Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малыхин, Поперечники, связанные с псевдоразмерностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:07:55

УДК 519.1+517.5

Ю. В. Малыхин

Поперечники, связанные с псевдоразмерностью

Рассмотрены два поперечника, связанные с понятием псевдоразмерности. Первый из них, ρ_n , определяется аналогично колмогоровскому поперечнику, но с заменой линейной размерности на псевдоразмерность; ρ_n оценивается снизу через поперечник s_n , определяемый как $1/2$ длины максимального ребра $(n+1)$ -мерного “координатного” куба, специальным образом вписанного в данное множество. Построены примеры множеств со сколь угодно большими отношениями ρ_n/s_n (при $n \geq 2$) и ρ_{10n}/s_{9n} (при достаточно большом n). В терминах комбинаторной размерности основной результат означает, что для любого $C > 0$ и достаточно больших n существует множество W размерности $vc(W, 1) \leq 9n$, которое не может быть приближено по равномерной норме с точностью C множеством V размерности $vc(V, 0) \leq 10n$.

Библиография: 8 наименований.

Ключевые слова: размерность Валника–Червоненкиса, комбинаторная размерность, поперечники.

§ 1. Введение

Пусть I – некоторое множество. Обозначим через $B(I)$ пространство ограниченных функций $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, снабженное нормой $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Рассмотрим непустое множество $W \subset B(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Псевдоразмерностью* $\dim_{\mathcal{P}}(W)$ множества W называется такое максимальное число n , что существуют точки $x_1, \dots, x_n \in I$ и числа $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию: для любого набора знаков $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{-1, 1\}$ найдется такая функция $f \in W$, что

$$\sigma_i(f(x_i) - y_i) > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Если таких n не существует (т. е. W состоит из одного элемента), то полагаем $\dim_{\mathcal{P}} W = 0$. Если таких n бесконечно много, то $\dim_{\mathcal{P}} W = \infty$.

Линейное пространство функций размерности n имеет псевдоразмерность n . Другими примерами являются пространства сплайнов степени m с n нефиксированными узлами или рациональных функций степени n . В первом случае псевдоразмерность по порядку равна mn , во втором – n .

Понятие псевдоразмерности появилось как обобщение понятия размерности, введенной В. Н. Валником и А. Я. Червоненкисом в работе [1]. Впрочем, подобные характеристики использовались в теории приближений и ранее (см. [2] и [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00066) и Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-5813.2006.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Псевдоразмерностным* поперечником множества W называется величина

$$\rho_n(W) := \inf_S d(W, S),$$

где инфимум берется по множествам S , имеющим псевдоразмерность не более n ,

$$d(W, S) := \sup_{f \in W} \inf_{h \in S} \|f - h\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Раздробляющим* поперечником $s_n(W)$ множества W называется точная верхняя грань таких $\varepsilon \geq 0$, что существуют точки $x_0, \dots, x_n \in I$ и числа $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию: для любого набора знаков $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \{-1, 1\}$ найдется функция $f \in W$ такая, что

$$\sigma_i(f(x_i) - y_i) \geq \varepsilon, \quad i = 0, \dots, n.$$

Как видно, в определении 3 используются $n + 1$ точек, а не n . Смысл этого будет понятен из сравнения ρ_n и s_n . Начинать нумерацию с нуля будет удобно в дальнейшем.

Поперечник $\rho_n(W)$ является оценкой снизу величины приближения множества W множествами псевдоразмерности n . Различные примеры вычисления псевдоразмерности и псевдоразмерностных поперечников множеств можно найти в [4]–[6].

Важную роль во многих задачах играют оценки ε -энтропии множеств через их псевдоразмерность и соответствующие поперечники. Наиболее точные такие оценки содержатся в работах [7] и [8].

Нетрудно проверить, что $\rho_n(W) \geq s_n(W)$. Как правило, оценка ρ_n снизу проводилась с помощью этого неравенства. Возникает вопрос о том, насколько это неравенство точное.

Верно ли, что существует такая абсолютная константа C , что $\rho_n(W) \leq C s_n(W)$ для всех W ? Верно ли, что для каждого n существует такое число $C(n)$, что $\rho_n(W) \leq C(n) s_n(W)$? Ответ на последние два вопроса отрицательный, как показывает

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $n \geq 2$ и любого $C > 0$ найдутся множества I и $W \subset B(I)$ такие, что $\rho_n(W) > C s_n(W)$.*

Используя идею доказательства теоремы 1, но значительно более громоздкие конструкции, можно получить аналогичный пример для s_m и ρ_n при m , немного меньшем, чем n .

ТЕОРЕМА 2. *Для достаточно большого n и любого $C > 0$ найдутся множества I и $W \subset B(I)$ такие, что $\rho_{10n}(W) > C s_{9n}(W)$.*

По-видимому, этим способом невозможно построить примеры, скажем, для s_n и ρ_{10n} .

Переформулируем основной результат (теорему 2) в терминах комбинаторной размерности. *Комбинаторная размерность* $vc(W, \varepsilon)$ множества W определяется так же, как и псевдоразмерность, но с заменой 0 на ε в неравенстве (1).

ТЕОРЕМА 2'. Для достаточно большого n и любого $C > 0$ найдутся множества I и $W \subset B(I)$ (последнее размерности $\text{vc}(W, 1) \leq 9n$) такие, что W не может быть приближено в $B(I)$ с точностью C множеством V размерности $\text{vc}(V, 0) \leq 10n$.

§ 2. Сравнение поперечников ρ_n и s_n

Вместо последовательности знаков $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{-1, 1\}$ в определении 1 удобно рассматривать вектор $\sigma \in \{+, -\}^n$; аналогично в определении 3. Если для любого $\sigma \in \{+, -\}^n$ существует функция $f = f_\sigma \in W$, для которой выполнено неравенство (1), то будем говорить, что W раздроблено на множестве точек $\{x_1, \dots, x_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $L > C$ – произвольное натуральное число. Построим множество W с поперечниками $\rho_n(W) \geq L/2$ и $s_n(W) \leq 1/2$.

