq 2R$. Множество

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a \in E : \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)} \mathfrak{B}_R(a)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*, а множество

$$\overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1) = D_R(x_0, x_1) \setminus \{x_0, x_1\}$$

называется *сильно выпуклым отрезком без концевых точек*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Непосредственно из определений следует, что сильно выпуклый отрезок $D_R(x_0, x_1)$ является сильно выпуклым множеством с константой R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [2]. Множество A в нормированном пространстве называется *слабо выпуклым с константой $R > 0$* , если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$, справедливо соотношение

$$A \cap \overset{\circ}{D}_R(x_0, x_1) \neq \emptyset.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 [3]. Множество $A \subset E$ называется *проксимально гладким* с константой R , если функция расстояния $u \mapsto \varrho(u, A)$ непрерывно дифференцируема на множестве

$$U(R, A) = \{u \in E: 0 < \varrho(u, A) < R\}. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Будем говорить, что множество A в банаховом пространстве E удовлетворяет *опорному условию слабой выпуклости* с константой $R > 0$, если из того, что $u \in U(R, A)$ и $x \in \pi(u, A)$, следует неравенство

$$\varrho\left(x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x), A\right) \geq R. \quad (1.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Поскольку $x \in A$, то $\varrho(x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x), A) \leq R$ и, следовательно, неравенство (1.2) эквивалентно равенству $\varrho(x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x), A) = R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Определение опорного условия слабой выпуклости напоминает определение строгого солнца [13]–[16]. Однако в отличие от строгого солнца опорное условие слабой выпуклости не предполагает существования метрической проекции любой точки u . В работе [3] рассматривается опорное условие слабой выпуклости для множеств в гильбертовом пространстве, хотя используется другая терминология: в случае выполнения неравенства (1.2) говорится, что вектор $(u - x)$ “реализуется R -шаром”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть в линейном пространстве E заданы множества $A, B \subset E$. *Геометрическими суммой* и *разностью*, или, что то же самое, *суммой* и *разностью Минковского*, множеств A и B называются соответственно множества

$$A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}, \quad A \stackrel{*}{+} B = \{x \in E: x + B \subset A\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Непосредственно из определения 1.7 следуют равенства

$$A + B = \bigcup_{x \in B} (A + x), \quad A \stackrel{*}{+} B = \bigcap_{x \in B} (A - x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8 [8, определение 4.1.1]. Выпуклое замкнутое множество B в банаховом пространстве E называется *порождающим множеством*, если для любого $X \subset E$ такого, что множество

$$C = \bigcap_{x \in X} (B + x) \quad (1.3)$$

непусто, найдется выпуклое замкнутое множество $C_1 \subset E$ такое, что

$$\overline{C_1 + C} = B. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Если множество B ограничено и пространство E рефлексивно, то в определении 1.8 множество $C_1 + C$ замкнуто и равенство (1.4) эквивалентно равенству $C_1 + C = B$. Замкнутость $C_1 + C$ следует из того, что множества C и C_1 выпуклы, замкнуты и ограничены (а значит, слабо компактны).

§ 2. Основные результаты

2.1. Связь слабой выпуклости с другими условиями. Сформулируем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Тогда множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R .

Следующая теорема показывает, что утверждение, обратное к теореме 2.1, справедливо тогда и только тогда, когда шар является порождающим множеством.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство. Следующие условия эквивалентны:

- 1) любое замкнутое множество $A \subset E$, удовлетворяющее опорному условию слабой выпуклости с константой R , является слабо выпуклым с константой R ;
- 2) шар пространства E является порождающим множеством.

Следующая теорема показывает, что метрическая проекция точки на множество, удовлетворяющее опорному условию слабой выпуклости, непрерывно зависит от проецируемой точки и множества при условии, что расстояние от точки до множества меньше константы слабой выпуклости.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Через Ω обозначим множество, состоящее из пар (u, A) , где $u \in E$, $A \subset E$. Для любых двух пар $(u_1, A_1) \in \Omega$, $(u_2, A_2) \in \Omega$ определим

$$\varrho_{\Omega}((u_1, A_1), (u_2, A_2)) = \|u_1 - u_2\| + h(A_1, A_2),$$

где $h(A_1, A_2)$ – расстояние Хаусдорфа между множествами A_1 и A_2 . Пусть $R > r > 0$. Через $\Omega(R, r)$ обозначим множество пар $(u, A) \in \Omega$ таких, что множество A замкнуто, удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R и $\varrho(u, A) \leq r$. Тогда функция $\pi: \Omega(R, r) \rightarrow A$ однозначна и равномерно непрерывна относительно метрики ϱ_{Ω} .

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $A \subset E$ – замкнутое множество, $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R ;
- 2) множество A является проксимально гладким с константой R ;
- 3) проекционное отображение $u \mapsto \pi(u, A)$ однозначно и непрерывно на множестве $U(R, A)$, определенном формулой (1.1).

Теорема 2.4 при дополнительном предположении о том, что модули выпуклости и гладкости пространства E имеют степенной вид, получена в работе [5].

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто, удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R и $A \neq E$. Тогда множество A слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с константой R .

Рис. 1

Пусть A – замкнутое множество в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве E , $A \neq E$. На диаграмме, представленной на рис. 1, показана взаимосвязь условия слабой выпуклости с другими рассматриваемыми здесь условиями.

2.2. Отделимость и локальная связность. Здесь также сформулируем теоремы и приведем пример.

ТЕОРЕМА 2.6 (об отделимости). Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство. Следующие условия эквивалентны:

1) для любых чисел $r > 0$, $R > r$ и любых непересекающихся множеств $A, C \subset E$ таких, что множество A замкнуто и слабо выпукло с константой R , а множество C сильно выпукло с константой r , найдутся точки $b, d \in E$, удовлетворяющие условиям

$$C \subset \mathfrak{B}_r(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A; \quad (2.1)$$

2) шар в E является порождающим множеством.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Тогда множество A локально связно и, более того, для любых $r \in (0, R]$, $a \in E$ множество $A \cap \text{int } \mathfrak{B}_r(a)$ связно (возможно, пусто).

Следующий пример показывает, что условие равномерной выпуклости или конечномерности пространства в теореме 2.7 существенно.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим банахово пространство l^∞ , элементами которого являются ограниченные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$. Норма в пространстве l^∞ определяется формулой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|.$$

Пусть c_0 – множество сходящихся к нулю последовательностей. Тогда множество c_0 замкнуто в пространстве l^∞ . Пусть $z = (1, 1, \dots) \in l^\infty$. Покажем, что множество $A = c_0 \cup \{z\}$ слабо выпукло с константой 1.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$, $\|x - z\| < 2$. Поскольку последовательность x сходится к нулю, существует номер $j > 1$ такой, что $x_j \neq 1$. Определим последовательность $y = (y_1, y_2, \dots)$, где

$$y_k = \begin{cases} x_k, & \text{если } k \neq j, \\ 1, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Тогда $y \in c_0$. Покажем, что $y \in D_1(x, z)$. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots) \in l^\infty$, $\|x - a\| \leq 1$, $\|z - a\| \leq 1$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $|x_k - a_k| \leq 1$, $|1 - a_k| \leq 1$. Следовательно, $|y_k - a_k| \leq 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $\|y - a\| \leq 1$. Поэтому $y \in D_1(x, z)$. Используя неравенства $y \neq x$, $y \neq z$, получаем $y \in \overset{\circ}{D}_1(x, z)$. Отсюда и из того, что множество c_0 выпукло, следует слабая выпуклость множества A с константой 1. Однако множество $A \cap \text{int } \mathfrak{B}_1(\frac{z}{2})$ не связно.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех связных компонент множества A и $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) множество A слабо выпукло с константой R ;
- 2) для любого $\lambda \in \Lambda$ множество A_λ слабо выпукло с константой R и для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо неравенство $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$.

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Тогда каждая связная компонента A_λ множества A является линейно связным множеством и, более того, любые две точки множества A_λ можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в A_λ .

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть в банаховом пространстве E задано множество A , пусть $R > 0$ и проекционное отображение $u \mapsto \pi(u, A)$ однозначно и непрерывно на множестве $U(R, A)$, определенном формулой (1.1). Тогда множество A локально связно. Более того, для любых точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| = 2r < 2R$, существует кривая $\Gamma \subset A \cap \mathfrak{B}_r(\frac{x+y}{2})$, соединяющая точки x и y .

Из теорем 2.4, 2.10 следует, что замкнутое проксимально гладкое множество в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве является локально связным.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть в банаховом пространстве E задано замкнутое множество A , $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – семейство всех связных компонент множества A и $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) отображение $u \mapsto \pi(u, A)$ однозначно и непрерывно на множестве $U(R, A)$;
- 2) для любого $\lambda \in \Lambda$ отображение $u \mapsto \pi(u, A_\lambda)$ однозначно и непрерывно на множестве $U(R, A_\lambda)$ и для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо неравенство $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$.

Из теорем 2.4, 2.11 следует, что для замкнутого множества A в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве условие проксимальной гладкости A с константой R эквивалентно условию проксимальной гладкости с константой R каждой связной компоненты множества A и неравенству $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$ для любых различных связных компонент A_λ, A_μ множества A .

2.3. Сохранение слабой выпуклости при предельном переходе и пересечении множеств. Сформулируем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.12. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть последовательность множеств $A_k \subset E$ сходится в смысле метрики Хаусдорфа к замкнутому множеству $A \subset E$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ множество A_k замкнуто и слабо выпукло с константой R_k . Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R > r > 0.$$

Тогда множество A слабо выпукло с константой r .

Следующая теорема утверждает, что если в условиях теоремы 2.12 наложить некоторые дополнительные условия на пространство E , то множество A будет слабо выпуклым с константой R .

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть банахово пространство E удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий:

- 1) пространство E равномерно выпукло и равномерно гладко, шар $\mathfrak{B}_1(0)$ является порождающим множеством;
- 2) пространство E конечномерно.

Пусть последовательность множеств $A_k \subset E$ сходится в смысле метрики Хаусдорфа к замкнутому множеству $A \subset E$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ множество A_k замкнуто и слабо выпукло с константой R_k . Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$. Тогда множество A слабо выпукло с константой R .

ТЕОРЕМА 2.14. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть последовательность множеств $A_k \subset E$ сходится в смысле метрики Хаусдорфа к замкнутому множеству $A \subset E$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ множество A_k замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R_k . Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R$. Тогда множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R .

ТЕОРЕМА 2.15. Пусть E – банахово пространство.

1) Если для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $A_\lambda \subset E$ слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с константой R , то множество $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с константой R .

2) Если множество $A \subset E$ слабо выпукло (по Виалю) с константой R , то для любых $r \in (0, R]$, $a \in E$ множество $A \cap \mathfrak{B}_r(a)$ пусто или слабо выпукло с константой R .

Заметим, что если условие слабой выпуклости по Ефимову–Стечкину заменить условием слабой выпуклости (по Виалю) или условием проксимальной гладкости, то утверждение 1) теоремы 2.15 не будет справедливым. В утверждении 2) теоремы 2.15 условие слабой выпуклости не может быть заменено условием проксимальной гладкости.

§ 3. Вспомогательные результаты

3.1. Свойства равномерно выпуклых и равномерно гладких пространств. Сформулируем и докажем следующие леммы.

ЛЕММА 3.1 [17, лемма 1.e.8]. Пусть E – равномерно выпуклое нормированное пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть $\varepsilon \in (0, 2]$, $\lambda \in (0, 1)$. Тогда $\delta_E(\lambda\varepsilon) \leq \lambda\delta_E(\varepsilon)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $x_1, x_2 \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$, функционалы $p_1, p_2 \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\langle p_i, x_i \rangle = 1$ при $i = 1, 2$ и $\|p_1 - p_2\| < 2\delta_E(\varepsilon)$. Тогда $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что доказываемое неравенство несправедливо, т. е. $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$. Тогда по определению модуля выпуклости имеем $1 - \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\| \geq \delta_E(\varepsilon)$. Отсюда и из неравенства $\|p_1 - p_2\| < 2\delta_E(\varepsilon)$ получаем

$$\begin{aligned} 2 - \|x_1 + x_2\| &> \|p_1 - p_2\| \geq \langle p_2 - p_1, x_2 \rangle = \langle p_2, x_2 \rangle + \langle p_1, x_1 \rangle - \langle p_1, x_1 + x_2 \rangle \\ &= 2 - \langle p_1, x_1 + x_2 \rangle \geq 2 - \|x_1 + x_2\|. \end{aligned}$$

Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть в равномерно выпуклом банаховом пространстве E заданы последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k\| = \alpha > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k\| = \beta > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\|a_k\| + \|b_k\| - \|a_k + b_k\|) = 0.$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{a_k}{\alpha} - \frac{b_k}{\beta} \right\| = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $a'_k = \frac{a_k}{\|a_k\|}$, $b'_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$. Зафиксируем произвольный индекс $k \in \mathbb{N}$ и покажем, что

$$\|a_k + b_k\| \leq \|a_k\| + \|b_k\| - \min\{\|a_k\|, \|b_k\|\}(2 - \|a'_k + b'_k\|). \quad (3.1)$$

Пусть для определенности $\|a_k\| \leq \|b_k\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|a_k + b_k\| &= \|\|a_k\|a'_k + \|b_k\|b'_k\| \leq \|a_k\| \|a'_k + b'_k\| + (\|b_k\| - \|a_k\|) \|b'_k\| \\ &= \|a_k\| + \|b_k\| - \|a_k\| (2 - \|a'_k + b'_k\|), \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (3.1) в случае $\|a_k\| \leq \|b_k\|$. Обратный случай рассматривается аналогично.

Из неравенства (3.1) и условий леммы следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a'_k + b'_k\| = 2$. Поэтому в силу равномерной выпуклости пространства E и равенств $\|a'_k\| = \|b'_k\| = 1$ справедливо соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a'_k - b'_k\| = 0$. Отсюда и из условий леммы получаем требуемое утверждение.

Следующая лемма может рассматриваться как равномерный вариант леммы С. Б. Стечкина [18, лемма 2].

ЛЕММА 3.4. Пусть E – банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $a, b, x \in E$ и число $r > 0$ такие, что $\|a - x\| \leq r \leq \|b - x\|$. Пусть $c = a + \frac{r}{\|a - b\|}(a - b)$. Тогда

$$2\delta_E\left(\frac{\|x - c\|}{r}\right) \min\{r, \|a - b\|\} \leq r + \|a - b\| - \|b - x\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varepsilon = \frac{\|c-x\|}{r}$. Поскольку $\frac{\|a-x\|}{r} \leq 1$ и выполнены равенства $\left\| \frac{a-x}{r} - \frac{b-a}{\|a-b\|} \right\| = \frac{\|c-x\|}{r} = \varepsilon$, по определению модуля выпуклости имеем

$$\left\| \frac{a-x}{r} + \frac{b-a}{\|a-b\|} \right\| \leq 2(1 - \delta_E(\varepsilon)). \quad (3.2)$$

Рассмотрим случай $\|a-b\| \leq r$. Поскольку

$$b-x = \|a-b\| \left(\frac{a-x}{r} + \frac{b-a}{\|a-b\|} \right) + \frac{r-\|a-b\|}{r}(a-x),$$

в силу неравенств $\frac{\|a-x\|}{r} \leq 1$ и (3.2) получаем

$$\|b-x\| \leq 2\|a-b\|(1 - \delta_E(\varepsilon)) + r - \|a-b\|,$$

что доказывает требуемое неравенство в случае $\|a-b\| \leq r$.

Рассмотрим теперь противоположный случай: $\|a-b\| > r$. Поскольку

$$b-x = r \left(\frac{a-x}{r} + \frac{b-a}{\|a-b\|} \right) + \frac{\|a-b\|-r}{\|a-b\|}(b-a),$$

в силу неравенства (3.2) имеем

$$\|b-x\| \leq 2r(1 - \delta_E(\varepsilon)) + \|a-b\| - r.$$

Следовательно, доказываемое неравенство выполнено и в этом случае.

ЛЕММА 3.5. Пусть E – равномерно гладкое банахово пространство с модулем гладкости ϱ_E . Пусть заданы векторы $d \in E$, $z \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$ и функционал $p \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ такие, что $\langle p, z \rangle = 1$. Тогда $\|z-d\| \leq 1 - \langle p, d \rangle + 2\varrho_E(\|d\|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [12, гл. 2, § 4, теорема 1], что норма равномерно гладкого пространства дифференцируема на единичной сфере и выполнено равенство $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|z+td\| - \|z\|}{t} = \langle p, d \rangle$. Поскольку $\|z+td\| \leq (1-t)\|z\| + t\|z+d\|$ при $t \in (0, 1)$, то $\|z+d\| - \|z\| \geq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\|z+td\| - \|z\|}{t} = \langle p, d \rangle$. Отсюда по определению модуля гладкости получаем

$$2\varrho_E(\|d\|) \geq \|z+d\| + \|z-d\| - 2 \geq \|z-d\| + \langle p, d \rangle - 1.$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [18, следствие из теоремы 5]. Пусть A – замкнутое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве E . Тогда множество $T(A)$ точек $u \in E$, для которых множество $\pi(u, A)$ состоит из одного элемента, всюду плотно в E .

ЛЕММА 3.6. Пусть в банаховом пространстве заданы выпуклые замкнутые ограниченные множества A и B . Тогда $A+B \overset{*}{=} B=A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении теоремы об отделимости.

Следуя работе [19, § 3], получим лемму о непрерывности геометрической разности.

