Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, О двумерном аналоге теоремы Семере-
ди в абелевых группах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009,
том 73, выпуск 5, 181–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:58:53

УДК 511.34+511.218+511.336

И. Д. Шкредов

О двумерном аналоге теоремы Семереди в абелевых группах

Для всякого множества $A \subseteq G \times G$, G – конечная абелева группа, имеющего мощность $|G|^2/(\log \log |G|)^c$, где $c > 0$ – абсолютная константа, доказано, что A содержит тройку $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, $d \neq 0$. Полученный результат представляет собой двумерное обобщение теоремы Семереди об арифметических прогрессиях.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: двумерные обобщения теоремы Семереди, задачи об арифметических прогрессиях, теорема Рота, множества Бора.

§ 1. Введение

Теорема Е. Семереди [1] об арифметических прогрессиях утверждает, что любое множество $A \subseteq \mathbb{Z}$ положительной плотности содержит арифметические прогрессии произвольной длины. Этот замечательный результат сыграл значительную роль в развитии двух разделов математики: аддитивной комбинаторики (см., например, [2]) и комбинаторной эргодической теории (см., например, [3]). Сформулируем теорему Семереди более точно.

Пусть N – натуральное число. Пусть $a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| : A \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\}$, где $|A|$ – мощность множества A .

ТЕОРЕМА 1.1 (Е. Семереди, 1975). *Для всех $k \geq 3$ выполнено*

$$a_k(N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Ясно, что из этого результата вытекает теорема Б.Л. Ван дер Вардена [4].

В простейшем случае $k = 3$ теорема 1.1 была доказана К.Ф. Ротом [5] в 1953 г. Применяя метод Харди–Литтлвуда, Рот получил следующую количественную оценку для плотности множеств без арифметических прогрессий длины три:

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log \log N}.$$

Наилучший на сегодняшний день результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Ж. Бургену [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00383), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-691.2008.1), INTAS (грант № 03-51-5-70) и Фонда Бальзана (грант им. П. Делиня 2007).

ТЕОРЕМА 1.2 (Ж. Бурген, 2007). *Для всех $N \geq 3$ выполнено*

$$a_3(N) \ll \frac{(\log \log N)^2}{(\log N)^{2/3}}. \quad (1.2)$$

В своем доказательстве Семереди использовал сложные комбинаторные аргументы. Альтернативное доказательство теоремы 1.1 было предложено Г. Фюрстенбергом в [7] (см. также [3], [8] и [9]). В своем подходе он использовал методы эргодической теории. Г. Фюрстенберг показал, что теорема Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости в произвольной динамической системе.

А. Беренд [10] нашел оценку снизу величины $a_3(N)$:

$$a_3(N) \gg \exp(-C(\log N)^{1/2}),$$

где C – абсолютная константа. Для произвольного k нижняя оценка величины $a_k(N)$ была получена в [11].

Методы Семереди дают очень слабые оценки сверху для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только В. Т. Гауэрс [12] в 2001 г. получил первый эффективный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$. Он доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.3 (В. Т. Гауэрс, 2001). *Для всех $k \geq 4$ выполнено*

$$a_k(N) \ll \frac{1}{(\log \log N)^{c_k}},$$

причем константа c_k зависит только от k .

В статье [13] и книге [3] изучалось следующее обобщение теоремы Рота. Рассмотрим двумерную решетку $\{1, 2, \dots, N\}^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2} \max\{|A| : A \subseteq \{1, 2, \dots, N\}^2, A \text{ не содержит} \\ \text{троек вида } \{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}, d > 0\}. \quad (1.3)$$

Тройка из формулы (1.3) называется *уголком*. В работах [3], [13] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к нулю, когда N стремится к бесконечности. В. Т. Гауэрс (см. [12]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к нулю.

Следующая теорема была доказана в [14], [15] (см. также [16]–[19]).

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть $\delta > 0$ и $N \gg \exp \exp(\delta^{-73})$. Пусть также $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ – произвольное подмножество мощности не меньше δN^2 . Тогда A содержит уголок.*

Таким образом, получена оценка величины $L(N)$ сверху:

$$L(N) \ll \frac{1}{(\log \log N)^{1/73}}.$$

Вопрос об оценках сверху для функции $L(N)$ в группе $\mathbf{F}_2^n$ был рассмотрен в работах [20] и [21]. В настоящей работе мы исследуем поведение величины $L(N)$ в произвольной абелевой группе.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Пусть G – конечная абелева группа с аддитивной групповой операцией $+$. В этом случае *уголком* называется тройка $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть G – конечная абелева группа и $A \subseteq G \times G$ – произвольное подмножество, $|A| \gg |G|^2/(\log \log |G|)^c$, где $c > 0$ – абсолютная константа. Тогда A содержит уголок.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. В качестве константы c в теореме 1.5 можно взять число $1/22$.

Ясно, что теорема 1.5 является естественным обобщением теоремы 1.4. Заметим, что подобные обобщения теоремы Рота и теорем 1.1, 1.3 были получены в работах [22]–[26].

Доказательство теоремы 1.5 содержится в § 3–6 и проводится с помощью применения итерационной процедуры. Приведем рассуждения, поясняющие основные идеи доказательства.

Пусть G – произвольная абелева группа, $A \subseteq G \times G$, $|A| \gg |G|^2/(\log \log |G|)^c$. Для доказательства теоремы 1.5 требуется найти уголок в множестве A . На каждом шаге итерационной процедуры мы доказываем следующее: либо A “достаточно регулярно”, либо “плотность” A (некоторая величина, связанная с A) может быть увеличена. Подходящее определение “достаточно регулярных” множеств (так называемых равномерных множеств) является одной из основных целей нашего доказательства.

Если A – случайное множество мощности $\delta|G|^2$, то A содержит примерно $\delta^3|G|^3$ уголков. Будем говорить, что A – *регулярное множество* (или, другими словами, A есть α -*равномерное множество*), если оно содержит асимптотически такое же число уголков.

Пусть E_1, E_2 – подмножества некоторого множества $\Lambda \subseteq G$, которое мы выберем позже. Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, имеющее мощность $\delta|E_1||E_2|$. Скажем, что множество A является α -*равномерным относительно прямоугольной нормы*, если, грубо говоря, количество четверок вида $\{(x, y), (x + d, y), (x, y + s), (x + d, y + s)\}$, принадлежащих $A \times A \times A \times A$, не превосходит $(\delta^4 + \alpha)|E_1|^2|E_2|^2$, $\alpha > 0$. На самом деле нам понадобится несколько другое определение α -равномерности, которое будет зависеть от множества Λ . В § 3 мы докажем, что если E_1, E_2 имеют не слишком большие коэффициенты Фурье и множество A является α -равномерным относительно прямоугольной нормы, то A содержит примерно столько уголков, сколько и случайное множество (т. е. множество, каждый элемент которого принадлежит ему с вероятностью δ). Простые примеры показывают (см., например, [15]), что какие-либо ограничения, налагаемые на коэффициенты Фурье множества A , не гарантируют, что A будет α -равномерно относительно прямоугольной нормы. Точнее, существует множество A_0 с не слишком большими коэффициентами Фурье, но большим числом четверок $\{(x, y), (x + d, y), (x, y + s), (x + d, y + s)\} \in A_0 \times A_0 \times A_0 \times A_0$. С другой стороны, мы можем дать правильное определение α -равномерных относительно прямоугольной нормы множеств, используя так называемую прямоугольную норму (см. § 3).