Пусть

$$I := \{a, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(L)}, \dots, x_n^{(L)}\}.$$

Для $i = 1, \dots, L + 1$ определим функции f_i :

$$f_i(x) = \begin{cases} -i, & x = a, \\ \frac{L}{2}, & x = x_k^{(i)} \text{ или } x = x_k^{(i-1)}, \\ -\frac{L}{2}, & x = x_k^{(j)}, j \neq i, j \neq i-1. \end{cases}$$

Для любых $i \in \{1, \dots, L\}$ и $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n) \in \{+, -\}^{n+1}$ определим функции $f_{i,\sigma}$. Если $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \neq (+, +, \dots, +)$, положим

$$f_{i,\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_0 \cdot 3L, & x = a, \\ \sigma_k \cdot \frac{L}{2}, & x = x_k^{(i)}, \\ -\frac{L}{2}, & x = x_k^{(j)}, j \neq i. \end{cases}$$

Далее, $f_{i,(+, +, \dots, +)} = f_i$ и $f_{i,(-, +, +, \dots, +)} = f_{i+1}$. Наконец,

$$A_i := \{f_{i,\sigma} : \sigma \in \{+, -\}^{n+1}\}, \quad W := A_1 \cup \dots \cup A_L.$$

Множество A_i раздроблено на множестве $\{a, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}$. Пусть $f, g \in A_i$, а $x \in \{a, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}$. Тогда если $f(x) > g(x)$, то $f(x) \geq g(x) + L$, за исключением случая $f = f_i, g = f_{i+1}, x = a$. Будем называть тройку (f, g, a) “узким местом”.

Докажем, что $\rho_n(W) \geq L/2$. Предположим противное: существует такое множество S псевдоразмерности не более n , что для любого $f \in W$ найдется $\hat{f} \in S$, для которых $\|f - \hat{f}\| < L/2$. Тогда $\hat{f}_i(a) \leq \hat{f}_{i+1}(a)$, иначе множество $\{\hat{f} : f \in A_i\}$ будет иметь псевдоразмерность больше n за счет осцилляций на точках $\{a, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\}$. Значит, $\hat{f}_1(a) \leq \hat{f}_{L+1}(a)$, и $f_1(a) = f_{L+1}(a) + L$. Противоречие.

Докажем, что $s_n(W) \leq 1/2$. Рассмотрим $x_0, \dots, x_n \in I, y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ из определения 3. Понятно, что достаточно рассмотреть следующие два случая (здесь впервые используется $n \geq 2$):

1) $x_0 = a$, $x_k = x_k^{(i)}$, $k = 1, \dots, n$;

2) $x_1 = x_{k_1}^{(i)}$, $x_2 = x_{k_2}^{(j)}$, $i < j$.

В случае 1) функции f_i и f_{i+1} могут дать знаки $(+, +, \dots, +)$ и $(-, +, +, \dots, +)$ на точках $x_0, \dots, x_n$. Но тогда в точке a существует “узкое место”: $f_i(a) = f_{i+1}(a) + 1$, откуда следует $s_n(W) \leq 1/2$.

В случае 2) ясно, что знаки $(+, +)$ на $\{x_1, x_2\}$ может дать только функция f_{i+1} и только при $j = i + 1$. Однако нам нужны по крайней мере две функции, соответствующие знакам $+$ и $-$ на точке x_0 .

§ 3. Поперечники множеств вида $A \times B$

Пусть $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. отождествим $B(I_1) \times B(I_2) \cong B(I_1 \sqcup I_2)$:

$$(f, g) \leftrightarrow f \times g, \quad \text{где } f \times g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I_1, \\ g(x), & x \in I_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что для любых $A \subset B(I_1)$ и $B \subset B(I_2)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{P}}(A \times B) &= \dim_{\mathcal{P}}(A) + \dim_{\mathcal{P}}(B), \\ s_n(A \times B) &= \max_{n_1+n_2=n-1} \min(s_{n_1}(A), s_{n_2}(B)), \\ \rho_n(A \times B) &\leq \min_{n_1+n_2=n} \max(\rho_{n_1}(A), \rho_{n_2}(B)). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество I и его копию I' такие, что $I \cap I' = \emptyset$. Множеству $A \subset I$ соответствует $A' \subset I'$. Из вышесказанного следует, что выполнено равенство $s_{2n}(A \times A') = s_n(A)$. Поскольку мы можем утверждать лишь то, что $\rho_{2n+1}(A \times A') \leq \rho_{2n}(A \times A') \leq \rho_n(A)$, существует надежда из множества A с большим отношением ρ_n/s_n получить множество $A \times A'$ с большим отношением ρ_{2n+1}/s_{2n} . Однако автору не удалось это сделать.

Пусть $W = W_5$ – множество, построенное в теореме 1 для $n = 5$ и большого C . Тем самым, $1/2 = s_5(W) < C\rho_5(W)$. Покажем, что $\rho_{10}(W \times W') \leq 1$.

Пусть $U \subset W$ – множество функций, которые при некотором i принимают на точках $x_1^{(i)}, \dots, x_5^{(i)}$ по крайней мере одно отрицательное и три положительных значения. Обозначим через h_i функцию, которая всюду равна f_i (см. теорему 1), кроме точки a , в которой $h_i(a) = f_i(a) - 1 = f_{i+1}(a)$. Рассмотрим множество S , которое получается из $W \times W'$ заменой функций вида $f_i \times g'$, $g' \in U'$, на функции $h_i \times g'$ и заменой $g \times f'_i$, $g \in U$, на $g \times h'_i$.

Очевидно, что $d(W \times W', S) \leq 1$. Докажем неравенство $\dim_{\mathcal{P}}(S) \leq 10$. Рассмотрим во множестве $I \sqcup I'$ одиннадцать точек и предположим, что S раздроблено на них. Без ограничения общности считаем, что в I попало больше точек, чем в I' . Из конструкции W_5 видно, что среди этих точек не может быть $x_k^{(i)}$ и $x_l^{(j)}$ при $i \neq j$. Стало быть, во множестве I их ровно шесть: $a, x_1^{(i)}, \dots, x_5^{(i)}$ с некоторым i , а во множестве I' их пять: без ограничения общности это $(x'_1)^{(j)}, \dots, (x'_4)^{(j)}$ и пятая точка x' , которая есть либо a' , либо $(x'_5)^{(j)}$.

Посмотрим, какие функции в S соответствуют следующим расстановкам знаков:

a	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\dots$	$x_5^{(i)}$	$(x'_1)^{(j)}$	$(x'_2)^{(j)}$	$(x'_3)^{(j)}$	$(x'_4)^{(j)}$	x'
$+$	$+$	$+$	$\dots$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$\dots$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

Первой строке знаков соответствует функция вида $f_+ \times g'_+$, где $f_+ \in \{f_i, f_{i+1}, h_i, h_{i+1}\}$, $g'_+ \in U'$. Второй строке – функция $f_- \times g'_-$, где $f_- \in \{f_i, f_{i+1}, h_i, h_{i+1}\}$, $g'_- \notin U'$. Однако ни одна из комбинаций не возможна, так как в S нет функций вида $f_i \times g'$, $g' \in U'$, или $h_{i+1} \times g'$, $g' \notin U'$.