ЛЕММА 3.7. Пусть A_1, A_2, C_1, C_2 – выпуклые замкнутые множества в банаховом пространстве E . Пусть существуют положительные числа β_1, β_2, γ и векторы $a_1, a_2 \in E$ такие, что $h(A_1, A_2) + h(C_1, C_2) < \min\{\beta_1, \beta_2\}$ и

$$\mathfrak{B}_{\beta_i}(a_i) \subset A_i \stackrel{*}{\subset} C_i \subset \mathfrak{B}_{\beta_i \gamma}(a_i), \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$h(A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1, A_2 \stackrel{*}{\subset} C_2) \leq \gamma(h(A_1, A_2) + h(C_1, C_2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\min\{\beta_1, \beta_2\} - h(A_1, A_2) - h(C_1, C_2))$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Обозначим $h_A = h(A_1, A_2) + \varepsilon$, $h_C = h(C_1, C_2) + \varepsilon$. Тогда $A_1 \subset A_2 + h_A \mathfrak{B}_1(0)$, $C_2 \subset C_1 + h_C \mathfrak{B}_1(0)$. Следовательно, используя лемму 3.6, получаем

$$A_1 \stackrel{*}{\subset} h_A \mathfrak{B}_1(0) \subset A_2 + h_A \mathfrak{B}_1(0) \stackrel{*}{\subset} h_A \mathfrak{B}_1(0) = A_2.$$

Поэтому

$$A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1 \stackrel{*}{\subset} (h_A + h_C) \mathfrak{B}_1(0) = (A_1 \stackrel{*}{\subset} h_A \mathfrak{B}_1(0)) \stackrel{*}{\subset} (C_1 + h_C \mathfrak{B}_1(0)) \subset A_2 \stackrel{*}{\subset} C_2. \quad (3.3)$$

Обозначим $h = h_A + h_C$, $F_1 = A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1 - a_1$. Поскольку $\beta_1 \mathfrak{B}_1(0) \subset F_1 \subset \beta_1 \gamma \mathfrak{B}_1(0)$, $h < h(A_1, A_2) + h(C_1, C_2) + 2\varepsilon_0 \leq \beta_1$, то $F_1 \stackrel{*}{\subset} h \mathfrak{B}_1(0) \supset F_1 \stackrel{*}{\subset} \frac{h}{\beta_1} F_1 = (1 - \frac{h}{\beta_1}) F_1$. Следовательно,

$$F_1 = \left(1 - \frac{h}{\beta_1}\right) F_1 + \frac{h}{\beta_1} F_1 \subset F_1 \stackrel{*}{\subset} h \mathfrak{B}_1(0) + \frac{h}{\beta_1} F_1 \subset F_1 \stackrel{*}{\subset} h \mathfrak{B}_1(0) + h \gamma \mathfrak{B}_1(0).$$

Отсюда и из соотношений (3.3) получаем

$$\begin{aligned} A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1 &= F_1 + a_1 \subset F_1 \stackrel{*}{\subset} h \mathfrak{B}_1(0) + h \gamma \mathfrak{B}_1(0) + a_1 \\ &= A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1 \stackrel{*}{\subset} h \mathfrak{B}_1(0) + h \gamma \mathfrak{B}_1(0) \subset A_2 \stackrel{*}{\subset} C_2 + h \gamma \mathfrak{B}_1(0). \end{aligned}$$

Аналогично, $A_2 \stackrel{*}{\subset} C_2 \subset A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1 + h \gamma \mathfrak{B}_1(0)$. Поэтому

$$h(A_1 \stackrel{*}{\subset} C_1, A_2 \stackrel{*}{\subset} C_2) \leq h \gamma = \gamma(h(A_1, A_2) + h(C_1, C_2) + 2\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.8. Пусть в рефлексивном банаховом пространстве задано замкнутое ограниченное строго выпуклое множество A , и пусть $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$. Тогда множество

$$\operatorname{Argmax}_{x \in A} \langle p, x \rangle = \{a \in A: \langle p, a \rangle \geq \langle p, x \rangle \quad \forall x \in A\}$$

состоит из одного элемента, который будем обозначать через $\operatorname{argmax}_{x \in A} \langle p, x \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование элемента множества $\operatorname{Argmax}_{x \in A} \langle p, x \rangle$ следует из слабой компактности множества A . Единственность элемента этого множества вытекает из строгой выпуклости A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 [8, лемма 1.13.6]. Пусть в рефлексивном банаховом пространстве заданы замкнутые ограниченные строго выпуклые множества A и C , и пусть $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$. Тогда

$$\operatorname{argmax}_{x \in A} \langle p, x \rangle + \operatorname{argmax}_{x \in C} \langle p, x \rangle = \operatorname{argmax}_{x \in A+C} \langle p, x \rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 [8, теорема 4.1.3]. Пусть B – выпуклое замкнутое ограниченное множество в рефлексивном банаховом пространстве E . Множество B является порождающим тогда и только тогда, когда для любого непустого множества C вида (1.3), для любого функционала $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ и любой точки $x_p^C \in \text{Argmax}_{x \in C} \langle p, x \rangle$ существует точка $x_p^B \in \text{Argmax}_{x \in B} \langle p, x \rangle$ такая, что

$$C \subset B + x_p^C - x_p^B.$$

ЛЕММА 3.9. Пусть E – рефлексивное банахово пространство, шар в E является строго выпуклым порождающим множеством. Пусть множество $C \subset E$ сильно выпукло с константой R . Пусть заданы точки $a \in E \setminus C$, $c \in \pi(a, C)$. Тогда

$$C \subset \mathfrak{B}_R \left(c + R \frac{c-a}{\|c-a\|} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы об отделимости [20, теорема 3.4] существует функционал $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ такой, что

$$\langle p, x \rangle < \langle p, y \rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in \text{int } \mathfrak{B}_{\|c-a\|}(a).$$

Отсюда и из включения $c \in C \cap \mathfrak{B}_{\|c-a\|}(a)$ следует, что

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, c \rangle \leq \langle p, y \rangle \quad \forall x \in C, \quad \forall y \in \mathfrak{B}_{\|c-a\|}(a).$$

Поэтому $c \in \text{Argmax}_{x \in C} \langle p, x \rangle$, $c \in \text{Argmax}_{y \in \mathfrak{B}_{\|c-a\|}(a)} \langle -p, y \rangle$ и, следовательно, $-R \frac{c-a}{\|c-a\|} \in \text{Argmax}_{x \in \mathfrak{B}_R(0)} \langle p, x \rangle$. Поскольку множество $B = \mathfrak{B}_R(0)$ строго выпукло, то множество $\text{Argmax}_{x \in B} \langle p, x \rangle$ состоит из одного элемента. Применяя предложение 3.3, получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4 [11], [8, теорема 4.2.8]. Пусть B – выпуклое замкнутое ограниченное множество в рефлексивном банаховом пространстве E . Пусть $\text{int } B \neq \emptyset$. Пусть для любого вектора $b \in E$ такого, что $\text{int } C \neq \emptyset$, где $C = (B + b) \cap (B - b)$, существует выпуклое замкнутое множество $C_1 \subset E$, для которого выполнено равенство $C_1 + C = B$. Тогда множество B является порождающим.

3.2. Свойства сильно выпуклого отрезка. Некоторые свойства сильно выпуклого отрезка рассмотрены в работах [6], [8].

ЛЕММА 3.10. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1 такие, что $\|x_0 - x_1\| \leq 2R$. Тогда

$$D_R(x_0, x_1) = \mathfrak{B}_R(0) \stackrel{*}{*} (\mathfrak{B}_R(0) \stackrel{*}{*} \{x_0, x_1\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений 1.3, 1.7 и замечания 1.5 следует, что

$$\begin{aligned} D_R(x_0, x_1) &= \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(-a)} \mathfrak{B}_R(-a) \\ &= \bigcap_{a \in \mathfrak{B}_R(0) \stackrel{*}{*} \{x_0, x_1\}} \mathfrak{B}_R(-a) = \mathfrak{B}_R(0) \stackrel{*}{*} (\mathfrak{B}_R(0) \stackrel{*}{*} \{x_0, x_1\}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.11. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1, y_0, y_1 . Пусть $\|x_0 - x_1\| \leq 2R$ и $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда $D_R(y_0, y_1) \subset D_R(x_0, x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in E$, $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(a)$, то $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Следовательно, $D_R(y_0, y_1) \subset \mathfrak{B}_R(a)$.

ЛЕММА 3.12. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки a, x_0, x_1 такие, что $x_0, x_1 \in \mathfrak{B}_r(a)$, $r \leq R$. Тогда $D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_r(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует такая точка $x \in D_R(x_0, x_1)$, что $x \notin \mathfrak{B}_r(a)$. Обозначим

$$b = a + \frac{R-r}{\|a-x\|}(a-x). \quad (3.4)$$

Тогда имеем $\max\{\|x_0 - b\|, \|x_1 - b\|\} \leq \max\{\|x_0 - a\|, \|x_1 - a\|\} + \|b - a\| \leq r + R - r = R$. Следовательно, $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R(b)$, а значит, $x \in D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R(b)$, т.е. $\|b - x\| \leq R$. С другой стороны, из равенства (3.4) и условия $x \notin \mathfrak{B}_r(a)$ получаем обратное неравенство: $\|b - x\| = \|a - x\| + R - r > R$.

ЛЕММА 3.13. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1 такие, что $\|x_0 - x_1\| \leq 2r$, $r < R$. Тогда $D_R(x_0, x_1) \subset D_r(x_0, x_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 3.12 и определения 1.3.

ЛЕММА 3.14. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1 , и пусть $\frac{\|x_0 - x_1\|}{2} = r \leq R$. Тогда

$$D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_r\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 3.13 и использовании включения $D_r(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_r\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$.

ЛЕММА 3.15. Пусть в нормированном пространстве E заданы точки x_0, x_1, y_0, y_1 , и пусть $\frac{\|x_0 - x_1\|}{2} \leq R$, $y_0, y_1 \in D_R(x_0, x_1)$. Тогда $\|y_0 - y_1\| \leq \|x_0 - x_1\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 3.14.

Далее часто будет использовано следствие теоремы Хана–Банаха [20, теорема 3.2]. Для любого вектора x из банахова пространства E существует функционал $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ такой, что $\langle p, x \rangle = \|x\|$.

ЛЕММА 3.16. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы числа $R > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и точки $x_0, x_1, a \in E$. Пусть $\|x_0 - a\| = R$, функционал $p_0 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ удовлетворяет условию $\langle p_0, x_0 - a \rangle = \|x_0 - a\|$, и пусть $\|x_1 - a\| \leq R(1 - \varepsilon)$. Тогда $\text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x_0; D_R(x_0, x_1))$, где $\beta = \delta_E(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный функционал $p_1 \in \text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0)$. Обозначим $p = \frac{p_1}{\|p_1\|}$. Заметим, что

$$\|p - p_0\| \leq \|p - p_1\| + \|p_1 - p_0\| < \|p - p_1\| + \beta = |1 - \|p_1\|| + \beta = |\|p_0\| - \|p_1\|| + \beta < 2\beta.$$

Определим векторы $y_0, y \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$ из условий $\langle p_0, y_0 \rangle = 1$, $\langle p, y \rangle = 1$. Из соотношений $\|p - p_0\| < 2\beta = 2\delta_E(\varepsilon)$ в силу леммы 3.2 следует, что

$$\|y - y_0\| < \varepsilon.$$

Обозначим $d = R(y - y_0)$, $z_0 = x_0 + d$, $z_1 = x_1 + d$. Тогда $\|d\| < R\varepsilon$.

Поскольку $\langle p_0, x_0 - a \rangle = \|x_0 - a\| = R$, $\|p_0\| = 1$, то, используя равномерную выпуклость пространства E , получаем равенство $x_0 - a = Ry_0$. Поэтому $z_0 = x_0 + R(y - y_0) = a + Ry$ и, следовательно,

$$z_0 \in \mathfrak{B}_R(a). \quad (3.5)$$

Так как $\|x_1 - a\| \leq R(1 - \varepsilon)$, то $\|a - z_1\| \leq \|x_1 - a\| + \|d\| \leq R$, т.е. $z_1 \in \mathfrak{B}_R(a)$. Отсюда и из включения (3.5) следует, что $D_R(z_0, z_1) \subset \mathfrak{B}_R(a)$. Поэтому $N(z_0; \mathfrak{B}_R(a)) \subset N(z_0; D_R(z_0, z_1))$. Отсюда и из определения вектора y получаем

$$p \in N(y; \mathfrak{B}_1(0)) = N(a + Ry; \mathfrak{B}_R(a)) = N(z_0; \mathfrak{B}_R(a)) \subset N(z_0; D_R(z_0, z_1)).$$

Следовательно, $p_1 \in N(z_0; D_R(z_0, z_1))$.

ЛЕММА 3.17. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $x_0, x_1 \in E$ такие, что $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$, и пусть функционал $p_0 \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ удовлетворяет условию $\langle p_0, x_0 - x_1 \rangle = \|x_0 - x_1\|$. Тогда $\text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x_0; D_R(x_0, x_1))$, где $\beta = \delta_E(\varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{1}{R} \min\{\|x_0 - x_1\|, 2R - \|x_0 - x_1\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим вектор $a = x_0 + \frac{R}{\|x_0 - x_1\|}(x_1 - x_0)$. Тогда $\langle p_0, x_0 - a \rangle = \|x_0 - a\|$ и

$$\begin{aligned} \|x_1 - a\| &= |R - \|x_0 - x_1\|| = \max\{R - \|x_0 - x_1\|, \|x_0 - x_1\| - R\} \\ &= R - \min\{\|x_0 - x_1\|, 2R - \|x_0 - x_1\|\} = R(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.16, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.18. Пусть в конечномерном банаховом пространстве E заданы точки $x_0, x_1 \in E$ такие, что $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$. Тогда $\text{int } N(x_0; D_R(x_0, x_1)) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда, поскольку пространство E является конечномерным, а конус $N(x_0; D_R(x_0, x_1))$ – выпуклым, существует собственное линейное подпространство пространства E , содержащее конус $N(x_0; D_R(x_0, x_1))$. Следовательно, существует вектор $y \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$ такой, что

$$\langle p, y \rangle = 0 \quad \forall p \in N(x_0; D_R(x_0, x_1)). \quad (3.6)$$

Определим число $t_0 > 0$ из условия

$$\max\{\|x_0 - x_1 + 2t_0y\|, \|x_0 - x_1 - 2t_0y\|\} = 2R. \quad (3.7)$$

Из непрерывности функции $\varphi(t) = \max\{\|x_0 - x_1 + 2ty\|, \|x_0 - x_1 - 2ty\|\}$, а также из соотношений $\varphi(0) < 2R$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ следует существование числа t_0 , удовлетворяющего равенству (3.7).

Из условия (3.7) следует, что $\|x_0 - x_1 + 2t_0y\| = 2R$ или $\|x_0 - x_1 - 2t_0y\| = 2R$. Рассмотрим случай $\|x_0 - x_1 + 2t_0y\| = 2R$ (случай $\|x_0 - x_1 - 2t_0y\| = 2R$

рассматривается аналогично). Определим функционал $p_1 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ из условия $\langle p_1, x_0 - x_1 + 2t_0y \rangle = \|x_0 - x_1 + 2t_0y\|$. Тогда

$$\begin{aligned} p_1 \in N(x_0 - x_1 + 2t_0y; \mathfrak{B}_{2R}(0)) &= N\left(\frac{x_0 - x_1}{2} + t_0y; \mathfrak{B}_R(0)\right) \\ &= N\left(x_0; \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - t_0y\right)\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку $\langle p_1, x_0 - x_1 \rangle \leq \|x_0 - x_1\| < 2R = \langle p_1, x_0 - x_1 + 2t_0y \rangle$, то $\langle p_1, y \rangle \neq 0$. Отсюда и из условия (3.6) получаем, что

$$p_1 \notin N(x_0; D_R(x_0, x_1)). \quad (3.9)$$

С другой стороны, из равенства (3.7) следует, что $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - t_0y\right)$. Поэтому согласно определению сильно выпуклого отрезка имеем $D_R(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - t_0y\right)$ и, следовательно, $N(x_0; \mathfrak{B}_R\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - t_0y\right)) \subset N(x_0; D_R(x_0, x_1))$. Последнее включение противоречит условиям (3.8), (3.9).

ЛЕММА 3.19. Пусть в банаховом пространстве E заданы выпуклое множество A и вектор $x_0 \in A$. Пусть $p_0 \in E^*$, $\beta > 0$, $\text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x_0; A)$. Тогда

$$\langle p_0, x_0 - x \rangle \geq \beta \|x_0 - x\| \quad \forall x \in A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in A$, $\beta' \in (0, \beta)$. Определим функционал $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ таким образом, чтобы $\langle p, x_0 - x \rangle = \|x_0 - x\|$. Поскольку $p_0 - \beta'p \in \text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x_0; A)$, $x \in A$, то $\langle p_0 - \beta'p, x_0 - x \rangle \geq 0$. Следовательно, имеем $\langle p_0, x_0 - x \rangle \geq \langle \beta'p, x_0 - x \rangle = \beta' \|x_0 - x\|$. Переходя к пределу при $\beta' \rightarrow \beta - 0$, получаем доказываемое утверждение.