Предположим теперь, что A не является α -равномерным относительно прямоугольной нормы. Иначе говоря, это означает, что множество A не обладает случайными свойствами. Точный смысл последнего высказывания состоит в том, что A имеет чуть большую плотность $\delta + c(\delta)$, $c(\delta) > 0$, в некотором декартовом произведении $F_1 \times F_2$, $F_1 \subseteq E_1$, $F_2 \subseteq E_2$ (см. § 4). Поскольку плотность любого множества не превосходит единицы, то такое увеличение плотности может происходить лишь конечное число раз. Следовательно, наша итерационная

процедура обязана остановиться после конечного числа шагов. Это означает, что в ходе нашего алгоритма мы найдем α -равномерное относительно прямоугольной нормы подмножество множества A и, как следствие, уголок в A .

Структура декартова произведения $F_1 \times F_2$ не обязательно регулярна (в том смысле, что множества F_1, F_2 могут иметь большие коэффициенты Фурье), и, строго говоря, мы не можем провести следующий шаг итерационной процедуры. Чтобы преодолеть эту сложность, мы находим некоторое подмножество Λ , скажем Λ' , и вектор $\vec{t} = (t_1, t_2) \in G \times G$ такие, что множества $(F_1 - t_1) \cap \Lambda'$ и $(F_2 - t_2) \cap \Lambda'$ имеют не слишком большие коэффициенты Фурье (см. § 5).

Теперь мы можем провести следующую итерацию, что позволяет получить доказательство нашего основного результата. В § 6 мы объединяем утверждения из предыдущих параграфов и выводим из них теорему 1.5.

В нашем доказательстве мы выбираем в качестве Λ *множество Бора* (см. [6], [27], [28] и др.). Заметим, что в доказательстве теоремы 1.2, представляющей собой наилучший на сегодняшний день результат об оценке величины $a_3(N)$, использовались именно эти множества. Свойства множеств Бора рассматриваются в § 2.

Как видно из описанной выше схемы, в нашем доказательстве не используется теорема о разложении конечной абелевой группы G в сумму циклических подгрупп G_i . Такое разложение оказывается малоприменимым для достижения наших целей, поскольку не ясно, как контролировать размер подгрупп G_i . Чтобы перенести результат об уголках, полученный для подмножеств множества $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$, на группу G , нам приходится использовать модификацию рассуждений из [12], [15], [18], [27]. Уменьшение, по сравнению со статьей [15], константы c произошло в силу более аккуратных вычислений.

В следующих работах автор собирается доказать многомерный аналог теоремы 1.5.

§ 2. О множествах Бора

Пусть $G = (G, +)$ – конечная абелева группа с аддитивной групповой операцией $+$. Пусть A – подмножество G . Удобно обозначить через $A(x)$ характеристическую функцию этого множества. Иными словами, $A(x) = 1$, если $x \in A$, и $A(x) = 0$ в противном случае. Обозначим через $\widehat{G}$ двойственную группу для группы G . Иными словами, пусть $\widehat{G}$ – группа гомоморфизмов ξ из G в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\xi: x \rightarrow \xi \cdot x$. Хорошо известно, что группа $\widehat{G}$ изоморфна G . Обозначим через N мощность G .

Одним из основных понятий работы [27] являлось понятие множества Бора.

Пусть S – подмножество множества $\widehat{G}$, $|S| = d$, $\varepsilon > 0$ – действительное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть

$$\Lambda(S, \varepsilon) = \{n \in G \mid \|\xi \cdot n\| < \varepsilon \ \forall \xi \in S\},$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого. Множество $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ называется *множеством Бора*.

Множество $S \subseteq \widehat{G}$ называется *порождающим множеством* для множества Бора Λ . Число d называется *размерностью* множества Бора Λ и обозначается $\dim \Lambda$. Если $M = \Lambda + n$, $n \in G$, – трансляция Λ , то положим $\dim M = \dim \Lambda$.

Другие конструкции множеств Бора (так называемые *гладкие* множества Бора) были приведены в статьях [28], [29].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $0 < \kappa < 1$ – действительное число. Множество Бора $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ называется κ -регулярным (или просто *регулярным*), если для всех ε' таких, что

$$|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\kappa}{100d} \cdot \varepsilon,$$

выполнено

$$1 - \kappa < \frac{|\Lambda(S, \varepsilon')|}{|\Lambda(S, \varepsilon)|} < 1 + \kappa.$$

Отметим, что определение 2.2 зависит от размерности множества Бора Λ .

Нам понадобятся несколько результатов о множествах Бора (см. [27] и [28]).

ЛЕММА 2.3. Пусть $\Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора, $|S| = d$. Тогда выполнено неравенство $|\Lambda(S, \varepsilon)| \geq \varepsilon^d N$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $0 < \kappa < 1$ – действительное число и $\Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора. Тогда найдется ε_1 , $\varepsilon/2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, такое, что $\Lambda(S, \varepsilon_1)$ – κ -регулярное множество Бора.

В настоящей статье все множества Бора будут регулярными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть f, g – некоторые функции из G в $\mathbb{C}$. Сверткой функций f и g называется функция

$$(f * g)(n) = \sum_{s \in G} f(s)g(n - s).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$ – действительное число и $\Lambda(S, \varepsilon_0)$ – множество Бора, $S \subseteq \widehat{G}$, $|S| = d$. Регулярное множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$ называется ε -сопровождающим множества $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$, если $S \subseteq S'$ и $\varepsilon\varepsilon_0/2 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon\varepsilon_0$.

Из леммы 2.4 вытекает, что для любого множества Бора существует его ε -сопровождающее.

Будем полагать, что $S' = S$, если не оговорено противное.

Пусть n – произвольный элемент группы G и Λ – некоторое множество Бора. Будем говорить, что множество Бора Λ' является ε -сопровождающим множества $\Lambda + n$, если Λ' есть ε -сопровождающее множества Λ .

