Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 5, 37–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 08:26:15

УДК 517.981.1+517.518.1+517.982.3

В. К. Захаров, А. В. Михалёв

Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства

После основополагающих работ Рисса, Радона и Хаусдорфа 1909–1914 гг. стала актуальной *проблема общего радоновского представления*: для хаусдорфовых топологических пространств найти класс линейных функционалов, изоморфно интегрально представимых радоновскими мерами. К началу пятидесятых годов частичное решение проблемы (биективная версия) радоновского представления для локально компактных пространств было дано Халмошем, Хьюитом, Эдвардсом, Бурбаки и др. Для ограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве проблема биективного представления была решена в 1956 г. Ю. В. Прохоровым.

В данной статье дается одно из возможных решений проблемы общего радоновского представления. Для этого используется семейство метapolунепрерывных функций с компактными носителями и класс тонких функционалов на нем. Найдены биективная и изоморфная версии решения (теоремы 1 и 2 из п. 5 § 2). Для получения изоморфной версии вводится семейство радоновских бимер.

Библиография: 38 наименований.

Введение

В 1909 г. Риссом [1] было доказано, что непрерывные линейные функционалы на пространстве непрерывных функций $C([0,1])$ на отрезке $[0,1]$ могут быть представлены интегралами Римана–Стилтьеса относительно функций ограниченной вариации на $[0,1]$. Теорема Рисса существенно использовала специфику пространства $[0,1]$, а именно: его линейную упорядоченность. Существенно новый шаг был сделан в 1913 г. Радонам [2], который для компактных подпространств $T \subset \mathbb{R}^n$ установил, что непрерывные линейные функционалы на пространстве $C(T)$ представляются интегралами относительно регулярных мер на T . Подход Радона, в котором центральное место занимает понятие регулярной меры, открыл перспективные пути для дальнейших обобщений.

В 1914 г. вышла книга Хаусдорфа [3], в которой были заложены основы теории топологических пространств. После этих работ стала актуальной *проблема общего радоновского представления*: для хаусдорфовых топологических пространств найти класс линейных функционалов, изоморфно интегрально представимых радоновскими ($\equiv$ компактно регулярными) мерами. Более слабым вариантом этой проблемы стала *проблема частного радоновского представления*:

Авторы выражают благодарность ректору СПГУТД, академику, профессору В. Е. Романову и ректору МГУ, академику, профессору В. А. Садовничему за оказанное содействие совместному научному проекту двух университетов исследований по алгебре, топологии и теории меры, одним из результатов которого явилась эта работа.

для различных классов хаусдорфовых топологических пространств найти соответствующие классы функционалов, интегрально представимых радоновскими мерами.

Для компактных метрических пространств проблема радоновского представления была решена в 1937–38 гг. Банахом и Саксом [4], [5]. В 1941 г. Какутани [6] получил решение для произвольных компактных пространств.

К началу пятидесятих годов решение проблемы радоновского представления для локально компактных пространств было опубликовано Халмошем [7], Хьюитом [8], Эдвардсом [9], Бурбаки [10] и др. В результате появилась следующая замечательная теорема, получившая название первой *теоремы Рисса–Радона о представлении* (см., например, [11] и [12]).

ТЕОРЕМА. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $C_c(T, \mathcal{G})$ – решеточное векторное пространство всех непрерывных функций на $(T, \mathcal{G})$ с компактными носителями. Тогда существует биекция

$$W: (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$$

из множества всех положительных линейных функционалов на $C_c(T, \mathcal{G})$ на множество всех положительных борелевско-радоновских мер на T такая, что $\varphi f = \int f dW_\varphi$ для любой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+$.

Для ограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве проблема представления была решена в 1956 г. Ю. В. Прохоровым [13] с помощью введенного им класса компактно узких функционалов на решеточном векторном пространстве $C_b(T, \mathcal{G})$ (см. также [12]). Для неограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве проблема оставалась открытой.

В [14], [15] Поллард и Топсое применили теорему типа Даниэля–Стоуна для рассмотрения радоновского представления на произвольном хаусдорфовом пространстве (однако ограничившись конусом (возможно, пустым) положительных непрерывных функций). В [16] Топсое перешел от использования пространства непрерывных функций к использованию конуса положительных полунепрерывных сверху функций. Это позволило Топсое [16] и Ангеру и Портенье [17] получить достаточные условия для представления функционалов радоновскими мерами.

На этом пути Кёниг [19], [20] получил биективную версию радоновского представления для положительных положительно-линейных функционалов на конусе положительных полунепрерывных сверху функций с компактными носителями.

Развивая методы Топсое и Фремлина [12], авторы в [21]–[23] получили линейно биективную и изоморфную версии общего радоновского представления.

В настоящей работе дается одно из возможных решений проблемы общего радоновского представления. Поскольку на произвольном хаусдорфовом пространстве семейство $C_b(T, \mathcal{G})$ может быть очень бедным, а семейство $C_c(T, \mathcal{G})$ может быть и вовсе тривиальным, используется семейство $S_c(T, \mathcal{G})$ всех *метаполунепрерывных функций с компактными носителями*, играющее для произвольных хаусдорфовых пространств ту же роль, которую для локально компактных пространств играет семейство $C_c(T, \mathcal{G})$. С решеточным векторным пространством $S_c(T, \mathcal{G})$ связывается решеточное векторное пространство $S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$ всех *тонких линейных функционалов*. В итоге доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (см. п. 5 § 2). Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда существует биекция

$$V: (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$$

из множества всех тонких положительных линейных функционалов на $S_c(T, \mathcal{G})$ на множество всех положительных борелевско-радоновских мер на T такая, что $\varphi f = \int f dV\varphi$ для любой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$.

Приведенные теоремы представляют собой биективные версии решения проблемы радоновского представления. Однако семейства $C_c(T, \mathcal{G})^\sim$ и $S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$ являются решеточными векторными пространствами. Поэтому возникает задача поиска изоморфных версий решения проблемы общего радоновского представления.

Для получения изоморфных версий вводится семейство $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ всех радоновских бимер на T и строится биекция $E: \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ такая, что любая бимера $m \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ представима в виде $m = E\mu' - E\mu''$ для некоторых радоновских мер $\mu', \mu'' \in \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Для изучения семейства бимер $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ рассматривается сопутствующее решеточное векторное пространство узких радоновских мер. Это позволяет доказать, что семейство $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ радоновских бимер является решеточным векторным пространством (теорема 1 из п. 2 § 2). Далее определяется интеграл Лебега $\int f dm$ относительно бимеры m и устанавливается, что вложение E сохраняет интеграл. В итоге доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (см. п. 5 § 2). Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда существует единственное продолжение биекции

$$E \circ V: (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$$

до изоморфизма $\mathfrak{I}: S_c(T, \mathcal{G})^\Delta \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такое, что $\varphi f = \int f d\mathfrak{I}\varphi$ для любой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$.

ТЕОРЕМА 4 (см. п. 5 § 2). Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство. Тогда существует единственное продолжение биекции

$$E \circ W: (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$$

до изоморфизма $\mathfrak{I}: C_c(T, \mathcal{G})^\sim \xrightarrow{\sim} \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $\varphi f = \int f d\mathfrak{I}\varphi$ для любой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in C_c(T, \mathcal{G})^\sim$.

Частично результаты в этом направлении исследований были опубликованы в [21]–[23]. В данной работе дается подробное их изложение. Работа разбита на два параграфа. § 1 носит вспомогательный вводный характер. Доказательства основных результатов помещены в § 2.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы приведем определения и утверждения, необходимые для основного § 2. Отметим, что изложение ведется в аксиоматике Неймана–Бернаиса–Гёделя.

1. Меры и интеграл Лебега. Пусть T – некоторое фиксированное множество, $\mathcal{P}(T)$ – множество всех подмножеств множества T и $\mathcal{S}$ – некоторый ансамбль подмножеств множества T , т.е. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$. Любое отображение $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ будет называться *оцениванием на $\mathcal{S}$* . Оценивание ε называется *ограниченным*, если $\text{rng } \varepsilon \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Оценивание ε называется *положительным*, если $\text{rng } \varepsilon \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty]$. Оценивание ε называется *конечным*, если $\text{rng } \varepsilon \subset \mathbb{R}$.

С оцениванием ε связаны подмножества $\mathcal{S}^0(\varepsilon) \equiv \{S \in \mathcal{S} \mid \varepsilon S = 0\}$ и $\text{dom}_f \varepsilon \equiv \mathcal{S}^f(\varepsilon) \equiv \{S \in \mathcal{S} \mid \varepsilon S \in \mathbb{R}\}$.

Оценивание ε будет называться *натуральным* если:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- 2) $\varepsilon(\emptyset) = 0$;
- 3) или $\text{rng } \varepsilon \subset [-\infty, \infty[$, или $\text{rng } \varepsilon \subset]-\infty, \infty]$.

Натуральное оценивание ε называется *σ -аддитивным*, если

$$\varepsilon S = \lim \left(\sum (\varepsilon S_n \mid n \in \{u(i) \in N \mid i \in \mathbb{N} \cap (k+1)\}) \mid k \in \mathbb{N} \right)$$

для любого бесконечного подмножества $N \subset \omega \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ и любой последовательности $(S_n \in \mathcal{S} \mid n \in N)$ попарно дизъюнктных элементов такой, что $S \equiv \cup \{S_n \mid n \in N\} \in \mathcal{S}$, где $u: \mathbb{N} \twoheadrightarrow N$ – единственная изотонная биекция из множества $\mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$ на множество N .

Натуральное σ -аддитивное оценивание $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенное на кольце $\mathcal{R}$, называется *мерой* на T . Мера μ будет называться *широкой*, если $\mathcal{R}$ является σ -алгеброй.

Пусть $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – широкая положительная мера. Через $F(T)$ обозначим семейство всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, а через $M(T, \mathcal{M})$ – подсемейство всех $\mathcal{M}$ -измеримых функций f таких, что $f^{-1}[]x, y[) \in \mathcal{M}$ для любого интервала $]x, y[\subset \mathbb{R}$. Для $f \in F(T)_+$ число $\sup \left\{ \sum ((\inf f[M_i])\mu M_i \mid i \in I) \mid (M_i \in \mathcal{M} \mid i \in I) \text{ – конечное разбиение множества } T \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *интегралом (Лебега) от функции f относительно меры μ* и обозначается через $\int f d\mu$ (см. [11, п. 12.2]). Семейство всех функций $f \in M(T, \mathcal{M})$ таких, что $\int f_+ d\mu < \infty$ и $\int (-f_-) d\mu < \infty$, обозначим через $\text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Для $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ число

$$\int f d\mu \equiv \int f_+ d\mu - \int (-f_-) d\mu$$

называется *интегралом (Лебега) от функции f относительно меры μ* (см. [11, п. 12.2]).

Семейство всех мер $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ на кольце $\mathcal{R}$ обозначим через $\text{Meas}(T, \mathcal{R})$. Его подсемейство всех положительных мер $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ обозначим через $\text{Meas}(T, \mathcal{R})_+$. Для обозначения соответствующих подсемейств ограниченных мер и конечных мер будем использовать символы $\text{Meas}_b(T, \mathcal{R})$ и $\text{Meas}_f(T, \mathcal{R})$.

ТЕОРЕМА. 1) Если $\mu, \nu \in \text{Meas}(T, \mathcal{R})_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $x\mu + y\nu \in \text{Meas}(T, \mathcal{R})_+$.

2) Семейство $\text{Meas}_b(T, \mathcal{R})$ является дедекиндово полным решеточным векторным пространством.

3) Если $\mathcal{R}$ является δ -кольцом, то семейство $\text{Meas}_f(T, \mathcal{R})$ является дедекиндово полным решеточным векторным пространством.

Для $\mu \in \text{Meas}_b(T, \mathcal{R})$ рассмотрим $\mu_+ \equiv \mu \vee 0$, $\mu_- \equiv \mu \wedge 0$ и $|\mu| \equiv \mu_+ \vee (-\mu_-)$. Тогда $\mu = \mu_+ + \mu_-$ и $|\mu| = \mu_+ - \mu_-$. Число $|\mu|(T)$ называется *нормой меры* μ и обозначается через $\|\mu\|$. Система $(\text{Meas}_b(T, \mathcal{R}), \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством с аддитивной нормой.

Пусть $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ – широкая ограниченная мера. Для нее рассмотрим дедекиндово полное решеточное векторное пространство

$$\text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu) \equiv \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu_+) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}, -\mu_-).$$

Для $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ число

$$\int f d\mu \equiv \int f d(\mu_+) - \int f d(-\mu_-)$$

называется *интегралом (Лебега) от функции f относительно меры μ* (см. [11, п. 19.17]).

ТЕОРЕМА. 1) Пусть μ, ν – положительные меры на σ -алгебре $\mathcal{M}$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\text{MI}(T, \mathcal{M}, x\mu + y\nu) = \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}, \nu),$$

$$\int f d(x\mu + y\nu) = x \int f d\mu + y \int f d\nu$$

для любого $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, x\mu + y\nu)$.

2) Пусть μ, ν – ограниченные меры на σ -алгебре $\mathcal{M}$ и $x, y \in \mathbb{R}$. Если $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}, \nu)$, то $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, x\mu + y\nu)$ и $\int f d(x\mu + y\nu) = x \int f d\mu + y \int f d\nu$.

2. Некоторые классы функционалов. Далее $A(T)$ будет обозначать некоторое решеточное векторное подпространство в $F(T)$. Через $A(T)^\sim$ обозначается множество всех линейных функционалов $\varphi: A(T) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых линейных положительных функционалов φ_1 и φ_2 . Будем называть такие функционалы *бинарно-положительными*.

ТЕОРЕМА (Рисса–Канторовича). $A(T)^\sim$ является дедекиндово полным решеточным векторным пространством.

Для $\varphi \in A(T)^\sim$ рассмотрим $\varphi_+ \equiv \varphi \vee 0$, $\varphi_- \equiv \varphi \wedge 0$ и $|\varphi| \equiv \varphi_+ \vee (-\varphi_-)$. Тогда $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ и $|\varphi| = \varphi_+ - \varphi_-$.

Если $A(T) \subset F_b(T) \equiv \{f \in F(T) \mid \exists x \in \mathbb{R}_+ (|f| \leq x\mathbf{1})\}$, то на $A(T)$ рассматривается норма $\|f\|_u \equiv \sup \{|f(t)| \mid t \in T\}$. Семейство всех непрерывных линейных функционалов на нормированном векторном пространстве $(A(T), \|\cdot\|_u)$ обозначим через $(A(T), \|\cdot\|_u)'$.

ТЕОРЕМА. Если $A(T) \subset F_b(T)$, то $(A(T), \|\cdot\|_u)'$ является l -идеалом в $A(T)^\sim$ и, следовательно, $(A(T), \|\cdot\|_u)'$ является дедекндово полным решеточным векторным пространством. Относительно дуальной нормы $((A(T), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством.

Доказательство этих теорем можно найти в [24].

Пусть $f \in F(T)$ и $(f_n \in F(T) \mid n \in N \subset \omega)$ – бесконечная последовательность. Используем обозначение $f = p - \lim(f_n \mid n \in N)$, если $f(t) = \lim(f_n(t) \mid n \in N)$ для любого $t \in T$. Функционал $\varphi: A(T) \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *поточечно σ -непрерывным*, если $f = p - \lim(f_n \mid n \in N \subset \omega)$ влечет $\varphi f = \lim(\varphi f_n \mid n \in N)$ для каждой бесконечной последовательности $(f_n \in A(T) \mid n \in N \subset \omega)$ и каждой функции $f \in A(T)$. Множество всех поточечно σ -непрерывных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^\wedge$. Если $A(T) \subset F_b(T)$, то множество $A(T)^\wedge \cap (A(T), \|\cdot\|_u)'$ обозначим через $A(T)^\odot$.

ТЕОРЕМА. 1) $A(T)^\wedge$ является l -идеалом в $A(T)^\sim$ и, следовательно, является дедекндово полным решеточным векторным пространством.

2) Если $A(T) \subset F_b(T)$, то $A(T)^\odot$ является l -идеалом в $(A(T), \|\cdot\|_u)'$.

3. Продолжение некоторых оцениваний до мер. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ – некоторые ансамбли подмножеств множества T . Оценивание $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ назовем *внутренне $\mathcal{K}$ -регулярным*, если $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ и $\varepsilon S = \sup \{ \varepsilon K \mid (K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{S}^f(\varepsilon)) \wedge (K \subset S) \}$ для каждого $S \in \mathcal{S}$. Оценивание ε называется *верхне $\mathcal{K}$ - σ -непрерывным*, если $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ и $(\varepsilon K_n \mid n \in N) \downarrow \varepsilon K$ для каждого множества $K \in \mathcal{K}$ и каждой бесконечной последовательности $(K_n \in \mathcal{K} \mid n \in N \subset \omega) \downarrow K$ в $\mathcal{P}(T)$.

Насыщением ансамбля $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(T)$ назовем ансамбль

$$\mathcal{U}(T, \mathcal{S}) \equiv \{U \in \mathcal{P}(T) \mid \forall S \in \mathcal{S} (U \cap S \in \mathcal{S})\}.$$

Если $\mathcal{S} = \mathcal{U}(T, \mathcal{S})$, то ансамбль $\mathcal{S}$ назовем *насыщенным*. Ансамбль $\mathcal{S}$ назовем *$\mathcal{K}$ -насыщенным*, если $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ и условия $U \in \mathcal{P}(T)$ и $U \cap K \in \mathcal{S}$ для каждого $K \in \mathcal{K}$ влекут $U \in \mathcal{S}$.

Для оценивания $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ рассмотрим ансамбли

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(T, \mathcal{S}, \varepsilon) &\equiv \{N_0 \in \mathcal{U}(T, \mathcal{S}) \mid \forall S \in \mathcal{S} ((S \subset N_0) \Rightarrow (\varepsilon S = 0))\} \\ &= \{N_0 \in \mathcal{U}(T, \mathcal{S}) \mid \forall S \in \mathcal{S} (\varepsilon(N_0 \cap S) = 0)\} \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{N}(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \equiv \{N \subset T \mid \exists N_0 \in \mathcal{N}_0(T, \mathcal{S}, \varepsilon) (N \subset N_0)\}.$$

Оценивание ε называется *полным*, если $\mathcal{N}(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \subset \mathcal{S}$ (см. [25]). Для неполного оценивания ε рассмотрим ансамбль $\mathcal{K}(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \equiv \{S \cup N \mid S \in \mathcal{S} \wedge N \in \mathcal{N}(T, \mathcal{S}, \varepsilon)\}$ и оценивание $\check{\varepsilon}: \mathcal{K}(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такое, что $\check{\varepsilon}(S \cup N) \equiv \varepsilon S$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – мера на кольце $\mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{H}(T, \mathcal{R}, \mu)$ является кольцом, содержащим кольцо $\mathcal{R}$, и $\check{\mu}$ является полной мерой, продолжающей меру μ . Если $\mathcal{R}$ – δ -кольцо, то $\mathcal{H}(T, \mathcal{R}, \mu)$ тоже δ -кольцо.

Согласно [25] мера $\check{\mu}$ называется *пополнением меры μ* .

Для оценивания $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ансамбль $\mathcal{U}_s(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \equiv \{U \in \mathcal{P}(T) \mid \forall S \in \mathcal{S}^f(\varepsilon)(U \cap S \in \mathcal{S})\}$ назовем *сильным насыщением ансамбля $\mathcal{S}$ относительно ε* . Если $\mathcal{S} = \mathcal{U}_s(T, \mathcal{S}, \varepsilon)$, то оценивание ε назовем *сильно насыщенным*.

Положительное оценивание $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ назовем *внутренне конечным*, если для каждого $S \in \mathcal{S}$ такого, что $\varepsilon S = \infty$, существует $R \in \mathcal{S}$ такое, что $R \subset S$ и $0 < \varepsilon R < \infty$. Для положительного оценивания ε определим оценивание $\varepsilon'': \mathcal{U}_s(T, \mathcal{S}, \varepsilon) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, полагая $\varepsilon''U \equiv \sup \{\varepsilon(U \cap S) \mid S \in \mathcal{S}^f(\varepsilon)\}$ для каждого $U \in \mathcal{U}_s(T, \mathcal{S}, \varepsilon)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mu: \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – положительная внутренне конечная мера на δ -кольце $\mathcal{R}$. Тогда μ'' является сильно насыщенной внутренне конечной мерой на σ -алгебре $\mathcal{U}_s(T, \mathcal{R}, \mu)$, продолжающей меру μ . Если μ является полной, то μ'' тоже является полной.

Меру μ'' назовем *сильным насыщением*, а меру $\mu^\# \equiv (\check{\mu})''$ назовем *полным сильным насыщением внутренне конечной положительной меры μ , заданной на δ -кольце $\mathcal{R}$* .

Следующая теорема, доказательство которой приведено в [12, 71A], является ключевым результатом для интегрального представления функционалов.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{K}$ – аддитивный δ -мультипликативный ансамбль на множестве T и $\lambda: \mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – возрастающее натуральное оценивание такое, что:

- 1) $\lambda(H \cup K) \geq \lambda H + \lambda K$ для любых $H, K \in \mathcal{K}$ таких, что $H \cap K = \emptyset$;
- 2) $\lambda L \leq \lambda H + \sup \{\lambda K \mid (K \in \mathcal{K}) \wedge (K \subset L \setminus H)\}$ для любых $H, L \in \mathcal{K}$ таких, что $H \subset L$;
- 3) $(\lambda K_n \mid n \in w) \downarrow 0$ для каждой последовательности $(K_n \in \mathcal{K} \mid n \in w) \downarrow \emptyset$ в $\mathcal{P}(T)$.

Определим оценивание $\nu: \mathcal{P}(T) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, полагая $\nu E \equiv \sup \{\lambda K \mid (K \in \mathcal{K}) \wedge (K \subset E)\}$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{M} \equiv \{M \subset T \mid \forall L \in \mathcal{K}(\lambda L \leq \nu(L \cap M) + \nu(L \setminus M))\}$ и оценивание $\mu \equiv \nu \mid \mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}$ является σ -алгеброй и $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ является положительной, полной, сильно насыщенной, внутренне $\mathcal{K}$ -регулярной и $\mathcal{K}$ -насыщенной мерой, продолжающей оценивание λ .

Обозначим множество всех оцениваний $\lambda: \mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ на T , удовлетворяющих условиям этой теоремы, через $\mathcal{L}(T, \mathcal{K})_0$, а множество всех положительных широких мер $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ на T через $\mathcal{M}(T)_0$. Для обозначения соответствующих подмножеств ограниченных оцениваний и мер будем использовать нижний индекс b . Согласно данной теореме мы можем корректно определить отображение $e(\mathcal{K}): \mathcal{L}(T, \mathcal{K})_0 \rightarrow \mathcal{M}(T)_0$, полагая $e(\mathcal{K})\lambda \equiv \mu$. Отображение $e(\mathcal{K})$ назовем *расширяющим*.

4. Теорема Александрова–Стоуна об интегральном представлении.