ЛЕММА 3.20 [8, лемма 4.4.4]. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $x_0, x_1 \in E$, и пусть $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$, $\varrho = R\delta_E\left(\frac{\|x_0 - x_1\|}{R}\right)$. Тогда

$$\mathfrak{B}_\varrho\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \subset D_R(x_0, x_1).$$

ЛЕММА 3.21. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E . Пусть множество $A \subset E$ сильно выпукло с константой R и заданы число $\varepsilon \in (0, 2)$, точки $a_1, a_2 \in A$ и функционалы $p_1, p_2 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ такие, что $\|p_1 - p_2\| < \frac{4\delta_E(\varepsilon)}{\varepsilon}$, $p_i \in N(a_i; A)$ при $i = 1, 2$. Тогда $\|a_1 - a_2\| < R\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\|a_1 - a_2\| \geq R\varepsilon$. Обозначим $R' = \frac{\|a_1 - a_2\|}{\varepsilon}$, $\varrho = \frac{\|a_1 - a_2\|}{\varepsilon} \delta_E(\varepsilon)$. Поскольку $R' \geq R$, $\varrho = R'\delta_E\left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{R'}\right)$, то в силу лемм 3.13, 3.20 и определений 1.1, 1.3 справедливы включения

$$\mathfrak{B}_\varrho\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \subset D_{R'}(a_1, a_2) \subset D_R(a_1, a_2) \subset A.$$

Отсюда и из включений $p_i \in N(a_i; A)$ получаем

$$\langle p_i, a_i \rangle = \max_{x \in A} \langle p_i, x \rangle \geq \max_{x \in \mathfrak{B}_\varrho\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)} \langle p_i, x \rangle = \frac{1}{2} \langle p_i, a_1 + a_2 \rangle + \varrho, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому $\langle p_1, a_1 - a_2 \rangle \geq 2\varrho$, $\langle p_2, a_2 - a_1 \rangle \geq 2\varrho$. Суммируя последние два неравенства, получаем $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2 \rangle \geq 4\varrho$. Следовательно, $\|p_1 - p_2\| \geq \frac{4\varrho}{\|a_1 - a_2\|} = \frac{4\delta_E(\varepsilon)}{\varepsilon}$, что противоречит неравенству $\|p_1 - p_2\| < \frac{4\delta_E(\varepsilon)}{\varepsilon}$.

ЛЕММА 3.22. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть заданы числа λ, μ такие, что $0 < \lambda < \mu < 1$. Тогда многозначное отображение $(R, x, y) \mapsto D_R(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица в смысле метрики Хаусдорфа на множестве

$$\{(R, x, y) : R > 0, x, y \in E, 2\lambda R \leq \|x - y\| \leq 2\mu R\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы точки $x_1, y_1, x_2, y_2 \in E$ и положительные числа R_1, R_2 такие, что $2\lambda R_i \leq \|x_i - y_i\| \leq 2\mu R_i$ при $i = 1, 2$. Для $i = 1, 2$ определим множества

$$F_i = \mathfrak{B}_{R_i}(0) \stackrel{*}{=} \{x_i, y_i\}, \quad D_i = D_{R_i}(x_i, y_i),$$

точки $a_i = \frac{x_i + y_i}{2}$ и числа

$$\beta_i = R_i - \frac{\|x_i - y_i\|}{2}, \quad \varrho_i = R_i \delta_E \left(\frac{\|x_i - y_i\|}{R_i} \right),$$

$$\delta = |R_1 - R_2| + \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}, \quad L = \frac{3}{(1 - \mu)\delta_E(2\lambda)}.$$

Покажем, что

$$h(D_1, D_2) \leq L\delta. \quad (3.10)$$

Рассмотрим случай

$$2\delta < (1 - \mu)\delta_E(2\lambda) \min\{R_1, R_2\}. \quad (3.11)$$

Поскольку

$$h(\mathfrak{B}_{R_1}(0), \mathfrak{B}_{R_2}(0)) + h(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) \leq \delta < \min\{\beta_1, \beta_2\},$$

$$\mathfrak{B}_{\beta_i}(-a_i) \subset F_i \subset \mathfrak{B}_{R_i}(-a_i) \subset \frac{1}{1 - \mu} \mathfrak{B}_{\beta_i}(-a_i),$$

то в силу леммы 3.7 справедливо неравенство $h(F_1, F_2) \leq \frac{\delta}{1 - \mu}$. Следовательно,

$$h(\mathfrak{B}_{R_1}(0), \mathfrak{B}_{R_2}(0)) + h(F_1, F_2) \leq \frac{2\delta}{1 - \mu}. \quad (3.12)$$

Используя монотонность модуля выпуклости, получаем неравенства $\delta_E(2\lambda) \leq \delta_E\left(\frac{\|x_i - y_i\|}{R_i}\right)$. Поэтому в силу неравенств (3.11), (3.12) имеем

$$h(\mathfrak{B}_{R_1}(0), \mathfrak{B}_{R_2}(0)) + h(F_1, F_2) < \delta_E(2\lambda) \min\{R_1, R_2\} \leq \min\{\varrho_1, \varrho_2\}. \quad (3.13)$$

В силу лемм 3.14, 3.20 справедливы включения

$$\mathfrak{B}_{\varrho_i}(a_i) \subset D_i \subset \mathfrak{B}_{R_i}(a_i) \subset \frac{1}{\delta_E(2\lambda)} \mathfrak{B}_{\varrho_i}(a_i). \quad (3.14)$$

Согласно лемме 3.10 справедливы равенства $D_i = \mathfrak{B}_{R_i}(0) \overset{*}{=} F_i$. В силу леммы 3.7 из соотношений (3.12)–(3.14) следует, что

$$h(D_1, D_2) \leq \frac{1}{\delta_E(2\lambda)} (h(\mathfrak{B}_{R_1}(0), \mathfrak{B}_{R_2}(0)) + h(F_1, F_2)) \leq \frac{2\delta}{(1-\mu)\delta_E(2\lambda)} \leq L\delta.$$

Пусть теперь $2\delta \geq (1-\mu)\delta_E(2\lambda) \min\{R_1, R_2\}$. Для определенности будем предполагать, что $R_1 \leq R_2$. Тогда

$$2\delta \geq (1-\mu)\delta_E(2\lambda)R_1. \quad (3.15)$$

Поскольку $D_1 \subset \mathfrak{B}_{R_1}(a_1)$, $a_2 \in D_2$, то $D_1 \subset D_2 + (\|a_1 - a_2\| + R_1)\mathfrak{B}_1(0)$. Аналогично выполнено $D_2 \subset D_1 + (\|a_1 - a_2\| + R_2)\mathfrak{B}_1(0)$. Следовательно,

$$h(D_1, D_2) \leq \|a_1 - a_2\| + R_2 \leq \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\} + R_2.$$

Из неравенства (3.15) следует, что $R_2 \leq R_2 - R_1 + \frac{2\delta}{(1-\mu)\delta_E(2\lambda)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} h(D_1, D_2) &\leq \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\} + R_2 - R_1 + \frac{2\delta}{(1-\mu)\delta_E(2\lambda)} \\ &= \left(1 + \frac{2}{(1-\mu)\delta_E(2\lambda)}\right)\delta \leq L\delta. \end{aligned}$$

Итак, в любом случае справедливо неравенство (3.10).

ЛЕММА 3.23. Пусть E – конечномерное банахово пространство. Пусть заданы точки $x_0, y_0 \in E$ и число $R_0 > \frac{\|x_0 - y_0\|}{2}$. Тогда многозначное отображение $(R, x, y) \mapsto D_R(x, y)$ является полунепрерывным сверху в точке (R_0, x_0, y_0) , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $R \in \mathbb{R}$ и любых $x, y \in E$ выполнено

$$|R - R_0| + \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \delta \implies D_R(x, y) \subset D_{R_0}(x_0, y_0) + \mathfrak{B}_\varepsilon(0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя начало доказательства леммы 3.22, получаем, что многозначное отображение $F(R, x, y) = \mathfrak{B}_R(0) \overset{*}{=} \{x, y\}$ непрерывно в точке (R_0, x_0, y_0) . Согласно лемме 3.10 справедлива формула $D_R(x, y) = \mathfrak{B}_R(0) \overset{*}{=} F(R, x, y)$. Отсюда, следуя доказательству теоремы 2.8.2 из [8], получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.24. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы числа $R > 0$, $\varepsilon \in (0, 2]$ и векторы $b, x, y \in E$ такие, что $\|b\| \leq R$, $\|x - b\| \leq R(1 - 2\varepsilon)$, $y \in D_R(0, x)$, $\|y\| \geq R\varepsilon$. Тогда $\|y - b\| \leq R(1 - \varepsilon\delta_E(\varepsilon))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|b\| \leq R(1 - \varepsilon)$, то $\{0, x\} \subset \mathfrak{B}_{R(1-\varepsilon)}(b)$. Следовательно, согласно лемме 3.12 имеем $y \in D_R(0, x) \subset \mathfrak{B}_{R(1-\varepsilon)}(b)$, а значит, $\|y - b\| \leq R(1 - \varepsilon) \leq R(1 - \varepsilon\delta_E(\varepsilon))$, т. е. доказываемое неравенство выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\|b\| > R(1 - \varepsilon)$.

Из соотношений $R(1 - \varepsilon) < \|b\| \leq R$, $\|x - b\| \leq R(1 - 2\varepsilon)$ следует, что

$$R\varepsilon < \|x\| < R(2 - \varepsilon). \quad (3.16)$$

Определим число

$$\gamma = 1 + \frac{R\varepsilon}{\|x\|}.$$

Поскольку $\|\gamma x - b\| \leq \|x - b\| + (\gamma - 1)\|x\| < R$, то $\gamma x \in \mathfrak{B}_R(b)$. Отсюда и из включения $0 \in \mathfrak{B}_R(b)$ по определению сильно выпуклого отрезка получаем включение $D_R(0, \gamma x) \subset \mathfrak{B}_R(b)$. Используя лемму 3.12 и неравенство $\gamma > 1$, получаем $D_{R\gamma}(0, \gamma x) \subset \mathfrak{B}_R(b)$. Следовательно, $\gamma y \in \gamma D_R(0, x) = D_{R\gamma}(0, \gamma x) \subset \mathfrak{B}_R(b)$. Обозначая $z = \gamma y - b$, получаем неравенство $\|z\| \leq R$.

Из неравенств $\|y\| \geq R\varepsilon$, $\gamma > 1$ получаем соотношения $\|z + b\| = \gamma\|y\| \geq \|y\| \geq R\varepsilon$. Отсюда и из соотношений $\|b\| \leq R$, $\|z\| \leq R$ по определению модуля выпуклости имеем

$$\frac{\|z - b\|}{R} \leq 2 - 2\delta_E(\varepsilon).$$

Определим число

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\gamma}.$$

Из неравенств (3.16) следует, что $\gamma \in (1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, 2)$, а значит, $\lambda \in (\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|y - b\| &= \|(1 - 2\lambda)z + \lambda(z - b)\| \leq (1 - 2\lambda)\|z\| + \lambda\|z - b\| \\ &\leq (1 - 2\lambda)R + 2\lambda R(1 - \delta_E(\varepsilon)) = R(1 - 2\lambda\delta_E(\varepsilon)) < R(1 - \varepsilon\delta_E(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.25. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло с модулем выпуклости δ_E . Пусть заданы точки $x_0, x_1 \in E$ и числа $R > 0$, $r \in [\frac{R}{2}, R)$ такие, что $0 < \|x_1 - x_0\| \leq 2r$. Пусть $z \in D_R(x_0, x_1)$, $\min\{\|z - x_0\|, \|z - x_1\|\} \geq R\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{R-r}{R}\delta_E(\frac{\|x_1 - x_0\|}{2R})$. Тогда $\mathfrak{B}_\gamma(z) \subset D_r(x_0, x_1)$, где $\gamma = R\varepsilon\delta_E(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует точка $w \in \mathfrak{B}_\gamma(z)$ такая, что $w \notin D_r(x_0, x_1)$. Тогда в силу определения 1.3 существует точка $a \in E$ такая, что $\{x_0, x_1\} \subset \mathfrak{B}_r(a)$, $w \notin \mathfrak{B}_r(a)$. Для определенности будем считать, что

$$\left\| \frac{x_1 - a}{r} - \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\| \geq \left\| \frac{x_0 - a}{r} - \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\|. \quad (3.17)$$

Если неравенство (3.17) не выполнено, то поменяем x_0, x_1 местами и неравенство (3.17) будет выполнено. Поскольку

$$\frac{\|x_1 - x_0\|}{R} \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{r} \leq \left\| \frac{x_1 - a}{r} - \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\| + \left\| \frac{x_0 - a}{r} - \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\|,$$

из неравенства (3.17) следует, что

$$\left\| \frac{x_1 - a}{r} - \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\| \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}.$$

Отсюда и из неравенства $\|x_1 - a\| \leq r$ по определению модуля выпуклости получаем неравенство

$$\left\| \frac{x_1 - a}{r} + \frac{w - a}{\|w - a\|} \right\| \leq 2 - 2\delta_E\left(\frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}\right). \quad (3.18)$$

Определим вектор

$$a' = a - \frac{R - r}{\|w - a\|}(w - a).$$

Из условия $w \notin \mathfrak{B}_r(a)$ следует, что

$$\|w - a'\| > R. \quad (3.19)$$

Поскольку $x_1 - a' = (R - r)\left(\frac{x_1 - a}{r} + \frac{w - a}{\|w - a\|}\right) + (2r - R)\frac{x_1 - a}{r}$, $R \leq 2r$, $\|x_1 - a\| \leq r$, то из неравенства (3.18) следует, что

$$\|x_1 - a'\| \leq (R - r)\left\|\frac{x_1 - a}{r} + \frac{w - a}{\|w - a\|}\right\| + 2r - R \leq R - 2(R - r)\delta_E\left(\frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}\right).$$

Отсюда и из равенства $\varepsilon = \frac{R - r}{R}\delta_E\left(\frac{\|x_1 - x_0\|}{2R}\right)$ получаем неравенство

$$\|x_1 - a'\| \leq R(1 - 2\varepsilon). \quad (3.20)$$

Из соотношений $\|x_0 - a\| \leq r$, $\|a - a'\| = R - r$ следует, что

$$\|x_0 - a'\| \leq R. \quad (3.21)$$

Применяя лемму 3.24 для $x = x_1 - x_0$, $y = z - x_0$, $b = a' - x_0$, с учетом соотношений (3.20), (3.21) получаем

$$\|z - a'\| \leq R(1 - \varepsilon\delta_E(\varepsilon)) = R - \gamma.$$

Отсюда и из включения $w \in \mathfrak{B}_\gamma(z)$ следует неравенство $\|w - a'\| \leq R$, которое противоречит неравенству (3.19).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть E – равномерно гладкое банахово пространство с модулем гладкости ϱ_E . Для любого числа $\varepsilon > 0$ определим

$$\tau_E(\varepsilon) = \sup\{\tau \in (0, 1] : \varrho_E(t) < \varepsilon t \quad \forall t \in (0, \tau)\}. \quad (3.22)$$

Заметим, что в силу определения равномерно гладкого пространства для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\tau_E(\varepsilon) > 0$.

ЛЕММА 3.26. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло с модулем выпуклости δ_E и равномерно гладко с модулем гладкости ϱ_E , и пусть заданы числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $\Delta > 0$ и точки $x, y, z \in \{a \in E : 1 - \varepsilon \leq \|a\| \leq 1 + \varepsilon\}$ такие, что $\|x - y\| \leq 2 - \Delta$, $z \in D_1(x, y)$, $\varepsilon \leq \frac{\Delta}{8}$. Пусть функционалы $p, q, f \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ определены равенствами $\langle p, x \rangle = \|x\|$, $\langle q, y \rangle = \|y\|$, $\langle f, z \rangle = \|z\|$, и пусть $\varrho = \inf_{\psi \in \text{cone}\{p, q\}} \|\psi - f\| > 0$. Тогда

$$\frac{\varrho\Delta}{18}\tau_E\left(\frac{\varrho\Delta}{10}\right) \leq \varepsilon,$$

где функция τ_E определена формулой (3.22), при этом $\text{cone}\{p, q\} = \{\alpha p + \beta q : \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы об отделимости [20, теорема 3.4] существует вектор $d \in E$ такой, что $\|d\| = 1$, $\langle p, d \rangle \leq 0$, $\langle q, d \rangle \leq 0$, $\langle f, d \rangle \geq \varrho$. Определим числа

$$u = \frac{1}{2}\tau_E\left(\frac{\varrho\Delta}{10}\right), \quad v = \frac{\varrho_E(2u) + \varepsilon}{\Delta}.$$

Из равенства (3.22) следует, что $0 < u \leq \frac{1}{2}$ и $\varrho_E(2u) \leq \frac{u\varrho\Delta}{5}$. Отсюда и из неравенств $\varepsilon \leq \frac{\Delta}{8}$, $\varrho \leq 1$ получаем, что $0 < v \leq \frac{u\varrho}{5} + \frac{1}{8} \leq \frac{\varrho}{10} + \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

Из соотношений $\|d\| = 1$, $\langle p, x \rangle = \|x\|$, $\langle p, d \rangle \leq 0$ и леммы 3.5 следует, что

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + 2ud \right\| \leq 1 + 2\varrho_E(2u).$$

Отсюда и из неравенств $1 - \varepsilon \leq \|x\| \leq 1 + \varepsilon$ получаем

$$\|x + 2ud\| \leq 1 + 2\varrho_E(2u) + \varepsilon = 1 + 2v\Delta - \varepsilon.$$

Поскольку $v \in [0, \frac{1}{4}]$, $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$, $\|x - y\| \leq 2 - \Delta$, имеем

$$\|x - 2v(x + y) + ud\| = \|(1 - 4v)x + 2v(x - y) + ud\| \leq (1 - 4v)\|x\| + 2v\|x - y\| \leq 1 + \varepsilon - 2v\Delta.$$

Следовательно, получаем

$$\|x - v(x + y) + ud\| \leq \frac{1}{2}(\|x - 2v(x + y) + ud\| + \|x + 2ud\|) \leq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon - 2v\Delta + 1 + 2v\Delta - \varepsilon) = 1.$$

Аналогично, $\|y - v(x + y) + ud\| \leq 1$. Поэтому $\{x, y\} \subset \mathfrak{B}_1(v(x + y) - ud)$, а значит, $z \in D_1(x, y) \subset \mathfrak{B}_1(v(x + y) - ud)$. Следовательно $\|z + ud\| \leq 1 + v\|x + y\| \leq 1 + 2v(1 + \varepsilon)$. Поскольку $\varepsilon \leq \frac{\Delta}{8} \leq \frac{1}{4}$, то $\|z + ud\| \leq 1 + \frac{5}{2}v$.