Следующая лемма также принадлежит Ж. Бургену [27]. Для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\kappa > 0$ – действительное число, $S \subseteq \widehat{G}$, $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ – κ -регулярное множество Бора и $\Lambda' = \Lambda(S, \varepsilon')$ – его $(\kappa/(100d))$ -сопровождающее. Тогда, во-первых, существует не более $|\Lambda|(1 + \kappa)$ значений n , для которых $(\Lambda * \Lambda')(n) > 0$, и, во-вторых, найдется не менее $|\Lambda|(1 - \kappa)$ элементов n таких, что $(\Lambda * \Lambda')(n) = |\Lambda'|$. Кроме того,

$$\left\| \frac{1}{|\Lambda'|} (\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_1 < 2\kappa|\Lambda|. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(\Lambda * \Lambda')(n) > 0$, то найдется m такое, что для всех $\xi \in S$ выполнено

$$\|\xi \cdot m\| < \frac{\kappa}{100d}\varepsilon, \quad \|\xi \cdot (n - m)\| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Применяя неравенство (2.2), получаем, что для каждого $\xi \in S$ справедливо неравенство

$$\|\xi \cdot n\| < \left(1 + \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon. \quad (2.3)$$

Отсюда

$$n \in \Lambda^+ := \Lambda\left(S, \left(1 + \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon\right). \quad (2.4)$$

Из леммы 2.4 вытекает оценка $|\Lambda^+| \leq (1 + \kappa)|\Lambda|$.

С другой стороны, если

$$n \in \Lambda^- := \Lambda\left(S, \left(1 - \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon\right), \quad (2.5)$$

то $(\Lambda * \Lambda')(n) = |\Lambda'|$. Применяя лемму 2.4, получаем $|\Lambda^-| \geq (1 - \kappa)|\Lambda|$.

Докажем (2.1). Имеем

$$\left\| \frac{1}{|\Lambda'|} (\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_1 = \left\| \frac{1}{|\Lambda'|} (\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_{l^1(\Lambda^+ \cup \Lambda^-)} \leq |\Lambda^+| - |\Lambda^-| < 2\kappa|\Lambda|.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Справедливы неравенства $|\Lambda| \leq |\Lambda + \Lambda'| \leq (1 + 2\kappa)|\Lambda|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Пусть $\Lambda^x(n) = \Lambda(n - x)$. Поскольку выполнено равенство $(\Lambda^x * \Lambda')(n) = (\Lambda * \Lambda')(n - x)$, легко видеть, что неравенство (2.1) выполнено и для трансляций множеств Бора $\Lambda + x$.

Обозначим через Λ^+ и Λ^- множества Бора, определенные в формулах (2.4) и (2.5) соответственно. Ясно, что $\Lambda^- \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda^+$.

Из леммы 2.7 вытекают неравенства $|\Lambda^+| \leq |\Lambda|(1 + \kappa)$ и $|\Lambda^-| \geq |\Lambda|(1 - \kappa)$. Заметим, что для всех $s \in \Lambda'$ выполнено $\Lambda^- \subseteq \Lambda + s$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – некоторые множества, $|\mathcal{A}| \neq 0$. Через $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ обозначим величину $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$.

Пусть $\Lambda \subseteq G$ – множество Бора и вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ принадлежит $G \times G$. Через $\Lambda_{\vec{x}}$ обозначим множество $(\Lambda + x_1) \times (\Lambda + x_2) \subseteq G \times G$. Пусть $\vec{n} \in G \times G$. Обозначим через $\Lambda(\vec{n})$ характеристическую функцию множества $\Lambda \times \Lambda$. Будем записывать $\vec{s} \in \Lambda$, $\vec{s} = (s_1, s_2)$, если $s_1 \in \Lambda$ и $s_2 \in \Lambda$.

ЛЕММА 2.10. Пусть Λ – множество Бора, Λ' – его ε -сопровождающее, $\varepsilon = \kappa/(100d)$, $\vec{x}$ – некоторый вектор и $E \subseteq G \times G$. Тогда

$$\left| \delta_{\Lambda_{\vec{x}}}(E) - \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_{\vec{x}}} \delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E) \right| \leq 4\kappa. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_{\vec{x}}} \delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E) = \frac{1}{|\Lambda|^2 |\Lambda'|^2} \sum_{\vec{s}} E(\vec{s}) \sum_{\vec{n}} \Lambda(\vec{n} - \vec{x}) \Lambda'(\vec{s} - \vec{n}) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|^2 |\Lambda'|^2} \sum_{\vec{s}} E(\vec{s}) \sum_{\vec{n}} \Lambda(\vec{n}) \Lambda'(\vec{s} - \vec{x} - \vec{n}).\end{aligned}$$

Применяя лемму 2.7, находим

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{s}} E(\vec{s}) \Lambda(\vec{s} - \vec{x}) + 4\vartheta\kappa = \delta_{\Lambda_{\vec{x}}}(E) + 4\vartheta\kappa,$$

где $|\vartheta| \leq 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Ясно, что справедлив и одномерный аналог леммы 2.10.

Пусть $\Lambda_1 = \Lambda(S_1, \varepsilon_1)$, $\Lambda_2 = \Lambda(S_2, \varepsilon_2)$ – два множества Бора и $S_1, S_2 \subseteq \widehat{G}$. Будем записывать $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, если $S_2 \subseteq S_1$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Заметим, что если $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, то произвольное ε -сопровождающее множества Λ_1 является ε' -сопровождающим множества Λ_2 (при этом, вообще говоря, $\varepsilon' \neq \varepsilon$).

§ 3. Об α -равномерности

Пусть f – некоторая функция из G в $\mathbb{C}$, $N = |G|$. Обозначим через $\hat{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции f :

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{x \in G} f(x) e(-\xi \cdot x),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$. Мы будем использовать несколько известных формул из анализа Фурье:

$$\sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2, \quad (3.1)$$

$$\sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{G}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{y \in G} \left| \sum_{x \in G} f(x) g(y - x) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in \widehat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi)|^2. \quad (3.3)$$

Пусть Λ – множество Бора и A – произвольное подмножество множества Λ . Пусть $|A| = \delta|\Lambda|$. Функция $f(s) = (A(s) - \delta)\Lambda(s) = A(s) - \delta\Lambda(s)$ называется *балансовой функцией множества A* .

Обозначим через $\mathbf{D}$ замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом 1. Пусть R – произвольное множество, $R \subseteq G$, а f – любая комплексная функция на G . Будем записывать $f: R \rightarrow \mathbf{D}$, если f равно нулю вне множества R .

Следующее определение принадлежит Гауэрсу [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $f: \Lambda \rightarrow \mathbf{D}$ называется α -равномерной, если

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \alpha|\Lambda|. \quad (3.4)$$

Будем говорить, что множество A является α -равномерным, если его балансовая функция α -равномерна.

Будем записывать для краткости $\sum_s$ вместо суммы $\sum_{s \in G}$ и $\sum_{\xi}$ вместо суммы $\sum_{\xi \in \hat{G}}$.

Докажем аналог леммы 2.2 из [12].