§ 4. Сравнение поперечников ρ_n и s_m при $m < n$

В контрпримере к неравенству $\rho_n \leq C s_n$ использовалась следующая конструкция. Строились семейства функций с “узким местом” $f_+(x) = f_-(x) + 1$. Это “узкое место” должно было исчезнуть: $f_+(x) \leq f_-(x)$. Далее из таких “узких мест” была построена цепочка. В случае сравнения ρ_n и s_m , $m < n$, “узких мест” будет много, а исчезнуть может какое-то одно (подробнее см. ниже). В связи с этим мы вводим определение нечеткого графа, а затем доказываем лемму 1, с помощью которой псевдомерностный поперечник специальных классов оценивается снизу. В силу леммы 2 существует некоторый нечеткий граф, с помощью которого мы доказываем теорему 2.

Рассмотрим семейство функций $A = \{f_\sigma : \sigma \in \{+, -\}^{n+1}\}$, определенных на множестве I , раздробленное на множестве $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset I$. Для $k \in \{0, \dots, n\}$ введем следующие обозначения:

$$A_k^+ := \{f_\sigma : \sigma_k = +\}, \quad A_k^- := \{f_\sigma : \sigma_k = -\}. \quad (2)$$

Условие раздробленности эквивалентно тому, что для любого k и любых $f \in A_k^+$, $g \in A_k^-$ имеем $f(x_k) > g(x_k)$. Если $s_n(A) \leq 1/2$, то существует “узкое место”, т. е. k и функции $f \in A_k^+$, $g \in A_k^-$ такие, что $f(x_k) \leq g(x_k) + 1$. Если $s_m(A) \leq 1/2$, $m < n$, то существуют “узкие места” в количестве более одного. В дальнейшем мы будем говорить о множествах “узких мест” $B_k^+ \subset A_k^+$, $B_k^- \subset A_k^-$, для которых при любых $f \in B_k^+$, $g \in B_k^-$ выполнено $f(x_k) \leq g(x_k) + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Нечетким графом назовем пару $G = (V, \{E_t : t \in T\})$, где V – множество вершин, $\{E_t\}$ – семейство наборов ориентированных ребер, $E_t \subset V \times V$.

Скажем, что какое-то свойство выполнено для нечеткого графа G , если для любой выборки ребер

$$e : T \rightarrow V \times V, \quad e(t) \in E_t,$$

это свойство выполнено для (обычного) графа $(V, \{e(t)\})$. Нас будет интересовать, при каких условиях в нечетком графе существует ориентированный путь с заданной длиной.

Множества E_t будем называть нечеткими ребрами; нечеткий граф иногда будем называть просто графом.

Оценим ρ_n снизу с помощью графа “узких мест”.

Обозначения $A_{t,k}^\pm$ в следующей лемме аналогичны обозначениям (2).

ЛЕММА 1. Пусть $W \subset B(I)$ имеет вид

$$W = \bigcup_{t \in T} A_t, \quad A_t = \{f_{t,\sigma} : \sigma \in \{+, -\}^{n+1}\}, \quad (3)$$

причем семейство функций A_t раздроблено на точках $\{x_{t,0}, \dots, x_{t,n}\}$. Далее, заданы множества $B_{t,k}^+ \subset A_{t,k}^+$, $B_{t,k}^- \subset A_{t,k}^-$ такие, что:

$$\forall (f, g) \in B_{t,k}^+ \times B_{t,k}^- \quad f(x_{t,k}) = g(x_{t,k}) + 1, \quad (4)$$

$$\forall (f, g) \in (A_{t,k}^+ \times A_{t,k}^-) \setminus (B_{t,k}^+ \times B_{t,k}^-) \quad f(x_{t,k}) \geq g(x_{t,k}) + L. \quad (5)$$

Рассмотрим нечеткий граф $G_W = (V, \{E_t : t \in T\})$,

$$V = W \times I, \quad E_t = \bigsqcup_{k=0}^n (B_{t,k}^+ \times \{x_{t,k}\}) \times (B_{t,k}^- \times \{x_{t,k}\}). \quad (6)$$

Если G_W содержит ориентированный путь длины L , то $\rho_n(W) \geq L/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует множество $\widehat{W}$ псевдоразмерности не более n и отображение $\hat{\cdot} : W \rightarrow \widehat{W}$ такое, что $\|f - \hat{f}\| < L/2$ для $f \in W$. Фиксируем t . Поскольку множество $\{\hat{f} : f \in A_t\}$ имеет псевдоразмерность не более n , найдутся k и функции $f_t \in A_{t,k}^+$, $g_t \in A_{t,k}^-$ такие, что $\hat{f}_t(x_{t,k}) \leq \hat{g}_t(x_{t,k})$. В силу (5) имеем $f_t \in B_{t,k}^+$, $g_t \in B_{t,k}^-$. Возьмем в G_W выборку ребер $t \mapsto ((f_t, x_{t,k}) \rightarrow (g_t, x_{t,k}))$. (Ребро $(u, v) \in E_t$ обозначаем $u \rightarrow v$.) Существует ориентированный путь $(f^{(0)}, x) \rightarrow (f^{(1)}, x) \rightarrow \dots \rightarrow (f^{(L)}, x)$ с длиной L . Тогда $f^{(i)}(x) = f^{(i+1)}(x) + 1$ и $\hat{f}^{(i)}(x) \leq \hat{f}^{(i+1)}(x)$; следовательно, $f^{(0)}(x) = f^{(L)}(x) + L$ и $\hat{f}^{(0)}(x) \leq \hat{f}^{(L)}(x)$. Противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что доказательство теоремы 1 было построено точно по такой же схеме.

Построим нечеткий граф специального вида с длинным путем.