Если $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ является положительной мерой или $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ является ограниченной мерой на σ -алгебре $\mathcal{M}$, то согласно п. 1 мы можем определить на решеточном векторном пространстве $\text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ функционал $\Lambda(\mu)$, полагая $\Lambda(\mu)f \equiv \int f d\mu$ для любого $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости (см. [11, п. 12.24]) функционал $\Lambda(\mu)$ является поточечно σ -непрерывным.

Оказывается, что это свойство является не только необходимым, но и достаточным для интегрального представления функционалов.

Пусть $A(T)$ – функциональное семейство на множестве T , т.е. $A(T) \subset F(T)$. Оно называется *усекаемым* ($\equiv$ со свойством Стоуна), если $f \wedge \mathbf{1} \in A(T)$ для каждого $f \in A(T)$. Множество $K \subset T$ назовем *σ -вписанным в семейство $A(T)$* , если существует последовательность $(f_n \in A(T)_+ \mid n \in N \subset \omega) \downarrow$ такая, что $(f_n \mid n \in N) \downarrow \chi(K)$ в $F(T)$ (т.е. поточечно). Ансамбль всех подмножеств из T , σ -вписанных в $A(T)$, обозначим через $\mathcal{J}_\sigma(A(T))$.

ЛЕММА. Пусть $A(T)$ – усекаемое решеточное векторное подпространство в $F(T)$ и $f \in A(T)$. Тогда:

- 1) $f \wedge x\mathbf{1} \in A(T)$ для каждого $x > 0$;
- 2) $Sf \equiv \{t \in T \mid f(t) \geq 1\} \in \mathcal{J}_\sigma(A(T))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $A(T)$ – усекаемое решеточное векторное пространство на T . Тогда ансамбль $\mathcal{J}_\sigma(A(T))$ является аддитивным и δ -мультипликативным.

Пусть $A(T)$ – решеточное векторное пространство на T и φ – линейный функционал на $A(T)$. Пусть $(T, \mathcal{M}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой μ на σ -алгебре $\mathcal{M}$. Функционал φ называется *представимым интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$* , или *представимым в виде интеграла Лебега относительно меры μ* , если $A(T) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ и $\varphi = \Lambda(\mu) \mid A(T)$. Ясно, что такой функционал необходимо поточечно σ -непрерывен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть μ – положительная мера на σ -алгебре $\mathcal{M}$ на T и $A(T)$ – усекаемое решеточное векторное пространство на T такое, что $Sf \in \mathcal{M}^f(\mu)$ для каждого $f \in A(T)$. Пусть φ – поточечно σ -непрерывный положительный линейный функционал на $A(T)$ такой, что $\mu(Sf) = \inf \{\varphi g \mid (g \in A(T)_+) \wedge (g \geq \chi(Sf))\}$. Тогда φ представляется интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$.

Доказательство этого предложения приведено в [12, 71F].

Следующий важный результат может быть назван *теоремой Александрова–Стоуна об интегральном представлении*, поскольку он восходит к работам [26] и [27]. Стоун показал важность поточечной σ -непрерывности для существования меры μ , а А. Д. Александров показал важность внутренней регулярности для единственности μ .

ТЕОРЕМА (Александрова–Стоуна). Пусть $A(T)$ – усекаемое решеточное векторное пространство на T и $\varphi \in (A(T)^\wedge)_+$. Определим на ансамбле $\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}_\sigma(A(T))$ оценивание $\lambda: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$, полагая $\lambda K \equiv \inf \{\varphi f \mid (f \in A(T)_+) \wedge (f \geq \chi(K))\}$. Тогда:

- 1) $\lambda \in \mathfrak{L}(T, \mathcal{K})$;
- 2) мера $\mu \equiv e(\mathcal{K})\lambda: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ из п. 3 является положительной, широкой, полной, сильно насыщенной, $\mathcal{K}$ -насыщенной, внутренне $\mathcal{K}$ -регулярной и верхне $\mathcal{K}$ - σ -непрерывной;
- 3) функционал φ представим интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$;
- 4) мера μ является единственной в следующем смысле: если существует другая положительная, полная, сильно насыщенная и внутренне $\mathcal{K}$ -регулярная мера $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что функционал φ представим интегралом Лебега над пространством $(T, \mathcal{N}, \nu)$, то $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ и $\nu = \mu$;
- 5) если $A(T) \subset F_b(T)$ и $\varphi \in (A(T)^\odot)_+$, то мера μ является ограниченной.

Доказательство утверждений 1)–3) этой теоремы приведено в [12, 71G].

Из этой теоремы следует, что можно корректно определить отображение $r: (A(T)^\wedge)_+ \rightarrow \mathfrak{L}(T, \mathcal{J}_\sigma(A(T)))_0$, полагая $r\varphi \equiv \lambda$. Более того, можно корректно определить отображение $V^\wedge: (A(T)^\wedge)_+ \rightarrow \mathfrak{M}(T)_0$, полагая $V^\wedge(\varphi) \equiv \mu \equiv e(\mathcal{J}_\sigma(A(T)))(r\varphi)$. Если $A(T) \subset F_b(T)$, то можно также определить отображение $V_b^\wedge: (A(T)^\odot)_+ \rightarrow \mathfrak{M}_b(T)_+$, полагая $V_b^\wedge \equiv V^\wedge \mid (A(T)^\odot)_+$. Очевидно, что отображения $V^\wedge$ и $V_b^\wedge$ инъективны.

Если мы возьмем другой функционал $\psi \in (A(T)^\wedge)_+$, то по теореме Александра–Стоуна для ψ существует свое собственное измеримое пространство $(T, \mathcal{N}, \nu)$ такое, что φ представим интегралом Лебега над $(T, \mathcal{N}, \nu)$. Поэтому важно рассмотреть для всех таких функционалов интегральное представление над одним и тем же измеримым пространством.

По этой причине для ансамбля $\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}_\sigma(A(T))$ рассмотрим его борелевскую оболочку $\mathcal{B}(T, \mathcal{K})$ в $\mathcal{P}(T)$, т.е. наименьшую σ -алгебру в $\mathcal{P}(T)$, содержащую $\mathcal{K}$. Если $\varphi \in (A(T)^\wedge)_+$, $\mu \equiv V^\wedge(\varphi) \in \mathfrak{M}(T)_0$ и $\mathcal{M} \equiv \text{dom } \mu$, то $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ влечет $\mathcal{B}(T, \mathcal{K}) \subset \mathcal{M}$, поскольку $\mathcal{M}$ является σ -алгеброй.

В § 2 мы рассмотрим произвольное решеточное векторное подпространство $A(T)^\#$ решеточного векторного пространства $A(T)^\wedge$ и соответствующее решеточное векторное подпространство $A(T)^\oplus \equiv A(T)^\# \cap A(T)^\odot$ в $A(T)^\#$ для $A(T) \subset F_b(T)$.

Возьмем любую σ -алгебру $\mathcal{M}_0$ такую, что

$$\mathcal{B}(T, \mathcal{K}) \subset \mathcal{M}_0 \subset \cap \{ \text{dom } V^\wedge(\varphi) \mid \varphi \in (A(T)^\#)_+ \}.$$

Тогда для каждого функционала $\varphi \in (A(T)^\#)_+$ и для соответствующей меры $\mu \equiv V^\wedge(\varphi)$ мы можем рассмотреть меру $\mu_0 \equiv \mu \mid \mathcal{M}_0$.

Это означает, что мы можем корректно определить отображение $V: (A(T)^\#)_+ \rightarrow \text{Meas}(T, \mathcal{M}_0)_+$, полагая $V\varphi \equiv (V^\wedge(\varphi)) \mid \mathcal{M}_0$, и отображение $V_b: (A(T)^\oplus)_+ \rightarrow \text{Meas}_b(T, \mathcal{M}_0)_+$, полагая $V_b \equiv V \mid (A(T)^\oplus)_+$. Эти отображения инъективны.

Следующая теорема является непосредственным следствием из предыдущей.

ТЕОРЕМА. Пусть $A(T)$ – усекаемое решеточное векторное пространство на T , $\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}_\sigma(A(T))$, $A(T)^\#$ – решеточное векторное подпространство в $A(T)^\wedge$, $\varphi \in (A(T)^\#)_+$ и $\mu_0 \equiv V\varphi$. Тогда:

- 1) μ_0 является положительной, внутренне $\mathcal{H}$ -регулярной и вертне $\mathcal{H}$ - σ -непрерывной мерой;
- 2) функционал φ представим интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}_0, \mu_0)$;
- 3) мера μ_0 единственна в следующем смысле: если существует другая положительная, внутренне $\mathcal{H}$ -регулярная мера $\varkappa: \mathcal{M}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что функционал φ представим интегралом Лебега над $(T, \mathcal{M}_0, \varkappa)$, то $\varkappa = \mu_0$;
- 4) если $A(T) \subset F_b(T)$ и $\varphi(A(T)^\oplus)_+$, то мера μ_0 ограничена.

5. Широкие радоновские меры на хаусдорфовом топологическом пространстве. Далее $(T, \mathcal{G})$ будет обозначать хаусдорфово топологическое пространство с ансамблем $\mathcal{G}$ всех открытых подмножеств из T . Соответствующие ансамбли всех замкнутых и всех компактных подмножеств из T обозначаем соответственно через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{C}$. В силу хаусдорфовости $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Оценивание $\varepsilon: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локально ограниченным*, если для каждой точки $t \in T$ существует $G \in \mathcal{G}$ такое, что $t \in G$ и $\sup \{|\varepsilon S| \mid (S \in \mathcal{S}) \wedge (S \subset G)\} < \infty$. Оценивание ε называется *(внутренне) компактно регулярным*, если $\varepsilon S = \sup \{\varepsilon C \mid (C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}^f(\varepsilon)) \wedge (C \subset S)\}$ для каждого $S \in \mathcal{S}$.

Положительная мера $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *положительной (широкой) радоновской мерой* (см. [12, 73A]; [10, X, § 3.2]; [28]), если она является компактно регулярной и локально ограниченной и $\mathcal{M}$ является σ -алгеброй, содержащей ансамбль $\mathcal{G}$. Ясно, что для такой меры σ -алгебра $\mathcal{M}$ содержит σ -алгебру $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ всех борелевских подмножеств из T . Если μ является полной и сильно насыщенной, то будем называть ее *положительной (широкой) расширенной радоновской мерой*. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, то μ будем называть *положительной (широкой) борелевско-радоновской мерой*.

Семейство всех положительных (широких) радоновских мер $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ на хаусдорфовом топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$, определенных на всех возможных σ -алгебрах $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G})_0$. Его подсемейство, состоящее из всех мер, определенных на фиксированной σ -алгебре $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$. Подсемейство в $\mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G})_0$, состоящее из всех расширенных мер, обозначим через $\mathfrak{M}^{we}(T, \mathcal{G})_0$, а подсемейство, состоящее из всех борелевско-радоновских мер, обозначим через $\mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Для обозначения соответствующих подсемейств ограниченных мер будем использовать нижний индекс b .

Ограниченная мера $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная на $(T, \mathcal{G})$, называется *бинарно-положительной (широкой) ограниченной радоновской мерой*, если $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых положительных (широких) ограниченных радоновских мер $\mu_1: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\mu_2: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Если $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, то μ будем называть *бинарно-положительной (широкой) ограниченной борелевско-радоновской мерой*.

Семейство всех бинарно-положительных (широких) ограниченных радоновских мер на $(T, \mathcal{G})$, определенных на всех возможных σ -алгебрах $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G})$. Его подсемейство, состоящее из всех борелевско-радоновских мер, обозначим через $\mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$, а подсемейство, состоящее из всех радоновских мер, определенных на фиксированной σ -алгебре $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$.

Заметим, что Шварц [28] рассматривает только радоновские меры из $\mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, а Фремлих [12] рассматривает только радоновские меры

из $\mathfrak{M}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Однако существует следующее биективное соответствие между этими классами радоновских мер.

ЛЕММА. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G})_0$. Тогда ограничение $\mu_0 \equiv \mu \mid \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ является борелевско-радоновской мерой, а расширения $\mu^\#$ и $(\mu_0)^\#$ из п. 3 являются расширенными радоновскими мерами и $\mu^\# = (\mu_0)^\#$. Более того, $\mu^\#$ является единственным положительным, широким, полным и сильно насыщенным расширением мер μ и μ_0 среди всех положительных широких радоновских мер $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ на $(T, \mathcal{G})$, продолжающих меру μ_0 . Все три данные меры μ , μ_0 и $\mu^\#$ являются ограниченными одновременно. Если мера μ является σ -конечной, то $\mu^\#$ является тоже σ -конечной.

Отметим также, что понятие произвольной (широкой) радоновской меры $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ не определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) Если $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $x\mu + y\nu \in \mathfrak{M}^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$.

2) $\mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ является l -идеалом в $\text{Meas}_b(T, \mathcal{M})$ и, следовательно, является дедекндово полным решеточным векторным пространством.

3) $\mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_+ = \mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$.

Из утверждения 3) этого предложения следует, что мы можем опустить слова “бинарно-положительный” и называть бинарно-положительную (широкую) ограниченную радоновскую меру просто (широкой) ограниченной радоновской мерой.

Относительно нормы $\|\cdot\|$, индуцированной из $(\text{Meas}_b(T, \mathcal{M}), \|\cdot\|)$, система $(\mathfrak{M}_b^w(T, \mathcal{G}, \mathcal{M}), \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством.

6. Вторая теорема Рисса–Радона о представлении для локально компактных пространств. Первая теорема Рисса–Радона о представлении была приведена во введении. Для ограниченных радоновских мер на локально компактном пространстве справедлива также изоморфная версия решения проблемы радоновского представления, получившая название *второй теоремы Рисса–Радона о представлении*.

ТЕОРЕМА. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и W – биекция из первой теоремы Рисса–Радона о представлении. Тогда существует единственное продолжение биекции

$$W_b \equiv W \mid (C_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)' : (C_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)' \rightarrow \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_0$$

до (изометрического) изоморфизма

$$J_b : ((C_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$$

данных нормированных решеточных векторных пространств такого, что $\varphi f = \int f dJ_b \varphi$ для любой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in (C_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)'$.

Доказательство этой теоремы (в несколько другой формулировке) можно найти в [11].

7. Теорема Прохорова о представлении для ограниченных радоновских мер на тихоновских пространствах. Важное свойство интеграла Лебега над топологическим измеримым пространством $(T, \mathcal{G}, \mathcal{M}, \mu)$ с радоновской мерой μ было найдено Прохоровым в работе [13].

Пусть $A(T)$ является функциональным решеточным векторным пространством на топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$. Функционал $\varphi: A(T) \rightarrow \mathbb{R}$ называется (компактно) узким (или со свойством Прохорова), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество $K \in \mathcal{C}$ такое, что условия $f \in A(T)$ и $|f| \leq \chi(T \setminus K)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$. Линейный функционал $\varphi: A(T) \rightarrow \mathbb{R}$ называется бинарно-положительным (компактно) узким, если $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных компактно узких линейных функционалов φ_1 и φ_2 . Ясно, что φ является также компактно узким. Семейство всех положительных (компактно) узких линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $(A(T)^\pi)_0$. Семейство всех бинарно-положительных (компактно) узких линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^\pi$. Если $A(T) \subset F_b(T)$, то семейство $A(T)^\pi \cap (A(T), \|\cdot\|_u)'$ обозначаем через $A(T)^\oplus$.

ЛЕММА. 1) $A(T)^\pi$ является l -идеалом в $A(T)^\sim$ и, следовательно, является дедекндово полным решеточным векторным пространством и $(A(T)^\pi)_+ = (A(T)^\pi)_0$.

2) Если $A(T) \subset F_b(T)$, то $A(T)^\oplus$ является l -идеалом в $(A(T), \|\cdot\|_u)'$.

Из равенства $(A(T)^\pi)_+ = (A(T)^\pi)_0$ следует, что мы можем опустить слова “бинарно-положительный” и называть бинарно-положительный (компактно) узкий линейный функционал просто (компактно) узким линейным функционалом.

Относительно нормы $\|\cdot\|$, индуцированной из $((A(T), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|)$, система $(A(T)^\oplus, \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством.

В работе [13] было дано следующее решение проблемы радоновского представления (см. также [10]).

ТЕОРЕМА (Прохорова о представлении). Пусть $(T, \mathcal{G})$ – тихоновское топологическое пространство и $C_b(T, \mathcal{G})$ – решеточное векторное пространство всех ограниченных непрерывных функций на $(T, \mathcal{G})$. Тогда существует (изометрический) изоморфизм $J_b: (C_b(T, \mathcal{G})^\oplus, \|\cdot\|) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ данных нормированных решеточных векторных пространств такой, что $\varphi f = \int f dJ_b \varphi$ для любой функции $f \in C_b(T, \mathcal{G})$ и любого функционала $\varphi \in C_b(T, \mathcal{G})^\oplus$.

Для неограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве проблема представления оставалась открытой.

§ 2. Основная часть

В этом параграфе мы дадим подробное изложение решения проблемы общего радоновского представления. Далее $(T, \mathcal{G})$ будет обозначать произвольное хаусдорфово топологическое пространство.

1. Узкие радоновские меры. Поскольку семейство $\mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ не является векторным пространством, мы рассмотрим сначала важное решеточное векторное пространство, связанное с этим семейством.

Напомним, что подмножество P из T называется *предкомпактным* ($\equiv$ *относительно компактным*), если $\text{cl } P$ является компактным, т.е. P содержится в некотором компактном множестве. Подансамбль ансамбля $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, состоящий из всех предкомпактных борелевских множеств, обозначим через $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Он является δ -кольцом.

Конечную положительную меру $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ на пространстве $(T, \mathcal{G})$ назовем *положительной узкой радоновской мерой*, если μ является компактно регулярной и локально ограниченной, а $\mathcal{M}$ является δ -кольцом, содержащим δ -кольцо $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ и таким, что $M \cap G \in \mathcal{M}$ для каждого $M \in \mathcal{M}$ и $G \in \mathcal{G}$. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то μ назовем *положительной узкой борелевско-радоновской мерой*.

Семейство всех положительных узких радоновских мер $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ на пространстве $(T, \mathcal{G})$, определенных на всех возможных δ -кольцах $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G})_0$. Его подсемейство, состоящее из всех мер, определенных на фиксированном δ -кольце $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$. Семейство $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G})$, $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})_0$ обозначим через $\mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})_0$.

Конечную меру $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ на $(T, \mathcal{G})$ назовем *бинарно-положительной узкой радоновской мерой*, если $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых положительных узких радоновских мер $\mu_1: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\mu_2: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Если $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})_0$, то μ назовем *бинарно-положительной узкой борелевско-радоновской мерой*.

Семейство всех бинарно-положительных узких радоновских мер $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ на $(T, \mathcal{G})$, определенных на всех возможных δ -кольцах $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G})$. Его подсемейство, состоящее из всех мер, определенных на фиксированном δ -кольце $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$, а подсемейство $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}))$ обозначим через $\mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})$. Для обозначения соответствующих подсемейств ограниченных мер будем использовать нижний индекс b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

1) семейство $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})[\mathfrak{RM}_b^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})]$ является l -идеалом в дедеккиндово полном решеточном векторном пространстве

$$\text{Meas}_f(T, \mathcal{M})[\text{Meas}_b(T, \mathcal{M})];$$

2) $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ является дедеккиндово полным решеточным векторным пространством; наименьшие верхние (наибольшие нижние) границы подмножеств любой допустимой мощности в упорядоченных множествах $\text{Meas}_f(T, \mathcal{M})$ и $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ совпадают;

3) утверждение, аналогичное 2), справедливо для $\mathfrak{RM}_b^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ и $\text{Meas}_b(T, \mathcal{M})$;

4) $\mathfrak{RM}_b^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ является l -идеалом в $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$;

5) $\mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_+ = \mathfrak{RM}^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$ и $\mathfrak{RM}_b^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_+ = \mathfrak{RM}_b^n(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим первое семейство в 1) через $A[A_b]$, а второе через $B[B_b]$. Пусть $\mu, \nu \in A_0$ и $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Тогда для каждого $M \in \mathcal{M}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существуют $C, D \in \mathcal{C}$ такие, что $C \cup D \subset M$, $\mu(M \setminus C) < \varepsilon/(2x)$ и $\nu(M \setminus D) < \varepsilon/(2y)$. Тогда для конечной меры $\lambda \equiv x\mu + y\nu$ на $\mathcal{M}$ мы имеем $\lambda(M \setminus C \cup D) \leq x\mu(M \setminus C) + y\nu(M \setminus D) < \varepsilon$.

Кроме того, для каждой точки $t \in T$ существуют открытые окрестности G и H такие, что $u \equiv \sup\{\mu M \mid M \in \mathcal{M} \wedge M \subset G\} < \infty$ и $v \equiv \sup\{\nu M \mid M \in \mathcal{M} \wedge M \subset H\} < \infty$. Тогда для каждого множества $M \in \mathcal{M}$ такого, что $M \subset G \cap H$, мы имеем $\lambda M \leq xu + yv < \infty$. Таким образом, $\lambda \in A_0$.

Из доказанного свойства следует, что $A = A_0 - A_0$ является векторным подпространством векторного пространства B . Но B является дедекиндово полным решеточным векторным пространством. Пусть $\mu \in A_0$, $\nu \in B$ и $0 \leq \nu \leq \mu$. Тогда для каждого $M \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathcal{C}$ такое, что $C \subset M$ и $\mu M - \varepsilon < \mu C$. Поэтому

$$\nu M - \nu C = \nu(M \setminus C) \leq \mu(M \setminus C) = \mu M - \mu C < \varepsilon$$

означает, что $\nu M = \sup\{\nu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\}$. Таким образом, ν компактно регулярно. Очевидно, что ν локально ограничено. В результате $\nu \in A_0$. Из доказанного свойства следует утверждение 5).

Теперь пусть $\mu \in A$, $\nu \in B$ и $|\nu| \leq |\mu|$. По определению $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых $\mu_1, \mu_2 \in A_0$. Поэтому $|\mu| \leq \mu_1 + \mu_2 \equiv \lambda \in A_0$. По свойству, доказанному выше, неравенство $0 \leq \nu_+ \leq |\nu| \leq \lambda$ влечет $\nu_+ \in A_0$. Аналогично $-\nu_- \in A_0$. В результате $\nu = \nu_+ - (-\nu_-) \in A$. Следовательно, A есть l -идеал в B . Для A_b и B_b рассуждения аналогичны.

Остальные утверждения следуют из общей теории решеточных векторных пространств (см., например, [24], [30]).

Из утверждения 5) предложения 1 следует, что мы можем опустить слова “бинарно-положительная” и называть бинарно-положительную узкую радоновскую меру просто *узкой радоновской мерой*.

Таким образом, узкие радоновские меры образуют хорошее векторное пространство. Но, к сожалению, мы имеем технику лебеговского интегрирования только для широких мер. По этой причине мы вынуждены продолжать узкие радоновские меры на σ -алгебры.