ЛЕММА 3.2. Пусть Λ – множество Бора, и пусть $f: \Lambda \rightarrow \mathbf{D}$ – произвольная α -равномерная функция. Тогда для любой функции $g: G \rightarrow \mathbf{D}$ выполнено

$$\sum_k \left| \sum_s f(s)g(k-s) \right|^2 \leq \alpha^2 |\Lambda|^2 \|g\|_2^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (3.3), находим

$$\sum_k \left| \sum_s f(s)g(k-s) \right|^2 = \sum_{\xi} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi)|^2. \quad (3.5)$$

Поскольку функция f является α -равномерной, то $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \alpha|\Lambda|$. Применяя последнее неравенство и (3.2), получаем

$$\sum_k \left| \sum_s f(s)g(k-s) \right|^2 \leq \alpha^2 |\Lambda|^2 \frac{1}{N} \sum_{\xi} |\hat{g}(\xi)|^2 = \alpha^2 |\Lambda|^2 \|g\|_2^2. \quad (3.6)$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $S \subseteq G$ – произвольное множество и Λ' – множество Бора. Пусть множество $E \subseteq \Lambda'$ является α -равномерным и имеет мощность $\delta|\Lambda'|$. Пусть также g – любая функция из S в $[-1, 1]$. Тогда для всех, кроме, быть может, $\alpha^{2/3}|S|$, значений k выполнено

$$|(E * g)(k) - \delta(\Lambda' * g)(k)| \leq \alpha^{2/3} |\Lambda'|. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – балансовая функция множества $E \cap \Lambda'$. Применяя лемму 3.2, находим

$$\begin{aligned} \sum_k |(E * g)(k) - \delta(\Lambda' * g)(k)|^2 &= \sum_k \left| \sum_s f(s)g(k-s) \right|^2 \\ &\leq \alpha^2 |\Lambda'|^2 \|g\|_2^2 \leq \alpha^2 |\Lambda'|^2 |S|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следствие доказано.

Пусть Λ_1 и Λ_2 – множества Бора и $E_1 \times E_2$ – произвольное подмножество множества $\Lambda_1 \times \Lambda_2$. Пусть также $f: \Lambda_1 \times \Lambda_2 \rightarrow \mathbf{D}$ – некоторая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть α – действительное число, $\alpha \in [0, 1]$. Функция $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbf{D}$ называется α -равномерной относительно прямоугольной нормы, если

$$\sum_{x, x', y, y'} f(x, y) \overline{f(x', y)} \overline{f(x, y')} f(x', y') \leq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2. \quad (3.9)$$

Заметим, что функция f является α -равномерной относительно прямоугольной нормы тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m, p} \left| \sum_k f(k, m) \overline{f(k, p)} \right|^2 \leq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2. \quad (3.10)$$

Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, $|A| = \delta |E_1| |E_2|$. Функция $f(x, y) = (A(x, y) - \delta) \cdot (E_1 \times E_2)(x, y)$ называется *балансовой функцией множества A* . Будем говорить, что множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является α -равномерным относительно прямоугольной нормы, если его балансовая функция α -равномерна относительно прямоугольной нормы.

Пусть f – произвольная функция, $f: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$. Определим величину $\|f\|$ по формуле

$$\|f\| = \left| \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) \overline{f(x', y)} \overline{f(x, y')} f(x', y') \right|^{1/4}. \quad (3.11)$$

ЛЕММА 3.5. Формула (3.11) определяет норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [18].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть Λ – множество Бора, $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta |\Lambda|$, α, ε – положительные числа. Множество Q называется (α, ε) -равномерным, если существует множество Λ' , являющееся ε -сопровождающим множества Λ и такое, что мощность множества

$$B := \{m \in \Lambda \mid \|(Q \cap (\Lambda' + m) - \delta(\Lambda' + m))^\wedge\|_\infty \geq \alpha |\Lambda'|\}$$

не превосходит $\alpha |\Lambda|$:

$$|B| \leq \alpha |\Lambda|, \quad (3.12)$$

кроме того,

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{m \in \Lambda} |\delta_{\Lambda' + m}(Q) - \delta|^2 \leq \alpha^2, \quad (3.13)$$

$$\|(Q \cap \Lambda - \delta \Lambda)^\wedge\|_\infty \leq \alpha |\Lambda|. \quad (3.14)$$

Ясно, что определение (α, ε) -равномерности зависит от множества Λ . Мы не предполагаем, что Λ' имеет то же порождающее множество, что и Λ . Если Q является (α, ε) -равномерным множеством и Λ' есть ε -сопровождающее множества Λ , то иногда мы будем считать, что Λ' является ε -сопровождающим для Λ , так что выполнены неравенства (3.12)–(3.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Пусть $B^* = \{m \in \Lambda \mid |\delta_{\Lambda' + m}(Q) - \delta| \geq \alpha^{2/3}\}$. Из неравенства (3.13) вытекает оценка

$$|B^*| \leq \alpha^{2/3} |\Lambda|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Условие (3.14) не так важно, как (3.12) и (3.13). Более слабое неравенство

$$\|(Q \cap \Lambda - \delta\Lambda)^\wedge\|_\infty \leq 4\alpha|\Lambda|$$

вытекает из (3.12) и (3.13) (см. предложение 3.13).

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, и $\varepsilon > 0$ – действительное число. Пусть также E_1, E_2 – подмножества множеств Λ_1, Λ_2 соответственно и, кроме того, $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $E_2 = \beta_2|\Lambda_2|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Функция $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbf{D}$ называется (α, ε) -равномерной относительно прямоугольной нормы, если существует множество Λ' такое, что Λ' есть ε -сопровождающее множества Λ_1 и

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_1 \times \Lambda_2, \varepsilon}^4 &= \sum_{i \in \Lambda_1} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_{m, u} \Lambda'(m - k - i) \Lambda'(u - k - i) \\ &\times \left| \sum_r \Lambda'(k + r - j) f(r, m) f(r, u) \right|^2 \leq \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$. Пусть E_1, E_2 – подмножества множеств Λ_1, Λ_2 соответственно и $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $E_2 = \beta_2|\Lambda_2|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Пусть $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|A| = \delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1||\Lambda_2|$ и $f(\vec{s}) = A(\vec{s}) - \delta(E_1 \times E_2)(\vec{s})$. Множество A называется $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерным относительно прямоугольной нормы, если существуют множества $\Lambda', \Lambda'_\varepsilon$ такие, что Λ' есть ε -сопровождающее множества Λ_1 , а Λ'_ε является ε -сопровождающим множества Λ' и мощность множества

$$B = \{l \in \Lambda_1 \mid \|f_l\|_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon}^4 > \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'_\varepsilon|^4 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2|\},$$

где $f_l(\vec{s}) := f(s_1 + l, s_2) \Lambda'(s_1)$, $l \in \Lambda_1$, не превосходит $\alpha_1 |\Lambda_1|$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|f_l\|_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon}^4 &= \sum_{i \in \Lambda'} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_{m, u} \Lambda''(m - k - i) \Lambda''(u - k - i) \\ &\times \left| \sum_r \Lambda''(k + r - j) f_l(r, m) f_l(r, u) \right|^2 \\ &= \sum_{i \in \Lambda' + l} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_{m, u} \Lambda''(m - k - i) \Lambda''(u - k - i) \\ &\times \left| \sum_r \Lambda''(k + r - j) \tilde{f}_l(r, m) \tilde{f}_l(r, u) \right|^2, \end{aligned}$$

где $\Lambda'' = \Lambda'_\varepsilon$ и $\tilde{f}_l$ – ограничение функции f на $(\Lambda' + l) \times \Lambda_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Нам необходим параметр α_1 (мы выбираем $\alpha_1 = 2^{-7}$; см. ниже теорему 3.17) только для того, чтобы увеличить константу c в теореме 1.5. Для доказательства теоремы 1.5 с константой c , равной, например, $1/1000$, можно взять параметр α_1 равным α .