ЛЕММА 2. Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$, $m_0^+, \dots, m_r^+, m_0^-, \dots, m_r^- \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathbb{N}$ существуют нечеткий граф $G = (V, \{E_t : t \in T\})$ со следующими свойствами:

- 1) G содержит ориентированный путь длины L ;
- 2) $V = V_0 \sqcup \dots \sqcup V_r$, нечеткие ребра E_t имеют вид

$$E_t = \bigsqcup_{k=0}^r X_{t,k}^+ \times X_{t,k}^-,$$

где $X_{t,k}^\pm \subset V_k$, $X_{t,k}^+ \cap X_{t,k}^- = \emptyset$, $\#X_{t,k}^\pm = m_k^\pm$;

3) фиксированы непересекающиеся множества $R_k^\pm$ мощности $m_k^\pm$ и биекции $\varphi_t : R \rightarrow X_t$, где

$$R := \bigsqcup_{k=0}^r R_k^+ \sqcup R_k^-, \quad X_t := \bigsqcup_{k=0}^r X_{t,k}^+ \sqcup X_{t,k}^-,$$

причем $\varphi_t(R_k^\pm) = X_{t,k}^\pm$;

4) для любого $k \in \{0, 1, \dots, r\}$ и любого отображения $\pi: R \rightarrow \{+, -\}$ такого, что $\pi|_{R_k^\pm} \equiv \pm$, существует функция $\gamma: V \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall (u, v) \in X_{t,k}^+ \times X_{t,k}^- \quad \gamma(u) = \gamma(v) + 1, \quad (7)$$

$$\forall (u, v) \in (Y_{t,\pi}^+ \times Y_{t,\pi}^-) \setminus (X_{t,k}^+ \times X_{t,k}^-) \quad \gamma(u) \geq \gamma(v) + L, \quad (8)$$

где $Y_{t,\pi}^\pm := \{v \in X_t: \pi(\varphi_t^{-1}(v)) = \pm\}$.

Доказательство леммы 2 приведем далее. Сейчас мы построим множество W вида (3), для которого граф “узких мест” (6) изоморфен графу G , получаемому из леммы 2. Затем мы сможем применить лемму 1 и оценить $\rho_n(W)$ снизу. Множества $X_{t,k}^\pm$ из леммы 2 соответствуют множествам $B_{t,k}^\pm$ леммы 1, а неравенства (7), (8) нужны для обеспечения выполнения соотношений (4), (5). Поперечник $s_m(W)$ оценим сверху без использования лемм 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Возьмем натуральное L и построим множество W с поперечниками $\rho_n(W) \geq L/2$ и $s_{n-p}(W) \leq 1/2$ при $p = \lfloor n/9 \rfloor$ и условии, что n достаточно велико.

Напомним, что в $\{+, -\}^{n+1}$ имеется метрика Хемминга $d(\sigma, \sigma') = \#\{k: \sigma_k \neq \sigma'_k\}$. Поскольку n достаточно велико, для любого σ° имеем

$$\frac{\#\{\sigma: d(\sigma, (+, +, \dots, +)) \leq 5p\}}{\#\{\sigma: d(\sigma, \sigma^\circ) < 4p + 3\}} > p.$$

Поэтому существует такое множество $\Sigma \subset \{+, -\}^{n+1}$ мощности $p + 1$, что

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \Sigma \quad d(\sigma, (+, +, \dots, +)) &\leq 5p, \\ \forall \sigma \neq \sigma' \in \Sigma \quad d(\sigma, \sigma') &\geq 4p + 3. \end{aligned}$$

Запишем $\Sigma = \{\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(p)}\}$. Положим при $0 \leq k \leq p$

$$\begin{aligned} S_k^+ &:= \{\sigma \in \{+, -\}^{n+1}: \sigma_k = +, d(\sigma, \sigma^{(k)}) \leq 2p + 1\}, \\ S_k^- &:= \{\sigma \in \{+, -\}^{n+1}: \sigma_k = -, d(\sigma, \sigma^{(k)}) \leq 2p + 1\} \end{aligned}$$

и $S_k^+ = S_k^- = \emptyset$ при $k \geq p + 1$. Отметим, что $S_k^\pm$, $k = 0, \dots, p$, дизъюнкты. (Именно такой выбор множеств $S_k^\pm$ нужен для выполнения неравенства $s_{n-p}(W) \leq 1/2$.)

Применим лемму 2 для $r = p$, $m_k^\pm = \#S_k^\pm$ и выбранного ранее L . Получим граф $G = (V, \{E_t: t \in T\})$. Обозначим

$$S := \bigsqcup_{k=0}^p S_k^+ \sqcup S_k^-.$$

В свойстве 3) из леммы 2 можно положить $R_k^\pm = S_k^\pm$. Возникают биекции $\varphi_t: S \rightarrow X_t$. Воспользуемся свойством 4). Для каждого k , $0 \leq k \leq p$, возьмем отображение $\pi: S \rightarrow \{+, -\}$ в виде $\pi(\sigma) = \sigma_k$, получим функции $\gamma_k: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Выберем число $\text{Max} = -\text{Min} > L + \max_{k,v} |\gamma_k(v)|$.

Множество I , на котором будут заданы функции из W , определим следующим образом:

$$I = \{a_0, \dots, a_p\} \sqcup \bigsqcup_{t \in T} \{x_{t,p+1}, \dots, x_{t,n}\}.$$

Для единообразия обозначим $x_{t,0} = a_0, \dots, x_{t,p} = a_p$.

Для $t \in T$ и $\sigma \notin S$ полагаем

$$f_{t,\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_k \cdot \text{Max}, & x = x_{t,k}, \quad 0 \leq k \leq p, \\ \sigma_k \cdot \frac{L}{2}, & x = x_{t,k}, \quad k \geq p+1, \\ \text{Min}, & x \notin \{x_{t,0}, \dots, x_{t,n}\}. \end{cases}$$

Каждой вершине $v \in V$ мы сопоставим функцию f_v , которую определим ниже. Если $\sigma \in S$, то полагаем $f_{t,\sigma} \equiv f_{\varphi_t(\sigma)}$. Осталось определить f_v . При $k \geq p+1$ положим

$$f_v(x_{t,k}) = \begin{cases} \sigma_k \cdot \frac{L}{2}, & v \in X_t, \quad \sigma = \varphi_t^{-1}(v), \\ \text{Min}, & v \notin X_t. \end{cases}$$

При $0 \leq k \leq p$ полагаем $f_v(a_k) = \gamma_k(v)$.

Наконец,

$$A_t = \{f_{t,\sigma} : \sigma \in \{+, -\}^{n+1}\}, \quad W = \bigcup_{t \in T} A_t, \quad B_{t,k}^\pm = \{f_{t,\sigma} : \sigma \in S_k^\pm\}. \quad (9)$$

Отметим, что $B_{t,k}^\pm = \emptyset$ при $k \geq p+1$.

Проверим, что выполнены все условия леммы 1.