Из соотношений $f \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$, $\langle f, z \rangle = \|z\|$ следует, что функционал f является субградиентом нормы в точке $\frac{z}{\|z\|}$. Поэтому $\|\frac{z}{\|z\|} + ud\| \geq 1 + u\langle f, d \rangle$. Отсюда и из неравенств $1 - \varepsilon \leq \|z\| \leq 1 + \varepsilon$ следует, что

$$\|z + ud\| \geq \left\| \frac{z}{\|z\|} + ud \right\| - \varepsilon \geq 1 - \varepsilon + u\langle f, d \rangle \geq 1 - \varepsilon + u\varrho.$$

Отсюда и из неравенств $\|z + ud\| \leq 1 + \frac{5}{2}v$, $\Delta \leq 2$ получаем

$$u\varrho \leq \frac{5}{2}v + \varepsilon \leq \frac{5}{2}v + \frac{2}{\Delta}\varepsilon = \frac{5\varrho_E(2u) + 9\varepsilon}{2\Delta}.$$

Поскольку $\varrho_E(2u) \leq \frac{u\varrho\Delta}{5}$, то $u\varrho \leq \frac{u\varrho}{2} + \frac{9\varepsilon}{2\Delta}$, т. е. $u\varrho \leq \frac{9\varepsilon}{\Delta}$. Отсюда и из равенства $u = \frac{1}{2}\tau_E(\frac{\varrho\Delta}{10})$ получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 3.27. Пусть E – рефлексивное банахово пространство и шар $\mathfrak{B}_1(0)$ является строго выпуклым порождающим множеством. Пусть заданы точки $x, y, z \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$ и функционалы $p, q, f \in \partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ такие, что $\langle p, x \rangle = \langle q, y \rangle = \langle f, z \rangle = 1$. Пусть $f \in \text{cone}\{p, q\}$. Тогда $z \in D_1(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $D_1(x, y)$ представимо в виде пересечения сдвигов порождающего множества $\mathfrak{B}_1(0)$, то в силу замечания 1.6 существует выпуклое замкнутое множество $C_1 \subset E$ такое, что

$$C_1 + D_1(x, y) = \mathfrak{B}_1(0). \quad (3.23)$$

Следовательно, для любого вектора $c \in C_1$ справедливы соотношения

$$\langle p, c + x \rangle \leq \|p\| = 1, \quad \langle q, c + y \rangle \leq \|q\| = 1.$$

Отсюда и из равенств $\langle p, x \rangle = \langle q, y \rangle = 1$ следует, что $\langle p, c \rangle \leq 0$ и $\langle q, c \rangle \leq 0$ для любого вектора $c \in C_1$. Используя включение $f \in \text{cone}\{p, q\}$, получаем соотношение

$$\langle f, c \rangle \leq 0 \quad \forall c \in C_1. \quad (3.24)$$

Определим вектор

$$d_0 = \operatorname{argmax}_{d \in D_1(x, y)} \langle f, d \rangle. \quad (3.25)$$

В силу равенства (3.23) имеем

$$\max_{c \in C_1} \langle f, c \rangle + \max_{d \in D_1(x, y)} \langle f, d \rangle = \max_{b \in \mathfrak{B}_1(0)} \langle f, b \rangle = \|f\| = 1.$$

Поэтому, учитывая соотношения (3.24), (3.25), получаем неравенство $\langle f, d_0 \rangle \geq 1$. Так как $x, y \in \mathfrak{B}_1(0)$, то $d_0 \in D_1(x, y) \subset \mathfrak{B}_1(0)$. Отсюда и из равенств $\|z\| = 1$, $\|f\| = 1$, $\langle f, z \rangle = 1$ в силу строгой выпуклости шара $\mathfrak{B}_1(0)$ следует, что $z = d_0$, а значит, $z \in D_1(x, y)$.

§ 4. Доказательство основных результатов

4.1. Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства теоремы 2.1 понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство и множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Пусть $x_0, x_1 \in A$, $\|x_0 - x_1\| < 2R$. Тогда множество $A \cap D_R(x_0, x_1)$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда множество $A_0 = A \cap D_R(x_0, x_1)$ можно разбить на два непустых замкнутых непересекающихся множества B_0 и C_0 . Зафиксируем произвольные точки $b_0 \in B_0$, $c_0 \in C_0$. Пусть определены точки $b_k \in B_0$, $c_k \in C_0$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим множества

$$B_k = B_0 \cap D_R(b_k, c_k), \quad C_k = C_0 \cap D_R(b_k, c_k).$$

Поскольку $b_k \in B_k$, $c_k \in C_k$, то множества B_k и C_k не пусты. Определим числа

$$\varrho_k = \|b_k - c_k\|, \quad r_k = \inf_{b \in B_k, c \in C_k} \|b - c\|$$

и точки $b_{k+1} \in B_k$, $c_{k+1} \in C_k$ из условия $\|b_{k+1} - c_{k+1}\| \leq r_k + \frac{1}{k+1}$. Так как $\{b_{k+1}, c_{k+1}\} \subset D_R(b_k, c_k)$, то согласно лемме 3.11 имеет место включение $D_R(b_{k+1}, c_{k+1}) \subset D_R(b_k, c_k)$. Следовательно, $B_{k+1} \subset B_k$, $C_{k+1} \subset C_k$. Из включения $\{b_{k+1}, c_{k+1}\} \subset D_R(b_k, c_k)$ в силу леммы 3.15 следует неравенство $\varrho_{k+1} = \|b_{k+1} - c_{k+1}\| \leq \|b_k - c_k\| = \varrho_k$. В силу монотонности последовательности $\{\varrho_k\}$ существует $\varrho = \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_k$. Поскольку $\varrho_{k+1} \leq r_k + \frac{1}{k+1}$, $r_k \leq \varrho_k$, получаем

$$\varrho = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k. \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай $\varrho > 0$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\varrho_k}{2} - r_k\right) = -\frac{\varrho}{2} < 0$, то существует номер k_0 такой, что $\frac{\varrho_k}{2} \leq r_k$ для любого $k \geq k_0$.

Пусть $j \geq k \geq k_0$. Поскольку $c_j \in C_j \subset C_k$, $b_k \in B_k$, то $\|b_k - c_j\| \geq r_k$ и, следовательно,

$$\frac{\|b_k - c_k\|}{2} = \frac{\varrho_k}{2} \leq r_k \leq \|b_k - c_j\|.$$

Из включения $c_j \in D_R(b_k, c_k)$ в силу леммы 3.14 получаем включение $c_j \in \mathfrak{B}_{\varrho_k/2}(\frac{b_k+c_k}{2})$. Поэтому

$$\left\| c_j - \frac{b_k + c_k}{2} \right\| \leq \frac{\varrho_k}{2} \leq \|b_k - c_j\|.$$

Применяя лемму 3.4 для $a = \frac{b_k+c_k}{2}$, $b = b_k$, $c = c_k$, $x = c_j$, $r = \frac{\varrho_k}{2}$, получаем

$$\delta_E \left(\frac{2\|c_j - c_k\|}{\|b_k - c_k\|} \right) \leq \frac{\|b_k - c_k\| - \|b_k - c_j\|}{\|b_k - c_k\|} \leq 1 - \frac{r_k}{\varrho_k}.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{\varrho_k} = 1$, то $\|c_j - c_k\| \rightarrow 0$ при $k, j \rightarrow \infty$, т.е. последовательность $\{c_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится к некоторому $\hat{c} \in E$. Аналогично, последовательность $\{b_k\}$ сходится к некоторому $\hat{b} \in E$.

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ во включениях $b_j \in B_k$, $c_j \in C_k$ при $j \geq k$, в силу замкнутости множеств B_k , C_k получаем включения $\hat{b} \in B_k$, $\hat{c} \in C_k$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как $\|\hat{b} - \hat{c}\| = \varrho > 0$, то $\hat{b} \neq \hat{c}$. В силу слабой выпуклости множества A с константой R и неравенств $\|\hat{b} - \hat{c}\| \leq \|x_0 - x_1\| < 2R$ существует точка $y \in A \cap D_R(\hat{b}, \hat{c})$, $y \neq \hat{b}$, $y \neq \hat{c}$. Будем предполагать, что $y \in B_0$. (Случай $y \in C_0$ рассматривается аналогично.) В силу леммы 3.14 имеем $y \in D_R(\hat{b}, \hat{c}) \subset \mathfrak{B}_{\varrho/2}(\frac{\hat{b}+\hat{c}}{2})$. Отсюда и из неравенства $y \neq \hat{b}$ следует, что $\|y - \hat{c}\| < \varrho$. Поскольку $y \in B_k$, $\hat{c} \in C_k$, то $r_k \leq \|y - \hat{c}\| < \varrho$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Это противоречит условию (4.1). Поэтому случай $\varrho > 0$ не реализуется, а значит,

$$\varrho = 0.$$

Для любых $j \geq k$ имеем $b_j \in B_k \subset D_R(b_k, c_k)$. Следовательно, в силу леммы 3.15 справедливы соотношения $\|b_j - b_k\| \leq \|b_k - c_k\| \rightarrow \varrho = 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\{b_k\}$ фундаментальна, а значит, сходится к некоторому $x \in E$. Поскольку $\|b_k - c_k\| \rightarrow \varrho = 0$ при $k \rightarrow \infty$, то последовательность $\{c_k\}$ сходится к тому же вектору x . Переходя к пределу во включениях $b_k \in B_0$, $c_k \in C_0$, получаем, что $x \in B_0 \cap C_0$. Это противоречит тому, что множества B_0 и C_0 не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Предположим противное: существуют точки $u \in U(R, A)$, $x \in \pi(u, A)$ такие, что неравенство (1.2) не выполнено, т.е. существует точка $z \in A$ такая, что

$$\left\| x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x) - z \right\| < R. \quad (4.2)$$

В силу леммы 4.1 существует последовательность точек $x_k \in A \cap D_R(x, z)$, сходящаяся к точке x и такая, что $x_k \neq x$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим функционал $p_k \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$, удовлетворяющий условию

$$\langle p_k, x_k - u \rangle = \|x_k - u\|. \quad (4.3)$$

Поскольку $x_k \in A$, то $\|u - x\| = \varrho(u, A) \leq \|x_k - u\|$. Отсюда и из соотношений $\langle p_k, x - x_k \rangle = \langle p_k, x - u \rangle + \langle p_k, u - x_k \rangle \leq \|u - x\| - \|x_k - u\|$ следует, что

$$\langle p_k, x - x_k \rangle \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Так как пространство E равномерно гладкое, то из соотношений (4.3) и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ согласно [12, гл. 2, § 4, теорема 1] вытекает сходимость последовательности $\{p_k\}$ к некоторому функционалу $p_0 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$.

Переходя к пределу в равенстве (4.3), получаем равенство $\langle p_0, x - u \rangle = \|x - u\|$. Используя неравенство (4.2) и применяя лемму 3.16 для $x_0 = x$, $x_1 = z$, $a = x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x)$, получаем существование числа $\beta > 0$ такого, что $\text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x; D_R(x, z))$. Отсюда и из включения $x_k \in D_R(x, z)$ в силу леммы 3.19 получаем, что $\langle p_0, x - x_k \rangle \geq \beta \|x - x_k\|$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Выбирая номер k таким, что $\|p_k - p_0\| < \beta$, приходим к неравенству $\langle p_k, x - x_k \rangle > 0$, которое противоречит соотношению (4.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если пространство E конечномерно, то условие равномерной гладкости E не существенно. Доказательство этого факта повторяет доказательство теоремы 2.1 с тем исключением, что последовательность $\{p_k\}$ может расходиться, и в этом случае необходимо выбрать ее сходящуюся подпоследовательность.

Следующий пример показывает существенность условия равномерной выпуклости пространства E в теореме 2.1.

ПРИМЕР 4.1. Пусть E – двумерное банахово пространство, в котором единичный шар определяется равенством

$$\mathfrak{B}_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + \varphi^2(x_2) \leq 1\}, \quad \text{где } \varphi(x_2) = \max\{0, |x_2| - 1\}.$$

Заметим, что множество $A = E \setminus \text{int } \mathfrak{B}_1(0)$ слабо выпукло с константой $R = 1$. Однако множество A не удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой $R = 1$. Рассмотрим точки $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $x = (1, \frac{1}{2})$. Тогда $\varrho(u, A) = \frac{1}{2} = \|u - x\|$, но неравенство (1.2) при $R = 1$ не выполнено.

4.2. Доказательство теоремы 2.2. Доказательству теоремы 2.2 предположим следующие леммы.

ЛЕММА 4.2 (о диаметре ε -проекции). Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости δ_E , множество $A \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Пусть задана точка $u \in U(R, A)$, и пусть $\varrho = \varrho(u, A)$, $\varepsilon > 0$. Тогда для множества $A_\varepsilon = A \cap \mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}(u)$ справедливо неравенство

$$\delta_E \left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4R} \right) < \frac{\varepsilon}{R - \varrho}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство

$$\delta_E \left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho} \right) \min\{\varrho, R - \varrho\} < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай

$$\varepsilon \in (0, \min\{\varrho, R - \varrho\}). \quad (4.6)$$

Зафиксируем произвольное число $\gamma \in (0, \min\{\varrho - \varepsilon, R - \varrho - \varepsilon\})$. В силу предложения 3.1 существует точка $a \in \mathfrak{B}_\gamma(u) \cap T(A)$. Поскольку $a \in T(A)$, то существует точка $w \in \pi(a, A)$. Определим число $r = \varrho + \varepsilon + \gamma$ и векторы

$$b = w + \frac{R}{\|a - w\|}(a - w), \quad c = a + \frac{r}{\|a - b\|}(a - b).$$

Согласно неравенству треугольника имеем $\sup_{x \in A_\varepsilon} \|x - c\| \geq \frac{1}{2} \text{diam } A_\varepsilon$. Поскольку $\gamma < \varrho - \varepsilon$, то $r = \varrho + \varepsilon + \gamma < 2\varrho$. Следовательно, $\sup_{x \in A_\varepsilon} \|x - c\| > \frac{r}{4\varrho} \text{diam } A_\varepsilon$. Поэтому существует точка $x \in A_\varepsilon$ такая, что

$$\|x - c\| \geq \frac{r}{4\varrho} \text{diam } A_\varepsilon. \quad (4.7)$$

Поскольку множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R , то $\varrho(b, A) \geq R$. Отсюда и из включения $x \in A$ следует, что $\|b - x\| \geq R$. Так как $x \in \mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}(\mathfrak{u})$, то $\|a - x\| \leq \varrho + \varepsilon + \|a - \mathfrak{u}\| \leq \varrho + \varepsilon + \gamma = r$. Поэтому

$$\|a - x\| \leq r < R \leq \|b - x\|.$$

В силу леммы 3.4 имеем

$$2\delta_E\left(\frac{\|x - c\|}{r}\right) \min\{r, \|a - b\|\} \leq r + \|a - b\| - \|b - x\| \leq r + \|a - b\| - R. \quad (4.8)$$

Поскольку $a - b = \left(\frac{R}{\|a - w\|} - 1\right)(w - a)$, то $\|a - b\| = R - \|a - w\|$. Из неравенства $\|a - \mathfrak{u}\| \leq \gamma$ следует, что $|\varrho - \|a - w\|| = |\varrho(\mathfrak{u}, A) - \varrho(a, A)| \leq \gamma$. Поэтому $R - \varrho - \gamma \leq \|a - b\| \leq R - \varrho + \gamma$. Отсюда, из соотношения $r = \varrho + \varepsilon + \gamma$, неравенств (4.7), (4.8) и свойства монотонности модуля выпуклости следует, что

$$2\delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho}\right) \min\{\varrho, R - \varrho - \gamma\} \leq \varepsilon + 2\gamma.$$

Переходя к пределу при $\gamma \rightarrow +0$, получаем неравенство $2\delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho}\right) \min\{\varrho, R - \varrho\} \leq \varepsilon$, из которого следует неравенство (4.5) в случае выполнения (4.6).

Если условие (4.6) не выполняется, то неравенство (4.5) также верно, что следует из неравенства $\delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho}\right) < 1$.

Из неравенств (4.5) и $\frac{(R-\varrho)\varrho}{R} \leq \min\{\varrho, R - \varrho\}$ получаем

$$\frac{(R - \varrho)\varrho}{R} \delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho}\right) < \varepsilon. \quad (4.9)$$

Из леммы 3.1 следует, что $\delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4R}\right) \leq \frac{\varrho}{R} \delta_E\left(\frac{\text{diam } A_\varepsilon}{4\varrho}\right)$. Отсюда и из неравенства (4.9) вытекает доказываемое неравенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что множество A в нормированном пространстве E обладает *чебышевским слоем размера* $R > 0$, если для любой точки $\mathfrak{u} \in U(R, A)$ множество $\pi(\mathfrak{u}, A)$ состоит из одной точки.