ЛЕММА 3.12. Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε -сопровождающее множества Λ , Λ'' – ε -сопровождающее множества Λ' и ε^2 -сопровождающее множества Λ , $\varepsilon = \alpha^2/(400d)$, $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta\Lambda$ и $\alpha > 0$. Пусть также

$$\Omega_1 = \left\{ s \in \Lambda \mid |\delta_{\Lambda'+s}(Q) - \delta| \geq 4\alpha^{1/2} \text{ или } \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{n \in \Lambda'+s} |\delta_{\Lambda''+n}(Q) - \delta|^2 \geq 4\alpha^{1/2} \right\},$$

$$\Omega_2 = \{s \in \Lambda \mid \|(Q \cap (\Lambda' + s) - \delta(\Lambda' + s))^\wedge\|_\infty \geq 4\alpha^{1/4}|\Lambda'|\}.$$

1) Если выполнено

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{n \in \Lambda} |\delta_{\Lambda''+n}(Q) - \delta|^2 \leq \alpha^2, \quad (3.16)$$

то $|\Omega_1| \leq 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

2) Если мощность множества

$$\Omega^* = \{s \in \Lambda \mid \|(Q \cap (\Lambda'' + s) - \delta(\Lambda'' + s))^\wedge\|_\infty \geq \alpha|\Lambda''|\} \quad (3.17)$$

не превосходит $\alpha|\Lambda|$, то $|\Omega_2| \leq 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

3) Пусть Q – произвольное (α, ε^2) -равномерное подмножество множества Λ и Λ'' – ε^2 -сопровождающее множества Λ , так что выполнены неравенства (3.12)–(3.14). Пусть $\tilde{\Omega} = \{s \in \Lambda \mid \text{множество } (Q - s) \cap \Lambda' \text{ не } (8\alpha^{1/4}, \varepsilon)\text{-равномерно}\}$. Тогда $|\tilde{\Omega}| \leq 8\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Пусть $\delta'_n = \delta_{\Lambda'+n}(Q)$, $\delta''_n = \delta_{\Lambda''+n}(Q)$, $\kappa = \alpha^2/4$ и $\varepsilon_3 = \alpha^{1/2}$. Рассмотрим множества

$$B_s = \{n \in \Lambda' + s \mid |\delta''_n - \delta| \geq \varepsilon_3\}, \quad G_s = \{n \in \Lambda' + s \mid |\delta''_n - \delta| < \varepsilon_3\}, \quad s \in \Lambda,$$

и множества

$$B = \{s \in \Lambda \mid |B_s| \geq \varepsilon_3|\Lambda'|\}, \quad G = \{s \in \Lambda \mid |B_s| < \varepsilon_3|\Lambda'|\}.$$

Если $s \in G$, то $|B_s| < \varepsilon_3|\Lambda'|$. Применяя лемму 2.10, находим

$$\begin{aligned} |\delta'_s - \delta| &\leq \left| \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in \Lambda'+s} \delta''_x - \delta \right| + 4\kappa \leq \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in \Lambda'+s} |\delta''_x - \delta| + 4\kappa \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in B_s} |\delta''_x - \delta| + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in G_s} |\delta''_x - \delta| + 4\kappa < \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3|G_s|}{|\Lambda'|} + 4\kappa \leq 4\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Кроме того, для всех $s \in G$ выполнено

$$\frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in \Lambda'+s} |\delta''_x - \delta|^2 \leq \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in B_s} |\delta''_x - \delta|^2 + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{x \in G_s} |\delta''_x - \delta|^2 \leq \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 \leq 2\varepsilon_3. \quad (3.19)$$

Оценим мощность множества B . Имеем

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\geq \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{s \in B} |\delta''_s - \delta|^2 \geq \frac{1}{|\Lambda'||\Lambda|} \sum_{s \in B} \sum_{n \in \Lambda'+s} |\delta''_n - \delta|^2 - 4\kappa \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda'||\Lambda|} \sum_{s \in B} \sum_{n \in B_s} |\delta''_n - \delta|^2 - 4\kappa \geq \frac{|B|\varepsilon_3^3|\Lambda'|}{|\Lambda'||\Lambda|} - 4\kappa. \end{aligned}$$

Отсюда $|B| \leq 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$. Из неравенств (3.18), (3.19) легко видеть, что $\Omega_1 \subseteq B$.

Для доказательства утверждения 2) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\Lambda||\Lambda'|} \sum_{s \in \Lambda} \|(Q \cap (\Lambda'' + s) - \delta(\Lambda'' + s))^\wedge\|_\infty \\
 &= \frac{1}{|\Lambda||\Lambda'|} \sum_{s \in \Omega^*} \|(Q \cap (\Lambda'' + s) - \delta(\Lambda'' + s))^\wedge\|_\infty \\
 & \quad + \frac{1}{|\Lambda||\Lambda'|} \sum_{s \in \Lambda \setminus \Omega^*} \|(Q \cap (\Lambda'' + s) - \delta(\Lambda'' + s))^\wedge\|_\infty \\
 & \leq \alpha + \frac{\alpha|\Lambda'|}{|\Lambda||\Lambda'|} |\Lambda \setminus \Omega^*| \leq 2\alpha,
 \end{aligned}$$

и определить следующие множества:

$$\begin{aligned}
 B'_s &= \{n \in \Lambda' + s \mid \|(Q \cap (\Lambda'' + n) - \delta(\Lambda'' + n))^\wedge\|_\infty \geq \varepsilon_4 |\Lambda''|\}, \\
 G'_s &= \{n \in \Lambda' + s \mid \|(Q \cap (\Lambda'' + n) - \delta(\Lambda'' + n))^\wedge\|_\infty < \varepsilon_4 |\Lambda''|\}, \quad s \in \Lambda, \\
 B' &= \{s \in \Lambda \mid |B_s| \geq \varepsilon_4 |\Lambda'|\}, \quad G' = \{s \in \Lambda \mid |B_s| < \varepsilon_4 |\Lambda'|\},
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_4 = \alpha^{1/4}$. После этого мы можем применить рассуждения, использованные выше (применяя лемму 2.7 вместо леммы 2.10).