Для каждой положительной узкой радоновской меры $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ на δ -кольце $\mathcal{M}$ рассмотрим ее полное сильно насыщенное расширение $\mu^\#: \mathcal{M}^\# \rightarrow \mathbb{R}_+$ из п. 3 § 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство и $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – положительная узкая радоновская мера. Тогда $\mu^\#: \mathcal{M}^\# \rightarrow \mathbb{R}_+$ является положительной, широкой, полной и сильно насыщенной радоновской мерой, а $(\mu^\#)_0: \mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ является положительной широкой борелевско-радоновской мерой. Кроме того, если μ ограничено, то $\mu^\#$ и $(\mu^\#)_0$ тоже ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathcal{M}^\#$ через $\mathcal{N}$ и $\mu^\#$ через ν . Легко проверить, что ν является компактно регулярным. По определению для каждой точки $t \in T$ существует открытая окрестность G такая, что $x \equiv \sup\{\mu R \mid R \in \mathcal{M} \wedge R \subset G\} < \infty$. Пусть $M \in \mathcal{N}$ и $M \subset G$. Тогда для каждого компактного множества $C \subset M$ мы имеем $C \in \mathcal{M}$ и $C \subset G$; откуда $\nu C = \mu C \leq x$. Поэтому в силу компактной регулярности $\nu M = \sup\{\nu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\} \leq x$. В результате $\sup\{\nu M \mid M \in \mathcal{N} \wedge M \subset G\} \leq x < \infty$. Таким образом, ν локально ограничено. Сходно, если μ ограничено, то ν тоже ограничено.

Теперь надо проверить, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$. Обозначим $\mathcal{K}(T, \mathcal{M}, \mu)$ через $\mathcal{K}$ и $\check{\mu}$ через $\varkappa$. Пусть $G \in \mathcal{G}$ и $K \in \mathcal{K}$. Тогда $K = R \cup N$ для некоторых $R \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Поэтому $G \cap K = (G \cap R) \cup (G \cap N)$. По определению узких мер $S \equiv G \cap R \in \mathcal{M}$. Кроме того, $P \equiv G \cap N \in \mathcal{N}(T, \mathcal{M}, \mu)$. В результате $G \cap K = S \cup P \in \mathcal{K}$. Это означает, что $G \in \mathcal{N}$.

Согласно п. 3 § 1 ν является широкой, полной и сильно насыщенной мерой. Согласно п. 5 § 1 ν_0 является широкой положительной радоновской мерой. Если μ_0 ограничено, то ν_0 тоже ограничено.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – широкая положительная радоновская мера. Тогда $\mu_{00} \equiv \mu \upharpoonright \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ является узкой положительной борелевско-радоновской мерой и $\mu^\# = (\mu_{00})^\#$.

Из приведенных свойств следует, что мы можем корректно определить биективные отображения

$$\begin{aligned} R: \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})_+ &\rightarrow \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0, \\ R_b: \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})_+ &\rightarrow \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+, \end{aligned}$$

полагая $R\mu \equiv (\mu^\#)_0$ и $R_b \equiv R \upharpoonright \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$. Тогда $R(x\mu + y\nu) = xR\mu + yR\nu$. Сходное свойство справедливо для R_b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим положительную узкую радоновскую меру $\lambda \equiv x\mu + y\nu$. По предложению из п. 5 § 1 $\pi \equiv xR\mu + yR\nu$ является положительной широкой радоновской мерой. По предложению 2 $\varkappa \equiv R\lambda$ является такой же мерой. Если C – компактное множество, то $\pi C = x\mu C + y\nu C = \lambda C = \varkappa C$. В силу компактной регулярности π и $\varkappa$ мы выводим, что $\pi = \varkappa$.

Для ограниченных мер имеет место более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда биекция R_b имеет единственное расширение до изоморфизма $S_b: \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $S_b\mu = R_b(\mu_+) - R_b(-\mu_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 $A \equiv \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})$ – решеточное векторное пространство. По предложению из п. 5 § 1 $B \equiv \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ – тоже решеточное векторное пространство. Поэтому по предложению 3.6.1 из [24] и предложению 3 отображение R_b имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $S_b: A \rightarrow B$ такого, что $S_b\mu = R_b(\mu_+) - R_b(-\mu_-)$.

Пусть $\mu, \nu \in A_+$. Если $\mu \leq \nu$, то $(R_b\mu)C \leq (R_b\nu)C$ для каждого компактного множества C . Используя компактную регулярность этих мер, мы выводим, что $R_b\mu M \leq R_b\nu M$ для каждого $M \in \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Это означает, что R_b является возрастающим. Если $R_b\mu \leq R_b\nu$, то, очевидно, $\mu \leq \nu$. Таким образом, R_b является изотонным.

Следовательно, R_b сохраняет любые границы. Поэтому $\mu \wedge \nu = 0$ в A_+ влечет $S_b\mu \wedge S_b\nu = R_b\mu \wedge R_b\nu = R_b(\mu \wedge \nu) = 0$. По свойству 14 E(b) из [12] S_b является решеточным линейным оператором.

Пусть $\pi \in B$. Тогда $\pi = \pi_+ + \pi_-$. По условию $\pi_+ = R_b\mu'$ и $\pi_- = -R_b\mu''$ для некоторых $\mu', \mu'' \in A_+$. Рассмотрим меру $\mu = \mu' - \mu'' \in A$. Тогда $\pi = R_b\mu' - R_b\mu'' = S_b\mu$. Таким образом, S_b – биективный решеточный линейный оператор. Поэтому S_b – необходимый изоморфизм.

Теперь мы докажем, что S_b сохраняет нормы. Рассмотрим на $\mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ нормы, индуцированные из нормированных решеточных векторных пространств $(\text{Meas}_b(T, \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})), \|\cdot\|)$ и $(\text{Meas}_b(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G})), \|\cdot\|)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

- 1) $(\mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ и $(\mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ являются нормированными решеточными векторными пространствами с аддитивными нормами;
- 2) $S_b: (\mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом данных нормированных решеточных векторных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим первое семейство через Y , второе через Z и $\text{Meas}_b(T, \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}))$ через X . Согласно п. 1 § 1 $(X, \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством с аддитивной нормой $\|\mu\| \equiv |\mu|(T)$. В силу предложения 1 $|\mu|_X = |\mu|_Y$. Следовательно, $(Y, \|\cdot\|)$ тоже является нормированным решеточным векторным пространством с аддитивной нормой. То же самое справедливо для $(Z, \|\cdot\|)$.

2) Пусть $\mu \in Y$. Тогда по 1) $|\mu| = \mu_+ + (-\mu_-)$ влечет $\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\| = \mu_+T + (-\mu_-)T$. В силу компактной регулярности $\mu_+T = \sup\{\mu_+C \mid C \in \mathcal{C}\}$.

Рассмотрим меру $\pi \equiv S_b\mu$. По теореме 1 $\pi_+ = S_b(\mu_+) = R_b(\mu_+)$ и $-\pi_- = S_b(-\mu_-) = R_b(-\mu_-)$. Снова в силу компактной регулярности $\|\pi_+\| = \pi_+T = \sup\{\pi_+C \mid C \in \mathcal{C}\} = \sup\{\mu_+C \mid C \in \mathcal{C}\} = \mu_+T$. Точно так же $\|\pi_-\| = (-\mu_-)T$. Поэтому $\|\pi\| = \|\pi_+\| + \|\pi_-\| = \|\mu\|$. Таким образом, S_b является изометрическим. В силу теоремы 1 S_b является необходимым изоморфизмом.

Таким образом, отображения

$$\begin{aligned} R: \mathfrak{MM}^{no}(T, \mathcal{G})_+ &\rightarrow \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0, \\ S_b: \mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G}) &\rightarrow \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

дают семейство $\mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \cup \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ всех широких борелевско-радоновских мер. Но, к сожалению, это семейство не является векторным пространством. Поэтому в следующем пункте мы построим подходящее решеточное векторное пространство, содержащее семейство всех широких борелевско-радоновских мер и изоморфное решеточному векторному пространству $\mathfrak{MM}^{no}(T, \mathcal{G})$ всех узких борелевско-радоновских мер.

2. Радоновские бимеры. Триплет $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, состоящий из мер μ, μ_1 и μ_2 на $(T, \mathcal{G})$, назовем *радоновским триплетом на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$* , если:

- 1) $\mu_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\mu_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ являются положительными широкими радоновскими мерами;

2) $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ является узкой радоновской мерой на δ -кольце $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{M}_2^f(\mu_2)$;

3) $\mu M = \mu_1 M - \mu_2 M$ для каждого $M \in \mathcal{M}$.

Если μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$, то β назовем *расширенным радоновским триплетом*. Если μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, то β назовем *борелевско-радоновским триплетом*. Если μ_1 и μ_2 являются ограниченными, то β назовем *ограниченным*.

Множество всех радоновских триплетов на $(T, \mathcal{G})$ обозначим через $R(T, \mathcal{G})$. Подмножества всех расширенных радоновских триплетов и всех борелевско-радоновских триплетов обозначим соответственно через $R^e(T, \mathcal{G})$ и $R^0(T, \mathcal{G})$. Для обозначения соответствующих подсемейств ограниченных радоновских триплетов будем использовать нижний индекс b .

Радоновские триплеты $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ назовем *эквивалентными* ($\beta \sim \gamma$ или $\beta\theta\gamma$), если $\mu \mid \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) = \nu \mid \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Класс эквивалентности в $R(T, \mathcal{G})$ радоновского триплета β обозначим через $\bar{\beta} \equiv \theta\beta$. Множество всех классов $\bar{\beta}$ для всех радоновских триплетов $\beta \in R(T, \mathcal{G})$ обозначим через $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$.

Любой элемент $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ из $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ будем называть *радоновской бимерой*. Оправдание этого термина будет дано далее. Если $\beta \in R_b(T, \mathcal{G})$, то $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ будем называть *ограниченной радоновской бимерой*. Семейство всех ограниченных радоновских бимер обозначим через $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$.

За нулевой элемент в $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ возьмем элемент $O = \theta(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$, где ζ, ζ_1 и ζ_2 являются нулевыми мерами на σ -алгебре $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \sim \bar{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2) \sim \bar{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2)$ в $R(T, \mathcal{G})$. Рассмотрим σ -алгебры $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1$, $\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}_2$, $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_1 \equiv \overset{\circ}{\mathcal{M}}_1 \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}}_1$ и $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2 \equiv \overset{\circ}{\mathcal{M}}_2 \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}}_2$ и δ -кольца $\mathcal{L} \equiv \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{L}} \equiv \overset{\circ}{\mathcal{M}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{N}}$. Рассмотрим оценивания $\lambda_1 \equiv \mu_1 \mid \mathcal{L}_1 + \nu_1 \mid \mathcal{L}_1$, $\lambda_2 \equiv \mu_2 \mid \mathcal{L}_2 + \nu_2 \mid \mathcal{L}_2$, $\overset{\circ}{\lambda}_1 \equiv \overset{\circ}{\mu}_1 \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1 + \overset{\circ}{\nu}_1 \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1$, $\overset{\circ}{\lambda}_2 \equiv \overset{\circ}{\mu}_2 \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2 + \overset{\circ}{\nu}_2 \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2$, $\lambda \equiv \mu \mid \mathcal{L} + \nu \mid \mathcal{L}$ и $\overset{\circ}{\lambda} \equiv \overset{\circ}{\mu} \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}} + \overset{\circ}{\nu} \mid \overset{\circ}{\mathcal{L}}$. Рассмотрим триплеты $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ и $\overset{\circ}{\alpha} \equiv (\overset{\circ}{\lambda}, \overset{\circ}{\lambda}_1, \overset{\circ}{\lambda}_2)$.

ЛЕММА 1. α и $\overset{\circ}{\alpha}$ являются радоновскими триплетами, и $\alpha \sim \overset{\circ}{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению из п. 5 § 1 λ_1 и λ_2 являются положительными широкими радоновскими мерами. Следовательно, λ -мера на $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Далее,

$$\mathcal{L}_1^f(\lambda_1) = \mathcal{L}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{L}_1^f(\nu_1) = \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1^f(\nu_1) = \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{N}_1^f(\nu_1).$$

Аналогично, $\mathcal{L}_2^f(\lambda_2) = \mathcal{M}_2^f(\mu_2) \cap \mathcal{N}_2^f(\nu_2)$. В результате

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^f(\lambda_1) \cap \mathcal{L}_2^f(\lambda_2) &= \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{N}_1^f(\nu_1) \cap \mathcal{M}_2^f(\mu_2) \cap \mathcal{N}_2^f(\nu_2) \\ &= \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{L} \supset \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Если $L \in \mathcal{L}$ и $G \in \mathcal{G}$, то $L \cap G \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{L}$. В результате $\lambda'_1 \equiv \lambda_1 \mid \mathcal{L}$ и $\lambda'_2 \equiv \lambda_2 \mid \mathcal{L}$ являются положительными узкими радоновскими мерами. Значит, $\lambda = \lambda'_1 - \lambda'_2$ является узкой радоновской мерой.

Наконец, если $L \in \mathcal{L}$, то $\lambda_1 L$ и $\lambda_2 L$ конечны и $\lambda L = \mu L + \nu L = \mu_1 L - \mu_2 L + \nu_1 L - \nu_2 L = \lambda_1 L - \lambda_2 L$. Доказанные свойства означают, что α является радоновским

триплетом. Сходно и $\overset{\circ}{\alpha}$ является радоновским триплетом. По условию $\mu B = \overset{\circ}{\mu}B$ и $\nu B = \overset{\circ}{\nu}B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda B &= \lambda_1 B - \lambda_2 B = \mu_1 B + \nu_1 B - \mu_2 B - \nu_2 B = \mu B + \nu B = \overset{\circ}{\mu}B + \overset{\circ}{\nu}B \\ &= \overset{\circ}{\mu}_1 B - \overset{\circ}{\mu}_2 B + \overset{\circ}{\nu}_1 B - \overset{\circ}{\nu}_2 B = \overset{\circ}{\lambda}_1 B - \overset{\circ}{\lambda}_2 B = \overset{\circ}{\lambda} B. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha \sim \overset{\circ}{\alpha}$.

Из леммы 1 следует, что мы можем корректно определить операцию сложения “+” в $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$, полагая $\bar{\beta} + \bar{\gamma} \equiv \bar{\alpha}$.

Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \sim \overset{\circ}{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2)$ и $x \in \mathbb{R}$. Если $x \geq 0$, то рассмотрим оценивания $\pi_1 \equiv x\mu_1$, $\pi_2 \equiv x\mu_2$, $\overset{\circ}{\pi}_1 \equiv x\overset{\circ}{\mu}_1$, $\overset{\circ}{\pi}_2 \equiv x\overset{\circ}{\mu}_2$, $\pi \equiv x\mu$ и $\overset{\circ}{\pi} \equiv x\overset{\circ}{\mu}$. Если $x < 0$, то рассмотрим оценивания $\varkappa_1 \equiv -x\mu_2$, $\varkappa_2 \equiv -x\mu_1$, $\overset{\circ}{\varkappa}_1 \equiv -x\overset{\circ}{\mu}_2$, $\overset{\circ}{\varkappa}_2 \equiv -x\overset{\circ}{\mu}_1$, $\varkappa \equiv x\mu$ и $\overset{\circ}{\varkappa} \equiv x\overset{\circ}{\mu}$. Рассмотрим триплеты $\delta \equiv (\pi, \pi_1, \pi_2)$, $\overset{\circ}{\delta} \equiv (\overset{\circ}{\pi}, \overset{\circ}{\pi}_1, \overset{\circ}{\pi}_2)$, $\varepsilon \equiv (\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2)$ и $\overset{\circ}{\varepsilon} \equiv (\overset{\circ}{\varkappa}, \overset{\circ}{\varkappa}_1, \overset{\circ}{\varkappa}_2)$.

ЛЕММА 2. $\delta, \overset{\circ}{\delta}, \varepsilon$ и $\overset{\circ}{\varepsilon}$ являются радоновскими триплетами, $\delta \sim \overset{\circ}{\delta}$ и $\varepsilon \sim \overset{\circ}{\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению из п. 5 § 1 $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ являются положительными широкими радоновскими мерами. По предположению 1 из п. 1 § 2 $\varkappa$ — узкая радоновская мера. Если $M \in \mathcal{M}$, то $\mu M = \mu_1 M - \mu_2 M$. Следовательно, $\varkappa M = \varkappa_1 M - \varkappa_2 M$. Это означает, что ε — радоновский триплет. Сходно, $\overset{\circ}{\varepsilon}$ — радоновский триплет.

По условию $\mu B = \overset{\circ}{\mu}B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Поэтому $\varkappa B = \varkappa_1 B - \varkappa_2 B = -x\mu_2 B + x\mu_1 B = x\mu B = x\overset{\circ}{\mu}B = -x\overset{\circ}{\mu}_2 B + x\overset{\circ}{\mu}_1 B = \overset{\circ}{\varkappa}_1 B - \overset{\circ}{\varkappa}_2 B = \overset{\circ}{\varkappa}B$. Таким образом, $\varepsilon \sim \overset{\circ}{\varepsilon}$.

Для δ и $\overset{\circ}{\delta}$ рассуждения такие же.

Из леммы 2 следует, что мы можем корректно определить композицию умножения “*” элементов из $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ на вещественные числа, полагая $x * \bar{\beta} \equiv \bar{\delta}$ для $x \geq 0$ и $x * \bar{\beta} \equiv \bar{\varepsilon}$ для $x < 0$.

Наша задача — доказать, что относительно операции $\bar{\beta} + \bar{\gamma}$ и композиции $x * \bar{\beta}$ семейство $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ является векторным пространством. Для этого мы используем семейство $\mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})$ всех узких борелевско-радоновских мер.

Пусть $\pi \in \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})$. По условию $\pi = \pi_1 - \pi_2$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})_+$. Поэтому по предположению 2 из п. 1 § 2 меры $\mu_1 \equiv \pi_1^\#$ и $\mu_2 \equiv \pi_2^\#$ принадлежат семейству $\mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Рассмотрим на δ -кольце $\mathcal{M} \equiv \text{dom}_f \mu_1 \cap \text{dom}_f \mu_2$ конечную меру $\mu \equiv \mu_1 \upharpoonright \mathcal{M} - \mu_2 \upharpoonright \mathcal{M}$. Очевидно, что μ — узкая радоновская мера. Таким образом, мы можем рассмотреть для π триплет $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$.

Сходно, если $\pi = \overset{\circ}{\pi}_1 - \overset{\circ}{\pi}_2$ для некоторых $\overset{\circ}{\pi}_1, \overset{\circ}{\pi}_2 \in \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})_+$, то $\overset{\circ}{\mu}_1 \equiv \overset{\circ}{\pi}_1^\#$ и $\overset{\circ}{\mu}_2 \equiv \overset{\circ}{\pi}_2^\#$ принадлежат $\mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Рассмотрим на δ -кольце $\overset{\circ}{\mathcal{M}} \equiv \text{dom}_f \overset{\circ}{\mu}_1 \cap \text{dom}_f \overset{\circ}{\mu}_2$ узкую радоновскую меру $\overset{\circ}{\mu} \equiv \overset{\circ}{\mu}_1 \upharpoonright \overset{\circ}{\mathcal{M}} - \overset{\circ}{\mu}_2 \upharpoonright \overset{\circ}{\mathcal{M}}$. В результате мы получаем для π другой триплет $\overset{\circ}{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2)$.

ЛЕММА 3. β и $\bar{\beta}$ являются радоновскими триплетами, и $\beta \sim \bar{\beta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству локальной конечности $\mathcal{C} \subset \text{dom}_f \mu_1$. Поэтому $\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \subset \text{dom} \mu_1$ влечет $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{dom}_f \mu_1$, откуда $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) \subset \mathcal{M}$. Следовательно, β – радоновский триплет. То же самое верно для $\bar{\beta}$.

Если $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то согласно определению узких радоновских мер $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \pi_1 B - \pi_2 B = \pi B = \overset{\circ}{\pi}_1 B - \overset{\circ}{\pi}_2 B = \overset{\circ}{\mu}_1 B - \overset{\circ}{\mu}_2 B = \overset{\circ}{\mu} B$. Это означает, что $\beta \sim \bar{\beta}$.

Из леммы 3 следует, что мы можем корректно определить отображение $H: \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{B}(T, \mathcal{G})$, полагая $H\pi \equiv \bar{\beta} \equiv \bar{\beta}$.

Если $\pi \in \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})$ и $\pi = \pi_1 - \pi_2$, то по предложению 2 из п. 1 § 2 $\pi_1^\#$ и $\pi_2^\#$ ограничены. Поэтому $\beta \equiv (\mu, \pi_1^\#, \pi_2^\#) \in R_b^e(T, \mathcal{G})$ и $\bar{\beta} \in \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$. Следовательно, мы можем корректно определить отображение $H_b: \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$, полагая $H_b\pi = \bar{\beta}$. Ясно, что $H_b = H \mid \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда отображения $H: \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{B}(T, \mathcal{G})$ и $H_b: \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$ являются биективными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi, \varkappa \in \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})$, и предположим, что $H\pi = H\varkappa$. По определению $H\pi = \theta\beta$ для $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, где $\mu_1 \equiv (\pi_+)^{\#}$, $\mu_2 \equiv (-\pi_-)^{\#}$ и $\mu M \equiv \mu_1 M - \mu_2 M$ для каждого $M \in \mathcal{M} \equiv \text{dom}_f \mu_1 \cap \text{dom}_f \mu_2$. Сходно, $H\varkappa = \theta\gamma$ для $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$, где $\nu_1 \equiv (\varkappa_+)^{\#}$, $\nu_2 \equiv (-\varkappa_-)^{\#}$ и $\nu N \equiv \nu_1 N - \nu_2 N$ для каждого $N \in \mathcal{N} \equiv \text{dom}_f \nu_1 \cap \text{dom}_f \nu_2$.

Из $\beta \sim \gamma$ мы заключаем, что $\mu B = \nu B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. В результате $\pi B = \pi_+ B - (-\pi_-) B = \mu_1 B - \mu_2 B = \mu B = \nu B = \nu_1 B - \nu_2 B = \varkappa_+ B - (-\varkappa_-) B = \varkappa B$. Таким образом, $\pi = \varkappa$. Значит, H инъективно.

Пусть $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \in R(T, \mathcal{G})$, где $\lambda L = \lambda_1 L - \lambda_2 L$ для каждого $L \in \mathcal{L} \equiv \text{dom}_f \lambda_1 \cap \text{dom}_f \lambda_2$. Рассмотрим конечные меры $\eta \equiv \lambda$, $\eta_1 \equiv \lambda_1 \mid \mathcal{L}$ и $\eta_2 \equiv \lambda_2 \mid \mathcal{L}$. Очевидно, что η_1 и η_2 принадлежат $\mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})_+$. Рассмотрим меры $\mu_1 \equiv \eta_1^\#$ и $\mu_2 \equiv \eta_2^\#$ из $\mathfrak{M}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Пусть $\mathcal{M} \equiv \text{dom}_f \mu_1 \cap \text{dom}_f \mu_2$. Рассмотрим меру $\mu \equiv \mu_1 \mid \mathcal{M} - \mu_2 \mid \mathcal{M}$ и триплет $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$. По лемме 3 $H\eta = \bar{\beta}$. Если $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то $\lambda_1 B = \eta_1 B = \mu_1 B$ и $\lambda_2 B = \eta_2 B = \mu_2 B$. По лемме 3 мы имеем $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \lambda_1 B - \lambda_2 B = \lambda B$. Это означает, что $\beta \sim \alpha$, откуда $H\eta = \bar{\alpha}$. Таким образом, H сюръективно.