Неравенства (5) для $k \geq p+1$ очевидны. Проверим их для $0 \leq k \leq p$. Возьмем t и функции f, g , для которых необходимо проверить неравенство (5). Запишем $f = f_{t,\sigma}$, $g = f_{t,\tau}$. Если $\sigma \notin S$ или $\tau \notin S$, неравенство (5) очевидно. Пусть $\sigma, \tau \in S$. Тогда $f = f_u$, $u = \varphi_t(\sigma)$, $g = f_v$, $v = \varphi_t(\tau)$. По построению имеем $f(x_{t,k}) = \gamma_k(u)$, $g(x_{t,k}) = \gamma_k(v)$, где γ_k построено по отображению $\pi : \sigma \mapsto \sigma_k$. Поскольку $\sigma_k = -\tau_k = +$, то $\pi(\varphi_t^{-1}(u)) = +$, $\pi(\varphi_t^{-1}(v)) = -$, откуда $(u, v) \in Y_{t,\pi}^+ \times Y_{t,\pi}^-$. С другой стороны, $(u, v) \notin X_{t,k}^+ \times X_{t,k}^-$, поскольку $(\sigma, \tau) \notin S_k^+ \times S_k^-$ и $\varphi_t(S_k^\pm) = X_{t,k}^\pm$. Остается воспользоваться (8). Аналогично, из равенства (7) выводим (4).

То, что множество A_t раздроблено на множестве $\{x_{t,0}, \dots, x_{t,n}\}$, автоматически следует из соотношений (4) и (5).

Отображение $v \mapsto f_v$ инъективно. Действительно, возьмем вершины $u \neq v$. Если $u, v \in X_t$, то $\sigma = \varphi_t^{-1}(u) \neq \varphi_t^{-1}(v) = \tau$ и $f_u = f_{t,\sigma} \neq f_{t,\tau} = f_v$. Если же $u \notin X_t \ni v$, то $f_u(x_{t,p+1}) = \text{Min} \neq f_v(x_{t,p+1})$. Далее, отображение $f_{t,\sigma} \mapsto \varphi_t(\sigma)$ устанавливает биекции $B_{t,k}^+ \rightarrow X_{t,k}^+$, $B_{t,k}^- \rightarrow X_{t,k}^-$. Следовательно, отображение, определенное на V по правилу

$$v \mapsto (f_v, a_k) \quad \text{при } v \in V_k,$$

дает изоморфизм (с точностью до изолированных вершин) между построенным по лемме 2 графом G и графом G_W из (6); поэтому в G_W есть ориентированный путь длины L .

Применяя лемму 1, получаем, что $\rho_n(W) \geq L/2$.

Проверим, что $s_{n-p}(W) \leq 1/2$. Возьмем точки $x_0, \dots, x_{n-p} \in I$ и предположим, что существуют числа $y_0, \dots, y_{n-p}$ такие, что

$$\forall \tau: \{x_0, \dots, x_{n-p}\} \rightarrow \{+, -\} \quad \exists f_\tau \in W: \quad \tau(x_i)(f_\tau(x_i) - y_i) > 1/2.$$

Заметим следующие три факта.

(i) Если $x_i = x_{t,k}$, $k \geq p+1$ и $\tau(x_i) = +$, то $f_\tau \in A_t$. Действительно, в противном случае $f_\tau(x_{t,k}) = \text{Min} > y_i$, что невозможно.

(ii) Если $x_i = x_{t,k}$, $x_j = x_{t,m}$, $k, m \geq p+1$ и $f_\tau = f_{t,\sigma} \in A_t$, то $\tau(x_i) = \sigma_k$. Действительно, функции, дающие знаки $(+, -)$ и $(-, +)$ на x_i, x_j , лежат в A_t и принимают значения из $\{\pm L/2\}$. Следовательно, $y_i, y_j \in (-L/2, L/2)$. Отсюда $\tau(x_i) = \sigma_k$, $\tau(x_j) = \sigma_m$.

(iii) Обозначим $B_t := \bigsqcup_{k=0}^p B_{t,k}^+ \sqcup B_{t,k}^-$; тогда $A_t \cap A_s = B_t \cap B_s$ для любых $t \neq s$. Действительно, если $f \in A_t \setminus B_t$, то $f(x_{s,p+1}) = \text{Min} \notin \{\pm L/2\}$, поэтому $f \notin A_s$.

Имеют место два случая:

- 1) $\{x_0, \dots, x_{n-p}\} \subset \{x_{t,0}, \dots, x_{t,n}\}$;
- 2) $x_0 = x_{t,k}$, $x_1 = x_{s,m}$, $t \neq s$, $k, m \geq p+1$.

В случае 1) имеем $x_j = x_{t,k_j}$. Существует $a_k \in \{x_0, \dots, x_{n-p}\}$, для определенности $x_0 = a_{k_0} = a_k$. Рассмотрим

$$\tau: \tau(x_0) = +, \quad \tau(x_i) = \sigma_{k_i}^{(k)}, \quad i \geq 1,$$

где $\sigma^{(k)} \in \Sigma$. Поскольку $\sigma^{(k)}$ содержит не более $5p$ минусов и $n - 2p > 5p$, найдется i такое, что $\tau(x_i) = +$, $k_i \geq p+1$. За счет этого плюса в силу факта (i) имеем $f_\tau \in A_t$, т.е. $f_\tau = f_{t,\sigma}$. Рассмотрим те j , для которых $k_j \geq p+1$. Для них в силу факта (ii) имеем $\sigma_{k_j} = \tau(x_j) = \sigma_{k_j}^{(k)}$. Поэтому $d(\sigma, \sigma^{(k)}) \leq 2p+1$, откуда $\sigma \in S_k^+ \sqcup S_k^-$, $f_\tau \in B_{t,k}^+ \sqcup B_{t,k}^-$. Аналогично, функция, соответствующая набору знаков

$$\tau: \tau(x_0) = -, \quad \tau(x_i) = \sigma_{k_i}^{(k)}, \quad i \geq 1,$$

лежит в $B_{t,k}^+ \sqcup B_{t,k}^-$, но тогда в a_k будет “узкое место”.

В случае 2) рассмотрим функции, соответствующие набору знаков $\tau: \tau(x_0) = \tau(x_1) = +$. Эти функции лежат в A_t и A_s , следовательно, в силу факта (iii) они лежат и в B_t, B_s . Однако тогда мы не получим все возможные $n - p - 1$ знаков, поскольку

$$\#B_t \leq (p+1)(2p+2)C_n^{2p+1} < 2^{n-p-1}.$$

Теорема доказана.