Докажем утверждение 3). Поскольку Q есть (α, ε^2) -равномерное подмножество множества Λ , то для Q выполнено (3.16). Кроме того, $|\Omega^*| \leq \alpha|\Lambda|$ и $|B|, |B'| \leq 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$ (см. выше). Легко видеть, что для всех $s \notin B \cup B'$ множество $(Q - s) \cap \Lambda'$ является $(8\alpha^{1/4}, \varepsilon)$ -равномерным.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Пусть Λ – множество Бора и множество $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta|\Lambda|$, является (α, ε) -равномерным, $\varepsilon = \alpha/(400d)$. Тогда

$$\|(Q \cap \Lambda - \delta\Lambda)^\wedge\|_\infty < 4\alpha|\Lambda|. \quad (3.20)$$

Мы не будем использовать предложение 3.13 в доказательстве теоремы 1.5.

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, и $E_1 \subseteq \Lambda_1$, $E_2 \subseteq \Lambda_2$, $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $|E_2| = \beta_2|\Lambda_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество $E_1 \times E_2$. Пусть $A \subseteq \mathcal{P}$, $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть H и W – две копии множества A .

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{D}$ – (α, ε) -равномерная относительно прямоугольной нормы функция. Предположим, что множества E_1, E_2 являются (α_0, ε) -равномерными, $\alpha_0 = 2^{-50}\alpha^2\beta_1^{12}\beta_2^{12}$, $\varepsilon = 2^{-10}\varepsilon_0^2$, $\varepsilon_0 = 2^{-10}\alpha_0^2/(100d)$. Пусть $\Lambda_1 - \varepsilon_0$ -сопровождающее множества Λ_2 . Тогда либо

$$\left| \sum_{s_1, s_2, r} H(s_1, s_2) W(s_1 + r, s_2 + r) f(s_1, s_2 + r) \right| \leq 16\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|, \quad (3.21)$$

либо найдутся множество Бора Λ' , два множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$, $F_1 \subseteq E_1 \cap (\Lambda' + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\Lambda' + y_2)$, такие, что $\Lambda' - \varepsilon_0$ -сопровождающее множества Λ_1 и

$$|F_1| \geq 2^{-2}\beta_1|\Lambda'|, \quad |F_2| \geq 2^{-2}\beta_2|\Lambda'|, \quad (3.22)$$

$$\delta_{F_1 \times F_2}(A) \geq 2\delta. \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ' – некоторое ε_0 -сопровождающее множества Λ_1 , которое мы выберем ниже. Пусть

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(1)} &= \{s \in \Lambda_1 \mid \|(E_1 \cap (\Lambda' + s) - \delta(\Lambda' + s))^\wedge\|_\infty \geq \alpha_0\}, \\ \Omega_2^{(1)} &= \{s \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_1) - \beta_1| \geq \alpha_0^{2/3}\}, \\ \Omega_1^{(2)} &= \{s \in \Lambda_2 \mid \|(E_2 \cap (\Lambda' + s) - \delta(\Lambda' + s))^\wedge\|_\infty \geq \alpha_0\}, \\ \Omega_2^{(2)} &= \{s \in \Lambda_2 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_2) - \beta_2| \geq \alpha_0^{2/3}\}.\end{aligned}$$

Пусть также $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)} \cup \Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2 = \Omega_1^{(2)} \cup \Omega_2^{(2)}$. По условию множества E_1, E_2 являются (α_0, ε) -равномерными. Пусть Λ' – ε_0 -сопровождающее множества Λ_1 такое, что выполнены неравенства (3.12)–(3.14). Из определений и леммы 3.12 вытекает, что $|\Omega_l^{(1)}| \leq \alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$, $|\Omega_l^{(2)}| \leq \alpha_0^{2/3}|\Lambda_2|$, $l = 1, 2$. Следовательно, $|\Omega_1| \leq 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$ и $|\Omega_2| \leq 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_2|$.

Пусть $g_i(\vec{s}) = g_i(k, m) = W(k, m)\Lambda'(k - i)$, $i \in \Lambda_1$, и $h_j(\vec{s}) = h_j(k, m) = H(k, m)\Lambda'(m - j)$, $j \in \Lambda_2$. Имеем $k \in \Lambda_1$, $m \in \Lambda_2$ и $k + r \in \Lambda_1$ в (3.21). Значит, сумма (3.21) не превосходит $|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$. Пусть также $\lambda_i = \Lambda' + i$ и $\mu_j = \Lambda' + j$. Применяя лемму 2.7, находим

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sum_{s_1, s_2, r} H(s_1, s_2)W(s_1 + r, s_2 + r)f(s_1, s_2 + r) \\ &= \sum_{k, m} \sum_r H(k, m)W(k + r, m + r)f(k, m + r)\Lambda_1(k + r)\Lambda_2(m) \\ &= \frac{1}{|\Lambda'|^2} \sum_{k, m} \sum_r H(k, m)W(k + r, m + r)f(k, m + r)(\Lambda_1 * \Lambda')(k + r)(\Lambda_2 * \Lambda')(m) \\ &\quad + 16\vartheta_0\kappa|\Lambda_1|^2|\Lambda_2| \\ &= \frac{1}{|\Lambda'|^2} \sum_{i \in \Lambda_1} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_{k, m} \sum_r h_j(k - r, m)g_i(k, m + r)f(k - r, m + r) + 16\vartheta_0\kappa|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|,\end{aligned}\tag{3.24}$$

где $|\vartheta_0| \leq 1$ и $\kappa \leq 2^{-10}\alpha_0^2$. Разобьем сумму σ_0 на пять слагаемых:

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 + \sigma'_0 + \sigma''_0 + \sigma'''_0 + R.\tag{3.25}$$

Суммирование в $\tilde{\sigma}_0$ проходит по $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, в σ'_0 – по $i \in \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, в σ''_0 – по $i \notin \Omega_1$, $j \in \Omega_2$, в σ'''_0 – по $i \in \Omega_1$, $j \in \Omega_2$, и $|R| \leq 16\varepsilon|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$. Оценим слагаемые σ'_0 , σ''_0 и σ'''_0 . Перепишем выражение для суммы σ_0 следующим образом:

$$\sigma_0 = \frac{1}{|\Lambda'|^2} \sum_{i \in \Lambda_1} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_{k, m} \sum_r h_j(k - r, m)g_i(k, m + r)f(k - r, m + r) + R.\tag{3.26}$$

Зафиксируем i и j в сумме (3.26). Имеем $k \in \lambda_i$ и $m \in \mu_j$. Далее, если $f(k - r, m + r)$ не равно нулю, то $k - r \in \Lambda_1$. Отсюда $r \in \lambda_i - \Lambda_1 = \Lambda' - \Lambda_1 + i$. Множество Λ' является ε_0 -сопровождающим множества Λ_1 . Применяя лемму 2.7, получаем, что r принадлежит некоторому множеству, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_1|$. Отсюда

$$|\sigma'_0| \leq \frac{1}{|\Lambda'|^2} 2|\Omega_1||\Lambda_2||\Lambda'|^2|\Lambda_1| \leq 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|.\tag{3.27}$$

Аналогично, $|\sigma''_0| \leq 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$ и $|\sigma'''_0| \leq 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$.