Если $\alpha \in R_b(T, \mathcal{G})$, то λ_1 и λ_2 являются ограниченными. Поэтому η ограничено. Значит, H_b сюръективно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, $\pi, \varkappa \in \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})$ и $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $H(x\pi + y\varkappa) = x * H\pi + y * H\varkappa$. Подобное свойство справедливо для H_b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 из п. 1 § 2 $\rho \equiv x\pi + y\varkappa \in A \equiv \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})$. По определению $\pi = \pi_1 - \pi_2$ и $\varkappa = \varkappa_1 - \varkappa_2$ для некоторых $\pi_i, \varkappa_i \in A_+$. Рассмотрим меры $\mu_1 \equiv \pi_1^\#$, $\mu_2 \equiv \pi_2^\#$, $\nu_1 \equiv \varkappa_1^\#$ и $\nu_2 \equiv \varkappa_2^\#$ из $B \equiv \mathfrak{M}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Пусть $\mathcal{M} \equiv \text{dom}_f \mu_1 \cap \text{dom}_f \mu_2$ и $\mathcal{N} \equiv \text{dom}_f \nu_1 \cap \text{dom}_f \nu_2$. Рассмотрим меры $\mu \equiv \mu_1 \mid \mathcal{M} - \mu_2 \mid \mathcal{M}$ и $\nu \equiv \nu_1 \mid \mathcal{N} - \nu_2 \mid \mathcal{N}$. Тогда для триплетов $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ мы имеем $H\pi = \bar{\beta}$ и $H\varkappa = \bar{\gamma}$.

Предположим, что $x \geq 0$ и $y < 0$. Тогда по определению

$$x * \bar{\beta} = \theta(x\mu, x\mu_1, x\mu_2) \quad \text{и} \quad y * \bar{\gamma} = \theta(y\nu, -y\nu_2, -y\nu_1).$$

Рассмотрим σ -алгебры $\mathcal{L}_1 \equiv \text{dom } \mu_1 \cap \text{dom } \nu_2$, $\mathcal{L}_2 \equiv \text{dom } \mu_2 \cap \text{dom } \nu_1$ и δ -кольцо $\mathcal{L} \equiv \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Рассмотрим меры $\lambda_1 \equiv x\mu_1|_{\mathcal{L}_1} + (-y\nu_2)|_{\mathcal{L}_1}$, $\lambda_2 \equiv x\mu_2|_{\mathcal{L}_2} + (-y\nu_1)|_{\mathcal{L}_2}$ и $\lambda \equiv x\mu|_{\mathcal{L}} + y\nu|_{\mathcal{L}}$. Тогда для радоновского триплета $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ мы имеем $x * \bar{\beta} + y * \bar{\gamma} = \bar{\alpha}$.

Далее рассмотрим меры $\rho_1 \equiv x\pi_1 - y\kappa_2$ и $\rho_2 \equiv x\pi_2 - y\kappa_1$. Тогда $\rho = \rho_1 - \rho_2$, и по предложению 1 из п. 1 § 2 $\rho_1, \rho_2 \in A_+$. Рассмотрим меры $\overset{\circ}{\lambda}_1 \equiv \overset{\circ}{\rho}_1^\#$ и $\overset{\circ}{\lambda}_2 \equiv \overset{\circ}{\rho}_2^\#$ из B . Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{L}} \equiv \text{dom}_f \overset{\circ}{\lambda}_1 \cap \text{dom}_f \overset{\circ}{\lambda}_2$ и $\overset{\circ}{\lambda} \equiv \overset{\circ}{\lambda}_1|_{\overset{\circ}{\mathcal{L}}} - \overset{\circ}{\lambda}_2|_{\overset{\circ}{\mathcal{L}}}$. Тогда по определению для триплета $\overset{\circ}{\alpha} \equiv (\overset{\circ}{\lambda}, \overset{\circ}{\lambda}_1, \overset{\circ}{\lambda}_2)$ мы имеем $H\rho = \theta\overset{\circ}{\alpha}$.

Если $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то $\overset{\circ}{\lambda}B = \overset{\circ}{\lambda}_1B - \overset{\circ}{\lambda}_2B = \rho_1B - \rho_2B = x\pi_1B - y\kappa_2B - x\pi_2B + y\kappa_1B = x\mu_1B - y\nu_2B - x\mu_2B + y\nu_1B = x\mu B + y\nu B = \lambda B$. Это означает, что $\overset{\circ}{\alpha} \sim \alpha$. В результате $x * H\pi + y * H\kappa = \theta\alpha = \theta\overset{\circ}{\alpha} = H(x\pi + y\kappa)$.

Для трех других возможностей для x и y рассуждения такие же.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда относительно операции $\bar{\beta} + \bar{\gamma}$ и композиции $x * \bar{\beta}$ семейства $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ являются векторными пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 из п. 1 § 2 семейство $A \equiv \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})$ является векторным пространством, т.е. оно удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства. Используя свойства отображения H из предложений 1 и 2 этого пункта, мы можем вывести, что семейство $B \equiv \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ удовлетворяет также всем необходимым аксиомам.

Проверим, например, что $x * (y * b) = (xy) * b$. По предложению 1 $b = Ha$ для некоторого $a \in A$. Из $x(ya) = (xy)a$ мы заключаем по предложению 2, что $x * (y * b) = x * (y * Ha) = x * H(ya) = H(x(ya)) = H((xy)a) = (xy) * Ha = (xy) * b$. Для ограниченного случая рассуждения такие же.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда $H: \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $H_b: \mathfrak{RM}_b^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ являются изоморфизмами данных векторных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 и следствия 1 п. 2 § 2 H является гомоморфизмом данных векторных пространств. В силу предложения 1 п. 2 § 2 H есть изоморфизм. Для H_b рассуждения такие же.

Далее вместо $x * \bar{\beta}$ мы будем писать просто $x\bar{\beta}$.

Теперь определим порядок на векторном пространстве $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$.

ЛЕММА 4. Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, $\overset{\circ}{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2)$, $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$, и $\overset{\circ}{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2)$ – радоновские триплеты такие, что $\beta \sim \overset{\circ}{\beta}$ и $\gamma \sim \overset{\circ}{\gamma}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) $\mu B \leq \nu B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$;
- 2) $\overset{\circ}{\mu} B \leq \overset{\circ}{\nu} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из равенств $\mu B = \overset{\circ}{\mu} B$ и $\nu B = \overset{\circ}{\nu} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$.

Из леммы 4 следует, что мы можем корректно определить бинарное отношение ω на $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$, полагая $\bar{\beta} \omega \bar{\gamma}$, если $\overset{\circ}{\mu} B \leq \overset{\circ}{\nu} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ и некоторых $\bar{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2) \in \bar{\beta}$ и $\bar{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2) \in \bar{\gamma}$.

ЛЕММА 5. *Отношение ω является отношением порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\bar{\beta} \omega \bar{\beta}$. Пусть $\bar{\beta} \omega \bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma} \omega \bar{\delta}$. Тогда $\mu B \leq \nu B$ и $\overset{\circ}{\nu} B \leq \overset{\circ}{\pi} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ и некоторых $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \in \bar{\beta}$, $\bar{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2) \in \bar{\beta}$, $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2) \in \bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2) \in \bar{\gamma}$. Из $\mu B = \overset{\circ}{\mu} B$ и $\nu B = \overset{\circ}{\nu} B$ мы заключаем, что $\nu B = \overset{\circ}{\nu} B \leq \overset{\circ}{\mu} B = \mu B$, откуда $\nu B = \mu B$ для каждого B . Значит, $\gamma \sim \beta$ и $\bar{\gamma} = \bar{\beta}$.

Наконец, пусть $\bar{\beta} \omega \bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma} \omega \bar{\delta}$. Тогда $\mu B \leq \nu B$ и $\overset{\circ}{\nu} B \leq \overset{\circ}{\pi} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ и некоторых $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \in \bar{\beta}$, $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2) \in \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2) \in \bar{\gamma}$ и $\bar{\delta} \equiv (\overset{\circ}{\pi}, \overset{\circ}{\pi}_1, \overset{\circ}{\pi}_2) \in \bar{\delta}$. Из $\nu B = \overset{\circ}{\nu} B$ мы заключаем, что $\mu B \leq \nu B = \overset{\circ}{\nu} B \leq \overset{\circ}{\pi} B$. Значит, по определению ω мы получаем $\bar{\beta} \omega \bar{\delta}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:*

- 1) отображения H и H_β являются изотонными;
- 2) семейства $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ являются дедекиндово полными решеточно упорядоченными векторными пространствами и второе из них является l -идеалом в первом;
- 3) отображения $H: \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $H_b: \mathfrak{RM}_b^{no}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ являются изоморфизмами данных решеточных векторных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\pi, \kappa \in A \equiv \mathfrak{RM}^{no}(T, \mathcal{G})$. По определению $\pi = \pi_1 - \pi_2$ и $\kappa = \kappa_1 - \kappa_2$ для некоторых положительных борелевско-радоновских мер. Рассмотрим $\mu_i \equiv \pi_i^\#$, $\nu_i \equiv \kappa_i^\#$, $\mathcal{M}_i \equiv \text{dom } \mu_i$, $N_i \equiv \text{dom } \nu_i$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap \mathcal{M}_2^f(\mu_2)$, $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}_1^f(\nu_1) \cap \mathcal{N}_2^f(\nu_2)$, $\mu \equiv \mu_1 | \mathcal{M} - \mu_2 | \mathcal{M}$ и $\nu \equiv \nu_1 | \mathcal{N} - \nu_2 | \mathcal{N}$. Тогда по определению H для триплетов $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ мы имеем $H\pi = \bar{\beta}$ и $H\kappa = \bar{\gamma}$.

Если $\pi \leq \kappa$, то $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ влечет $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \pi_1 B - \pi_2 B \leq \kappa_1 B - \kappa_2 B = \nu_1 B - \nu_2 B = \nu B$. Это дает $H\pi = \bar{\beta} \leq \bar{\gamma} = H\kappa$.

Теперь пусть $\bar{\beta} = H\pi \leq H\kappa = \bar{\gamma}$. Тогда по лемме 5 $\mu B \leq \nu B$ для каждого B . Поэтому $\pi B = \pi_1 B - \pi_2 B = \mu_1 B - \mu_2 B = \mu B \leq \nu B = \nu_1 B - \nu_2 B = \kappa_1 B - \kappa_2 B = \kappa B$, т.е. $\pi \leq \kappa$.

2) Из 1) следует, что отображение H^{-1} тоже изотонно. Следовательно, H и H^{-1} сохраняют любые границы. Кроме того, по следствию 2 из предложения 2 этого пункта H является изоморфизмом данных векторных пространств. Пусть $E \subset B \equiv \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $b \in B$ является верхней границей для E . Рассмотрим множество $D \equiv H^{-1}[E]$ и элемент $a \equiv H^{-1}b$. Если $d \in D$, то $Hd \leq b = Ha$ влечет $d \leq a$. Поэтому по предложению 1 из п. 1 § 2 существует $d_0 \equiv \sup D$. В результате $Hd_0 = \sup H[D] = \sup E$.

Если E ограничено снизу, то рассуждения такие же. Таким образом, B дедекндово полно.

Пусть $b_1, b_2 \in B$. Рассмотрим элементы $a_i \equiv H^{-1}b_i$, $a' \equiv a_1 \vee a_2$ и $a'' \equiv a_1 \wedge a_2$. Тогда $Ha' = Ha_1 \vee Ha_2 = b_1 \vee b_2$ и $Ha'' = Ha_1 \wedge Ha_2 = b_1 \wedge b_2$. Следовательно, упорядоченное множество B является решеточно упорядоченным.

Сходным образом проверяется, что B является решеточным векторным пространством. Например, пусть $b, b_1, b_2 \in B$ и $b_1 \leq b_2$. Возьмем $a_i \equiv H^{-1}b_i$ и $a \equiv H^{-1}b$. Тогда $a_1 \leq a_2$ влечет $a_1 + a \leq a_2 + a$. Применяя H , мы получаем

$$b_1 + b = H(a_1 + a) \leq H(a_2 + a) = b_2 + b.$$

3) Из $H(a_1 \vee a_2) = Ha_1 \vee Ha_2$ и $H(a_1 \wedge a_2) = Ha_1 \wedge Ha_2$ и следствия 2 предложения 2 этого пункта следует, что $H: A \rightarrow B$ является гомоморфизмом данных решеточных векторных пространств. Так как H биективно по предложению 1, мы заключаем, что H является необходимым изоморфизмом.

Для семейств $A_b \equiv \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})$ и $B_b \equiv \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$ и для отображения H_b рассуждения такие же. Нам нужно только проверить, что B_b есть l -идеал в B .

Пусть $b \in B_b$, $d \in B$ и $|d| \leq |b|$. Возьмем $a \equiv H^{-1}b \in A$ и $c \equiv H^{-1}d \in A$. Так как H_b есть ограничение H , имеем $a \in A_b$. Так как H есть изоморфизм, выводим, что $|c| \leq |a|$ в A . Теперь по предложению 1 из п. 1 $c \in A_b$. В результате $d = H_b c \in B_b$.

Теперь мы свяжем положительные широкие радоновские меры и радоновские бимеры. Конусы положительных элементов в решеточных векторных пространствах $\mathfrak{B}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$ будут обозначаться, как обычно, через $\mathfrak{B}(T, \mathcal{G})_+$ и $\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})_+$ соответственно.

Для каждой меры $\mu \in \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ возьмем узкую положительную радоновскую меру $\mu_f \equiv \mu \upharpoonright \text{dom } \mu$, радоновский триплет $\beta \equiv (\mu_f, \mu, 0)$ и положительную радоновскую бимеру $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$. Эта процедура определяет отображение $E: \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \rightarrow \mathfrak{B}(T, \mathcal{G})_+$ такое, что $E\mu \equiv \mathfrak{m}$. Если $\mu \in \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+$, то $E\mu \in \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})_+$. Поэтому мы можем определить отображение $E_b: \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+ \rightarrow \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})_+$, полагая $E_b \equiv E \upharpoonright \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+$.

Теперь мы можем доказать основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

- 1) отображения $E: \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \rightarrow \mathfrak{B}(T, \mathcal{G})_+$ и $E_b: \mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+ \rightarrow \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})_+$ являются биективными;
- 2) если $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $E(x\mu + y\nu) = xE\mu + yE\nu$; сходное свойство справедливо для E_b ;
- 3) отображения E и E_b являются изотонными и сохраняют любые порядковые границы;
- 4) для каждой бимеры $\mathfrak{m} \in \mathfrak{B}(T, \mathcal{G})$ существуют единственные меры $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ такие, что $\mathfrak{m} = E\mu' - E\mu''$, $E\mu' = \mathfrak{m}_+$ и $E\mu'' = -\mathfrak{m}_-$; если $\mathfrak{m}$ ограничено, то μ' и μ'' тоже ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E\mu = E\nu$. Это означает, что $\mu_f B = \nu_f B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. В силу компактной регулярности этих мер $\mu = \nu$. Таким образом, E инъективно.

Рассмотрим меру $\pi \equiv x\mu + y\nu \in \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Предположим, что $x > 0$ и $y > 0$. По определению $E\mu = \bar{\beta}$, $E\nu = \bar{\gamma}$ и $E\pi = \bar{\delta}$ для $\beta \equiv (\mu_f, \mu, 0)$, $\gamma \equiv (\nu_f, \nu, 0)$ и $\delta \equiv (\pi_f, \pi, 0)$. Ясно, что $\pi_f = x\mu_f + y\nu_f$. Рассмотрим σ -алгебры $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ и δ -кольцо $\mathcal{L} \equiv \text{dom}_f(x\mu) \cap \text{dom}_f(y\nu) = \text{dom}_f \nu \cap \text{dom}_f \mu = \text{dom}_f \pi$. Рассмотрим меры $\lambda_1 \equiv \pi$ на $\mathcal{L}_1$, $\lambda_2 \equiv 0$ на $\mathcal{L}_2$, $\lambda \equiv \pi_f$ на $\mathcal{L}$ и соответствующий радоновский триплет $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$. По определению $x\beta = \theta(x\mu_f, x\mu, 0)$, $y\gamma = \theta(y\nu_f, y\nu, 0)$ и $x\bar{\beta} + y\bar{\gamma} = x\beta + y\gamma = \bar{\alpha} = \theta(\pi_f, \pi, 0) = E\pi$.

Пусть $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{m} = \bar{\beta}$ для некоторого $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \in R(T, \mathcal{G})$. Рассмотрим широкие борелевско-радоновские меры $\nu' \equiv \mu_1 \mid \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ и $\nu'' \equiv \mu_2 \mid \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Рассмотрим δ -кольцо $\mathcal{N} \equiv \text{dom}_f \nu' \cap \text{dom}_f \nu'' \subset \text{dom}_f \mu$ и конечную меру $\nu \equiv \nu' \mid \mathcal{N} - \nu'' \mid \mathcal{N}$. Тогда мы получаем радоновский триплет $\gamma \equiv (\nu, \nu', \nu'')$. Из $\nu B = \nu' B - \nu'' B = \mu_1 B - \mu_2 B = \mu B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ заключаем, что $\beta \sim \gamma$. Таким образом, $\mathfrak{m} = \bar{\gamma}$. По определению отображения E имеем $E\nu' = \theta(\nu'_f, \nu', 0)$ и $E\nu'' = \theta(\nu''_f, \nu'', 0)$. Соответственно по определению композиции имеем $-E\nu'' = \theta(-\nu''_f, 0, \nu'')$. Рассмотрим σ -алгебры $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ и меры $\lambda_1 \equiv \nu'$ на $\mathcal{L}_1$ и $\lambda_2 \equiv \nu''$ на $\mathcal{L}_2$. Рассмотрим δ -кольцо $\mathcal{L} \equiv \text{dom}_f(\nu'_f) \cap \text{dom}_f(-\nu''_f) = \mathcal{N}$, меру $\lambda \equiv \nu'_f \mid \mathcal{L} + (-\nu''_f) \mid \mathcal{L} = \nu' \mid \mathcal{N} - \nu'' \mid \mathcal{N} = \nu$ и радоновский триплет $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$. По определению сложения мы имеем $E\nu' - E\nu'' = \bar{\alpha} = \theta(\nu, \nu', \nu'') = \mathfrak{m}$. Если бимера $\mathfrak{m}$ ограничена, то $\beta \in R_b(T, \mathcal{G})$ и, следовательно, ν' и ν'' ограничены.

Теперь предположим, что $\mathfrak{m} = \bar{\gamma} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$, т.е. $\bar{\gamma} \geq \theta(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$. По определению порядка в $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ мы имеем $\nu B \geq \zeta B = 0$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. По следствию к предложению 2 из п. 1 § 2 $\nu'_{00}, \nu''_{00} \in \mathfrak{MM}^{no}(T, \mathcal{G})_+$. По определению равенство $\nu_{00} = \nu'_{00} - \nu''_{00} \geq 0$ означает, что $\nu_{00} \in \mathfrak{MM}^{no}(T, \mathcal{G})_+$. Рассмотрим меру $\pi \equiv (\nu_{00})^\# \in \mathfrak{MM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$ из предложения 2 п. 1 § 2. Если $\mathfrak{m}$ ограничено, то π тоже ограничено. Наконец, рассмотрим меру $\lambda \equiv \pi \mid \mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \in \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$.

Для λ возьмем соответствующий радоновский триплет $\alpha \equiv (\lambda_f, \lambda, 0)$. Если $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то $\lambda_f B = \lambda B = \pi B = \nu_{00} B = \nu B$. Это означает, что $\alpha \sim \gamma$. В результате $\mathfrak{m} = \bar{\gamma} = \bar{\alpha} = E\lambda$. Таким образом, E сюръективно и, значит, биективно. Если $\mathfrak{m}$ ограничено, то λ и α тоже ограничены. Следовательно, E_b биективно.

Пусть $\mu \leq \nu$ в $\mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Тогда $\mu_f B \leq \nu_f B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ означает, что $E\mu = \theta(\mu_f, \mu, 0) \leq \theta(\nu_f, \nu, 0) = E\nu$. Обратно, пусть $E\mu \leq E\nu$ в $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$. По определению $\overset{\circ}{\mu} B \leq \overset{\circ}{\nu} B$ для каждого B и некоторых $\overset{\circ}{\beta} \equiv (\overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{\mu}_1, \overset{\circ}{\mu}_2) \in E\mu$, $\overset{\circ}{\gamma} \equiv (\overset{\circ}{\nu}, \overset{\circ}{\nu}_1, \overset{\circ}{\nu}_2) \in E\nu$. Согласно лемме 4 этого пункта $\mu_f B \leq \nu_f B$. Поэтому для каждого компактного множества $\mathcal{C}$ имеем $\mu\mathcal{C} \leq \nu\mathcal{C}$. Если $M \in \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, то в силу компактной регулярности этих мер получаем

$$\mu M = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\} \leq \sup\{\nu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\} = \nu M.$$

Поэтому $\mu \leq \nu$. Таким образом, E является изотонным. Следовательно, E сохраняет любые порядковые границы. То же самое справедливо для E_b .

Пусть $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$. Тогда в силу теоремы 1 этого пункта $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ + \mathfrak{m}_-$. Так как E биективно, $\mathfrak{m}_+ = E\mu'$ и $-\mathfrak{m}_- = E\mu''$ для единственных мер μ' и μ'' . Если $\mathfrak{m}$ ограничено, то по 1) μ' и μ'' тоже ограничены.

Отображение $E: \mathfrak{MM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ назовем *каноническим вложением семейства всех (широких) положительных борелевско-радоновских мер в решеточное векторное пространство всех радоновских бимер*. Меры μ' и μ'' назовем *родительскими положительными (широкими) борелевско-радоновскими мерами радоновской бимеры* $\mathfrak{m}$ и обозначим через $p'\mathfrak{m}$ и $p''\mathfrak{m}$ соответственно.

Между бимерой $\mathfrak{m}$ и ее родительскими мерами $p'\mathfrak{m}$ и $p''\mathfrak{m}$ имеется следующая связь.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, и пусть $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$. Тогда $(\mu, p'\mathfrak{m}, p''\mathfrak{m}) \in R(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{m} = \theta(\mu, p'\mathfrak{m}, p''\mathfrak{m})$, где $\mu \equiv p'\mathfrak{m} \mid \mathcal{M} - p''\mathfrak{m} \mid \mathcal{M}$ есть узкая радоновская мера на δ -кольце $\mathcal{M} \equiv \text{dom}_f(p'\mathfrak{m}) \cap \text{dom}_f(p''\mathfrak{m})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $p'\mathfrak{m}$ и $p''\mathfrak{m}$ через μ' и μ'' соответственно. Очевидно, что $\mu_1 \equiv \mu' \mid \mathcal{M}$ и $\mu_2 \equiv \mu'' \mid \mathcal{M}$ являются положительными узкими радоновскими мерами. Поэтому по определению $\mu = \mu_1 - \mu_2$ есть узкая радоновская мера. Ясно также, что (μ, μ', μ'') является радоновским триплетом. По определению отображения E мы имеем $E\mu' = \theta(\mu'_f, \mu', 0)$ и $E\mu'' = \theta(\mu''_f, \mu'', 0)$. По определению композиции имеем $-E\mu'' = \theta(-\mu''_f, 0, \mu'')$. Из определения сложения выводим, как и в доказательстве теоремы 2 этого пункта, что $\mathfrak{m} = E\mu' - E\mu'' = \theta(\mu, \mu', \mu'')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, и пусть $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$. Если $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{m}$ и $\mu \equiv \nu \mid \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то $p'\mathfrak{m} = ((\mu_+)^{\#})_0$ и $p''\mathfrak{m} = ((-\mu_-)^{\#})_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $p'\mathfrak{m}$ и $p''\mathfrak{m}$ через μ' и μ'' соответственно. В силу предложения 1 из п. 1 § 2 $\mu = \mu_+ + \mu_-$. А в силу теорем 1 и 2 этого пункта $E\mu' = H(\mu_+)$ и $E\mu'' = H(-\mu_-)$.