Напомним, что в силу леммы 2 существует нечеткий граф со свойствами 1)–4) для произвольных $r \in \mathbb{Z}_+$, $m_0^\pm, \dots, m_r^\pm \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathbb{N}$. Будем доказывать лемму 2 индукцией по r ; для этого нам потребуются две конструкции, которые мы оформим в виде лемм. Зафиксируем длину пути равной L .

ЛЕММА 3. Для любых $m^+, m^- \in \mathbb{N}$ существует нечеткий граф $G(m^+, m^-)$, для которого выполняются свойства 1)–4) из леммы 2 при $r = 0$, $m_0^\pm = m^\pm$ и фиксированном L , а также следующее свойство:

5) для любого отображения $\pi: R \rightarrow \{+, -\}$ существует функция $\gamma: V \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\gamma(u) \geq \gamma(v) + L$ при $u \in Y_{t,\pi}^+$, $v \in Y_{t,\pi}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество вершин будем строить в виде объединения непересекающихся *этажей*. На верхнем, L -м этаже, разместим “начальное” множество V° из m^+ точек: $V^\circ = \{v_1, \dots, v_{m^+}\}$. На один этаж ниже расположим m^+ “дочерних” множеств по m^- точек в каждом: $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m^-}\}$. Пусть m^+ нечетких ребер соединяют V° с каждым из “дочерних” множеств:

$$X_{t_i}^+ = V^\circ, \quad X_{t_i}^- = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,m^-}\}, \quad 1 \leq i \leq m^+.$$

По отображению $\mathbf{n}: \{1, \dots, m^+\} \rightarrow \{1, \dots, m^-\}$, выбирающему из каждого “дочернего” множества по точке, составим новое “начальное” множество $V^{\mathbf{n}} = \{v_{i,\mathbf{n}(i)}\}$.

При всевозможных $\mathbf{n}$ для множества $V^{\mathbf{n}}$ проведем ту же процедуру, что и для V° : на $(L-2)$ -м этаже расположим “дочерние” множества $\{v_{i,1}^{\mathbf{n}}, \dots, v_{i,m^-}^{\mathbf{n}}\}$ и составим нечеткие ребра

$$X_{t_i^{\mathbf{n}}}^+ = V^{\mathbf{n}}, \quad X_{t_i^{\mathbf{n}}}^- = \{v_{i,1}^{\mathbf{n}}, \dots, v_{i,m^-}^{\mathbf{n}}\}, \quad 1 \leq i \leq m^+.$$

При этом все $(m^-)^{m^+} m^+ m^-$ точек $v_{i,j}^{\mathbf{n}}$ различны.

На следующей итерации мы в качестве “начальных” множеств берем $V^{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \{v_{i,\mathbf{n}_2(i)}^{\mathbf{n}_1}\}$, и т. д.

Всего сделаем L итераций, дойдя до нулевого этажа. Покажем, что получится искомый граф. Для этого проверим выполнение свойств 1)–5).

1) Возьмем выборку ребер. При каждом i существует $n_1 = n_1(i)$ такое, что в вершину $v_{i,n_1(i)}$ идет ребро из V° . Рассмотрим соответствующее $V^{\mathbf{n}_1}$. При каждом i существует $n_2 = n_2(i)$ такое, что в вершину $v_{i,n_2(i)}^{\mathbf{n}_1}$ идет ребро из $V^{\mathbf{n}_1}$. Рассмотрим теперь множество $V^{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}$. На любом шаге у нас будет некоторое “начальное” множество, в каждую точку которого ведется путь из V° .

2) Это свойство очевидно из построения.

3) Для краткости записываем $R^\pm = R_0^\pm$. Рассмотрим произвольные $R^\pm$. Построим отображения β^+, β^- , определенные на V и такие, что $\beta^\pm|_{X_t^\pm}$ суть биекции $X_t^\pm \rightarrow R^\pm$; обратные к ним биекции индуцируют φ_t . Запишем $R^+ = \{r_1^+, \dots, r_{m^+}^+\}$, $R^- = \{r_1^-, \dots, r_{m^-}^-\}$. Определим $\beta^+(v_i) = r_i^+$, $\beta^-(v_i) = r_i^-$ произвольно; далее, $\beta^+(v_{i,j}) = r_i^+$, $\beta^-(v_{i,j}) = r_j^-$, $\beta^+(v_{i,j}^{\mathbf{n}}) = r_i^+$, $\beta^-(v_{i,j}^{\mathbf{n}}) = r_j^-$ и т. д.

4) Поскольку $r = 0$, то возможен единственный случай: $k = 0$, $\pi|_{R^+} \equiv +$, $\pi|_{R^-} \equiv -$, и от γ требуется условие $\gamma(u) = \gamma(v) + 1$ при $u \in X_t^+$, $v \in X_t^-$. Положим γ равной номеру этажа, т. е. $\gamma(v_i) = L$, $\gamma(v_{i,j}) = L-1$, $\gamma(v_{i,j}^{\mathbf{n}}) = L-2$ и т. д.

5) Возьмем достаточно большое M . Определим $\gamma(v_i) = M\pi\beta^+(v_i)$,

$$\gamma(v_{i,j}) = \begin{cases} M, & \pi\beta^+(v_{i,j}) = +, \pi\beta^-(v_{i,j}) = +, \\ \frac{M}{2}, & \pi\beta^+(v_{i,j}) = +, \pi\beta^-(v_{i,j}) = -, \\ -\frac{M}{2}, & \pi\beta^+(v_{i,j}) = -, \pi\beta^-(v_{i,j}) = +, \\ -M, & \pi\beta^+(v_{i,j}) = -, \pi\beta^-(v_{i,j}) = -. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (8) будет верно для $t = t_i$. Для каждого $\mathbf{n}$ определим γ на $\{v_{i,j}^{\mathbf{n}}\}$ аналогичным образом, только с константой $M/2$ вместо M , что гарантирует выполнение (8) для $t = t_i^{\mathbf{n}}$. Далее аналогично. Лемма доказана.

Пусть множество вершин нечеткого графа раскрашено в Q цветов. Скажем, что нечеткое ребро E соединяет вершины одного цвета, если $E \subset A \times B$, где все вершины $v \in A \cup B$ одного цвета. В таком случае припишем ребру E этот цвет. Q -набором назовем множество нечетких ребер, содержащее ровно по одному нечеткому ребру каждого цвета.