Выберем произвольные i и j такие, что $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$. Пусть $g(\vec{s}) = g_i(\vec{s})$, $h(\vec{s}) = h_j(\vec{s})$ и $\Lambda_1 \times \mu_j = \Lambda_1^{(1)} \times \Lambda_2^{(1)}$, $\lambda_i \times \Lambda_2 = \Lambda_1^{(2)} \times \Lambda_2^{(2)}$. Пусть также $E_2^{(1)} = E_2 \cap \Lambda_2^{(1)}$, $E_1^{(2)} = E_1 \cap \Lambda_1^{(2)}$, $\beta_2^{(1)} = |E_2^{(1)}|/|\Lambda_2^{(1)}|$ и $\beta_1^{(2)} = |E_1^{(2)}|/|\Lambda_1^{(2)}|$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{ij} = \sum_{s_1, s_2, r} h(s_1, s_2) g(s_1 + r, s_2 + r) f(s_1, s_2 + r) \\ &= \sum_{k, m} h(k, m) E_2^{(1)}(m) \sum_r g(k + r, m + r) f(k, m + r). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Заметим, что k в (3.28) принадлежит множеству $\Lambda_1^{(2)}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |\sigma|^2 &\leq \|h\|_2^2 \sum_{k, m} E_2^{(1)}(m) \left| \sum_r g(k + r, m + r) f(k, m + r) \right|^2 \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{k, m} E_2^{(1)}(m) \sum_{r, p} g(k + r, m + r) f(k, m + r) g(k + p, m + p) f(k, m + p) \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{k, m, u} g(k, m) g(k + u, m + u) \sum_r E_2^{(1)}(m - r) f(k - r, m) f(k - r, m + u) \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{k, m, u} g(k, m) g(k + u, m + u) E_1^{(2)}(k) E_1^{(2)}(k + u) \\ &\quad \times \sum_r E_2^{(1)}(m - r) f(k - r, m) f(k - r, m + u). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Имеем $k \in \Lambda_1^{(2)}$ и $k - r \in \Lambda_1$. Отсюда $r \in k - \Lambda_1 \in \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Поскольку $m - r \in \Lambda_2^{(1)}$, то $m \in \Lambda_2^{(1)} + r \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. С другой стороны, $k + u \in \Lambda_1^{(2)}$. Следовательно, $u \in \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1^{(2)}$ и $m + u \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1 + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1^{(2)}$. Пусть $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda_1 + i$. Тогда $m, m + u \in \tilde{\Lambda}_i + j = Q_{ij} = Q$. Применяя лемму 2.7 для множества Бора Λ_1 и его ε_0 -сопровождающего Λ' , получаем, что мощность множества $\tilde{\Lambda}_i$ не превосходит $5|\Lambda_1|$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} |\sigma|^4 &\leq \|h\|_2^4 \left(\sum_k \sum_{m, u} g(k, m) g(k + u, m + u) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{k, m, u} E_1^{(2)}(k) E_1^{(2)}(k + u) \sum_{r, r'} E_2^{(1)}(m - r) E_2^{(1)}(m - r') \right. \\ &\quad \left. \times f(k - r, m) f(k - r, m + u) f(k - r', m) f(k - r', m + u) \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Пусть $\sigma^* = \sigma_{ij}^* = \sum_k \sum_{m, u} g(k, m) g(k + u, m + u)$, и пусть

$$\begin{aligned} \Omega' &= \left\{ s \in \Lambda_2 \mid |\delta_{\Lambda_1+s}(E_2) - \beta_2| \geq 4\alpha_0^{1/2} \text{ или} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{|\Lambda_1|} \sum_{n \in \Lambda_1+s} |\delta_{\Lambda'+n}(E_2) - \beta_2|^2 \geq 4\alpha_0^{1/2} \right\}, \quad G' = \Lambda_2 \setminus \Omega'. \end{aligned}$$

По условию Λ_1 – ε_0 -сопровождающее множества Λ_2 , а $E_2 - (\alpha_0, \varepsilon)$ -равномерное подмножество множества Λ_2 . Применяя лемму 3.12, находим $|\Omega'| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Пусть $\tilde{\Lambda} = \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda_1$. Поскольку Λ' – ε_0 -сопровождающее множества Λ_1 , то для всех $s \in G'$ выполнено $|\delta_{\tilde{\Lambda}+s}(E_2) - \beta_2| < 8\alpha_0^{1/2}$ и $\sum_{n \in \tilde{\Lambda}+s} |\delta_{\Lambda'+n}(E_2) - \beta_2|^2 < 8\alpha_0^{1/2}|\tilde{\Lambda}|$. Для любого $i \in \Lambda_1$ рассмотрим множество

$$\Omega^* = \Omega_i^* = \left\{ j \in \Lambda_2 \mid |\delta_{\tilde{\Lambda}+j}(E_2) - \beta_2| \geq 8\alpha_0^{1/2} \text{ или } \frac{1}{|\tilde{\Lambda}_i|} \sum_{n \in \tilde{\Lambda}_i+j} |\delta_{\Lambda'+n}(E_2) - \beta_2|^2 \geq 8\alpha_0^{1/2} \right\}. \quad (3.31)$$

Поскольку $(\Lambda_2 \setminus \Omega_i^*) \supseteq (\Lambda_2 \cap (G' - i))$, то $\Omega_i^* \subseteq (\Lambda_2 \setminus (G' - i))$. Так как Λ_1 является ε_0 -сопровождающим множества Λ_2 , то

$$|\Lambda_2 \setminus (G' - i)| = |(\Lambda_2 + i) \setminus G'| \geq |\Lambda_2^- \cap G'| \geq (1 - 8\alpha_0^{1/2} - 8\kappa_0)|\Lambda_2|, \quad \kappa_0 \leq \alpha_0^2.$$

Следовательно, $|\Omega_i^*| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2| + 8\kappa_0|\Lambda_2| \leq 16\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{|\Lambda'|^2} \sum_{i \notin \Omega_1, j \in \Omega_i^*} |\sigma_{ij}| \leq \frac{1}{|\Lambda'|^2} \sum_{i \notin \Omega_1} (16\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2| \cdot 2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|) \leq 32\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|. \quad (3.32)$$

Имеем $j \notin \Omega_2$. Предположим дополнительно, что $j \notin \Omega_i^*$. Пусть $\Omega'_2 = \Omega'_2(i) = \Omega_2 \cup \Omega_i^*$.