Для μ_+ возьмем $\varkappa_1 \equiv \mu_+$ и $\varkappa_2 \equiv 0$. Тогда $\varkappa_1^{\#} = (\mu_+)^{\#}$ и $\varkappa_2^{\#} = 0$. Мы можем предположить, что $\text{dom } \varkappa_2^{\#} = \text{dom } \varkappa_1^{\#} = \text{dom } (\mu_+)^{\#}$. Рассмотрим на δ -кольце $\mathcal{K} \equiv \text{dom}_f(\mu_+)^{\#}$ положительную узкую радоновскую меру $\varkappa \equiv \varkappa_1^{\#} \mid \mathcal{K} = (\mu_+)^{\#}$. Тогда по определению H мы имеем $H(\mu_+) = \theta((\mu_+)_f^{\#}, (\mu_+)^{\#}, 0)$.

Аналогично, $H(-\mu_-) = \theta((-\mu_-)_f^{\#}, (-\mu_-)^{\#}, 0)$.

По определению E имеем $E\mu' = \theta(\mu'_f, \mu', 0)$ и $E\mu'' = \theta(\mu''_f, \mu'', 0)$. Из $E\mu' = H(\mu_+)$ и $E\mu'' = H(-\mu_-)$ мы выводим, что $\mu'_f B = (\mu_+)^{\#} B$ и $\mu''_f B = (-\mu_-)^{\#} B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Из компактной регулярности этих мер заключаем, что $\mu' = ((\mu_+)^{\#})_0$ и $\mu'' = ((-\mu_-)^{\#})_0$.

Для ограниченных мер мы можем доказать намного более сильное утверждение, чем в теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

1) отображение E_b имеет единственное расширение до изоморфизма $F_b: \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $F_b\mu = E_b(\mu_+) - E_b(-\mu_-)$;

2) если $\mu \in \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ и $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$, то $F_b\mu = \theta(\mu, \mu_1, \mu_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению из п. 5 § 1 $A \equiv \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ является решеточным векторным пространством. По теореме 1 этого пункта $B \equiv \mathfrak{AB}_b(T, \mathcal{G})$ тоже является решеточным векторным пространством. Поэтому в силу утверждения 2) теоремы 2 и предложения 3.6.1 из [24] отображение E_b имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $F_b: A \rightarrow B$ такого, что $F_b\mu = E_b(\mu_+) - E_b(-\mu_-)$.

Пусть $\mu \in A$ и $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых $\mu_1, \mu_2 \in A_+$. Тогда $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, $\beta_1 \equiv (\mu_1, \mu_1, 0)$ и $\beta_2 \equiv (\mu_2, \mu_2, 0)$ являются борелевско-радоновскими триплетами. Поэтому мы можем рассмотреть радоновские бимеры $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$, $\mathfrak{m}_1 \equiv \bar{\beta}_1$ и $\mathfrak{m}_2 \equiv \bar{\beta}_2$. Ясно, что $\mathfrak{m}_1 = E_b\mu_1$ и $\mathfrak{m}_2 = E_b\mu_2$. По определению $-\mathfrak{m}_2 = \theta(-\mu_2, 0, \mu_2)$ и $\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = \theta(\mu_1 - \mu_2, \mu_1, \mu_2) = \mathfrak{m}$. В результате $F_b\mu = F_b\mu_1 - F_b\mu_2 = E_b\mu_1 - E_b\mu_2 = \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$.

По теореме 2 E_b сохраняет любые порядковые границы. Поэтому $\mu \wedge \nu = 0$ в A_+ влечет $F_b\mu \wedge F_b\nu = E_b\mu \wedge E_b\nu = E_b(\mu \wedge \nu) = 0$. По свойству 14 $E(b)$ из [12] F_b является решеточным линейным оператором.

Пусть $\mathfrak{m} \in B$. По теореме 2 $\mathfrak{m} = E_b\mu' - E_b\mu''$ для некоторых $\mu', \mu'' \in A_+$. Рассмотрим меру $\mu \equiv \mu' - \mu'' \in A$. Тогда $\mathfrak{m} = F_b\mu' - F_b\mu'' = F_b\mu$ означает, что F_b сюръективно. Таким образом, F_b является биективным решеточным линейным оператором. Поэтому F_b – необходимый изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mu \in \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ и $F_b\mu \in \mathfrak{AB}_b(T, \mathcal{G})$. Тогда:

- 1) $p'F_b\mu = \mu_+$ и $p''F_b\mu = -\mu_-$;
- 2) $F_b\mu = \theta(\mu, \mu_+, -\mu_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения из п. 5 § 1 мы можем рассмотреть положительные, широкие и ограниченные борелевско-радоновские меры $\mu' \equiv \mu_+$ и $\mu'' \equiv -\mu_-$. По теореме 3 $\mathfrak{m} \equiv F_b\mu = E_b(\mu') - E_b(\mu'')$, $\mathfrak{m}_+ = F_b(\mu_+) = E_b(\mu')$ и $-\mathfrak{m}_- = F_b(-\mu_-) = E_b(\mu'')$. Поэтому согласно теореме 2 $\mu' = p'\mathfrak{m}$ и $\mu'' = p''\mathfrak{m}$. В результате $\mu = p'\mathfrak{m} - p''\mathfrak{m}$. Следовательно, в силу предложения 3 $F_b\mu = \theta(\mu, \mu_+, -\mu_-)$.

Отображение $F_b: \mathfrak{MM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{AB}_b(T, \mathcal{G})$ назовем каноническим изоморфизмом между решеточным векторным пространством всех широких ограниченных борелевско-радоновских мер и решеточным векторным пространством всех ограниченных радоновских бимер.

Теоремы 1–3 показывают, что радоновские бимеры образуют естественную решеточную векторную оболочку для семейства всех широких радоновских мер. Более того, в следующем пункте мы установим, что отображения E и F_b сохраняют интеграл Лебега.

Теперь мы введем норму в $\mathfrak{AB}_b(T, \mathcal{G})$ и докажем, что F_b сохраняет нормы.

Из теоремы 2 следует, что мы можем корректно определить ранжирование $\rho: \mathfrak{AB}_b(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, полагая $\rho\mathfrak{m} \equiv (p'\mathfrak{m})(T) + (p''\mathfrak{m})(T)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

- 1) $\|\mu\| = \rho(H_b\mu)$ для каждого $\mu \in \mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G})$;

2) ρ является монотонной нормой на решеточном векторном пространстве $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим $\mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G})$ через Y . По предложению 4 из п. 1 § 2 ($Y, \|\cdot\|$) является решеточным векторным пространством с аддитивной нормой. Пусть $\mu \in Y$. Тогда $|\mu| = \mu_+ + (-\mu_-)$ влечет $\|\mu\| = \| |\mu| \| = \|\mu_+\| + \|-\mu_-\|$.

Рассмотрим положительные широкие радоновские меры $\nu_1 \equiv (\mu_+)^{\#}$ и $\nu_2 \equiv (-\mu_-)^{\#}$. Рассмотрим δ -кольцо $\mathcal{N} \equiv \text{dom}_f \nu_1 \cap \text{dom}_f \nu_2$ и узкую радоновскую меру $\nu \equiv \nu_1 \upharpoonright \mathcal{N} - \nu_2 \upharpoonright \mathcal{N}$. По определению H_b мы имеем $H_b \mu = \theta(\nu, \nu_1, \nu_2)$. Для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$ мы имеем $\nu_{00} B = \nu B = \nu_1 B - \nu_2 B = \mu_+ B - (-\mu_-) B = \mu B$. Следовательно, по предложению 4 $p'(H_b \mu) = ((\mu_+)^{\#})_0$ и $p''(H_b \mu) = ((-\mu_-)^{\#})_0$. В результате $x \equiv (p' H_b \mu) T = (\mu_+)^{\#} T$ и $y \equiv (p'' H_b \mu) T = (-\mu_-)^{\#} T$. По предложениям 1 и 2 из п. 1 § 2 μ_+ и $(\mu_+)^{\#}$ компактно регулярны. Поэтому

$$x = \sup \{ (\mu_+)^{\#} C \mid C \in \mathcal{C} \} = \sup \{ \mu_+ C \mid C \in \mathcal{C} \} = \mu_+ T = \|\mu_+\|.$$

Точно так же $y = \|-\mu_-\|$. В заключение мы получаем $\|\mu\| = x + y = \rho(H_b \mu)$.

2) Обозначим $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ через Z . По теореме 1 этого пункта $H_b: Y \rightarrow Z$ является изоморфизмом данных решеточных векторных пространств. Поэтому

$$\rho(z_1 + z_2) = \|H_b^{-1} z_1 + H_b^{-1} z_2\| \leq \|H_b^{-1} z_1\| + \|H_b^{-1} z_2\| = \rho z_1 + \rho z_2$$

для любых $z_1, z_2 \in Z$. Если $a \in \mathbb{R}$ и $z \in Z$, то

$$\rho(az) = \|H_b^{-1}(az)\| = |a| \|H_b^{-1} z\| = |a| \rho z.$$

Если $\rho z = 0$, то $\|H_b^{-1} z\| = 0$ влечет $H_b^{-1} z = 0$, откуда $z = 0$. Таким образом, ρ является нормой на Z . Если $|z_1| \leq |z_2|$ в Z , то по утверждению 1) $|H_b^{-1} z_1| \leq |H_b^{-1} z_2|$ влечет $\rho z_1 = \|H_b^{-1} z_1\| \leq \|H_b^{-1} z_2\| = \rho z_2$. Поэтому норма ρ монотонна.

Далее мы будем обозначать ρ через $\|\cdot\|$.

СЛЕДСТВИЕ. 1) $(\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является решеточным векторным пространством с аддитивной нормой.

2) $H_b: (\mathfrak{MM}_b^{no}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом данных нормированных решеточных векторных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения из доказательства предложения 5. Согласно этому предложению $(Z, \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством и $H_b: (Y, \|\cdot\|) \rightarrow (Z, \|\cdot\|)$ является изометрическим изоморфизмом данных решеточных векторных пространств. Значит, H_b — необходимый изоморфизм. По предложению 4 из п. 1 § 2 $(Y, \|\cdot\|)$ обладает аддитивной нормой. Используя упомянутый изоморфизм H_b , мы проверяем, что $(Z, \|\cdot\|)$ также обладает аддитивной нормой.

В заключение мы свяжем все рассмотренные биекции и изоморфизмы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

- 1) $H\mu = (E \circ R)\mu$ для каждого $\mu \in \mathfrak{M}^{no}(T, \mathcal{G})_+$;
- 2) $H_b = F_b \circ S_b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для μ рассмотрим меры $\varkappa_1 \equiv \mu$ и $\varkappa_2 \equiv 0$. Тогда $\varkappa_1^\# = \mu^\#$ и $\varkappa_2^\# = 0$. Мы можем предположить, что $\text{dom } \varkappa_2^\# = \text{dom } \varkappa_1^\# = \text{dom } \mu^\#$. Рассмотрим на δ -кольце $\text{dom}_f \mu^\#$ положительную узкую радоновскую меру $\varkappa = \varkappa_1^\# \mid \text{dom}_f \mu^\# = (\mu^\#)_f$. Тогда по определению H мы имеем $H\mu = \theta((\mu^\#)_f, \mu^\#, 0)$.

С другой стороны, $R\mu = (\mu^\#)_0$ и $ER\mu = \theta((\mu^\#)_0, (\mu^\#)_0, 0)$. Так как $(\mu^\#)_f B = \mu B = ((\mu^\#)_0)_f B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, мы заключаем, что $H\mu = ER\mu$.

Если μ является ограниченной положительной мерой, то $H_b\mu = E_b R_b\mu$.

2) Если $\mu \in \mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G})$, то по теореме 1 из п. 1 § 2 и теоремам 1 и 3 этого пункта $H_b\mu = H_b(\mu_+) - H_b(-\mu_-) = E_b R_b(\mu_+) - E_b R_b(-\mu_-) = F_b S_b(\mu_+) - F_b S_b(-\mu_-) = F_b S_b\mu$.

СЛЕДСТВИЕ. $F_b: (\mathfrak{M}_b^{no}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом данных нормированных решеточных векторных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если μ – широкая ограниченная радоновская мера, то по следствию к предложению 5 $\|S_b^{-1}\mu\| = \|H_b S_b^{-1}\mu\| = \|F_b\mu\|$. Сходно, по предложению 4 из п. 1 § 2 $\|S_b^{-1}\mu\| = \|\mu\|$. В результате $\|\mu\| = \|F_b\mu\|$.

3. Интеграл Лебега относительно радоновских бимер. Теперь мы введем интегрирование относительно радоновской бимеры. Для каждого радоновского триплета $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ рассмотрим соответствующие σ -алгебру $\text{dom } \beta \equiv \text{dom } \mu_1 \cap \text{dom } \mu_2$ и δ -кольцо $\text{dom}_f \beta \equiv \text{dom}_f \mu_1 \cap \text{dom}_f \mu_2$.

Рассмотрим также широкие борелевско-радоновские меры $\lambda_1 \equiv (\mu_1)_0$ и $\lambda_2 \equiv (\mu_2)_0$ и полные сильно насыщенные радоновские меры $\nu_1 \equiv \mu_1^\#$ и $\nu_2 \equiv \mu_2^\#$ из леммы п. 5 § 1. Рассмотрим δ -кольца $\mathcal{L} \equiv \text{dom}_f \lambda_1 \cap \text{dom}_f \lambda_2$ и $\mathcal{N} \equiv \text{dom}_f \nu_1 \cap \text{dom}_f \nu_2$ и соответствующие конечные меры $\lambda \equiv \lambda_1 \mid \mathcal{L} - \lambda_2 \mid \mathcal{L}$ и $\nu \equiv \nu_1 \mid \mathcal{N} - \nu_2 \mid \mathcal{N}$. Тогда мы получим борелевско-радоновский триплет $\beta_0 \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ и расширенный радоновский триплет $\beta_e \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$.

ЛЕММА 1. Если $\beta \in R(T, \mathcal{G})$, то $\beta_0 \in R^0(T, \mathcal{G})$, $\beta_e \in R^e(T, \mathcal{G})$ и $\beta \sim \beta_0 \sim \beta_e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \lambda_1 B - \lambda_2 B = \lambda B$ и $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \nu_1 B - \nu_2 B = \nu B$. Это означает, что $\beta \sim \beta_0$ и $\beta \sim \beta_e$.

СЛЕДСТВИЕ. Для каждой радоновской бимеры $\mathfrak{m}$ существуют радоновские триплеты $\alpha \in R^0(T, \mathcal{G})$ и $\gamma \in R^e(T, \mathcal{G})$ такие, что $\mathfrak{m} = \bar{\alpha} = \bar{\gamma}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ – радоновские триплеты и $\beta \sim \gamma$. Тогда для каждой σ -алгебры $\mathcal{L} \subset \text{dom } \beta \cap \text{dom } \gamma$ такой, что $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) \subset \mathcal{L}$, и каждой функции $f \in \text{MI}(T, \mathcal{L}, \mu_1 \mid \mathcal{L}) \cap \text{MI}(T, \mathcal{L}, \mu_2 \mid \mathcal{L}) \cap \text{MI}(T, \mathcal{L}, \nu_1 \mid \mathcal{L}) \cap \text{MI}(T, \mathcal{L}, \nu_2 \mid \mathcal{L})$ справедливо $\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ограничения мер $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ на σ -алгебру $\mathcal{L}$ через μ'_1, μ'_2, ν'_1 и ν'_2 соответственно. По определению $\mu'_1 B - \mu'_2 B = \mu B = \nu B = \nu'_1 B - \nu'_2 B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Рассмотрим положительные широкие радоновские меры $\pi \equiv \mu'_1 + \nu'_2$ и $\varkappa \equiv \mu'_2 + \nu'_1$ на $\mathcal{L}$. Тогда $\pi C = \varkappa C$ для каждого компактного множества C . Из компактной регулярности этих мер мы выводим, что $\pi = \varkappa$. Поэтому $X \equiv \text{MI}(T, \mathcal{L}, \mu'_1) \cap \text{MI}(T, \mathcal{L}, \nu'_2) = \text{MI}(T, \mathcal{L}, \pi) = \text{MI}(T, \mathcal{L}, \varkappa) = \text{MI}(T, \mathcal{L}, \mu'_2) \cap \text{MI}(T, \mathcal{L}, \nu'_1) \equiv Y$ и $\int f d\mu'_1 + \int f d\nu'_2 = \int f d\pi = \int f d\varkappa = \int f d\mu'_2 + \int f d\nu'_1$ для каждой функции f из этого семейства.

Если $f \in X \cap Y$, то f является также интегрируемой относительно мер μ_1, μ_2, ν_1 и ν_2 и $\int f d\mu'_1 = \int f d\mu_1$, $\int f d\mu'_2 = \int f d\mu_2$, $\int f d\nu'_1 = \int f d\nu_1$ и $\int f d\nu'_2 = \int f d\nu_2$. В результате для $f \in X \cap Y$ мы получаем $\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$.

Согласно лемме 2 естественно рассмотреть для каждой положительной широкой борелевско-радоновской меры μ семейства $\text{BM}(T, \mathcal{G}) \equiv M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}))$ и $\text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) \equiv \text{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu)$ всех борелевско-измеримых функций и всех борелевско-измеримых μ -интегрируемых функций соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ – радоновские триплеты и $\beta \sim \gamma$. Тогда $\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$ для каждой функции $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, (\mu_1)_0) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, (\mu_2)_0) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, (\nu_1)_0) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, (\nu_2)_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ – борелевско-радоновские триплеты и $\beta \sim \gamma$. Тогда $\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$ для каждой функции $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_2) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, \nu_1) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, \nu_2)$.

Пусть теперь $\mathfrak{m}$ – радоновская бимера. Согласно следствию из леммы 1 этого пункта $\mathfrak{m} \cap R^0(T, \mathcal{G}) \neq \emptyset$. Поэтому мы можем рассмотреть для $\mathfrak{m}$ семейство $\text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \equiv \cap \{ \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_2) \mid (\mu, \mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{m} \cap R^0(T, \mathcal{G}) \}$ всех борелевско-измеримых функций, которые интегрируемы относительно (широких) положительных борелевско-радоновских мер μ_1 и μ_2 из каждого борелевско-радоновского триплета (μ, μ_1, μ_2) из бимеры $\mathfrak{m}$.

Рассмотрим для $\mathfrak{m}$ также более широкое семейство $\text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \equiv \text{BI}(T, \mathcal{G}, p'\mathfrak{m}) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, p''\mathfrak{m})$.

Каждую функцию из семейства $\text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ назовем борелевско-измеримой интегрируемой по Лебегу относительно бимеры $\mathfrak{m}$. А каждую функцию из семейства $\text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ назовем борелевско-измеримой вполне интегрируемой по Лебегу относительно бимеры $\mathfrak{m}$.

Число $\int f dp'\mathfrak{m} - \int f dp''\mathfrak{m}$ назовем интегралом (Лебега) от функции $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ над топологическим биизмеримым пространством $(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ и обозначим через $\int f d\mathfrak{m}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $(\nu, \nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{m} \cap R^0(T, \mathcal{G})$. Тогда $\int f d\mathfrak{m} = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$ для каждой функции $f \in \text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим δ -кольцо $\mathcal{M} \equiv \text{dom}_f(p'\mathfrak{m}) \cap \text{dom}_f(p''\mathfrak{m})$ и узкую борелевско-радоновскую меру $\mu \equiv p'\mathfrak{m}|_{\mathcal{M}} - p''\mathfrak{m}|_{\mathcal{M}}$. По предложению 3 из п. 2 § 2 $(\mu, p'\mathfrak{m}, p''\mathfrak{m}) \in \mathfrak{m} \cap R^0(T, \mathcal{G})$. Поэтому по следствию 2 из леммы 2 этого пункта $\int f d\mathfrak{m} = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство.

1) Если $\mu \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, то $\int f d\mu = \int f dE\mu$ для каждой функции $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \text{BI}(T, \mathcal{G}, E\mu)$.

2) Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$, то $\int f d\mu = \int f dF_b\mu$ для каждой функции $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \text{BI}(T, \mathcal{G}, F_b\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим $E\mu$ через $\mathfrak{m}$. В силу теоремы 2 из п. 2 § 2 $\mathfrak{m} \geq 0$. Поэтому $\mathfrak{m}_+ = E\mu$, $-\mathfrak{m}_- = 0 = E0$ и $\mathfrak{m} = E\mu - E0$. Следовательно, по теореме 2 из п. 2 § 2 $\mu = p'\mathfrak{m}$ и $0 = p''\mathfrak{m}$. Это влечет $\text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \text{BI}(T, \mathcal{G}, p'\mathfrak{m}) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, p''\mathfrak{m}) \equiv \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ и $\int f d\mu = \int f dp'\mathfrak{m} - \int f dp''\mathfrak{m} \equiv \int f d\mathfrak{m}$ для каждого $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu)$.

2) Обозначим $F_b\mu$ через $\mathfrak{m}$. По следствию из теоремы 3 п. 2 § 2 $p'\mathfrak{m} = \mu_+$ и $p''\mathfrak{m} = -\mu_-$. Поэтому $\text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) \equiv \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_+) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, -\mu_-) = \text{BI}(T, \mathcal{G}, p'\mathfrak{m}) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, p''\mathfrak{m}) \equiv \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ и $\int f d\mu \equiv \int f d(\mu_+) - \int f d(-\mu_-) = \int f dp'\mathfrak{m} - \int f dp''\mathfrak{m} \equiv \int f d\mathfrak{m}$.

Таким образом, биекция $E: \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0 \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ и изоморфизм $F_b: \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ сохраняют интеграл Лебега. Это показывает, что определения интегралов Лебега для широких мер (см. п. 1 из § 1) и для бимер согласованы друг с другом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $\int f d(x\mathfrak{m} + y\mathfrak{n}) = x \int f d\mathfrak{m} + y \int f d\mathfrak{n}$ для каждой функции $f \in \text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \cap \text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{n}) \cap \text{WI}(T, \mathcal{G}, x\mathfrak{m} + y\mathfrak{n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые борелевско-радоновские триплеты $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{m}$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{n}$. Предположим, что $x \geq 0$ и $y < 0$. По определению $x\mathfrak{m} = \theta(x\mu, x\mu_1, x\mu_2)$ и $y\mathfrak{n} = \theta(y\nu, -y\nu_2, -y\nu_1)$. Рассмотрим δ -кольцо $\mathcal{L} \equiv \text{dom}_f \beta \cap \text{dom}_f \gamma$. Рассмотрим положительные широкие борелевско-радоновские меры $\lambda_1 \equiv x\mu_1 + (-y\nu_2)$ и $\lambda_2 \equiv x\mu_2 + (-y\nu_1)$ и узкую радоновскую меру $\lambda \equiv x\mu|_{\mathcal{L}} + y\nu|_{\mathcal{L}}$. Тогда для борелевско-радоновского триплета $\alpha \equiv (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ имеем $x\mathfrak{m} + y\mathfrak{n} = \bar{\alpha}$.