ЛЕММА 4.3. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство, и пусть множество $A \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Тогда множество A обладает чебышевским слоем величины R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $\mathfrak{u} \in U(R, A)$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, сходящуюся к нулю. Обозначим $\varrho = \varrho(\mathfrak{u}, A)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим замкнутые множества $A_k = \mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon_k}(\mathfrak{u}) \cap A$. В силу леммы 4.2 справедливо соотношение $\text{diam } A_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из условия вложенности замкнутых множеств A_k следует, что пересечение всех множеств A_k состоит ровно из одной точки x . Поэтому $\pi(\mathfrak{u}, A) = \{x\}$.

ЛЕММА 4.4. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство и шар в E является порождающим множеством. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Пусть множество $C \subset E$ сильно выпукло с константой $r \in (0, R)$ и $\inf_{a \in A, c \in C} \|a - c\| > 0$. Тогда существуют точки $b, d \in E$ такие, что

$$C \subset \mathfrak{B}_r(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\varrho_0 = \inf_{a \in A, c \in C} \|a - c\|$.

Шаг 1. Рассмотрим сначала случай $\varrho_0 < R - r$. Определим положительное число

$$\varepsilon = \frac{R - r - \varrho_0}{2} \delta_E \left(\frac{\varrho_0^2}{16R^2} \right). \quad (4.10)$$

По определению числа ϱ_0 существуют точки $a_1 \in A$, $c_1 \in C$ такие, что $\|a_1 - c_1\| < \varrho_0 + \varepsilon$. В силу леммы 4.3 и неравенства $\varrho_0 + \varepsilon < R$ существуют точки $a_2 \in \pi(c_1, A)$ и $c_2 \in \pi(a_1, C)$. Обозначим

$$b = a_2 + \frac{R}{\|c_1 - a_2\|} (c_1 - a_2), \quad d = c_2 + \frac{r}{\|c_2 - a_1\|} (c_2 - a_1).$$

Поскольку множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R , то $\varrho(b, A) \geq R$, а значит, $\text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A$. Так как множество C сильно выпукло с константой r , то в силу леммы 3.9 справедливо включение $C \subset \mathfrak{B}_r(d)$. Осталось доказать включение

$$\mathfrak{B}_r(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b). \quad (4.11)$$

Обозначим $\varrho = \varrho(c_1, A)$. Заметим, что

$$\varrho_0 \leq \varrho \leq \|a_1 - c_1\| < \varrho_0 + \varepsilon. \quad (4.12)$$

Поскольку $\|a_2 - c_1\| = \varrho$, $\|a_1 - c_1\| < \varrho_0 + \varepsilon \leq \varrho + \varepsilon$, то $a_1, a_2 \in \mathfrak{B}_{\varrho+\varepsilon}(c_1) \cap A$. Согласно лемме 4.2 справедливо неравенство

$$\delta_E \left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{4R} \right) < \frac{\varepsilon}{R - \varrho}. \quad (4.13)$$

Из равенства (4.10) следует, что $\varepsilon < \frac{R - \varrho_0}{2}$. Отсюда и из неравенств (4.12) имеем $R - \varrho \geq R - \varrho_0 - \varepsilon > \frac{R - \varrho_0}{2}$. Поэтому согласно неравенству (4.13) и равенству (4.10) имеем

$$\delta_E \left(\frac{\|a_1 - a_2\|}{4R} \right) < \frac{2\varepsilon}{R - \varrho_0} \leq \delta_E \left(\frac{\varrho_0^2}{16R^2} \right).$$

Отсюда в силу монотонности модуля выпуклости получаем $\|a_1 - a_2\| < \frac{\varrho_0^2}{4R}$. Аналогично, $\|c_1 - c_2\| < \frac{\varrho_0^2}{4R}$. Обозначим $d' = c_1 + \frac{r}{\|c_1 - a_2\|} (c_1 - a_2)$. Поскольку $\|c_2 - a_1 - c_1 + a_2\| \leq \frac{\varrho_0^2}{2R}$, $\|c_1 - a_2\| = \varrho \geq \varrho_0$, то

$$\left\| \frac{c_2 - a_1}{\|c_2 - a_1\|} - \frac{c_1 - a_2}{\|c_1 - a_2\|} \right\| \leq \frac{2\|c_2 - a_1 - c_1 + a_2\|}{\|c_1 - a_2\|} \leq \frac{\varrho_0}{R}.$$

Поэтому $\|d - d'\| \leq \frac{\varrho_0^2}{4R} + \frac{r\varrho_0}{R} < \frac{\varrho_0}{R} (\varrho_0 + r) < \varrho_0$.

Так как $b - d' = \left(\frac{R-r}{\|a_2 - c_1\|} - 1\right)(c_1 - a_2)$, $\|a_2 - c_1\| \leq \|a_1 - c_1\| < \varrho_0 + \varepsilon < R - r$, то $\|b - d'\| \leq R - r - \|a_2 - c_1\| \leq R - r - \varrho_0$. Следовательно, $\|b - d\| \leq \|d - d'\| + \|b - d'\| < R - r$, а значит, включение (4.11) выполнено.

Шаг 2. Пусть теперь $\varrho_0 \geq R - r$. Поскольку множество C сильно выпукло с константой r , а шар $\mathfrak{B}_r(0)$ является порождающим множеством, то согласно замечанию 1.6 существует выпуклое замкнутое множество C_1 такое, что $C + C_1 = \mathfrak{B}_r(0)$. Зафиксируем точку $x_0 \in C_1$. Для любого числа $t \geq 0$ определим множество $C(t) = C + t(C_1 - x_0)$ и число $\varrho_t = \inf_{a \in A, c \in C(t)} \|a - c\|$.

Рассмотрим случай $\varrho_1 < R - r$. Поскольку функция $t \mapsto \varrho_t$ непрерывна и $\varrho_0 > 0$, то существует число $\tau \in (0, 1]$ такое, что $0 < \varrho_\tau < R - r$. Так как

$$C(\tau) + (1 - \tau)C_1 = C + \tau(C_1 - x_0) + (1 - \tau)C_1 = C + C_1 - \tau x_0 = \mathfrak{B}_r(-\tau x_0),$$

то согласно лемме 3.6 и замечанию 1.5 имеем

$$C(\tau) = \mathfrak{B}_r(-\tau x_0) \stackrel{*}{\subset} (1 - \tau)C_1 = \bigcap_{x \in C_1} \mathfrak{B}_r(-\tau x_0 - (1 - \tau)x).$$

Поэтому множество $C(\tau)$ сильно выпукло с константой r . В силу доказанного на шаге 1 существуют точки $b, d \in E$ такие, что

$$C(\tau) \subset \mathfrak{B}_r(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A.$$

Отсюда и из включения $C \subset C(\tau)$ получаем доказываемое утверждение.

Рассмотрим, наконец, случай $\varrho_1 \geq R - r$. Поскольку $C(1) = \mathfrak{B}_r(-x_0)$, то $\varrho(-x_0, A) = \varrho_1 + r \geq R$. Поэтому

$$C \subset C(1) = \mathfrak{B}_r(-x_0) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(-x_0) \subset E \setminus A.$$

Полагая $b = d = -x_0$, получаем доказываемое утверждение.

ЛЕММА 4.5. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство и шар в E является порождающим множеством. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Пусть множество $C \subset E$ сильно выпукло с константой $r \in (0, R]$ и содержит две различные точки, $A \cap \text{int } C = \emptyset$ и задано число $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существуют точки $b, d \in E$ такие, что

$$C \subset \mathfrak{B}_{r(1+\varepsilon)}(d), \quad \mathfrak{B}_{r(1-\varepsilon)}(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество C сильно выпукло с константой r и содержит две различные точки x, y , то $D_r(x, y) \subset C$. В силу леммы 3.20 существует число $\varrho > 0$ такое, что $\mathfrak{B}_\varrho(z) \subset D_r(x, y)$, где $z = \frac{x+y}{2}$. Поэтому $\mathfrak{B}_\varrho(z) \subset C$. Определим множество

$$C_\varepsilon = (1 - \varepsilon)C + \varepsilon z.$$

Поскольку

$$C_\varepsilon + \mathfrak{B}_{\varepsilon\varrho}(0) = (1 - \varepsilon)C + \varepsilon\mathfrak{B}_\varrho(z) \subset (1 - \varepsilon)C + \varepsilon C = C$$

и $A \cap \text{int } C = \emptyset$, то $\inf_{a \in A, c \in C_\varepsilon} \|a - c\| > 0$. Множество C_ε сильно выпукло с константой $r(1 - \varepsilon)$. Согласно лемме 4.4 существуют точки $b, d \in E$ такие, что

$$C_\varepsilon \subset \mathfrak{B}_{r(1-\varepsilon)}(d) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b) \subset E \setminus A. \quad (4.14)$$

Поскольку множество C сильно выпукло с константой r и $z \in C$, то $C - z \subset \mathfrak{B}_{2r}(0)$. Поэтому $C = C_\varepsilon + \varepsilon(C - z) \subset C_\varepsilon + \mathfrak{B}_{2\varepsilon r}(0) \subset \mathfrak{B}_{r(1+\varepsilon)}(d)$. Отсюда и из соотношений (4.14) получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 4.6. Пусть E — равномерно выпуклое банахово пространство и множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Пусть $x_0, x_1 \in A$, $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$, и функционал $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ удовлетворяет равенству $\langle p, x_0 - x_1 \rangle = \|x_0 - x_1\|$. Тогда существует точка $y \in A \cap D_R(x_0, x_1)$ такая, что

$$\left\langle p, y - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\rangle = 0, \quad \min\{\|y - x_0\|, \|y - x_1\|\} \geq \frac{\|x_0 - x_1\|}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 множество $A \cap D_R(x_0, x_1)$ связно. Рассмотрим функцию $f(x) = \langle p, x - \frac{x_0 + x_1}{2} \rangle$. Поскольку $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, то по теореме о промежуточном значении существует точка $y \in A \cap D_R(x_0, x_1)$, для которой $f(y) = 0$. Следовательно,

$$\min\{\|y - x_0\|, \|y - x_1\|\} \geq \min\{\langle p, x_0 - y \rangle, \langle p, y - x_1 \rangle\} = \frac{1}{2} \langle p, x_0 - x_1 \rangle = \frac{\|x_0 - x_1\|}{2}.$$

ЛЕММА 4.7. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло и равномерно гладко и шар $\mathfrak{B}_1(0)$ является порождающим множеством. Пусть $R > 0$ и множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с любой константой $r \in (0, R)$. Тогда множество A слабо выпукло с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существуют точки $x, y \in A$ такие, что $0 < \|x - y\| < 2R$, $A \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y) = \emptyset$. Определим функционал $g \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ из условия

$$\langle g, x - y \rangle = \|x - y\|. \quad (4.15)$$

Зафиксируем произвольную последовательность чисел $R_k \in (\frac{\|x - y\|}{2}, R)$, монотонно сходящуюся к числу R . По условию множество A слабо выпукло с константой R_k для любого $k \in \mathbb{N}$. В силу леммы 4.6 для любого $k \in \mathbb{N}$ существует точка $z_k \in A \cap D_{R_k}(x, y)$ такая, что

$$\left\langle g, z_k - \frac{x + y}{2} \right\rangle = 0. \quad (4.16)$$

Согласно лемме 3.22 имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} h(D_{R_k}(x, y), D_R(x, y)) = 0$. Поэтому существует монотонно сходящаяся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_k \in (0, 1)$ такая, что

$$D_{R_k}(x, y) \subset D_R(x, y) + \mathfrak{B}_{R\varepsilon_k}(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

В силу теоремы 2.1 множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с любой константой $r \in (0, R)$, а значит, и с константой R . Поэтому согласно лемме 4.5 для любого $k \in \mathbb{N}$ существует точка $d_k \in E$ такая, что

$$D_R(x, y) \subset \mathfrak{B}_{R(1+\varepsilon_k)}(d_k), \quad \mathfrak{B}_{R(1-\varepsilon_k)}(d_k) \subset E \setminus A \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ определим векторы

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{x - d_k}{R}, & y_k &= \frac{y - d_k}{R}, & z_{nk} &= \frac{z_n - d_k}{R}, \\ x_k^0 &= \frac{x - d_k}{\|x - d_k\|}, & y_k^0 &= \frac{y - d_k}{\|y - d_k\|}, & z_{nk}^0 &= \frac{z_n - d_k}{\|z_n - d_k\|}. \end{aligned}$$

Из включений $x \in D_R(x, y)$, $x \in A$ и (4.18) следует, что $x \in \mathfrak{B}_{R(1+\varepsilon_k)}(d_k)$, $x \notin \mathfrak{B}_{R(1-\varepsilon_k)}(d_k)$, т. е. $1 - \varepsilon_k \leq \|x_k\| \leq 1 + \varepsilon_k$. Аналогично, $1 - \varepsilon_k \leq \|y_k\| \leq 1 + \varepsilon_k$, $1 - \varepsilon_k \leq \|z_{nk}\|$. В силу включений $z_n \in D_{R_n}(x, y)$ и (4.17), (4.18) получаем $\|z_n - d_k\| \leq R(1 + \varepsilon_k + \varepsilon_n)$, т. е. $\|z_{nk}\| \leq 1 + \varepsilon_k + \varepsilon_n$. Следовательно,

$$\|x_k^0 - x_k\| \leq \varepsilon_k, \quad \|y_k^0 - y_k\| \leq \varepsilon_k, \quad \|z_{nk}^0 - z_{nk}\| \leq \varepsilon_k + \varepsilon_n \quad \forall n, k \in \mathbb{N}. \quad (4.19)$$

Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ определим функционалы $p_k, q_k, f_{nk} \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ из условий

$$\langle p_k, x_k \rangle = \|x_k\|, \quad \langle q_k, y_k \rangle = \|y_k\|, \quad \langle f_{nk}, z_{nk} \rangle = \|z_{nk}\|.$$

Определим числа $\Delta = 2 - \frac{\|x-y\|}{R}$,

$$\varrho_{nk} = \inf_{\psi \in \text{cone}\{p_k, q_k\}} \|\psi - f_{nk}\| \quad \forall k, n \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

В силу леммы 3.26 получаем соотношение $\sup_{n \geq k} \varrho_{nk} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Из равенств (4.20) и включений $f_{nk} \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ следует, что для любых $n, k \in \mathbb{N}$ существует функционал

$$f'_{nk} \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0) \cap \text{cone}\{p_k, q_k\} \quad (4.21)$$

такой, что $\|f'_{nk} - f_{nk}\| \leq 2\varrho_{nk}$. Поэтому

$$\sup_{n \geq k} \|f'_{nk} - f_{nk}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ определим векторы $z'_{nk} \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ из условия $\langle f'_{nk}, z'_{nk} \rangle = 1$. Из соотношения (4.22) в силу леммы 3.2 получаем

$$\sup_{n \geq k} \|z'_{nk} - z_{nk}^0\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из неравенств (4.19) следует, что

$$\sup_{n \geq k} \|z'_{nk} - z_{nk}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функционал $g_k \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ из условия $\langle g_k, x_k^0 - y_k^0 \rangle = \|x_k^0 - y_k^0\|$. Из равенств (4.15) и $x_k - y_k = \frac{x-y}{R}$ следует, что $\langle g, x_k - y_k \rangle = \|x_k - y_k\|$. Отсюда, в силу равномерной гладкости пространства E и (4.19) получаем

$$g_k \rightarrow g \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^0 - y_k^0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y_k\| = \frac{\|x-y\|}{R} \in (0, 2)$, то в силу леммы 3.17 существуют число $\beta > 0$ и номер k_0 такие, что $\mathfrak{B}_{\beta}^*(g_k) \subset N(x_k^0; D_1(x_k^0, y_k^0))$ для любого $k \geq k_0$. Отсюда и из соотношения (4.24) следует существование номера $k_1 \geq k_0$ такого, что

$$\mathfrak{B}_{\beta/2}^*(g) \subset N(x_k^0; D_1(x_k^0, y_k^0)) \quad \forall k \geq k_1. \quad (4.25)$$

Покажем, что для любых номеров $k \geq k_1$, $n \geq k$ справедливо неравенство

$$|\langle g, z'_{nk} - z'_{kk} \rangle| \geq \frac{\beta}{2} \|z'_{nk} - z'_{kk}\|. \quad (4.26)$$

Пусть заданы индексы $k \geq k_1$, $n \geq k$. Согласно включениям (4.21) имеем $f'_{nk}, f'_{kk} \in \text{cone}\{p_k, q_k\}$. Поэтому $f'_{nk} \in \text{cone}\{p_k, f'_{kk}\}$ или $f'_{kk} \in \text{cone}\{p_k, f'_{nk}\}$. Для определенности будем предполагать, что $f'_{nk} \in \text{cone}\{p_k, f'_{kk}\}$. Из включений $f'_{nk} \in \text{cone}\{p_k, f'_{kk}\}$, $f'_{kk} \in \text{cone}\{p_k, q_k\}$ в силу леммы 3.27 получаем включения $z'_{nk} \in D_1(x_k^0, z'_{kk})$, $z'_{kk} \in D_1(x_k^0, y_k^0)$. Последнее включение согласно лемме 3.11 дает включение $D_1(x_k^0, z'_{kk}) \subset D_1(x_k^0, y_k^0)$ и, следовательно, $N(x_k^0; D_1(x_k^0, y_k^0)) \subset N(x_k^0; D_1(x_k^0, z'_{kk}))$. Поэтому согласно (4.25) получаем

$$\mathfrak{B}_{\beta/2}^*(g) \subset N(x_k^0; D_1(x_k^0, z'_{kk})). \quad (4.27)$$

Поскольку точка $\frac{x_k^0 + z'_{kk}}{2}$ является центром симметрии множества $D_1(x_k^0, z'_{kk})$, то выполнено равенство

$$N(x_k^0; D_1(x_k^0, z'_{kk})) = -N(z'_{kk}; D_1(x_k^0, z'_{kk})). \quad (4.28)$$

Из соотношений $z'_{nk} \in D_1(x_k^0, z'_{kk})$, (4.27), (4.28) в силу леммы 3.19 получаем неравенство (4.26). Из равенства (4.16) следует, что для любых $n, k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\langle g, z_{nk} - z_{kk} \rangle = 0$. Отсюда и из соотношений (4.23), (4.26) получаем соотношение

$$\sup_{n \geq k} \|z_{nk} - z_{kk}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

которое вместе с равенствами $z_{nk} - z_{kk} = \frac{z_n - z_k}{R}$ доказывает фундаментальность последовательности $\{z_k\}$. Поэтому последовательность $\{z_k\}$ сходится к некоторому вектору $\hat{z} \in E$. Поскольку $z_k \in A \cap D_{R_k}(x, y)$, то в силу замкнутости множеств A и $D_R(x, y)$ и соотношения (4.17) получаем включение $\hat{z} \in A \cap D_R(x, y)$. Переходя к пределу в равенстве (4.16), получаем равенство $\langle g, \hat{z} - \frac{x+y}{2} \rangle = 0$, из которого следуют неравенства $\hat{z} \neq x$, $\hat{z} \neq y$. Поэтому $\hat{z} \in A \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y)$, что противоречит предположению $A \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y) = \emptyset$.