ЛЕММА 4. Для любых $Q, m^+, m^- \in \mathbb{N}$ существует нечеткий граф $K(Q, m^+, m^-) = (V, \{E_t : t \in T\})$ такой, что множество его вершин покрашено в Q цветов, множество его нечетких ребер разбито на Q -наборы:

$$T = \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta, \quad T_\beta = \{t_1(\beta), \dots, t_Q(\beta)\},$$

и выполнены свойства 2)–4) при $r = 0$ и $m_0^\pm = m^\pm$, а также следующие усиленные свойства 1) и 5):

1') если в каждом Q -наборе T_β в одном из нечетких ребер выделено ребро, то образуется ориентированный путь с длиной L ;

5') для любого отображения $\pi: R \rightarrow \{+, -\}$ существует функция $\gamma: V \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любых $\beta \in \mathcal{B}$ и $i, j \in \{1, \dots, Q\}$

$$\gamma(u) \geq \gamma(v) + L \quad \text{при } u \in Y_{t_i(\beta), \pi}^+, v \in Y_{t_j(\beta), \pi}^-. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 3 является частным случаем леммы 4 при $Q = 1$, однако, фактически, граф K строится из копий графов $G(\cdot, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 проводим индукцией по Q . При $Q = 1$ пусть $K(1, m^+, m^-) \cong G(m^+, m^-)$, все вершины покрашены в цвет № 1 и 1-наборы содержат по одному нечеткому ребру.

Предположим, что мы построили граф $K_{Q-1} = K(Q-1, m^+, m^-)$. Построим $K_Q = K(Q, m^+, m^-)$. Пусть N – число $(Q-1)$ -наборов в K_{Q-1} .

Рассмотрим граф $\tilde{G} = G(Nm^+, Nm^-)$. Он имеет нечеткие ребра вида $\tilde{E}_t = \tilde{X}_t^+ \times \tilde{X}_t^-$, $\#\tilde{X}_t^\pm = Nm^\pm$. Возьмем множества $\tilde{R}^\pm$ из свойства 3) для $\tilde{G}$ и разобьем их произвольным образом на N равномошных частей:

$$\tilde{R}^+ = \bigsqcup_{i=1}^N \tilde{R}_i^+, \quad \tilde{R}^- = \bigsqcup_{i=1}^N \tilde{R}_i^-, \quad \#\tilde{R}_i^\pm = m^\pm. \quad (11)$$

Индукцируются разбиения множеств $\tilde{X}_t^\pm$:

$$\tilde{X}_t^+ = \bigsqcup_{i=1}^N X_{(t,i)}^+, \quad \tilde{X}_t^- = \bigsqcup_{i=1}^N X_{(t,i)}^-.$$

Наборы $\alpha_t = \{E_{(t,i)} = X_{(t,i)}^+ \times X_{(t,i)}^- : 1 \leq i \leq N\}$ назовем *пачками*. Пусть граф $\hat{G}$ имеет те же вершины, что и $\tilde{G}$, но нечеткие ребра $E_{(t,i)}$ вместо $\tilde{E}_t$.

Каждой пачке α сопоставим граф G_α , изоморфный K_{Q-1} . Граф K_Q получается объединением $\hat{G}$ и всех G_α . При этом мы предполагаем, что графы $\hat{G}$ и G_α попарно не пересекаются.

Граф $\hat{G}$ покрасим в цвет № Q ; для остальных вершин цвет индуцируется из K_{Q-1} . Q -наборы образуем следующим образом. К каждому $(Q-1)$ -набору графа $G_\alpha \cong K_{Q-1}$ добавим нечеткое ребро из пачки α (к разным $(Q-1)$ -наборам добавляются разные нечеткие ребра; и тех и других по N). Проверим выполнение свойств 1'), 2)–4) и 5').

1') Пусть в каждом Q -наборе в одном из нечетких ребер выбрано ребро. Если для какой-то пачки α во всех Q -наборах, соответствующих α , выбрано ребро не цвета № Q , то путь пройдет в $G_\alpha \cong K_{Q-1}$ (по предположению индукции). В противном случае путь пройдет в $\hat{G}$, это следует из свойства 1) для $G(Nm^+, Nm^-)$ и включения $\bigcup_{i=1}^N E_{(t,i)} \subset \tilde{E}_t$.

2) Это свойство очевидно из построения.

3) Множества $R^\pm$ для K_Q возьмем такими же, как и для K_{Q-1} . Для нечетких ребер графов $G_\alpha \cong K_{Q-1}$ биекции φ_t уже определены по предположению индукции. Для нечетких ребер в $\hat{G}$ биекции φ_t индуцируются из соответствующих биекций $\tilde{\varphi}_t$ для $\tilde{G}$, если мы зафиксируем каким-нибудь образом биекции $\psi_i^\pm : \tilde{R}_i^\pm \rightarrow R^\pm$.

4) Данное свойство для K_Q следует из этого же свойства для K_{Q-1} и $\tilde{G}$.

5') Построение γ начнем с $\tilde{G}$. Отображение $\pi : R \rightarrow \{+, -\}$ с помощью биекций $\psi_i^\pm$ индуцирует $\tilde{\pi} : \tilde{R} \rightarrow \{+, -\}$. Пользуясь свойством 5) графа $\tilde{G}$, находим отображение $\tilde{\gamma}$, отвечающее $\tilde{\pi}$, и полагаем $\gamma|_{\tilde{G}} = \tilde{\gamma}$.

Возьмем пачку $\alpha_t = \{E_{(t,i)}\}$. Ясно, что

$$\gamma(u) \geq b_t > a_t \geq \gamma(v) \quad \text{при } u \in Y_{(t,i),\pi}^+, v \in Y_{(t,j),\pi}^-, \quad (12)$$

для некоторых $a_t \leq b_t - L$. По предположению индукции можно определить функцию $\gamma|_{G_{\alpha_t}}$ так, чтобы для любого $(Q-1)$ -набора в $G_{\alpha_t} \cong K_{Q-1}$ выполнялось неравенство (10). Домножая $\gamma|_{\tilde{G}}$ на достаточно большое положительное число, можно добиться того, что каждый отрезок $[a_t, b_t]$ будет иметь достаточно большую длину. Поэтому можно считать, что значения $\gamma|_{G_{\alpha_t}}$ лежат в $[a_t, b_t]$.