Возьмем любую функцию f , как в утверждении предложения 2. Тогда по лемме 3 $a \equiv \int f d\mathfrak{m} = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2$, $b \equiv \int f d\mathfrak{n} = \int f d\nu_1 - \int f d\nu_2$ и $c \equiv \int f d(x\mathfrak{m} + y\mathfrak{n}) = \int f d\lambda_1 - \int f d\lambda_2$. По линейности интеграла Лебега относительно положительных широких мер и положительных чисел мы получаем $c = x \int f d\mu_1 - y \int f d\nu_2 - x \int f d\mu_2 + y \int f d\nu_1 = xa + yb$.

Обозначим через $BM_{bc}(T, \mathcal{G})$ семейство всех ограниченных борелевско-измеримых функций с компактными носителями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда

$$BM_{bc}(T, \mathcal{G}) \subset \text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$$

для каждой бимеры $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in BM_{bc}(T, \mathcal{G})$, то множество $S \equiv \text{supp } f$ является компактным. Пусть $(\mu, \mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{m} \cap R^0(T, \mathcal{G})$. Тогда $\mu_1 S < \infty$ и $\mu_2 S < \infty$. Поэтому $\int f_+ d\mu_1 \leq \int \|f\|_u \chi(S) d\mu_1 = \|f\|_u \mu_1 S < \infty$. Это означает, что $f_+ \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1)$. То же самое справедливо для $-f_-$. По определению из п. 1 § 1 $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1)$. Аналогично $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_2)$. В результате мы заключаем, что $f \in \text{WI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$.

4. Метополунепрерывные функции и тонкие функционалы. В работах [31]–[33] был введен новый класс функций, существенно расширяющий класс измеримых функций. Мы будем использовать функции из этого класса для решения проблемы радоновского представления.

Если $f \in F(T)$ и $S \subset T$, то число $\omega(f, S) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid s, t \in S\}$ называется *колебанием функции f на множестве S* .

Пусть $\mathcal{S}$ – некоторый ансамбль подмножеств множества T . Функцию $f \in F(T)$ будем называть *равномерной* (*счетно-равномерной*, *конечно-равномерной*) *относительно $\mathcal{S}$* , если для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрытие (счетное покрытие, конечное покрытие) $\varkappa \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T такое, что $\omega(f, S_i) < \varepsilon$ для каждого $i \in I$. Семейства всех равномерных, всех счетно-равномерных и всех конечно-равномерных относительно $\mathcal{S}$ функций на множестве T обозначим через $U(T, \mathcal{S})$, $U^c(T, \mathcal{S})$ и $U^f(T, \mathcal{S})$ соответственно. Ясно, что $U^f(T, \mathcal{S}) \subset F_b(T) \cap U^c(T, \mathcal{S}) \equiv U_b^c(T, \mathcal{S}) \subset F_b(T) \cap U(T, \mathcal{S}) \equiv U_b(T, \mathcal{S})$ и $U^c(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S})$.

Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *основой* [33], если он содержит подмножества $\emptyset$ и T и замкнут относительно конечных пересечений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть T – множество и $\mathcal{S}$ – основа на T . Тогда $U(T, \mathcal{S})$, $U^c(T, \mathcal{S})$ и $U^f(T, \mathcal{S})$ являются решеточными векторными пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f, g \in U(T, \mathcal{S})$ и $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда для $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/(2|x|)$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/(2|y|)$ найдутся покрытия $\pi \equiv (P_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $\rho \equiv (R_j \in \mathcal{S} \mid j \in J)$ такие, что $\omega(f, P_i) < \varepsilon_1$ и $\omega(g, R_j) < \varepsilon_2$ для всех i, j . Возьмем покрытие $\varkappa \equiv (S_k \mid k \in K)$ такое, что $K \equiv I \times J$ и $S_k \equiv P_i \cap R_j$ для $k \equiv (i, j)$. Тогда для $h \equiv xf + yg$ мы имеем

$$|h(s) - h(t)| \leq |x| |f(s) - f(t)| + |y| |g(s) - g(t)| < |x| \varepsilon_1 + |y| \varepsilon_2 = \varepsilon$$

для всех $s, t \in S_k$ и $k \in K$. Следовательно, $\omega(h, S_k) < \varepsilon$ для каждого $k \in K$. Значит, $xf + yg \in U(T, \mathcal{S})$.

Далее, для $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ найдутся покрытия π и ρ такие же, как в предыдущем абзаце. Возьмем такое же покрытие $\varkappa$. Тогда для $k \in K$ и $s, t \in S_k$ мы имеем

$$\begin{aligned} |f(t) \vee g(t) - f(s) \vee g(s)| &\leq |f(t) \vee g(t) - f(t) \vee g(s)| + |f(t) \vee g(s) - f(s) \vee g(s)| \\ &\leq |g(t) - g(s)| + |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega(f \vee g, S_k) < \varepsilon$ для каждого $k \in K$. Значит, $f \vee g \in U(T, \mathcal{S})$. Точно так же $f \wedge g \in U(T, \mathcal{S})$.

На хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$ рассмотрим семейство $SC_b^l(T, \mathcal{G})$ всех ограниченных полунепрерывных снизу функций f , т.е. таких, что $f^{-1}[]x, \infty[] \in \mathcal{G}$

для каждого $x \in \mathbb{R}$. Так как это семейство не является векторным пространством, Хаусдорф [34, § 37.5] рассмотрел семейство $SC^b(T, \mathcal{G}) \equiv \{f - g \mid f, g \in SC_b^l(T, \mathcal{G})\}$. Элементы из $SC^b(T, \mathcal{G})$ естественно называть *ограниченными полунепрерывными функциями*.

ЛЕММА 1. Семейство $SC^b(T, \mathcal{G})$ является решеточным векторным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ и $x \in \mathbb{R}$. Если $x > 0$, то $xf = xf_1 - xf_2 \in SC^b(T, \mathcal{G})$. Если $x < 0$, то $xf = (-x)f_2 - (-x)f_1 \in SC^b(T, \mathcal{G})$. Аналогично $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) \in SC^b(T, \mathcal{G})$.

Далее, $f \wedge g = (f_1 - f_2) \wedge (g_1 - g_2) = f_1 \wedge (g_1 + f_2 - g_2) - f_2 = (f_1 + g_2) \wedge (g_1 + f_2) - (g_2 + f_2) \in SC^b(T, \mathcal{G})$. Наконец, $f \vee g = (f_1 + g_2) \vee (g_1 + f_2) - (g_2 + f_2) \in SC^b(T, \mathcal{G})$.

Таким образом, семейство $SC^b(T, \mathcal{G})$ обладает достаточно хорошими свойствами. Однако Серпинский [35] установил, что оно не является замкнутым в $F_b(T)$ относительно равномерной сходимости последовательностей, и рассмотрел равномерное замыкание $S(T, \mathcal{G})$ семейства $SC^b(T, \mathcal{G})$ в нормированном пространстве $(F_b(T), \|\cdot\|_u)$. Долгое время не было известно никакого функционального описания семейства $S(T, \mathcal{G})$. Оно было дано в работах [36] и [37]. В работе [38] семейство Хаусдорфа–Серпинского $S(T, \mathcal{G})$ было названо *семейством метополюснепрерывных функций*. Приведем сначала функциональное описание $S(T, \mathcal{G})$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}(T, \mathcal{G})$ всех *александровских подмножеств* из T , порожденную решеткой $\mathcal{G}$. Эта алгебра широко использовалась Александровым в работе [26].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$, если и только если $A = \bigcup \{G_i \cap F_i \mid i \in I\}$ для некоторых конечных коллекций $(G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I)$ и $(F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что ансамбль $\mathcal{E}$ всех множеств A такого вида замкнут относительно конечных объединений и содержит множество T . Пусть $A = \bigcup \{G'_i \cap F'_i \mid i \in I\}$. Рассмотрим множества $G_i \equiv T \setminus F'_i$ и $F_i \equiv T \setminus G'_i$. Тогда $T \setminus A = \bigcap \{G_i \cup F_i \mid i \in I\}$. Ясно, что

$$T \setminus A \subset \bigcup \{ \bigcap \{G_m \mid m \in M\} \cap \bigcap \{F_l \mid l \in L\} \mid L \cup M = I \} \equiv B.$$

Обратно: рассмотрим множество $Q \equiv \bigcap \{G_m \mid m \in M\} \cap \bigcap \{F_l \mid l \in L\}$. Возьмем произвольное $i \in I$. Если $i = l$, то $Q \subset F_l \subset F_i \cup G_i$. Если $i = m$, то $Q \subset G_m \subset F_i \cup G_i$. Поэтому $Q \subset T \setminus A$. Таким образом, $T \setminus A = B \in \mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{E}$ является алгеброй. Очевидно, что $\mathcal{E} = \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$.

Обозначим через $\text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$ решеточное векторное пространство всех ступенчатых функций $f \equiv \sum (x_k \chi(A_k) \mid k \in K)$ относительно алгебры $\mathcal{A}(T, \mathcal{G})$.

ЛЕММА 2. $\text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G})) \subset SC^b(T, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$. По предложению 2 $A = \bigcup \{G_i \cap F_i \mid i \in I\}$. Ясно, что $\chi(G_i) \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$. Следовательно, $\chi(F_i) = \mathbf{1} - \chi(T \setminus F_i) \in SC^b(T, \mathcal{G})$. По лемме 1 $\chi(A) = \sup \{\chi(G_i \cap F_i) \mid i \in I\} \in SC^b(T, \mathcal{G})$. Отсюда в силу леммы 1 следует, что $f \equiv \sum (x_k \chi(A_k) \mid k \in K) \in SC^b(T, \mathcal{G})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда $S(T, \mathcal{G}) = U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $\varepsilon > 0$. Разобьем интервал, содержащий множество значений функции f , точками a_k так, что $a_{k+1} - a_k \leq \varepsilon/3$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} A_k &\equiv f^{-1}[a_{k-1}, \infty[\setminus]a_{k+1}, \infty[] \\ &= f^{-1}[a_{k-1}, \infty[\setminus f^{-1}[a_{k+1}, \infty[] \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Так как $f^{-1}[[a_k, a_{k+1}]] \subset A_k$, то $\cup A_k = T$. Кроме того, $\omega(f, A_k) \leq a_{k+1} - a_{k-1} < \varepsilon$. Значит, $f \in U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$. В силу предложения 1 этого пункта $SC^b(T, \mathcal{G}) \subset U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$.

Пусть даны функция $f \in F_b(T)$ и последовательность $(f_n \in U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G})) \mid n \in N \subset \omega)$ такие, что $f = \lim(f_n \mid n \in N)$ в нормированном пространстве $(F_b(T), \|\cdot\|_u)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию существует $n \in N$ такое, что $|f - f_n| < (\varepsilon/3)\mathbf{1}$. Для f_n существует конечное покрытие $\varkappa \equiv (A_j \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid j \in J)$ такое, что $\omega(f_n, A_j) < \varepsilon/3$ для каждого $j \in J$. Тогда для каждого $s, t \in A_j$ выполнено

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_n(s)| + |f_n(s) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\omega(f, A_j) < \varepsilon$. Значит, $f \in U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$.

Из установленных свойств следует, что $S(T, \mathcal{G}) \subset U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$. Возьмем произвольную функцию $f \in U^f(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$. В силу аксиомы выбора существует последовательность $(\varkappa_n \mid n \in \mathbb{N})$ конечных покрытий $\varkappa_n \equiv (A_{n_i} \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid i \in I_n)$ таких, что $\omega(f, A_{n_i}) < 1/n$. Разобьем интервал, содержащий множество значений функции f , точками некоторых последовательностей $(x_{nk} \mid k \in K_n \subset \omega)$ так, что $x_{nk+1} - x_{nk} = 1/n$. Рассмотрим множества $X_{nk} \equiv f^{-1}[[x_{nk}, x_{nk+1}]]$ и $B_{nk} \equiv \cup\{A_{n_i} \mid A_{n_i} \cap X_{nk} \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$ и ступенчатые функции $f_n \equiv \sup\{x_{nk}\chi(B_{nk}) \mid k \in K_n\} \in \text{St}(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}))$.

Пусть $t \in B_{nk} \cap B_{nl}$. Тогда $t \in A_{n_i} \cap A_{n_j}$ для некоторых i и j таких, что $A_{n_i} \cap X_{nk} \neq \emptyset$ и $A_{n_j} \cap X_{nl} \neq \emptyset$. Возьмем из последних двух множеств точки r и s соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} x_{nl} - x_{nk} &\leq f(s) - x_{nk} < f(t) + 1/n - x_{nk} < f(r) + 2/n - x_{nk} \\ &\leq x_{nk+1} + 2/n - x_{nk} = 3/n. \end{aligned}$$

Это означает, что $x_{nk} \leq f_n(t) = \sup\{x_{nl} \mid t \in B_{nl}, l \in K_n\} \leq x_{nk} + 3/n$.

Пусть $t \in T$. Тогда $t \in X_{nk}$ для некоторого k и $t \in A_{n_i}$ для некоторого i . Следовательно, $t \in B_{nk}$. Поэтому $f(t) - f_n(t) \leq x_{nk+1} - x_{nk} = 1/n$ и $f_n(t) - f(t) \leq x_{nk} + 3/n - x_{nk} = 3/n$ означает, что $|f - f_n| \leq (3/n)\mathbf{1}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем n такое, что $3/n < \varepsilon$. Тогда для каждого $p > n$ справедливо $|f - f_p| \leq (3/p)\mathbf{1} < (3/n)\mathbf{1} < \varepsilon\mathbf{1}$. Значит, $f = \lim(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ относительно $\|\cdot\|_u$. По лемме 2 этого пункта $f_n \in SC^b(T, \mathcal{G})$. Поэтому по определению $f \in S(T, \mathcal{G})$. В результате мы получаем необходимое равенство.

СЛЕДСТВИЕ. $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда $\chi(A) \in S(T, \mathcal{G})$.

Рассмотрим теперь на пространстве $(T, \mathcal{G})$ семейство $S_c(T, \mathcal{G})$ всех метapolунепрерывных функций с компактными носителями. Ясно, что $S_c(T, \mathcal{G})$ является усекаемым решеточным векторным подпространством в $S(T, \mathcal{G})$. Мы можем рассмотреть норму равномерной сходимости $\|\cdot\|_u$ на $S_c(T, \mathcal{G})$. Тогда $(S_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)$ – нормированное решеточное векторное пространство.

Пусть $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ – положительная широкая радоновская мера на $(T, \mathcal{G})$. Тогда $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Поэтому мы можем рассмотреть функционал $\varphi \equiv \Lambda(\mu) \mid S_c(T, \mathcal{G})$ (см. п. 4 из § 1). Согласно п. 4 § 1 функционал φ является поточечно σ -непрерывным. Но это свойство функционала φ является очень общим. Нам нужно дополнительное свойство, связанное с компактной регулярностью меры μ .

Подансамбль ансамбля $\mathcal{A}(T, \mathcal{G})$, состоящий из всех предкомпактных александровских множеств, обозначим через $\mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$. Ясно, что $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда $\chi(A) \in S_c(T, \mathcal{G})$.

ЛЕММА 3. Пусть $A \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$;
- 2) существуют множество $B \in \mathcal{C}$ и конечные коллекции $(C_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ и $(D_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ такие, что $A = \bigcup \{(B \cap C_i) \cap (B \setminus D_i) \mid i \in I\}$;
- 3) существуют конечные коллекции $(C_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$, $(D_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ и $(E_i \in \mathcal{C} \mid i \in I)$ такие, что $A = \bigcup \{C_i \cap (E_i \setminus D_i) \mid i \in I\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A = \bigcup \{F_i \cap G_i \mid i \in I\}$ для некоторых конечных коллекций $(F_i \in \mathcal{F} \mid i \in I)$ и $(G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I)$ и $B \equiv \text{cl} A \in \mathcal{C}$. Рассмотрим множества $H_i \equiv T \setminus G_i \in \mathcal{F}$, $C_i \equiv F_i \cap B \in \mathcal{C}$ и $D_i \equiv H_i \cap B \in \mathcal{C}$. Тогда $A = A \cap B = \bigcup \{(B \cap C_i) \cap (B \setminus D_i) \mid i \in I\}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Эта импликация очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). Если $A = \bigcup \{C_i \cap (E_i \setminus D_i) \mid i \in I\}$, то $A \subset \bigcup \{C_i \cup E_i \mid i \in I\} \in \mathcal{C}$ влечет $A \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$.

Функциональное семейство $A(T)$ на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$ назовем *топологически обширным*, если $S_c(T, \mathcal{G}) \subset A(T)$.

Положительный линейный функционал φ на топологически обширном решеточном векторном пространстве $A(T)$ назовем *положительным внутренне компактным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой убывающей последовательности $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega)$ такой, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$, существуют $n \in \omega$ и $C \in \mathcal{C}$ такие, что $C \subset \bigcap \{A_n \mid n \in \omega\}$ и $\varphi(\chi(A_n \setminus C)) < \varepsilon$. Семейство всех положительных внутренне компактных линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $(A(T)^z)_0$.

Заметим, что если $A(T) = S_c(T, \mathcal{G})$, то условия $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega)$ и $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$ равносильны условию $(A_n \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega)$. Если $A(T) = S(T, \mathcal{G})$, то условие $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\}$ является излишним.

Линейный функционал φ на $A(T)$ назовем *бинарно-положительным внутренне компактным*, если $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных внутренне компактных линейных функционалов φ_1 и φ_2 из $(A(T)^z)_0$. Семейство всех бинарно-

но-положительных внутренне компактных линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^z$. Ясно, что $A(T)^z \subset A(T)^\sim$.

Следующая лемма дает внутреннюю характеристику бинарно-положительных внутренне компактных линейных функционалов.

ЛЕММА 4. *Пусть $A(T)$ – топологически обширное решеточное векторное пространство на T и $\varphi \in A(T)^\sim$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1) φ является бинарно-положительным внутренне компактным;
- 2) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega)$ такой, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$, существуют $n \in \omega$ и $C \in \mathcal{C}$ такие, что $C \subset \cap A_n$ и $|\varphi f| < \varepsilon$ для каждой функции $f \in A(T)_+$ такой, что $f \leq \chi(A_n \setminus C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Возьмем любые $\varepsilon > 0$ и $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega) \downarrow$ такие, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$. По условию $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных внутренне компактных линейных функционалов φ_1 и φ_2 . Поэтому существуют $n_i \in \omega$ и $C_i \in \mathcal{C}$ такие, что $C_i \subset \cap A_{n_i}$ и $\varphi_i(\chi(A_{n_i} \setminus C_i)) < \varepsilon/2$. Пусть $n \equiv \max\{n_1, n_2\}$ и $C \equiv C_1 \cup C_2$.

Если $f \in A(T)_+$ и $f \leq \chi(A_n \setminus C)$, то

$$|\varphi f| = |\varphi_1 f - \varphi_2 f| \leq \varphi_1 f + \varphi_2 f \leq \varphi_1 \chi(A_{n_1} \setminus C_1) + \varphi_2 \chi(A_{n_2} \setminus C_2) < \varepsilon.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Возьмем любые $\varepsilon > 0$ и $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega) \downarrow$ такие, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$. По условию существуют $n \in \omega$ и $C \in \mathcal{C}$ такие, что $C \subset \cap A_n$ и $|\varphi f| < \varepsilon$ для каждой функции $f \in A(T)_+$ такой, что $f \leq \chi(A_n \setminus C)$. По теореме Рисса–Канторовича

$$\varphi_+(\chi(A_n \setminus C)) = \sup\{\varphi f \mid f \in A(T)_+, f \leq \chi(A_n \setminus C)\} < \varepsilon.$$

Значит, функционал φ_+ является положительным внутренне компактным. Аналогично, функционал $-\varphi_-$ является положительным внутренне компактным. Так как $\varphi = \varphi_+ - (-\varphi_-)$, то φ является бинарно положительным внутренне компактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $A(T)$ – топологически обширное решеточное векторное пространство на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$. Тогда $A(T)^z$ является l -идеалом в дедекндово полном решеточно векторном пространстве $A(T)^\sim$ и $(A(T)^z)_+ = (A(T)^z)_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим первое семейство через Φ и второе через Ψ . Пусть $\varphi, \psi \in \Phi_0$ и $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Ясно, что функционал $\eta \equiv x\varphi + y\psi$ является линейным и положительным. Возьмем любую последовательность $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega) \downarrow$ такую, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$, и любое число $\varepsilon > 0$. По условию существуют числа l, m и компактные множества C, D такие, что $C \cup D \subset \cap A_n$, $\varphi\chi(A_l \setminus C) < \varepsilon/(2x)$ и $\varphi\chi(A_m \setminus D) < \varepsilon/(2y)$. Следовательно, для $n \equiv \max\{l, m\}$ мы получаем

$$\eta\chi(A_n \setminus C \cup D) \leq x\varphi\chi(A_l \setminus C) + y\psi\chi(A_m \setminus D) < \varepsilon.$$

Это означает, что $\eta \in \Phi_0$.

Из доказанного свойства следует, что $\Phi = \Phi_0 - \Phi_0$ является векторным подпространством векторного пространства Ψ .

Пусть $\varphi \in \Phi_0$, $\psi \in \Psi$ и $0 \leq \psi \leq \varphi$. Тогда для $(A_n \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega) \downarrow$ такого, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$, и для $\varepsilon > 0$ существуют m и $C \subset \cap A_n$ такие, что $\varphi\chi(A_m \setminus C) < \varepsilon$. Следовательно, $\psi\chi(A_m \setminus C) < \varepsilon$ означает, что $\psi \in \Phi_0$.

Пусть теперь $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ и $|\psi| \leq \varphi$. По определению $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_0$. Поэтому по свойству, доказанному выше, условия $0 \leq \psi_+ \leq |\psi| \leq \varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi_0$ влекут $\psi_+ \in \Phi_0$. Аналогично, $-\psi_- \in \Phi_0$. Значит, $\psi = \psi_+ - (-\psi_-) \in \Phi$. Следовательно, Φ является l -идеалом в Ψ .

Наконец, пусть $\varphi \in \Phi_+$. По определению $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_0$. Поэтому $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ в Ψ . По доказанному выше $\varphi \in \Phi_0$. Это означает, что $\Phi_+ = \Phi_0$.

Из равенства $(A(T)^z)_+ = (A(T)^z)_0$ следует, что мы можем опускать слова “бинарно-положительный” и называть бинарно-положительные внутренние компактные линейные функционалы просто *внутренне компактными линейными функционалами*.