ЛЕММА 4.8. Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство и шар $\mathfrak{B}_1(0)$ является порождающим множеством. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Тогда множество A слабо выпукло с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $r \in (0, R)$ и покажем, что множество A слабо выпукло с константой r . Предположим противное: существуют точки $x, y \in A$ такие, что $0 < \|x - y\| < 2r$ и $A \cap \overset{\circ}{D}_r(x, y) = \emptyset$. Зафиксируем сходящуюся к нулю последовательность чисел $\{\varepsilon_k\} \subset (0, 1)$. В силу леммы 4.5 для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют точки $b_k, d_k \in E$ такие, что

$$D_r(x, y) \subset \mathfrak{B}_{r(1+\varepsilon_k)}(d_k), \quad \mathfrak{B}_{r(1-\varepsilon_k)}(d_k) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b_k) \subset E \setminus A.$$

Из включений $\text{int } \mathfrak{B}_R(b_k) \subset E \setminus A$, $x \in A$ следует, что $\|x - b_k\| \geq R$. Поскольку $x \in D_r(x, y) \subset \mathfrak{B}_{r(1+\varepsilon_k)}(d_k)$, то $\|x - d_k\| \leq r(1 + \varepsilon_k)$. Из включения $\mathfrak{B}_{r(1-\varepsilon_k)}(d_k) \subset \text{int } \mathfrak{B}_R(b_k)$ получаем $\|b_k - d_k\| < R - r(1 - \varepsilon_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\|b_k - d_k\| \geq \|x - b_k\| - \|x - d_k\| \geq R - r(1 + \varepsilon_k)$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} \|b_k - d_k\| = R - r$. Аналогично, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - d_k\| = r$. В силу леммы 3.3 получаем соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{x - d_k}{r} - \frac{d_k - b_k}{R - r} \right\| = 0$. Аналогично,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{y-d_k}{r} - \frac{d_k-b_k}{R-r} \right\| = 0$. Это противоречит неравенству $x \neq y$. Полученное противоречие доказывает, что множество A слабо выпукло с любой константой $r \in (0, R)$. Отсюда в силу леммы 4.7 получаем свойство слабой выпуклости множества A с константой R .

ЛЕММА 4.9. Пусть E – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство и шар $\mathfrak{B}_1(0)$ не является порождающим множеством. Тогда существуют векторы $x_0, x_1 \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ такие, что $0 < \|x_0 - x_1\| < 2$ и имеет место включение

$$\overset{\circ}{D}_1(x_0, x_1) \subset \text{int } \mathfrak{B}_1(0). \quad (4.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы состоит из шести шагов.

Шаг 1. Поскольку множество $\mathfrak{B}_1(0)$ не является порождающим, то в силу предложения 3.4 существует вектор $b \in E$ такой, что множество

$$C = \mathfrak{B}_1(b) \cap \mathfrak{B}_1(-b) \quad (4.30)$$

имеет непустую внутренность и для любого выпуклого замкнутого множества $C_1 \subset E$ выполнено

$$C + C_1 \neq \mathfrak{B}_1(0). \quad (4.31)$$

Заметим, что

$$D_1(b, -b) = \bigcap_{x \in E: \{b, -b\} \subset \mathfrak{B}_1(x)} \mathfrak{B}_1(x) = \bigcap_{x \in C} \mathfrak{B}_1(-x).$$

Поэтому

$$C + D_1(b, -b) \subset \mathfrak{B}_1(0). \quad (4.32)$$

Из условия (4.31) следует, что $C + D_1(b, -b) \neq \mathfrak{B}_1(0)$. Поэтому в силу включения (4.32) существует точка

$$z \in \mathfrak{B}_1(0) \setminus (C + D_1(b, -b)). \quad (4.33)$$

Отсюда и из условия $0 \in \text{int}(C + D_1(b, -b))$ следует, что на отрезке $[0, z]$ существует точка $z_0 \in \partial(C + D_1(b, -b))$.

Согласно замечанию 1.6 множество $C + D_1(b, -b)$ замкнуто. Поэтому $z_0 \in C + D_1(b, -b)$. Следовательно, в силу включения (4.33) имеем $z \neq z_0$. Поскольку точка z_0 лежит на отрезке $[0, z]$ и $\|z\| \leq 1$, то справедливо неравенство $\|z_0\| < 1$.

В силу теоремы об отделимости и условий $\text{int}(C + D_1(b, -b)) \neq \emptyset$, $z_0 \in \partial(C + D_1(b, -b))$ существует функционал $p_0 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ такой, что

$$z_0 = \operatorname{argmax}_{x \in C + D_1(b, -b)} \langle p_0, x \rangle.$$

Определим

$$z_1 = \operatorname{argmax}_{x \in \mathfrak{B}_1(0)} \langle p_0, x \rangle, \quad c_0 = \operatorname{argmax}_{x \in C} \langle p_0, x \rangle, \quad d_0 = \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p_0, x \rangle. \quad (4.34)$$

В силу условия равномерной выпуклости пространства E множества $\mathfrak{B}_1(0)$, C , $D_1(b, -b)$ строго выпуклы. В силу леммы 3.8 векторы z_1 , c_0 , d_0 существуют и единственны. Согласно предложению 3.2 имеем

$$z_0 = c_0 + d_0. \quad (4.35)$$

Если $z_1 \in C + D_1(b, -b)$, то в силу соотношений (4.32), (4.34) имеем $z_1 \in \text{Argmax}_{x \in C + D_1(b, -b)} \langle p_0, x \rangle$. Отсюда и из условия строгой выпуклости множества $C + D_1(b, -b)$ следует равенство $z_1 = z_0$, однако $\|z_0\| < 1 = \|z_1\|$. Полученное противоречие показывает, что

$$z_1 \notin C + D_1(b, -b). \quad (4.36)$$

Шаг 2. Покажем, что

$$\|c_0 - b\| = \|c_0 + b\| = 1. \quad (4.37)$$

Поскольку $c_0 \in C$, то $\|c_0 \pm b\| \leq 1$. Предположим, что, например, $\|c_0 + b\| < 1$. Тогда в силу равенств (4.30), (4.34) получаем

$$c_0 = \text{argmax}_{x \in \mathfrak{B}_1(b)} \langle p_0, x \rangle = b + \text{argmax}_{x \in \mathfrak{B}_1(0)} \langle p_0, x \rangle = b + z_1.$$

Отсюда и из включений $c_0 \in C$, $-b \in D_1(b, -b)$ следует, что $z_1 = c_0 - b \in (C + D_1(b, -b))$. Последнее противоречит условию (4.36). Тем самым доказаны равенства (4.37).

Шаг 3. Для любого вектора $x \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$ определим функционал

$$p(x) = \text{argmax}_{p \in E^*: \|p\| \leq 1} \langle p, x \rangle. \quad (4.38)$$

Из условия рефлексивности пространства E (а значит, и E^*) следует существование функционала $p(x)$, а из условия гладкости пространства E вытекает единственность функционала $p(x)$ при каждом $x \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$. Обозначим

$$p_+ = p(c_0 + b), \quad p_- = p(c_0 - b). \quad (4.39)$$

Покажем, что

$$N(c_0; C) = \text{cone}\{p_+, p_-\}. \quad (4.40)$$

Поскольку $p_+ \in N(c_0 + b; \mathfrak{B}_1(0)) = N(c_0; \mathfrak{B}_1(-b))$, $C \subset \mathfrak{B}_1(-b)$, то имеет место включение $p_+ \in N(c_0; C)$. Аналогично, $p_- \in N(c_0; C)$. Отсюда и из того, что множество $N(c_0; C)$ является конусом, следует включение $\text{cone}\{p_+, p_-\} \subset N(c_0; C)$. Предположим, что равенство (4.40) не выполнено. Тогда существует единичный вектор $p_1 \in N(c_0; C)$ такой, что $p_1 \notin \text{cone}\{p_+, p_-\}$.

Поскольку $p_1 \notin \text{cone}\{p_+, p_-\}$, то существует вектор $y \in E$ такой, что $\langle p_+, y \rangle < 0$, $\langle p_1, y \rangle > 0$. Из неравенств $\langle p_+, y \rangle < 0$ и включений $p_{\pm} \in N(c_0 \pm b; \mathfrak{B}_1(0)) = N(c_0; \mathfrak{B}_1(\mp b))$ в силу гладкости пространства E следует существование числа $\delta > 0$ такого, что для любого $t \in (0, \delta)$ справедливы включения $c_0 + ty \in \mathfrak{B}_1(\mp b)$. Таким образом, $c_0 + ty \in C$ при $t \in (0, \delta)$. Отсюда и из включения $p_1 \in N(c_0; C)$ следует неравенство $\langle p_1, y \rangle \leq 0$, которое противоречит неравенству $\langle p_1, y \rangle > 0$. Полученное противоречие доказывает равенство (4.40).

Шаг 4. Для любого числа $t \in [0, 1]$ определим

$$\gamma(t) = \text{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle (1-t)p_+ + tp_-, x \rangle. \quad (4.41)$$

Так как множество $D_1(b, -b)$ сильно выпукло в равномерно выпуклом пространстве, то согласно лемме 3.21 функция $\gamma: [0, 1] \rightarrow E$ однозначна и непрерывна.

Поскольку $c_0 \in C$, в силу включения (4.32) имеем $c_0 + D_1(b, -b) \subset \mathfrak{B}_1(0)$. Отсюда и из равенства $\|p_+\| = 1$ следует, что

$$\langle p_+, c_0 \rangle + \max_{x \in D_1(b, -b)} \langle p_+, x \rangle \leq 1. \quad (4.42)$$

Из равенств (4.38), (4.39) следует, что $\langle p_+, c_0 + b \rangle = 1$. Отсюда, из неравенства (4.42) и включения $b \in D_1(b, -b)$ следует, что $b = \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p_+, x \rangle = \gamma(0)$. Аналогично, $\gamma(1) = -b$.

Итак,

$$\gamma(0) = b, \quad \gamma(1) = -b. \quad (4.43)$$

Шаг 5. В силу второго из равенств (4.34) справедливо включение $p_0 \in N(c_0; C)$. Отсюда и из равенств (4.40), (4.41) следует существование такого числа $t_0 \in [0, 1]$, что

$$\gamma(t_0) = \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p_0, x \rangle = d_0. \quad (4.44)$$

Определим множества

$$\Gamma_- = \{c_0 + \gamma(t) : t \in [0, t_0]\} \cap \partial \mathfrak{B}_1(0), \quad \Gamma_+ = \{c_0 + \gamma(t) : t \in [t_0, 1]\} \cap \partial \mathfrak{B}_1(0).$$

Из равенств (4.37), (4.43) следует, что $c_0 + b \in \Gamma_-$, $c_0 - b \in \Gamma_+$. Поэтому множества Γ_- , Γ_+ не пусты. Покажем, что

$$\Gamma_- \cap \Gamma_+ = \emptyset. \quad (4.45)$$

Предположим противное: существуют числа $t_1 \in [0, t_0]$, $t_2 \in [t_0, 1]$ такие, что $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ и $c_0 + \gamma(t_1) \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$. Поскольку $t_0 \in [t_1, t_2]$ и $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, то в силу равенства (4.41) имеем $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Следовательно, согласно равенствам (4.35), (4.44) получаем $z_0 = c_0 + \gamma(t_0) \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$, что противоречит неравенству $\|z_0\| < 1$. Тем самым доказано соотношение (4.45).

Шаг 6. Из свойства непрерывности функции γ следует компактность множеств Γ_- , Γ_+ . Поэтому существуют точки $x_0 \in \Gamma_-$, $x_1 \in \Gamma_+$ такие, что

$$\|x_0 - x_1\| = \min_{x_- \in \Gamma_-, x_+ \in \Gamma_+} \|x_- - x_+\|. \quad (4.46)$$

Заметим, что $\|x_0 - x_1\| \leq \operatorname{diam} D_1(b, -b) = 2\|b\| < 2$.

Осталось доказать соотношение (4.29). Предположим противное: существует вектор $w \in \overset{\circ}{D}_1(x_0, x_1) \setminus \operatorname{int} \mathfrak{B}_1(0)$. Поскольку $D_1(x_0, x_1) \subset \mathfrak{B}_1(0)$, то $w \in \partial \mathfrak{B}_1(0)$. Так как $x_0 \in \Gamma_- \subset c_0 + D_1(b, -b)$, $x_1 \in \Gamma_+ \subset c_0 + D_1(b, -b)$, то $D_1(x_0, x_1) \subset c_0 + D_1(b, -b)$ и, следовательно, $w \in (c_0 + D_1(b, -b)) \cap \partial \mathfrak{B}_1(0)$. Поэтому в силу условия строгой выпуклости пространства E и равенства (4.38) имеем

$$w = \operatorname{argmax}_{x \in \mathfrak{B}_1(0)} \langle p(w), x \rangle.$$

Отсюда и из включений $w \in c_0 + D_1(b, -b) \subset C + D_1(b, -b) \subset \mathfrak{B}_1(0)$ в силу предложения 3.2 вытекают равенства

$$w = c_0 + \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p(w), x \rangle = \operatorname{argmax}_{x \in C} \langle p(w), x \rangle + \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p(w), x \rangle. \quad (4.47)$$

Следовательно, $c_0 = \operatorname{argmax}_{x \in C} \langle p(w), x \rangle$, т. е. $p(w) \in N(c_0; C)$. Отсюда и из равенства (4.40) получаем включение $p(w) \in \operatorname{cone}\{p_+, p_-\}$. Следовательно, согласно равенству (4.41) существует число $\hat{t} \in [0, 1]$ такое, что

$$\gamma(\hat{t}) = \operatorname{argmax}_{x \in D_1(b, -b)} \langle p(w), x \rangle.$$

Отсюда и из равенства (4.47) получаем $w = c_0 + \gamma(\hat{t})$. Пусть для определенности $\hat{t} \leq t_0$. Тогда $w \in \Gamma^+$. Поскольку $w \in \overset{\circ}{D}_1(x_0, x_1)$, то в силу леммы 3.14 и условия строгой выпуклости пространства E справедливо $\|w - x_1\| < \|x_0 - x_1\|$, что вместе с включением $w \in \Gamma^+$ противоречит равенству (4.46).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Согласно лемме 4.8 из условия 2) теоремы следует условие 1). Если условие 2) не выполнено, то согласно лемме 4.9 множество $A = E \setminus \operatorname{int} \mathfrak{B}_1(0)$ не является слабо выпуклым с константой 1, однако множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой $R = 1$. Поэтому в данном случае условие 1) также не будет выполнено.