Из условий $\gamma|_{G_{\alpha_t}} \subset [a_t, b_t]$, неравенства (10) для $(Q-1)$ -наборов и соотношения (12) вытекает (10) для Q -наборов. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Индукцией по r построим нечеткий граф, для которого выполняются свойства 1)–5). База индукции $r = 0$ содержится в лемме 3. Опишем индуктивный переход от $r-1$ к r . Пусть граф G' , построенный с параметрами $r-1, m_0^+, \dots, m_{r-1}^+, m_0^-, \dots, m_{r-1}^-$, имеет Q нечетких ребер.

Введем обозначения: V_{Q,m^+,m^-} – множество вершин, а T_{Q,m^+,m^-} – множество, индексирующее нечеткие ребра F_t графа $K(Q, m^+, m^-)$. Каждый Q -набор β содержит Q нечетких ребер $F_{t_q(\beta)}$, $1 \leq q \leq Q$, причем индекс q указывает номер цвета.

Возьмем $T = T_{Q,m_r^+,m_r^-}$. В r -й компоненте множества вершин расположим граф $K(Q, m_r^+, m_r^-)$:

$$V_r = V_{Q,m_r^+,m_r^-}, \quad X_{t,r}^+ \times X_{t,r}^- = F_t.$$

Осталось описать, как устроены V_k и $X_{t,k}^\pm$ при $k < r$.

Для каждого Q -набора β мы из множеств

$$\bigsqcup_{k=0}^{r-1} X_{t_q(\beta),k}^+ \times X_{t_q(\beta),k}^-, \quad 1 \leq q \leq Q,$$

“соберем” граф G_β , изоморфный G' . Более формально, занумеруем нечеткие ребра графа G' числами от 1 до Q . Для каждого Q -набора β возьмем копию G_β графа G' ; пусть G_β и $G_{\beta'}$ не пересекаются при $\beta \neq \beta'$. Нечеткие ребра графа G_β имеют вид

$$\bigsqcup_{k=0}^{r-1} (X_\beta)_{q,k}^+ \times (X_\beta)_{q,k}^-, \quad 1 \leq q \leq Q,$$

причем $(X_\beta)_{q,k}^\pm \subset (V_\beta)_k$. Положим

$$X_{t_q(\beta),k}^\pm := (X_\beta)_{q,k}^\pm, \quad V_k = \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{B}} (V_\beta)_k, \quad k = 0, 1, \dots, r-1.$$

Итак, G получается объединением графа $K(Q, m_r^+, m_r^-)$ и всех графов G_β . Проверим выполнение свойств 1)–5).

1) Возьмем в графе G выборку ребер $t \mapsto e(t)$. Если для какого-то Q -набора β ребра $e(t_1(\beta)), e(t_2(\beta)), \dots, e(t_Q(\beta))$ попали в компоненты $V_0, \dots, V_{r-1}$, то путь пройдет в $G_\beta \cong G'$. Иначе, как следует из леммы 4 (свойство 1')), путь пройдет внутри V_r .

Свойства 2) и 3) выполнены в силу построения.

4) Пусть $k = r$. Пользуясь свойством 5) графа G' , можно определить на $G_\beta \cong G'$ функцию γ , отвечающую $\pi|_{R_0^\pm \sqcup \dots \sqcup R_{r-1}^\pm}$. Осталось задать $\gamma|_{V_r}$. Поскольку графы G_β изоморфны, будем считать, что функции $\gamma|_{G_\beta}$ устроены одинаково для всех β , в частности

$$\gamma(u) \geq b_q > a_q \geq \gamma(v) \quad \text{при } u \in Y_{t_q(\beta),\pi}^+ \setminus V_r, \quad v \in Y_{t_q(\beta),\pi}^- \setminus V_r. \quad (13)$$

Домножая $\gamma|_{G_\beta}$ на достаточно большое число, можно сделать так, что каждый отрезок $[a_q, b_q]$ будет иметь достаточно большую длину.

Зададим $\gamma|_{V_r}$, пользуясь свойством 4) графа $K(Q, m_r^+, m_r^-)$. Поскольку одноцветные множества в K независимы, можно добиться того, что значения γ

в вершинах, покрашенных фиксированным цветом № q , будут содержаться в отрезке $[a_q + L, b_q - L]$. Отсюда и из (13) следует выполнение неравенства (8) для $t = t_q(\beta)$.

Пусть $k < r$. Определим $\gamma|_{V_r}$, пользуясь свойством 5') графа $K(Q, m_r^+, m_r^-)$:

$$\gamma(u) \geq b_\beta > a_\beta \geq \gamma(v) \quad \text{при} \quad u \in Y_{t_q(\beta), \pi}^+ \cap V_r, \quad v \in Y_{t_q(\beta), \pi}^- \cap V_r.$$

Остается определить $\gamma|_{G_\beta}$ так, чтобы значения γ лежали на отрезке $[a_\beta + L, b_\beta - L]$. Ясно, что это можно сделать, поскольку для графа $G_\beta \cong G'$ имеет место свойство 4), а длина отрезка $[a_\beta, b_\beta]$ может быть сделана сколь угодно большой.

5) Это свойство проверяется аналогично свойству 4) при $k < r$.

Лемма доказана.

Автор благодарит С. В. Конягина за постановку задач и внимание к работе.

Список литературы

1. В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис, “О равномерной сходимости относительных частот событий к их вероятностям”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16:2** (1971), 264–279; англ. пер.: V. N. Vapnik, A. Ya. Chervonenkis, “On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities”, *Theor. Probability Appl.*, **16:2** (1971), 264–280.
2. H. S. Shapiro, “Some negative theorems of approximation theory”, *Michigan Math. J.*, **11:3** (1964), 211–217.
3. H. E. Warren, “Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133:1** (1968), 167–178.
4. A. Andrianov, “On pseudo-dimension of certain sets of functions”, *East J. Approx.*, **5:4** (1999), 393–402.
5. V. Maiorov, J. Ratsaby, “On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension”, *Constr. Approx.*, **15:2** (1999), 291–300.
6. V. Maiorov, “Optimal non-linear approximation using sets of finite pseudo-dimension”, *East J. Approx.*, **11:1** (2005), 1–19.
7. S. Mendelson, R. Vershynin, “Entropy and the combinatorial dimension”, *Invent. Math.*, **152:1** (2003), 37–55.
8. M. Rudelson, R. Vershynin, “Combinatorics of random processes and sections of convex bodies”, *Ann. of Math.* (2), **164:2** (2006), 603–648.

Ю. В. МАЛЫХИН (Yu. V. MALYKHIN)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: jura05@narod.ru

Поступило в редакцию
 11.04.2007