Линейный функционал φ на функциональном семействе $A(T)$ назовем *локально ограниченным*, если для каждой точки $t \in T$ существует открытая окрестность G точки t такая, что $\sup\{|\varphi f| \mid (f \in A(T)) \wedge (|f| \leq \chi(G))\} < \infty$.

ЛЕММА 5. Пусть $A(T)$ – решеточное векторное пространство и $\varphi \in A(T)^\sim$. Тогда φ является локально ограниченным, если и только если $|\varphi|$ является локально ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ является локально ограниченным и $t \in T$. Тогда $x \equiv \sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leq \chi(G)\} < \infty$ для некоторой открытой окрестности G точки t . По теореме Рисса–Канторовича $|\varphi| |f| = \sup\{|\varphi g| \mid g \in A(T) \wedge |g| \leq |f|\}$. Поэтому $f, g \in A(T)$ и $|g| \leq |f| \leq \chi(G)$ влекут $|\varphi g| \leq x$ и $|\varphi| |f| \leq x$. В результате $\|\varphi f\| \leq |\varphi| |f| \leq x$. Это означает, что $|\varphi|$ локально ограничен.

Пусть теперь $|\varphi|$ локально ограничен и $t \in T$. Тогда $y \equiv \sup\{||\varphi| f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leq \chi(H)\} < \infty$ для некоторой открытой окрестности H точки t . Если $f \in A(T)$ и $|f| \leq \chi(H)$, то $g \equiv |f| \in A(T)$ и $|g| \leq \chi(H)$. Откуда $|\varphi f| \leq \|\varphi| g| \leq y$. Это означает, что φ локально ограничен.

Линейный функционал на топологически обширном решеточном векторном пространстве $A(T)$ назовем *тонким*, если он является поточечно σ -непрерывным, внутренне компактным и локально ограниченным. Семейство всех тонких линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^\Delta$. Если $A(T) \subset F_b(T)$, то семейство $A(T)^\Delta \cap (A(T), \|\cdot\|_u)'$ обозначим через $A(T)^\ominus$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство и $A(T)$ – топологически обширное решеточное векторное пространство на T . Тогда:

- 1) $A(T)^\Delta$ является l -идеалом в дедекндово полном решеточном векторном пространстве $A(T)^\sim$;
- 2) $\varphi \in (A(T)^\Delta)_+ [(A(T)^\ominus)_+]_+$, если и только если φ является положительным внутренне компактным, поточечно σ -непрерывным и локально ограниченным (равномерно ограниченным) линейным функционалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\varphi \in A(T)^\Delta$, $\psi \in A(T)^\sim$ и $|\psi| \leq |\varphi|$. По теореме из п. 2 § 1 $\psi \in A(T)^\wedge$. По предложению 3 этого пункта $\psi \in A(T)^z$. По лемме 5 $|\varphi|$ локально ограничен. Поэтому для каждой точки $t \in T$ существует открытая окрестность G точки t такая, что $x \equiv \sup \{|\varphi|f|f \in A(T) \wedge |f| \leq \chi(G)\} < \infty$. Следовательно, $f \in A(T)$ и $|f| \leq \chi(G)$ влекут $|\psi f| \leq |\psi||f| \leq |\varphi||f| \leq x$, поскольку $|f| \in A(T)$. Это означает, что ψ является локально ограниченным. В результате $\psi \in A(T)^\Delta$.

2) Пусть $\varphi \in (A(T)^\Delta)_+$. Тогда $\varphi \in (A(T)^\wedge)_+ \cap (A(T)^z)_+$. По предложению 3 φ является положительным внутренне компактным.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях предложения 4 $A(T)^\Delta$ является дедекиндово полным решеточным векторным пространством; наименьшие верхние (наибольшие нижние) границы множеств любой допустимой мощности в упорядоченных множествах $A(T)^\sim$ и $A(T)^\Delta$ совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях предложения 4 следующие условия равносильны:

- 1) $\varphi \in A(T)^\Delta[\varphi \in A(T)^\ominus]$;
- 2) $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных внутренне компактных, поточечно σ -непрерывных и локально ограниченных (равномерно ограниченных) линейных функционалов φ_1 и φ_2 .

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях предложения 4 $A(T)^\ominus$ является l -идеалом в дедекиндово полном решеточном векторном пространстве $A(T)^\Delta$. Следовательно, $A(T)^\ominus$ является дедекиндово полным решеточным векторным пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $(T, \mathcal{G}, \mathcal{M}, \mu)$ – хаусдорфово пространство с положительной широкой радоновской мерой $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $A(T)$ – решеточное векторное пространство на T такое, что $S_c(T, \mathcal{G}) \subset A(T) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Тогда положительный функционал $\varphi \equiv \Lambda(\mu) \upharpoonright A(T)$ является тонким (см. п. 4 § 1). Если мера μ ограничена, то $\varphi \in A(T)^\ominus$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \omega) \downarrow$ такую, что $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$. Тогда $\{A_n \mid n \in \omega\} \subset \mathcal{M}^f(\mu)$. Рассмотрим множество $K \equiv \cap A_n \in \mathcal{M}^f(\mu)$. Так как мера μ компактно регулярна, для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество C такое, что $C \subset K$ и $\mu K - \varepsilon/2 < \mu C$. По свойству меры $\mu K = \lim(\mu A_n \mid n \in \omega)$. Поэтому для ε существует n такое, что $\mu A_n - \mu K < \varepsilon/2$. В результате

$$\mu(A_n \setminus C) = \mu A_n - \mu C = (\mu A_n - \mu K) + (\mu K - \mu C) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\varphi\chi(A_n \setminus C) = \mu(A_n \setminus C) < \varepsilon$. Таким образом, φ является внутренне компактным.

Согласно п. 4 § 1 φ является поточечно σ -непрерывным. Далее, для каждой точки t существует открытая окрестность G такая, что $\mu G = \sup\{\mu M \mid M \in \mathcal{M} \wedge M \subset G\} < \infty$. Пусть $f \in A(T) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ и $|f| \leq \chi(G)$. Тогда $|\varphi f| \leq \int |f| d\mu \leq \int \chi(G) d\mu = \mu G$. Это означает, что φ является локально ограниченным. Если μ ограничено, то φ равномерно ограничено.

5. Теоремы об общем радоновском представлении. В этом пункте мы дадим одно из возможных решений проблемы общего радоновского представления. Будут представлены биективная и изоморфная версии этого решения.

Функциональное семейство $A(T)$ на пространстве $(T, \mathcal{G})$ назовем $\mathcal{F}$ -усекаемым, если $f \wedge \chi(F) \in A(T)$ для каждого $f \in A(T)$ и $F \in \mathcal{F}$. Очевидно, что семейства $S_c(T, \mathcal{G})$ и $S(T, \mathcal{G})$ являются $\mathcal{F}$ -усекаемыми.

Рассмотрим отображение $V^\wedge: (S_c(T, \mathcal{G})^\wedge)_+ \rightarrow \mathfrak{M}(T)_0$ из п. 4 § 1 и его ограничения $V^\# \equiv V^\wedge \mid (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ и $V_b^\# \equiv V^\# \mid (S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, и пусть $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ и $\mu \equiv V^\# \varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Тогда:

- 1) $\mathcal{J}_\sigma(S_c(T, \mathcal{G})) \subset \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})_\delta$;
- 2) $\mu \in \mathfrak{MM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$;
- 3) φ представляется интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$;
- 4) мера μ является единственной в следующем смысле: если существует другая мера $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ из $\mathfrak{MM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$ такая, что φ представляется интегралом Лебега над пространством $(T, \mathcal{N}, \nu)$, то $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ и $\nu = \mu$;
- 5) если $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$, то мера μ ограничена.

ПОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $S_c(T, \mathcal{G})$ через $A(T)$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}_\sigma(A(T))$. По теоремам из пп. 4, 3 § 1 μ является положительной, широкой, полной, сильно насыщенной, $\mathcal{K}$ -насыщенной, внутренне $\mathcal{K}$ -регулярной и верхне $\mathcal{K}$ - σ -непрерывной мерой такой, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}^f(\mu)$, и φ представляется интегралом Лебега над пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$. Кроме того, если φ равномерно ограничено, то μ ограничено.

Более того, $\mu M = \sup \{ \mu K \mid K \in \mathcal{K} \wedge K \subset M \}$ и $\mu K \equiv \inf \{ \varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \geq \chi(K) \}$.

Так как $\chi(C) \in A(T)$ для каждого компактного множества C , мы заключаем, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$.

Пусть $F \in \mathcal{F}$ и $K \in \mathcal{K}$. Тогда $(f_n \in A(T)_+ \mid n \in \omega) \downarrow \chi(K)$ для некоторой последовательности (f_n) . Так как $A(T)$ является $\mathcal{F}$ -усекаемым, мы можем взять функции $g_n \equiv f_n \wedge \chi(F) \in A(T)_+$. Из $(g_n \mid n \in \omega) \downarrow \chi(K \cap F)$ заключаем, что $K \cap F \in \mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Так как мера μ является $\mathcal{K}$ -насыщенной, получаем $F \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$.

Пусть $K \in \mathcal{K}$ и $(f_n \in A(T)_+ \mid n \in \omega) \downarrow \chi(K)$. Рассмотрим множества $Sf_n \equiv \{t \in T \mid f_n(t) \geq 1\}$. Тогда $(Sf_n \mid n \in \omega) \downarrow K$ в $\mathcal{P}(T)$. Так как f_n является метapolунепрерывной, существует конечное покрытие $(B_{nj} \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid j \in J_n)$ множества T такое, что $\omega(f_n, B_{nj}) < 1/(n+1)$. Рассмотрим множества $J'_n \equiv \{j \in J_n \mid B_{nj} \cap Sf_n \neq \emptyset\}$ и $B_n \equiv \cup \{B_{nj} \mid j \in J'_n\} \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G})$. Если $t \in B_n$, то $t \in B_{nj}$ для некоторого $j \in J'_n$. Возьмем некоторую точку $s \in B_{nj} \cap Sf_n$. Тогда $|f_n(t) - f_n(s)| < 1/(n+1)$ влечет $f_n(t) > f_n(s) - 1/(n+1) \geq n/(n+1)$. Поэтому $Sf_n \subset B_n \subset S_n \equiv \{t \in T \mid f_n(t) > n/(n+1)\} \subset \text{supp } f_n \in \mathcal{C}$.

Если $t \notin K$, то $f_n(t) < 1/2$ для некоторого $n \geq 1$. Следовательно, $t \notin S_n$, откуда $\cap S_n \subset K$. В результате $K = \cap \{Sf_n \mid n \in \omega\} \subset \cap B_n \subset \cap S_n \subset K$ влечет $K = \cap B_n \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})_\delta$.

Возьмем множества $A_n \equiv \cap \{B_m \mid m \in n + 1\} \in \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})$. Тогда $(A_n \mid n \in \omega) \downarrow K$ и $\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \omega, C \in \mathcal{C}\} \subset A(T)$. Так как φ является внутренне компактным, для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $n \in \omega$ и $C \in \mathcal{C}$ такие, что $C \subset K$ и $\varphi\chi(A_n \setminus C) < \varepsilon$. Тогда $\mu K - \mu C \leq \mu A_n - \mu C = \mu(A_n \setminus C) = \int \chi(A_n \setminus C) d\mu = \varphi\chi(A_n \setminus C) < \varepsilon$. Поэтому $\mu K = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset K\}$.

Пусть $M \in \mathcal{M}$ и возьмем число x такое, что $x < \mu M$. Тогда существует $K \in \mathcal{K}$ такое, что $K \subset M$ и $x < \mu K$. Далее, существует $C \in \mathcal{C}$ такое, что $C \subset K$ и $x < \mu C$. Таким образом, $x \leq \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\} \leq \mu M$. Так как x произвольно, мы заключаем, что $\mu M = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\}$. Это означает, что μ является компактно регулярным.

Далее, для каждой точки $t \in T$ существует открытая окрестность G такая, что $x \equiv \sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leq \chi(G)\} < \infty$. Как доказано выше, $\mu G = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset G\}$. Поэтому $\mu G = \sup\{\varphi\chi(C) \mid C \in \mathcal{C} \wedge \chi(C) \leq \chi(G)\} \leq x < \infty$. Таким образом, мера μ локально ограничена. В результате μ является широкой положительной радоновской мерой.

Наконец, предположим, что φ является равномерно ограниченным. Тогда $\mu T = \sup\{\varphi\chi(C) \mid C \in \mathcal{C}\} \leq \sup\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge 0 \leq f \leq \mathbf{1}\} < \infty$, т.е. μ ограничено.

Теперь нам нужно проверить единственность μ . Пусть $\nu: \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — мера из утверждения 4). Возьмем любое $C \in \mathcal{C}$. Тогда $\chi(C) \in A(T)$ влечет равенство $\mu C = \int \chi(C) d\mu = \varphi\chi(C) = \int \chi(C) d\nu = \nu C$.

Пусть $N \in \mathcal{N}$ и $C \in \mathcal{C}$. По свойству компактной регулярности ν мы можем найти некоторые последовательности $(K_n \subset C \cap N \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$ и $(L_n \subset C \setminus N \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$ компактных множеств такие, что $\nu(C \cap N) = \sup\{\nu K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\nu(C \setminus N) = \sup\{\nu L_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим дизъюнктные множества $K \equiv \cup K_n \subset C \cap N$ и $L \equiv \cup L_n \subset C \setminus N$ из $\mathcal{M}$.

Мы имеем $\nu((C \setminus K_m) \setminus L_n) = \nu(C \setminus K_m) - \nu((C \setminus K_m) \cap L_n) = \nu C - \nu(C \cap K_m) - \nu L_n = \nu C - \nu K_m - \nu L_n$. Следовательно, $\mu K = \sup \mu K_n = \sup \nu K_n = \nu(C \cap N)$ и $\mu L = \sup \mu L_n = \sup \nu L_n = \nu(C \setminus N)$. Поэтому $\mu(K \cup L) = \mu K + \mu L = \nu(C \cap N) + \nu(C \setminus N) = \nu C$. Значит, $\nu C = \mu C = \mu(C \setminus (K \cup L)) + \mu(K \cup L) = \mu(C \setminus (K \cup L)) + \nu C$, откуда $\mu(C \setminus (K \cup L)) = 0$.

Из $(C \cap N) \setminus K \subset C \setminus (K \cup L)$ в силу полноты μ мы заключаем, что $(C \cap N) \setminus K \in \mathcal{M}$. Значит, $N \cap C = ((C \cap N) \setminus K) \cup K \in \mathcal{M}$ для любого $C \in \mathcal{C}$.

Возьмем любое множество $M \in \mathcal{M}^f(\mu)$. Так как μ компактно регулярно, мы имеем $\mu M = \sup\{\mu D \mid D \in \mathcal{C} \wedge D \subset M\}$. Поэтому существует последовательность $(D_n \in \mathcal{C} \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$ такая, что $\cup\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset M$ и $\mu M = \sup\{\mu D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим множества $E \equiv \cup\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $H \equiv M \setminus E$ из $\mathcal{M}$. Тогда $\mu D_n \leq \mu E = \mu M - \mu H$ для каждого n влечет $\mu M \leq \mu M - \mu H$. Значит, $\mu H = 0$. Из $(N \cap M) \setminus E \subset H$ в силу полноты μ мы заключаем, что $(N \cap M) \setminus E \in \mathcal{M}$. С другой стороны, по доказанному выше $(N \cap M) \cap E = \cup\{(N \cap D_n) \cap M \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}$. В результате $N \cap M \in \mathcal{M}$. Из сильной насыщенности μ теперь следует, что $N \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Точно таким же образом $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Теперь из свойства компактной регулярности следует, что $\mu = \nu$.

СЛЕДСТВИЕ. $\text{rng } V^\# \subset \mathfrak{M}^{we}(T, \mathcal{G})_0$ и $\text{rng } V_b^\# \subset \mathfrak{M}_b^{we}(T, \mathcal{G})_+$.

Если $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ и $\mu \equiv V^\# \varphi: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, то по предложению 1 этого пункта $\mathcal{K} \equiv \mathcal{J}_\sigma(S_c(T, \mathcal{G})) \subset \mathcal{A}_c(T, \mathcal{G})_\delta \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Следовательно, $\mathcal{B}(T, \mathcal{K}) \subset$

$\mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \subset \mathcal{M}$. В результате $\mathcal{B}(T, \mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(T, \mathcal{G}) \subset \bigcap \{\text{dom } V^\# \varphi \mid \varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+\}$. Это означает согласно п. 4 § 1, что мы можем взять $\mathcal{M}_0 \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ и можем рассмотреть отображения $V: (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+ \rightarrow \text{Meas}(T, \mathcal{M}_0)$ и $V_b: (S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+ \rightarrow \text{Meas}_b(T, \mathcal{M}_0)$ из п. 4 § 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство, $\mu \equiv V^\# \varphi$, $\mu_0 \equiv V \varphi: \mathcal{M}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$. Тогда:

- 1) $\mu_0 \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, $\mu_0 = \mu \mid \mathcal{M}_0$ и $\mu = (\mu_0)^\#$;
- 2) φ представляется интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}_0, \mu_0)$;
- 3) мера μ_0 является единственной в следующем смысле: если существует другая положительная широкая борелевско-радоновская мера $\varkappa: \mathcal{M}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что φ представляется интегралом Лебега над пространством $(T, \mathcal{M}_0, \varkappa)$, то $\varkappa = \mu_0$;
- 4) если $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$, то мера μ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. 4 § 1 $\mu_0 = \mu \mid \mathcal{M}_0$. По предложению 1 этого пункта μ является полной сильно насыщенной радоновской мерой. Поэтому по лемме из п. 5 § 1 μ_0 является борелевско-радоновской мерой и $\mu = (\mu_0)^\#$. Утверждения 2) и 4) следуют из теоремы из п. 4 § 1.

Используя точно такие же рассуждения, как и в доказательстве предложения 1, мы выводим, что μ_0 и $\varkappa$ совпадают на $\mathcal{C}$. Теперь из свойства компактной регулярности следует, что $\mu_0 = \varkappa$.

СЛЕДСТВИЕ. $\text{rng } V \subset \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ и $\text{rng } V_b \subset \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Пусть $V^\#$ и V – отображения из предложений 1 и 2. Тогда:

- 1) $V^\#$ является биекцией из множества $(S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ на множество $\mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$;
- 2) V является биекцией из множества $(S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ на множество $\mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$;
- 3) $V_b^\#$ является биекцией из множества $(S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$ на множество $\mathfrak{RM}_b^{we}(T, \mathcal{G})_+$;
- 4) V_b является биекцией из множества $(S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$ на множество $\mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+$;
- 5) если $\varphi, \psi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $V(x\varphi + y\psi) = xV\varphi + yV\psi$;
- 6) если $\varphi, \psi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\ominus)_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $V_b(x\varphi + y\psi) = xV_b\varphi + yV_b\psi$;
- 7) отображения V и V_b изотонны и сохраняют любые порядковые границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствиям из предложений 1 и 2 этого пункта $\text{rng } V^\# \subset \mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$ и $\text{rng } V \subset \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Согласно п. 4 § 1 $V^\#$ и V инъективны. Поэтому нам нужно проверить только, что $V^\#$ и V сюръективны.

Пусть $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ принадлежит $\mathfrak{RM}^{we}(T, \mathcal{G})_0$. Тогда $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. По предложению 5 из п. 4 § 2 положительный функционал $\varphi \equiv \Lambda(\mu) \mid S_c(T, \mathcal{G})$ является тонким. По определению $\varphi f = \int f d\mu$ для каждого $f \in S_c(T, \mathcal{G})$. Следовательно, в силу утверждения 4) предложения 1 $\mu = V^\# \varphi$. Таким образом, $V^\#$ сюръективно.

Если $\mu \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$, то по тем же причинам, как и выше, в силу утверждения 3) предложения 2 этого пункта $\mu = V\varphi$. Таким образом, V сюръективно.

По следствиям к предложениям 1 и 2 $\text{rng } V_b^\# \subset \mathfrak{RM}_b^{we}(T, \mathcal{G})_+$ и $\text{rng } V_b \subset \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})_+$. Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b^{we}(T, \mathcal{G})_+$, то $\varphi \in (S_c(T, \mathcal{G})^\oplus)_+$. Поэтому отображения $V_b^\#$ и V_b сюръективны.

Пусть теперь $\mu = V\varphi$ и $\nu = V\psi$. По предложению из п. 5 § 1 $\lambda \equiv x\mu + y\nu \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. По предложению 2 $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \nu)$. Однако $\text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda) = \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \nu)$ и $\int f d\lambda = x \int f d\mu + y \int f d\nu$ для каждой функции $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda)$. Поэтому $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda)$ и для каждой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ мы имеем по предложению 2 $(x\varphi + y\psi)f = x \int f d\mu + y \int f d\nu = \int f d\lambda$. В силу утверждения 3) предложения 2 $\lambda = V(x\varphi + y\psi)$. В качестве следствия мы получаем такое же свойство для V_b .

Пусть $\varphi \leq \psi$. Если C – компактное множество, то $\chi(C) \in S_c(T, \mathcal{G})_+$. Поэтому в силу утверждения 2) предложения 2 $\mu C = \int \chi(C) d\mu = \varphi \chi(C) \leq \psi \chi(C) = \int \chi(C) d\nu = \nu C$. Теперь из компактной регулярности этих мер мы выводим, что $\mu \leq \nu$.

Обратно, пусть $\mu \leq \nu$. Тогда $\varphi f = \int f d\mu \leq \int f d\nu = \psi f$ для каждой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})_+$. Это означает, что $\varphi \leq \psi$. Таким образом, V является изотонным. Следовательно, V сохраняет любые порядковые границы. Для V_b рассуждения такие же.

Теперь наша цель – расширить отображения V и V_b на все множества $S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$ и $S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$ соответственно. Для расширения отображения V_b мы имеем такую же процедуру, как и в доказательстве второй теоремы Рисса–Радона о представлении из п. 6 § 1. Однако расширение отображения V является трудной задачей, для решения которой и были изобретены радоновские бимеры.

Рассмотрим композиционное отображение $E \circ V: (S_c(T, \mathcal{G})^\Delta)_+ \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

1) отображение $E \circ V$ имеет единственное расширение до изоморфизма $\mathfrak{I}: S_c(T, \mathcal{G})^\Delta \rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $\mathfrak{I}\varphi = E(V(\varphi_+)) - E(V(-\varphi_-))$ для каждого $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$;

2) $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{I}\varphi)$ и $\varphi f = \int f dV(\varphi_+) - \int f dV(-\varphi_-) = \int f d\mathfrak{I}\varphi$ для каждого $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и каждого $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 1 из предложения 4 п. 4 § 2 $A \equiv S_c(T, \mathcal{G})^\Delta$ является решеточным векторным пространством. По теореме 1 из п. 2 § 2 $B \equiv \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ является решеточным векторным пространством.