4.3. Доказательство теорем 2.3–2.5. Здесь приведем доказательства теорем 2.3–2.5 и сформулируем лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Из леммы 4.3 следует однозначность функции $\pi: \Omega(R, r) \rightarrow A$. Поэтому для любой пары $(u, A) \in \Omega(R, r)$ справедливо равенство $\pi(u, A) = \{\pi^1(u, A)\}$, где $\pi^1(u, A) \in A$. Пусть задано произвольное число $\beta > 0$. Определим

$$\varepsilon = \min \left\{ \beta, (R - r) \delta_E \left(\frac{\beta}{8R} \right) \right\}. \quad (4.48)$$

Покажем, что для любых двух пар $(u_1, A_1) \in \Omega(R, r)$, $(u_2, A_2) \in \Omega(R, r)$

$$\varrho_\Omega((u_1, A_1), (u_2, A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} \implies \|\pi^1(u_1, A_1) - \pi^1(u_2, A_2)\| < \beta. \quad (4.49)$$

Действительно, пусть заданы две пары $(u_1, A_1) \in \Omega(R, r)$, $(u_2, A_2) \in \Omega(R, r)$ такие, что

$$\varrho_\Omega((u_1, A_1), (u_2, A_2)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $x_1 = \pi^1(u_1, A_1)$, $x_2 = \pi^1(u_2, A_2)$. Поскольку $\varrho(x_2, A_1) \leq h(A_1, A_2) \leq \varrho_\Omega((u_1, A_1), (u_2, A_2)) < \frac{\varepsilon}{2} < R$, то в силу леммы 4.3 существует точка $x_3 \in \pi(x_2, A_1)$. При этом $\|x_3 - x_2\| \leq h(A_1, A_2)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|x_3 - u_1\| &\leq \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - u_2\| + \|u_1 - u_2\| \\ &\leq h(A_1, A_2) + \varrho(u_2, A_2) + \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \varrho(u_1, A_1) + 2h(A_1, A_2) + 2\|u_1 - u_2\| \\ &= \varrho(u_1, A_1) + 2\varrho_\Omega((u_1, A_1), (u_2, A_2)) < \varrho(u_1, A_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства $\|x_1 - u_1\| = \varrho(u_1, A_1)$ следует, что $x_1, x_3 \in A_1 \cap \mathfrak{B}_{\varrho + \varepsilon}(u_1)$, где $\varrho = \varrho(u_1, A_1)$. Применяя лемму 4.2, получаем неравенство

$$\delta_E \left(\frac{\|x_1 - x_3\|}{4R} \right) < \frac{\varepsilon}{R - \varrho(u_1, A_1)}.$$

Следовательно, в силу неравенства $\varrho(u_1, A_1) \leq r$ и равенства (4.48) имеем

$$\delta_E \left(\frac{\|x_1 - x_3\|}{4R} \right) < \frac{\varepsilon}{R - r} \leq \delta_E \left(\frac{\beta}{8R} \right).$$

Отсюда и из свойства монотонности модуля выпуклости вытекает неравенство $\|x_1 - x_3\| < \frac{\beta}{2}$, а значит, $\|x_1 - x_2\| \leq \frac{\beta}{2} + h(A_1, A_2) < \frac{\beta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \beta$. Тем самым доказано соотношение (4.49). В силу произвольности числа $\beta > 0$ из условия (4.49) следует равномерная непрерывность функции $\pi: \Omega(R, r) \rightarrow A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Импликации $3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$ доказаны в [5, теорема 6.2]. При этом, хотя предполагается, что модули выпуклости и гладкости пространства E имеют степенной вид, при доказательстве указанных импликаций данное предположение не используется. Импликация $1) \Rightarrow 3)$ следует из теоремы 2.3.

ЛЕММА 4.10 [6, лемма 1.3.1]. Пусть в нормированном пространстве E задано множество A . Следующие условия эквивалентны:

- 1) множество A слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с константой R ;
- 2) $A \neq E$ и для любой точки $u \in E \setminus A$ найдется вектор $a \in E$ такой, что

$$u \in \text{int } \mathfrak{B}_R(a) \subset E \setminus A. \quad (4.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Зафиксируем произвольную точку $u \in E \setminus A$. В силу леммы 4.10 требуется доказать существование вектора $a \in E$, удовлетворяющего включению (4.50). Рассмотрим случай $\varrho(u, A) \geq R$. В этом случае включения (4.50) выполнены при $a = u$. Пусть теперь $\varrho(u, A) < R$. В силу леммы 4.3 существует точка $x \in \pi(u, A)$. Положим $a = x + \frac{R}{\|u - x\|}(u - x)$. Тогда $\|a - u\| = R - \|u - x\| < R$, т.е. $u \in \text{int } \mathfrak{B}_R(a)$. Отсюда и из опорного условия слабой выпуклости с константой R следуют включения (4.50).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Множество, слабо выпуклое по Ефимову–Стечкину с константой R , может не удовлетворять опорному условию слабой выпуклости с константой R . Например, множество, состоящее из двух различных точек x, y евклидовой плоскости, слабо выпукло по Ефимову–Стечкину с любой константой $R > 0$, но не удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой $R > \frac{\|x - y\|}{2}$.

4.4. Доказательство теоремы 2.6. Доказательству теоремы 2.6 предположим следующие леммы.

ЛЕММА 4.11. Пусть E – равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R , множество $C \subset E$ сильно выпукло с константой $r < R$, и пусть $A \cap C = \emptyset$. Тогда $\inf_{a \in A, c \in C} \|a - c\| > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что

$$r \geq \frac{R}{2}. \quad (4.51)$$

Если неравенство (4.51) не выполнено, то положим $r = \frac{R}{2}$; тогда неравенство (4.51) будет выполнено, причем условия леммы сохранятся.

Предположим, что доказываемое неравенство не справедливо. Тогда существуют последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{c_k\} \subset C$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - c_k\| = 0. \quad (4.52)$$

Если последовательность $\{a_k\}$ фундаментальна, то она сходится к некоторой точке $a_0 \in E$. Из соотношения (4.52) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = a_0$. В силу замкнутости множеств A и C получаем $a_0 \in A \cap C$, что противоречит условию $A \cap C = \emptyset$. Поэтому последовательность $\{a_k\}$ не фундаментальна, а значит, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall N \quad \exists n \geq N, k \geq N: \quad \|a_n - a_k\| \geq 4R\varepsilon. \quad (4.53)$$

Из соотношения (4.52) следует существование номера k_0 такого, что $\|a_k - c_k\| < R - r$ для любого $k \geq k_0$. Поскольку множество C сильно выпукло с константой r и $\{c_k\} \subset C$, то для любых $k, n \in \mathbb{N}$ имеем $\|c_k - c_n\| \leq 2r$ и $D_r(c_k, c_n) \subset C$. Поэтому для любых $k, n \geq k_0$ справедливы соотношения

$$\|a_k - a_n\| \leq \|c_k - c_n\| + \|a_k - c_k\| + \|a_n - c_n\| < 2r + 2(R - r) = 2R. \quad (4.54)$$

В силу леммы 4.6 для любых $k, n \geq k_0$ существует точка

$$a_{kn} \in D_R(a_k, a_n) \cap A \quad (4.55)$$

такая, что

$$\min\{\|a_{kn} - a_k\|, \|a_{kn} - a_n\|\} \geq \frac{\|a_n - a_k\|}{2}.$$

Поэтому согласно соотношению (4.53) получаем

$$\forall N \quad \exists n \geq N, k \geq N: \quad \min\{\|a_{kn} - a_k\|, \|a_{kn} - a_n\|\} \geq 2R\varepsilon. \quad (4.56)$$

Из соотношения (4.52) в силу леммы 3.22 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} h(D_R(c_k, c_n), D_R(a_k, a_n)) = 0.$$

Поэтому для любых $k, n \geq k_0$ существует точка $c_{kn} \in D_R(c_k, c_n)$, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \|c_{kn} - a_{kn}\| = 0. \quad (4.57)$$

Следовательно, в силу соотношений (4.52), (4.56) получаем

$$\forall N \quad \exists n \geq N, k \geq N: \quad \min\{\|c_{kn} - c_k\|, \|c_{kn} - c_n\|\} \geq R\varepsilon.$$

Используя соотношения (4.51), (4.55) и применяя лемму 3.25, находим число $\gamma > 0$ такое, что

$$\forall N \quad \exists n \geq N, k \geq N: \quad \mathfrak{B}_\gamma(c_{kn}) \subset D_r(c_k, c_n).$$

Отсюда и из соотношения (4.57) вытекает существование индексов $k, n \geq k_0$ таких, что $a_{kn} \in D_r(c_k, c_n)$. Следовательно, $a_{kn} \in A \cap C$, что противоречит условию $A \cap C = \emptyset$.

ЛЕММА 4.12. Пусть E – рефлексивное банахово пространство, и пусть шар пространства E не является порождающим множеством. Тогда существуют множество C , сильно выпуклое с константой 1, и полупространство

$$A = \{x \in E: \langle p, x \rangle \geq \alpha\}, \quad (4.58)$$

где $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, такие, что $A \cap C = \emptyset$, причем не существует точка $d \in E$, удовлетворяющая условиям

$$C \subset \mathfrak{B}_1(d) \subset E \setminus A. \quad (4.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку шар $B = \mathfrak{B}_1(0)$ не является порождающим множеством, то в силу предложения 3.3 существуют множество C вида (1.3), функционал $p_0 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$ и точка $x_{p_0}^C \in \operatorname{Argmax}_{x \in C} \langle p_0, x \rangle$ такие, что

$$C \not\subset B + x_{p_0}^C - x_{p_0}^B \quad \forall x_{p_0}^B \in \operatorname{Argmax}_{x \in B} \langle p_0, x \rangle. \quad (4.60)$$

Зафиксируем произвольную последовательность положительных чисел ε_k , сходящуюся к нулю. Для любого натурального k определим полупространство

$$A_k = \{x \in E: \langle p_0, x \rangle \geq \langle p_0, x_{p_0}^C \rangle + \varepsilon_k\}.$$

Заметим, что множество C сильно выпукло с константой 1 и $A_k \cap C = \emptyset$. Предположим, что доказываемое утверждение не верно. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует точка $d_k \in E$, удовлетворяющая условиям

$$C \subset \mathfrak{B}_1(d_k) \subset E \setminus A_k.$$

Из включений $C \subset \mathfrak{B}_1(d_k)$ следует ограниченность последовательности $\{d_k\}$. Поэтому в силу рефлексивности пространства E из $\{d_k\}$ можно выделить подпоследовательность (которую мы снова обозначим через $\{d_k\}$), слабо сходящуюся к некоторому элементу $d_0 \in E$.

В силу включений $C \subset \mathfrak{B}_1(d_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle p, x \rangle \leq \langle p, d_k \rangle + 1 \quad \forall x \in C, \quad \forall p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем $\langle p, x \rangle \leq \langle p, d_0 \rangle + 1$ для любых $x \in C$ и $p \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0)$, поэтому

$$C \subset \mathfrak{B}_1(d_0). \quad (4.61)$$

Отсюда и из включения $x_{p_0}^C \in C$ следует неравенство

$$\|x_{p_0}^C - d_0\| \leq 1. \quad (4.62)$$

Поскольку $\mathfrak{B}_1(d_k) \subset E \setminus A_k$, то $\langle p_0, d_k \rangle + 1 < \langle p_0, x_{p_0}^C \rangle + \varepsilon_k$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство $\langle p_0, x_{p_0}^C - d_0 \rangle \geq 1$. Отсюда и из (4.62) следует, что $x_{p_0}^C - d_0 \in \operatorname{Argmax}_{x \in B} \langle p_0, x \rangle$. Поэтому согласно условию (4.60) имеем $C \not\subset B + d_0 = \mathfrak{B}_1(d_0)$, что противоречит включению (4.61).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. а) Пусть выполнено условие 2) теоремы. Пусть заданы числа $r > 0$, $R > r$ и непересекающиеся множества $A, C \subset E$ такие, что множество A замкнуто и слабо выпукло с константой R , а множество C сильно выпукло с константой r . Для доказательства условия 1) теоремы

требуется показать существование точек $b, d \in E$, удовлетворяющих условиям (2.1). В силу теоремы 2.1 множество A удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R . Применяя лемму 4.11, получаем неравенство $\inf_{a \in A, c \in C} \|a - c\| > 0$. Поэтому согласно лемме 4.4 существуют точки $b, d \in E$, удовлетворяющие условиям (2.1).

б) Пусть условие 2) теоремы не выполнено. В силу леммы 4.12 существуют множество C , сильно выпуклое с константой $r = 1$, и замкнутое полупространство A , не пересекающееся с множеством C , для которых не существует точка $d \in E$, удовлетворяющая условиям (4.59). Следовательно, не существуют точки $b, d \in E$, удовлетворяющие условиям (2.1). Поскольку полупространство A слабо выпукло с любой константой, то условие 1) теоремы не выполняется.

4.5. Доказательство теорем 2.7–2.11. Доказательству теоремы 2.7 предположим следующую лемму.

ЛЕММА 4.13. Пусть множество A в банаховом пространстве E слабо выпукло с константой R . Пусть заданы векторы $x_0, x_1 \in A$, $\|x_0 - x_1\| < 2R$, и пусть множество $A_0 = A \cap D_R(x_0, x_1)$ компактно. Тогда множество A_0 связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда множество A_0 можно разбить на два непустых замкнутых непересекающихся множества B и C . Через M обозначим множество сильно выпуклых отрезков $D_R(b, c)$ таких, что $b \in B$, $c \in C$. Множество M частично упорядочено относительно включения.

Покажем, что любая цепь в M имеет нижнюю грань. Действительно, пусть $\{D_R(b_\lambda, c_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ – произвольная цепь в M , Λ – упорядоченное множество, $D_R(b_\lambda, c_\lambda) \subset D_R(b_\mu, c_\mu)$ для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ таких, что $\lambda \leq \mu$. В силу компактности множества A_0 обобщенные последовательности $\{b_\lambda\}$, $\{c_\lambda\}$ имеют предельные точки b^0 , c^0 соответственно.

Зафиксируем произвольный элемент $\lambda \in \Lambda$. Поскольку $b_\mu \in D_R(b_\lambda, c_\lambda)$ для любого $\mu \geq \lambda$, то в силу замкнутости сильно выпуклого отрезка справедливо включение $b^0 \in D_R(b_\lambda, c_\lambda)$. Аналогично, $c^0 \in D_R(b_\lambda, c_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Следовательно, $D_R(b^0, c^0) \subset D_R(b_\lambda, c_\lambda)$, т.е. сильно выпуклый отрезок $D_R(b^0, c^0)$ является нижней гранью цепи $\{D_R(b_\lambda, c_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$.

В силу леммы Цорна существует минимальный элемент множества M , т.е. существует пара векторов $\hat{b} \in B$, $\hat{c} \in C$ такая, что

$$D_R(b, c) \subset D_R(\hat{b}, \hat{c}) \implies D_R(b, c) = D_R(\hat{b}, \hat{c}) \quad \forall b \in B, \forall c \in C. \quad (4.63)$$

Поскольку множество A слабо выпукло с константой R , существует вектор $x \in A \cap D_R(\hat{b}, \hat{c})$ такой, что $x \neq \hat{b}$, $x \neq \hat{c}$. Будем предполагать, что $x \in B$ (случай $x \in C$ рассматривается аналогично). Так как $D_R(x, \hat{c}) \subset D_R(\hat{b}, \hat{c})$, то согласно соотношению (4.63) справедливо равенство

$$D_R(x, \hat{c}) = D_R(\hat{b}, \hat{c}).$$

Из определения сильно выпуклого отрезка следует, что точка $\frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{c})$ является центром симметрии множества $D_R(\hat{b}, \hat{c})$, а точка $\frac{1}{2}(x + \hat{c})$ является центром симметрии множества $D_R(x, \hat{c})$. Поэтому сильно выпуклый отрезок $D_R(\hat{b}, \hat{c})$ имеет два различных центра симметрии, что противоречит ограниченности этого множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Зафиксируем $r \in (0, R]$, $a \in E$. Предположим, что множество $A_1 = A \cap \text{int } \mathfrak{B}_r(a)$ не связно. Тогда существуют не связанные в A_1 точки $x, y \in A_1$ (см. [21, § 10]). Обозначим $A_0 = A \cap D_R(x, y)$, $r_1 = \max\{\|x - a\|, \|y - a\|\}$. Тогда в силу леммы 3.12 имеем $D_R(x, y) \subset \mathfrak{B}_{r_1}(a) \subset \text{int } \mathfrak{B}_r(a)$ и, следовательно, $A_0 \subset A_1$. Поэтому точки $x, y \in A_0$ не связаны в A_0 . Это противоречит леммам 4.1, 4.13.

ЛЕММА 4.14. Пусть заданно семейство $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ подмножеств нормированного пространства. Пусть для любого $\lambda \in \Lambda$ множество A_λ слабо выпукло с константой R и $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$ для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$. Тогда множество $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ слабо выпукло с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in A$, $\|x - y\| < 2R$. Поскольку $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, существуют $\lambda, \mu \in \Lambda$ такие, что $x \in A_\lambda$, $y \in A_\mu$. Так как $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \leq \|x - y\| < 2R$, то по условию леммы $\lambda = \mu$. Отсюда в силу условия слабый выпуклости множества A_λ с константой R получаем существование точки $z \in A_\lambda \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y) \subset A \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y)$.

ЛЕММА 4.15. Пусть в нормированном пространстве заданы множества B, C , $\varrho(B, C) \geq 2R > 0$. Пусть множество $B \cup C$ слабо выпукло с константой R . Тогда множество B слабо выпукло с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in B$, $0 < \|x - y\| < 2R$. Поскольку множество $B \cup C$ слабо выпукло с константой R , то существует точка $z \in (B \cup C) \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y)$. В силу леммы 3.15 имеем $\|z - x\| \leq \|x - y\| < 2R$. Отсюда и из неравенства $\varrho(B, C) \geq 2R$ следует, что $z \notin C$. Поэтому $z \in B \cap \overset{\circ}{D}_R(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 4.14. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 1).

Предположим, что существуют различные $\lambda, \mu \in \Lambda$ такие, что выполнено $\varrho(A_\lambda, A_\mu) < 2R$. Тогда существуют точки $x \in A_\lambda$, $y \in A_\mu$, удовлетворяющие неравенству $\|x - y\| < 2R$. Точки x, y не связаны в A , что противоречит леммам 4.1, 4.13. Тем самым доказано, что для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо неравенство $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$.

Осталось доказать, что для любого $\lambda \in \Lambda$ множество A_λ слабо выпукло с константой R . Зафиксируем произвольный индекс $\lambda \in \Lambda$. Обозначим $B = A_\lambda$, $C = \bigcup_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} A_\mu$. Из доказанного выше следует, что $\varrho(B, C) \geq 2R$. Поэтому согласно лемме 4.15 множество $B = A_\lambda$ слабо выпукло с константой R .