Если $\varphi, \psi \in A_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то в силу теоремы 1 и теоремы 2 из п. 2 § 2 мы имеем

$$(E \circ V)(x\varphi + y\psi) = E(xV\varphi + yV\psi) = x(E \circ V)\varphi + y(E \circ V)\psi.$$

Кроме того, $E \circ V$ является биективным. Поэтому отображение $E \circ V$ имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $\mathfrak{I}: A \rightarrow B$ такого, что $\mathfrak{I}\varphi = E(V(\varphi_+)) - E(V(-\varphi_-))$ для каждого $\varphi \in A$.

Теперь по предложению 3 из п. 3 § 2

$$S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BM}_{bc}(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{I}\varphi) \\ \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, E(V(\varphi_+))) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, E(V(-\varphi_-))).$$

Поэтому по предложениям 1 и 2 из п. 3 § 2

$$\int f d\mathfrak{I}\varphi = \int f dE(V(\varphi_+)) - \int f dE(V(-\varphi_-)) = \int f dV(\varphi_+) - \int f dV(-\varphi_-)$$

для каждой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$. В силу предложения 2 этого пункта $\int f dV(\varphi_+) = \varphi_+ f$ и $\int f dV(-\varphi_-) = (-\varphi_-)f$. В результате $\int f d\mathfrak{I}\varphi = \varphi_+ f + \varphi_- f = \varphi f$.

По теореме 1 V сохраняет любые порядковые границы. По теореме 2 из п. 2 § 2 E тоже сохраняет любые порядковые границы. Поэтому $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ влечет

$$\mathfrak{I}\varphi_1 \wedge \mathfrak{I}\varphi_2 = E(V\varphi_1) \wedge E(V\varphi_2) = E(V\varphi_1 \wedge V\varphi_2) = E(V(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 0.$$

По свойству 14 $E(b)$ из [12] $\mathfrak{I}$ является решеточным линейным оператором.

Пусть $\mathfrak{m}$ – любая радоновская бимера. По теореме 2 из п. 2 § 2 $\mathfrak{m} = E\mu' - E\mu''$ для некоторых мер $\mu', \mu'' \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. Согласно теореме 1 этого пункта $\mu' = V\varphi'$ и $\mu'' = V\varphi''$ для некоторых функционалов $\varphi', \varphi'' \in A_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in A$. Тогда $\mathfrak{m} = EV\varphi' - EV\varphi'' = \mathfrak{I}\varphi' - \mathfrak{I}\varphi'' = \mathfrak{I}\varphi$. Это означает, что $\mathfrak{I}$ является сюръективным. Таким образом, $\mathfrak{I}$ является биективным решеточным линейным оператором. Поэтому $\mathfrak{I}$ – необходимый изоморфизм.

Теперь мы рассмотрим случай равномерно ограниченных функционалов из $S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

- 1) отображение V_b имеет единственное расширение до изоморфизма $I_b : S_c(T, \mathcal{G})^\oplus \rightarrow \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $I_b\varphi = V_b(\varphi_+) - V_b(-\varphi_-)$ для каждого $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$;
- 2) $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, I_b\varphi)$ и $\varphi f = \int f dV_b(\varphi_+) - \int f dV_b(-\varphi_-) = \int f dI_b\varphi$ для каждой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и каждого функционала $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$;
- 3) отображение $E_b \circ V_b$ имеет единственное расширение до изоморфизма $\mathfrak{I}_b : S_c(T, \mathcal{G})^\oplus \rightarrow \mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $\mathfrak{I}_b = \mathfrak{I} \mid S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$ и $\mathfrak{I}_b\varphi = E_b V_b(\varphi_+) - E_b V_b(-\varphi_-) = F_b I_b\varphi$;
- 4) $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{I}_b\varphi)$ и $\varphi f = \int f d\mathfrak{I}_b\varphi$ для каждой функции $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и каждого функционала $\varphi \in S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3 предложения 4 из п. 4 § 2 $A \equiv S_c(T, \mathcal{G})^\oplus$ является решеточным векторным пространством. По предложению из п. 5 § 1 $B \equiv \mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G})$ также является решеточным векторным пространством. Поэтому в силу теоремы 1 этого пункта и предложения 3.6.1 из [24] отображение V_b имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $I_b : A \rightarrow B$ такого, что $I_b\varphi = V_b(\varphi_+) - V_b(-\varphi_-)$.

По теореме 1 V_b сохраняет любые порядковые границы. Поэтому $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ влечет $I_b \varphi_1 \wedge I_b \varphi_2 = V_b \varphi_1 \wedge V_b \varphi_2 = V_b(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0$. По свойству 14 $E(b)$ из [12] I_b является решеточным линейным оператором.

Если $\mu \in B$, то $\mu = \mu_+ - (-\mu_-)$. Согласно теореме 1 $\mu_+ = V_b \varphi'$ и $-\mu_- = V_b \varphi''$ для некоторых $\varphi', \varphi'' \in A_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in A$. Тогда $\mu = V_b \varphi' - V_b \varphi'' = I_b \varphi' - I_b \varphi'' = I_b \varphi$. Это означает, что I_b является сюръективным. Таким образом, I_b есть биективный решеточный линейный оператор. Поэтому I_b есть необходимый изоморфизм. В результате мы получаем утверждение 1).

Если $f \in S_c(T, \mathcal{G})$ и $\varphi \in A$, то по предложению 2 этого пункта и следствию из него функция f интегрируема относительно мер $\mu' \equiv V_b(\varphi_+)$ и $\mu'' \equiv V_b(-\varphi_-)$ из B и, кроме того, $(\varphi_+)f = \int f d\mu'$ и $(-\varphi_-)f = \int f d\mu''$. Поэтому $f \in \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mu' - \mu'') = \text{BI}(T, \mathcal{G}, I_b \varphi)$ и $\varphi f = (\varphi_+)f - (-\varphi_-)f = \int f d\mu' - \int f d\mu'' = \int f d(\mu' - \mu'') = \int f dI_b \varphi$. Таким образом, мы получаем утверждение 2).

По теореме 1 из п. 2 § 2 $C \equiv \mathfrak{R}\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$ является решеточным векторным пространством. Если $\varphi, \psi \in A_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то в силу теоремы 1 и теоремы 2 из п. 2 § 2 мы имеем

$$(E_b \circ V_b)(x\varphi + y\psi) = E_b(xV_b\varphi + yV_b\psi) = x(E_b \circ V_b)\varphi + y(E_b \circ V_b)\psi.$$

Кроме того, $E_b \circ V_b$ биективно. Поэтому отображение $E_b \circ V_b$ имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $\mathfrak{I}_b: A \rightarrow C$ такого, что $\mathfrak{I}_b \varphi = E_b V_b(\varphi_+) - E_b V_b(-\varphi_-)$. Используя теорему 3 из п. 2 § 2, мы получаем $\mathfrak{I}_b \varphi = F_b(V_b(\varphi_+) - V_b(-\varphi_-)) = F_b I_b \varphi$ для каждого $\varphi \in A$.

По утверждению 1) $I_b: A \rightarrow B$ есть изоморфизм. По теореме 3 из п. 2 § 2 $F_b: B \rightarrow C$ есть также изоморфизм. Поэтому из $\mathfrak{I}_b = F_b \circ I_b$ мы заключаем, что $\mathfrak{I}_b: A \rightarrow C$ является изоморфизмом данных решеточных векторных пространств.

Согласно п. 2 $E_b = E \mid B$. Согласно п. 4 §1 $V_b = V \mid A_+$. Поэтому для каждого $\varphi \in A$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_b \varphi &= EV(\varphi_+) - EV(-\varphi_-) = EV_b(\varphi_+) - EV_b(-\varphi_-) \\ &= E_b V_b(\varphi_+) - E_b V_b(-\varphi_-) = \mathfrak{I}_b \varphi, \end{aligned}$$

откуда $\mathfrak{I}_b = \mathfrak{I} \mid A$. Таким образом, мы получаем утверждение 3).

Наконец, из равенства $\mathfrak{I}_b = \mathfrak{I} \mid A$ мы выводим по теореме 2 этого пункта, что $S_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{I}_b \varphi)$ для каждого $\varphi \in A$ и $\varphi f = \int f d\mathfrak{I}_b \varphi$ для каждого $f \in S_c(T, \mathcal{G})$.

В добавление к теореме 3 мы докажем, что отображения I_b и $\mathfrak{I}_b$ сохраняют соответствующие нормы.

Так как $S_c(T, \mathcal{G})^{\oplus} \subset (S_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)'$, то мы можем индуцировать на решеточное векторное пространство $S_c(T, \mathcal{G})^{\oplus}$ норму $\|\cdot\|$ из нормированного решеточного векторного пространства $((S_c(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|_u)', \|\cdot\|)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – хаусдорфово пространство. Тогда:

1) $(S_c(T, \mathcal{G})^{\oplus}, \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством;

2) отображение $I_b: (S_c(T, \mathcal{G})^{\otimes}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом между данными нормированными решеточными векторными пространствами;

3) отображение $\mathfrak{I}_b: (S_c(T, \mathcal{G})^{\otimes}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом между данными нормированными решеточными векторными пространствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим $S_c(T, \mathcal{G})$ через $A(T)$, $A(T)^{\otimes}$ через X и $(A(T), \|\cdot\|_u)'$ через Y .

Нам необходимо проверить, что $\|\cdot\|$ является монотонной нормой на X . Известно, что $(Y, \|\cdot\|)$ является банаховым решеточным векторным пространством. По следствию 1 из предложения 4 п. 4 §2 наименьшие верхние (наибольшие нижние) границы совпадают в X и $A(T)^\sim$. Аналогично они совпадают в Y и $A(T)^\sim$. Поэтому эти границы совпадают в X и Y . Следовательно, $|\varphi|_X = |\varphi|_Y$ для каждого $\varphi \in X$. В результате $|\varphi|_X \leq |\psi|_X$ в X влечет $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$, поскольку норма $\|\cdot\|$ является монотонной в Y . Значит, $(X, \|\cdot\|)$ является нормированным решеточным векторным пространством.

2) Пусть $\varphi \in X_+$, $\mu_0 = V_b \varphi$ и $f \in A(T)$. Тогда $|\varphi f| \leq \int |f| d\mu_0 \leq \|f\|_u \int \mathbf{1} d\mu = \|f\|_u \mu_0 T = \|f\|_u \|\mu_0\|$. Следовательно, $\|\varphi\| \leq \|\mu_0\|$.

Согласно доказательству предложения 2 $\mu_0 T = \sup\{\lambda K \mid K \in \mathcal{I}_\sigma(A(T))\}$ и $\lambda K = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \geq \chi(K)\}$. Так как $A(T)$ является усекаемым семейством и функционал φ возрастает, мы получаем $\lambda K = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge (\chi(K) \leq f \leq \mathbf{1})\}$, откуда $\varphi f = |\varphi f| \leq \|\varphi\| \|f\|_u \leq \|\varphi\|$ влечет $\lambda K \leq \|\varphi\|$. В результате $\|\mu_0\| = \mu_0 T \leq \|\varphi\|$. Таким образом, $\|\varphi\| = \|\mu_0\|$.

Пусть теперь $\varphi \in X$ и $\mu \equiv I_b \varphi$. Тогда $|\mu| = I_b |\varphi| = V_b |\varphi|$. В силу равенства, доказанного выше, мы получаем $\|\varphi\| = \|\varphi\| = \|\mu\| = \|\mu\|$. Таким образом, I_b является изометрическим. Значит, I_b есть необходимый изоморфизм нормированных решеточных векторных пространств.

3) По следствию из предложения 6 п. 2 §2 $F_b: (\mathfrak{M}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ является (изометрическим) изоморфизмом данных нормированных решеточных векторных пространств. Кроме того, по теореме 3 этого пункта $\mathfrak{I}_b = F_b \circ I_b$. Следовательно, $\mathfrak{I}_b$ также является необходимым (изометрическим) изоморфизмом.

Теоремы 1–3 и предложение 3 дают решение проблемы общего радоновского представления. В заключение мы дадим изоморфную версию первой теоремы Рисса–Радона о представлении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(T, \mathcal{G})$ – локально компактное пространство и $W: (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_+ \rightarrow \mathfrak{M}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$ – биекция из теоремы Рисса–Радона о представлении, приведенной во введении. Тогда:

1) отображение $E \circ W$ имеет единственное расширение до изоморфизма $\mathfrak{J}: C_c(T, \mathcal{G})^\sim \rightarrow \mathfrak{B}_b(T, \mathcal{G})$ между данными решеточными векторными пространствами такого, что $\mathfrak{J}\varphi = E(W(\varphi_+)) - E(W(-\varphi_-))$ для каждого функционала $\varphi \in C_c(T, \mathcal{G})^\sim$;

2) $C_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{J}\varphi)$ и $\varphi f = \int f dW(\varphi_+) - \int f dW(-\varphi_-) = \int f d\mathfrak{J}\varphi$ для каждой функции $f \in C_c(T, \mathcal{G})$ и каждого функционала $\varphi \in C_c(T, \mathcal{G})^\sim$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $A \equiv C_c(T, \mathcal{G})^\sim$ и $B \equiv \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ являются решеточными векторными пространствами.

Пусть $\mu \equiv W\varphi$, $\nu \equiv W\psi$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$. По предложению из п. 5 § 1 $\lambda \equiv x\mu + y\nu \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. По теореме Рисса–Радона $C_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \nu)$, где $\mathcal{M}_0 \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Известно, что $\text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda) = \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \mu) \cap \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \nu)$ и $\Lambda(\lambda)f = x\Lambda(\mu)f + y\Lambda(\nu)f$ для каждого $f \in \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda)$. Поэтому $C_c(T, \mathcal{G}) \subset \text{MI}(T, \mathcal{M}_0, \lambda)$, и для каждого $f \in C_c(T, \mathcal{G})$ мы имеем $(x\varphi + y\psi)f = x \int f d\mu + y \int f d\nu = \int f d\lambda$. Поэтому $\lambda = W(x\varphi + y\psi)$. В результате $EW(x\varphi + y\psi) = xEW\varphi + yEW\psi$ по теореме 2 из п. 2 § 2.

Кроме того, $E \circ W$ биективно. Поэтому в силу предложения 3.6.1 из [24] отображение $E \circ W$ имеет единственное расширение до инъективного линейного оператора $\mathfrak{J}: A \rightarrow B$ такого, что $\mathfrak{J}\varphi = E(W(\varphi_+)) - E(W(-\varphi_-))$ для каждого $\varphi \in A$.

Теперь по предложению 3 из п. 3 § 2

$$\begin{aligned} C_c(T, \mathcal{G}) &\subset \text{BM}_{bc}(T, \mathcal{G}) \subset \text{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{J}\varphi) \\ &\cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, E(W(\varphi_+))) \cap \text{BI}(T, \mathcal{G}, E(W(-\varphi_-))). \end{aligned}$$

Поэтому по предложениям 1 и 2 из п. 3 § 2

$$\int f d\mathfrak{J}\varphi = \int f dE(W(\varphi_+)) - \int f dE(W(-\varphi_-)) = \int f dW(\varphi_+) - \int f dW(-\varphi_-)$$

для каждого $f \in C_c(T, \mathcal{G})$. Так как $\int f dW(\varphi_+) = \varphi_+ f$ и $\int f dW(-\varphi_-) = (-\varphi_-)f$, то в результате $\int f d\mathfrak{J}\varphi = \varphi_+ f + \varphi_- f = \varphi f$.

Пусть $\varphi, \psi \in A_+$. Если $\varphi \leq \psi$, то $\psi - \varphi \geq 0$. Поэтому $EW\psi - EW\varphi = \mathfrak{J}\psi - \mathfrak{J}\varphi = \mathfrak{J}(\psi - \varphi) = EW(\psi - \varphi) \geq 0$ влечет $EW\varphi \leq EW\psi$. Значит, отображение $E \circ W$ является возрастающим. Обратно: пусть $EW\varphi \leq EW\psi$. По теореме 2 из п. 2 § 2 отображение E изотонно. Поэтому $W\varphi \leq W\psi$. Следовательно, $\varphi f = \int f dW\varphi \leq \int f dW\psi = \psi f$ для каждого $f \in C_c(T, \mathcal{G})$. Это означает, что $\varphi \leq \psi$. Таким образом, отображение $E \circ W$ изотонно. Поэтому оно сохраняет любые порядковые границы.

Теперь $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ в A_+ влечет

$$\mathfrak{J}\varphi_1 \wedge \mathfrak{J}\varphi_2 = (E \circ W)\varphi_1 \wedge (E \circ W)\varphi_2 = (E \circ W)(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0.$$

По свойству 14 $E(b)$ из [12] $\mathfrak{J}$ является решеточным линейным оператором.

Пусть $\mathfrak{m}$ – любая радоновская бимера. По теореме 2 из п. 2 § 2 $\mathfrak{m} = E\mu' - E\mu''$ для некоторых мер $\mu', \mu'' \in \mathfrak{RM}^{wo}(T, \mathcal{G})_0$. По теореме Рисса–Радона $\mu' = W\varphi'$ и $\mu'' = W\varphi''$ для некоторых функционалов $\varphi', \varphi'' \in A_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in A$. Тогда $\mathfrak{m} = EW\varphi' - EW\varphi'' = \mathfrak{J}\varphi' - \mathfrak{J}\varphi'' = \mathfrak{J}\varphi$. Это означает, что $\mathfrak{J}$ сюръективно. Таким образом, $\mathfrak{J}$ является биективным решеточным линейным оператором. Поэтому $\mathfrak{J}$ есть необходимый изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты, аналогичные предложениям 1 и 2 этого пункта, могут быть доказаны для любого топологически обширного $\mathcal{F}$ -усекаемого решеточного векторного пространства $A(T)$ на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$, в частности для $A(T) = S(T, \mathcal{G})$. Поэтому для $S(T, \mathcal{G})^{\odot}$ мы можем доказать утверждение, параллельное теореме Прохорова о представлении из п. 7 § 1: *интегральное представление устанавливает некоторые изоморфизмы $(S(T, \mathcal{G})^{\odot}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{RM}_b^{wo}(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ и $(S(T, \mathcal{G})^{\odot}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G}), \|\cdot\|)$ между данными нормированными решеточными векторными пространствами, которые являются аналогами изоморфизмов из теоремы 3 и предложения 3 этого пункта.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если мы в определении положительной радоновской меры $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ заменим условие локальной ограниченности на более слабое условие: $\mu C < \infty$ для каждого $C \in \mathcal{C}$ (конечность меры на компактах), то такую меру назовем *обобщенной положительной радоновской мерой*. Для локально компактного пространства понятия положительной радоновской меры и обобщенной положительной радоновской меры равносильны. Понятие обобщенной положительной радоновской меры естественным образом влечет понятие *обобщенной радоновской бимеры*.

Далее, если мы в определении тонкого функционала отбросим условие локальной ограниченности, то такой функционал назовем *обобщенным тонким функционалом*.

Соответственно этим обобщениям все изложенные теоремы остаются в силе для обобщенных радоновских мер и бимер и обобщенных тонких функционалов.

Список литературы

1. *Riesz F.* Sur les opérations fonctionnelles linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. 1909. V. 149. P. 974–977.
2. *Radon J.* Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen // S.-B. Akad. Wiss. Wien. 1913. V. 122. P. 1295–1438.
3. *Hausdorff F.* Grundzuge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914.
4. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa, 1937.
5. *Saks S.* Integration in abstract metric spaces // Duke Math. J. 1938. V. 4. P. 408–411.
6. *Kakutani S.* Concrete representation of abstract (M) – spaces // Ann. Math. (2) 1941. V. 42. P. 994–1024.
7. *Halmos P. R.* Measure Theory. New York, 1950.
8. *Hewitt E.* Integration on locally compact spaces. I // Univ. of Washington Publ. in Math. 1952. V. 3. P. 71–75.
9. *Edwards R. E.* A theory of Radon measures on locally compact spaces // Acta Math. 1953. V. 89. P. 133–164.
10. *Bourbaki N.* Intégration. Chap. I–VI. Paris: Hermann, 1952–1959.
11. *Hewitt E., Stromberg K.* Real and Abstract Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1965.
12. *Fremlin D. H.* Topological Riesz spaces and measure theory. Cambridge: The University Press, 1974.
13. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. С. 177–238.
14. *Topsoe F.* Topology and measure // Lect. Notes Math. 1970. V. 133.
15. *Pollard D., Topsoe F.* A unified approach to Riesz type representation theorems // Studia Math. 1975. V. 54. P. 173–190.
16. *Topsoe F.* Further results on integral representations // Studia Math. 1976. V. 55. P. 239–245.

17. *Topsoe F.* Radon measures, some basic constructions // *Lect. Notes Math.* 1983. V. 1033. P. 303–311.
18. *Anger B., Portenier C.* Radon integrals // *Progress in Math.* № 103. Boston–Berlin: Birkhäuser 1992.
19. *König H.* The Daniell–Stone–Riesz representation theorem // *Operator theory: advances and applications.* 1995. V. 75. P. 191–222.
20. *König H.* Measure and integration. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
21. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Проблема Радона для регулярных мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // *Фундаментальная и прикладная математика.* 1997. Т. 3. №3. С. 801–808.
22. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // *Фундаментальная и прикладная математика.* 1997. Т. 3. №4. С. 1135–1172.
23. *Захаров В. К., Михалёв А. В.* Проблема интегрального представления для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // *Докл. РАН.* 1998. Т. 360. №1. С. 13–15.
24. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971.
25. *Dinculianu N.* Vector Measures. London–N.Y.: Oxford Univ. Press (Pergamon), 1967.
26. *Александров А. Д.* Additive functions in abstract spaces. I–III // *Матем. сб.* 1940. Т. 8. С. 303–348; 1941. Т. 9.
27. *Stone M. N.* Notes on integration. I–IV // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1948. V. 34. P. 336–342, 447–455, 483–490; 1949. V. 35. P. 50–58.
28. *Schwartz L.* Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. London–N.Y.: Oxford Univ. Press, 1973.
29. *Jacobs K.* Measure and integral. N.Y.: Academic Press, 1978.
30. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
31. *Захаров В. К.* Функциональное представление равномерного пополнения максимального и счетно-плотного модулей частных модуля непрерывных функций // *УМН.* 1980. Т. 35. №4. С. 187–188.
32. *Zaharov V.* Functional characterization of absolute and Dedekind completion // *Bull. Acad. Polon. Sci. Serie sci. math.* 1981. V. 29. № 5–6. P. 293–297.
33. *Захаров В. К.* Связи между расширением Лебега и расширением Бореля первого класса и между соответствующими им прообразами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1990. Т. 54. №5. С. 928–956.
34. *Hausdorff F.* Über halbstetige Functionen und deren Verallgemeinerung // *Math. Z.* 1915. V. 4. P. 292–309.
35. *Sierpin'ski W.* Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues // *Fund. Math.* 1921. V. 2. P. 15–27.
36. *Zaharov V. K.* Alexandrovian cover and Sierpin'skian extension // *Studia Sci. Math. Hung.* 1989. V. 24. P. 93–117.
37. *Захаров В. К.* Связь между полным кольцом частных кольца непрерывных функций, регулярным пополнением и расширениями Хаусдорфа–Серпинского // *УМН.* 1990. Т. 45. №6. С. 133–134.
38. *Захаров В. К.* Расширения кольца непрерывных функций, порожденные регулярным, счетно-делимым и полным кольцами частных, и соответствующие им прообразы // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1995. Т. 59. №4. С. 15–60.