ЛЕММА 4.16. Пусть в банаховом пространстве E множество A замкнуто и для любых $a, b \in A$ таких, что $0 < \|a - b\| < 2R$, множество $A \cap D_R(a, b)$ связно. Пусть заданы точки $x_0, x_1 \in A$ такие, что $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$, и $\text{int } N(x_0; D_R(x_0, x_1)) \neq \emptyset$. Тогда существует спрямляемая кривая $\Gamma \subset A \cap D_R(x_0, x_1)$, соединяющая точки x_0, x_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D = D_R(x_0, x_1)$. Зафиксируем функционал $p_0 \in \partial \mathfrak{B}_1^*(0) \cap \text{int } N(x_0; D)$. Выберем число $\beta > 0$ такое, что $\text{int } \mathfrak{B}_\beta^*(p_0) \subset N(x_0; D)$. В силу леммы 3.19 имеем

$$\langle p_0, x_0 - x \rangle \geq \beta \|x - x_0\| \quad \forall x \in D. \quad (4.64)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим множество $T_n = \{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}\}$.

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует функция $f_n: T_n \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющая условиям

$$f_n(0) = x_0, \quad f_n(1) = x_1, \quad (4.65)$$

$$\left\langle p_0, x_0 - f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \right\rangle = \frac{k}{2^n} \langle p_0, x_0 - x_1 \rangle \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle p_0, f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) - x \right\rangle \geq \beta \left\| x - f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \right\| \\ & \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, \quad \forall x \in D_R\left(f_n\left(\frac{k}{2^n}\right), f_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Если $n > 0$, то

$$f_n(t) = f_{n-1}(t) \quad \forall t \in T_{n-1}. \quad (4.68)$$

Полагая $f_0(0) = x_0$, $f_0(1) = x_1$ и используя неравенство (4.64) получаем, что при $n = 0$ функция $f_n: T_n \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющая условиям (4.65)–(4.67), существует.

Пусть при некотором $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определена функция $f_s: T_s \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющая условиям (4.65)–(4.67) при $n = s$. Определим функцию $f_{s+1}: T_{s+1} \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющую условиям (4.65)–(4.68) при $n = s + 1$.

Пусть $t \in T_{s+1}$, т. е. $t = \frac{k}{2^{s+1}}$, $k \in \{0, \dots, 2^{s+1}\}$. Если число k четное, т. е. $t \in T_s$, то положим $f_{s+1}(t) = f_s(t)$. Пусть теперь число $k = 2j + 1$ нечетное. Обозначим $a = f_s\left(\frac{j}{2^s}\right)$, $b = f_s\left(\frac{j+1}{2^s}\right)$. Из условия (4.66) следует, что

$$\langle p_0, x_0 - a \rangle = \frac{j}{2^s} \langle p_0, x_0 - x_1 \rangle, \quad \langle p_0, x_0 - b \rangle = \frac{j+1}{2^s} \langle p_0, x_0 - x_1 \rangle.$$

В силу условия доказываемой леммы множество $D_R(a, b) \cap A$ связно. Поэтому согласно теореме о промежуточном значении существует точка $c \in D_R(a, b) \cap A$ такая, что

$$\langle p_0, x_0 - c \rangle = \left\langle p_0, x_0 - \frac{a+b}{2} \right\rangle = \frac{2j+1}{2^{s+1}} \langle p_0, x_0 - x_1 \rangle. \quad (4.69)$$

Определим $f_{s+1}(t) = c$. Таким образом определена функция $f_{s+1}: T_{s+1} \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющая условиям (4.65), (4.68) при $n = s + 1$. Из (4.69) следует условие (4.66) при $n = s + 1$.

Для четных $k = 2j$ условие (4.67) при $n = s + 1$ следует из (4.67) при $n = s$ и включения

$$D_R\left(f_{s+1}\left(\frac{2j}{2^{s+1}}\right), f_{s+1}\left(\frac{2j+1}{2^{s+1}}\right)\right) \subset D_R\left(f_s\left(\frac{j}{2^s}\right), f_s\left(\frac{j+1}{2^s}\right)\right).$$

Пусть $k = 2j + 1$ – нечетное число. Обозначим $a = f_s\left(\frac{j}{2^s}\right) = f_{s+1}\left(\frac{2j}{2^{s+1}}\right)$, $b = f_s\left(\frac{j+1}{2^s}\right) = f_{s+1}\left(\frac{2j+2}{2^{s+1}}\right)$, $c = f_{s+1}\left(\frac{2j+1}{2^{s+1}}\right)$. Из условия (4.67) при $n = s$ получаем

$$\langle p_0, a - x \rangle \geq \beta \|x - a\| \quad \forall x \in D_R(a, b).$$

Отсюда в силу центральной симметрии множества $D_R(a, b)$ относительно точки $\frac{a+b}{2}$ имеем

$$\langle p_0, b - x \rangle \leq -\beta \|x - b\| \quad \forall x \in D_R(a, b),$$

откуда и из включения $D_R(c, b) \subset D_R(a, b)$ следует, что

$$\langle p_0, b - x \rangle \leq -\beta \|x - b\| \quad \forall x \in D_R(c, b).$$

Поскольку множество $D_R(c, b)$ центрально симметрично относительно точки $\frac{c+b}{2}$, то

$$\langle p_0, c - x \rangle \geq \beta \|x - c\| \quad \forall x \in D_R(c, b).$$

Тем самым доказано условие (4.67) при $n = s + 1$. По индукции получаем, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует функция $f_n: T_n \rightarrow A \cap D$, удовлетворяющая условиям (4.65)–(4.68).

Обозначим $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Используя условие (4.68), определим функцию $f: T \rightarrow A \cap D$ так, что $f(t) = f_n(t)$ для любых $t \in T_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Из условий (4.67), (4.68) следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ справедливы соотношения

$$\left\| f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right\| \leq \frac{1}{\beta} \left\langle p_0, f\left(\frac{k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \right\rangle = \frac{\langle p_0, x_0 - x_1 \rangle}{2^n \beta}.$$

Поэтому функция f удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{\langle p_0, x_0 - x_1 \rangle}{\beta}$ на множестве T . Продолжим по непрерывности функцию f на отрезок $[0, 1]$. Из липшицевости функции $f: [0, 1] \rightarrow A \cap D$ вытекает спрямляемость кривой $\Gamma = \{f(t): t \in [0, 1]\}$.

ЛЕММА 4.17. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $A \subset E$ замкнуто и слабо выпукло с константой R , и пусть $x_0, x_1 \in A$, $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R$. Тогда существует спрямляемая кривая $\Gamma \subset A \cap D_R(x_0, x_1)$, соединяющая точки x_0, x_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.17, 3.18 имеем $\text{int } N(x_0; D_R(x_0, x_1)) \neq \emptyset$. Согласно леммам 4.1, 4.13 для любых $a, b \in A$ таких, что $0 < \|a - b\| < 2R$, множество $A \cap D_R(a, b)$ связно. Применяя лемму 4.16, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 4.18. Пусть банахово пространство E равномерно выпукло или конечномерно, и пусть множество $A \subset E$ замкнуто, связно и слабо выпукло с константой R . Тогда множество A линейно связно и, более того, любые две точки множества A можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существуют точки $x, y \in A$, которые нельзя соединить спрямляемой кривой, лежащей в A . Определим B как множество всех точек $b \in A$, которые можно соединить с точкой x спрямляемой кривой, лежащей в A . Обозначим $C = A \setminus B$. Если $\varrho(B, C) < 2R$, то существуют точки $b \in B$, $c \in C$ такие, что $\|b - c\| < 2R$. В силу леммы 4.17 точки b и c можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в A . Это противоречит определению множеств B и C . Следовательно, $\varrho(B, C) \geq 2R > 0$. Отсюда и из замкнутости множества $A = B \cup C$ следует замкнутость множеств B и C , что противоречит связности множества A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.9. Пусть A_λ — произвольная связная компонента множества A . В силу теоремы 2.8 множество A_λ замкнуто и слабо выпукло с константой R . Отсюда согласно лемме 4.18 получаем требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.10. Зафиксируем произвольные точки $x, y \in A$ такие, что $0 < \|x - y\| < 2R$. Для любого числа $t \in [0, 1]$ обозначим $u_t = (1 - t)x + ty$. Поскольку отображение $u \mapsto \pi(u, A)$ однозначно и непрерывно на множестве $U(R, A)$, то это отображение однозначно и непрерывно на множестве $U' = U(R, A) \cup A$. Отсюда и из включения $u_t \in U'$ для любого $t \in [0, 1]$ получаем единственную точку $f(t) \in \pi(u_t, A)$. При этом функция $f: [0, 1] \rightarrow A$ непрерывна и определяет искомую кривую $\Gamma = \{f(t): t \in [0, 1]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.11. Пусть выполнено условие 1) теоремы. В силу теоремы 2.10 для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо неравенство $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$. Поэтому для любых $\lambda \in \Lambda, u \in U(R, A_\lambda)$ справедливо равенство $\pi(u, A_\lambda) = \pi(u, A)$. Это доказывает импликацию 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть выполнено условие 2). Поскольку для любых различных $\lambda, \mu \in \Lambda$ справедливо неравенство $\varrho(A_\lambda, A_\mu) \geq 2R$, то для любых $\lambda \in \Lambda, u \in U(R, A_\lambda)$ справедливо равенство $\pi(u, A_\lambda) = \pi(u, A)$. Это доказывает импликацию 2) $\Rightarrow$ 1).

4.6. Доказательство теорем 2.12–2.15. Докажем теоремы, связанные с предельным переходом и операцией пересечения множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.12. Пусть заданы точки $a, b \in A$ такие, что $0 < \|a - b\| < 2r$. Так как $h(A, A_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существуют последовательности точек $\{a_k\}, \{b_k\}$ такие, что

$$a_k \rightarrow a, b_k \rightarrow b \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad a_k \in A_k, b_k \in A_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.70)$$

Поскольку $\|a_k - b_k\| \rightarrow \|a - b\| > 0$, $2R_k - \|a_k - b_k\| \rightarrow 2R - \|a - b\| > 0$, существует номер k_0 такой, что

$$0 < \|a_k - b_k\| < 2R_k \quad \forall k \geq k_0. \quad (4.71)$$

В силу леммы 4.6 для любого $k \geq k_0$ существует точка $y_k \in A_k \cap D_{R_k}(a_k, b_k)$ такая, что

$$\min\{\|y_k - a_k\|, \|y_k - b_k\|\} \geq \frac{\|a_k - b_k\|}{2}. \quad (4.72)$$

Согласно лемме 3.22 справедливо соотношение

$$h(D_{R_k}(a_k, b_k), D_R(a, b)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из включений $y_k \in D_{R_k}(a_k, b_k)$ следует существование последовательности $\{z_k\} \subset D_R(a, b)$ такой, что $\|z_k - y_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому в силу неравенств (4.72) существуют номер $k_1 \geq k_0$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что при $k \geq k_1$ справедливо неравенство

$$\min\{\|z_k - a\|, \|z_k - b\|\} \geq R\varepsilon.$$

Согласно лемме 3.25 существует число $\gamma > 0$, не зависящее от номера k и такое, что для любого $k \geq k_1$ справедливо включение $\mathfrak{B}_\gamma(z_k) \subset D_r(a, b)$. Поскольку $\|z_k - y_k\| \rightarrow 0$ и $h(A, A_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то существует номер $n \geq k_1$ такой, что $\|z_n - y_n\| + h(A, A_n) < \min\{\gamma, R\varepsilon\}$. Отсюда и из включения $y_n \in A_n$ следует существование вектора $x \in A$, удовлетворяющего неравенству $\|z_n - x\| < \min\{\gamma, R\varepsilon\}$. Следовательно, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} D_r(a, b) \cap A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.13. 1) В силу теоремы 2.12 множество A слабо выпукло с любой константой $r \in (0, R)$. Отсюда в силу леммы 4.7 получаем требуемое утверждение в случае 1).

2) Пусть пространство E конечномерно. Пусть заданы произвольные точки $a, b \in A$ такие, что $0 < \|a - b\| < 2R$. Поскольку $h(A, A_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существуют последовательности точек $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, удовлетворяющие условиям (4.70). Следовательно, существует номер k_0 , удовлетворяющий условию (4.71).

В силу леммы 4.13 для любого $k \geq k_0$ множество $A_k \cap D_{R_k}(a_k, b_k)$ связно. Поэтому для любого $k \geq k_0$ существует точка $y_k \in A_k \cap D_{R_k}(a_k, b_k)$, удовлетворяющая равенству (4.72). Выбирая подпоследовательность, предположим, что $\{y_k\}$ сходится к некоторому элементу $z \in E$. Переходя к пределу в соотношениях (4.72), получаем $\min\{\|z - a\|, \|z - b\|\} \geq \frac{\|a - b\|}{2}$. Отсюда следует, что

$$z \neq a, \quad z \neq b. \quad (4.73)$$

Из соотношений (4.70), $y_k \rightarrow z$, $R_k \rightarrow R$ при $k \rightarrow \infty$ и замкнутости множества $D_R(a, b)$ в силу леммы 3.23 получаем включение

$$z \in D_R(a, b). \quad (4.74)$$

В силу замкнутости множества A справедливо включение $z \in A$, которое вместе с соотношениями (4.73), (4.74) дает условие $A \cap \overset{\circ}{D}_R(a, b) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.14. Пусть $u \in U(R, A)$, $x \in \pi(u, A)$. Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varrho(u, A_k) - R_k) = \varrho(u, A) - R < 0$, то существует номер k_0 такой, что $\varrho(u, A_k) < R_k$ для любого $k \geq k_0$. В силу теоремы 2.3 для любого $k \geq k_0$ существует точка $x_k \in \pi(u, A_k)$, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Поскольку множество A_k удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой R_k , то

$$\varrho\left(x_k + \frac{R_k}{\|u - x_k\|}(u - x_k), A_k\right) \geq R_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.15. Утверждение 1) следует непосредственно из определения 1.2. Утверждение 2) вытекает из определения 1.4 и леммы 3.12.

Авторы выражают искреннюю благодарность Е. С. Половинкину за полезные обсуждения рассмотренных в работе вопросов.

Список литературы

1. Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, "Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества", *Докл. АН СССР*, **127**:2 (1959), 254–257.
2. J.-Ph. Vial, "Strong and weak convexity of sets and functions", *Math. Oper. Res.*, **8**:2 (1983), 231–259.
3. F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski, "Proximal smoothness and lower- C^2 property", *J. Convex Anal.*, **2**:1–2 (1995), 117–144.
4. R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar, L. Thibault, "Local differentiability of distance functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:11 (2000), 5231–5249.

5. F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva, "Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces", *J. Convex Anal.*, **13**:3–4 (2006), 525–559.
6. Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, М., 2006.
7. Е. С. Половинкин, "О новых классах порождающих множеств. Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики", *Междувед. сб.*, МФТИ, М., 1998, 81–93.
8. Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
9. М. В. Балашов, Е. С. Половинкин, " M -сильно выпуклые множества и их порождающие подмножества", *Матем. сб.*, **191**:1 (2000), 27–64; англ. пер.: M. V. Balashov, E. S. Polovinkin, " M -strongly convex subsets and their generating sets", *Sb. Math.*, **191**:1 (2000), 25–60.
10. Г. Е. Иванов, "Критерий гладких порождающих множеств", *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 51–76; англ. пер.: G. E. Ivanov, "A criterion of smooth generating sets", *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 343–368.
11. Р. Н. Карасев, "Об аналоге теоремы Каратеодори для M -сильно выпуклых множеств", *Моделирование и анализ информационных систем*, **8**, № 2, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 2001, 17–22.
12. Дж. Дистель, *Геометрия банаховых пространств. Избранные главы*, Вища школа, Киев, 1980; пер. с англ.: J. Diestel, *Geometry of Banach spaces. Selected topics*, Lecture Notes in Math., **485**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
13. В. С. Балаганский, Л. П. Власов, "Проблема выпуклости чебышёвских множеств", *УМН*, **51**:6 (1996), 125–188; англ. пер.: V. S. Balaganskii, L. P. Vlasov, "The problem of convexity of Chebyshev sets", *Russian Math. Surveys*, **51**:6 (1996), 1127–1190.
14. Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, "Некоторые свойства чебышевских множеств", *Докл. АН СССР*, **118**:1 (1958), 17–19.
15. М. И. Карлов, "Чебышевский слой многообразий в гильбертовом пространстве", *Теория приближений. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 235–248; англ. пер.: M. I. Karlov, "Chebyshev layer of manifolds in a Hilbert space", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219** (1997), 231–244.
16. М. И. Карлов, И. Г. Царьков, "Выпуклость и связность чебышевских множеств и солнц", *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 967–978.
17. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
18. С. Б. Стечкин, "Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах", *Избранные труды. Математика*, Наука, М., 1998, 270–281.
19. Л. С. Понтрягин, "Линейные дифференциальные игры преследования", *Матем. сб.*, **112**(154):3(7) (1980), 307–330; англ. пер.: L. S. Pontrjagin, "Linear differential games of pursuit", *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 285–303.
20. У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
21. Л. Шварц, *Анализ*, т. 1, Мир, М., 1972; пер. с франц.: L. Schwartz, *Analyse mathématique. I*, Hermann, Paris, 1967.

М. В. БАЛАШОВ (M. V. BALASHOV)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: balashov@mail.mipt.ru, balashov73@mail.ru

Поступило в редакцию

04.04.2007

Г. Е. ИВАНОВ (G. E. IVANOV)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: givanov@mail.mipt.ru