ЛЕММА 3.15. Для всех $i \notin \Omega_1$ и всех $j \notin \Omega_i^*$ выполнено следующее: либо

$$|\sigma_{ij}^*| \leq 16\delta\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|, \quad (3.33)$$

либо найдутся два множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$, $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, для которых выполняются неравенства (3.22) и (3.23).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Пусть T – подмножество множества G , $|T| = \delta|G|$, $E_1 = E_2 = G$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, и пусть g – характеристическая функция множества $\mathcal{A} = \bigsqcup_{x \in G} (\{x\} \times \{T+x\})$. Легко видеть, что в этом случае неравенство (3.33) является точным. С другой стороны, для $\mathcal{A}$, равного $\mathcal{A}$, неравенства (3.22), (3.23) не имеют места.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.15. Пусть $\tilde{E}_2^{(2)} = E_2 \cap Q$ и $\overline{E}_2^{(2)}(x) = \tilde{E}_2^{(2)}(-x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= \sum_{k, m, u} g(k, m)g(k + u, m + u) \leq \sum_{k, m, u} g(k, m)E_1^{(2)}(k + u)\tilde{E}_2^{(2)}(m + u) \\ &= \sum_{k, m} g(k, m)(E_1^{(2)} * \overline{E}_2^{(2)})(k - m) = \sum_{k', m} g(k' + m, m)(E_1^{(2)} * \overline{E}_2^{(2)})(k'). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Если зафиксировать k' в сумме из (3.34), то переменная m будет принадлежать множеству мощности $|\Lambda'|$. Как было указано выше, $|Q_{ij}| \leq 5|\Lambda_1|$. Из леммы 2.7 вытекает, что k' в сумме (3.34) принадлежит некоторому множеству мощности

не больше $8|\Lambda_1|$. Поскольку $i \notin \Omega_1$, то $E_1^{(2)}$ является α_0 -равномерным. Применяя следствие 3.3, находим

$$\sigma_{ij}^* \leq \beta_1^{(2)} \sum_{k', m} g(k' + m, m)(\lambda_i * \bar{E}_2^{(2)})(k') + 16\alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|.$$

Имеем $j \notin \Omega_i^*$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &\leq \beta_1^{(2)} \sum_{k', m} g(k' + m, m)(\lambda_i * E_2)(k') + 16\alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1| \\ &\leq \beta_1^{(2)} \beta_2 |\Lambda'| \sum_{k, m} g(k, m) + 32\alpha_0^{1/6} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Предположим, что $\sigma_{ij}^* > 16\delta\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|$. Поскольку $i \notin \Omega_1$, то $\beta_1/2 \leq \beta_1^{(2)} \leq 2\beta_1$. Применяя последнее неравенство и неравенство (3.35), получаем

$$\sum_{k, m} g(k, m) \geq 8\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_1|. \quad (3.36)$$

Напомним, что переменная m в сумме (3.36) принадлежит множеству $\tilde{\Lambda}_i + j$. Из леммы 2.7 вытекает оценка

$$\sum_{k, m} A(k, m)\Lambda'(k - i)\Lambda_1(m - i - j) \geq 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_1|. \quad (3.37)$$

Имеем $i \notin \Omega_1$ и $j \notin \Omega_i^*$. Отсюда и из неравенства (3.37) легко видеть, что найдутся вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ и два множества $F_1 \subseteq E_1 \cap (\Lambda' + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\Lambda' + y_2)$ такие, что неравенства (3.22), (3.23) выполнены. Лемма доказана.

Далее,

$$\begin{aligned} |\sigma|^4 &\leq \|h\|_2^4 \sigma^* \sum_{m, u} \sum_{r, r'} f(r, m) f(r, u) f(r', m) f(r', u) \\ &\quad \times \sum_k E_1^{(2)}(k) E_1^{(2)}(k - m + u) E_2^{(1)}(m - k + r) E_2^{(1)}(m - k + r') \\ &= \|h\|_2^4 \sigma^* \sum_{m, u} \sum_{r, r'} f(r, m) f(r, u) f(r', m) f(r', u) \\ &\quad \times \sum_k E_1^{(2)}(m - k) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') = \|h\|_2^4 \sigma^* \sigma'. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Перепишем сумму σ' в следующем виде:

$$\sigma' = \sum_k \sum_{r, r'} E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \left| \sum_m E_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2. \quad (3.39)$$

Имеем $r \in \Lambda_1$ и $k + r \in \Lambda_2^{(1)}$. Отсюда $k \in \Lambda_2^{(1)} - \Lambda_1$. С другой стороны, имеем $m - k \in \Lambda_1^{(2)}$. Следовательно, $m \in \Lambda_1^{(2)} + k \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Аналогично,

$u \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Применяя лемму 2.7 для множества Λ_1 и его ε_0 -сопро-
вождающего Λ' , получаем, что k и m, u принадлежат некоторым трансляциям
множеств Бора $W_1 = \Lambda_1^+$ и $W_2 = W_1^+$ соответственно, причем мощности этих
множеств не превосходят $3|\Lambda_1|$.

Если зафиксировать k в последней сумме (3.38), то переменные m, u, r, r'
будут принимать значения из некоторых множеств мощности не больше $|\Lambda'|$.

Пусть

$$\begin{aligned}\Phi_{r,r'}^1(m) &= f(r, -m)f(r', -m)W_2(m - i - j), \\ \Phi_{r,r'}^2(u) &= f(r, -u)f(r', -u)W_2(u - i - j), \quad \Phi_{m,u}^3(r) = f(-r, m)f(-r, u), \\ \Phi_{m,u}^4(r') &= f(r', m)f(r', u).\end{aligned}$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}B_1 &= \{k \mid |(\Phi_{r,r'}^1 * E_1^{(2)})(-k) - \beta_1^{(2)}(\Phi_{r,r'}^1 * \Lambda_1^{(2)})(-k)| \geq \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\}, \\ B_2 &= \{k \mid |(\Phi_{r,r'}^2 * E_1^{(2)})(-k) - \beta_1^{(2)}(\Phi_{r,r'}^2 * \Lambda_1^{(2)})(-k)| \geq \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\}, \\ B_3 &= \{k \in \Lambda_1 \mid |(\Phi_{m,u}^3 * E_2^{(1)})(k) - \beta_2^{(1)}(\Phi_{m,u}^3 * \Lambda_2^{(1)})(k)| \geq \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\}, \\ B_4 &= \{k \in \Lambda_1 \mid |(\Phi_{m,u}^4 * E_2^{(1)})(k) - \beta_2^{(1)}(\Phi_{m,u}^4 * \Lambda_2^{(1)})(k)| \geq \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\}.\end{aligned}$$

Имеем $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$. Применяя следствие 3.3, получаем $|B_1|, |B_2| \leq$
 $3\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$ и $|B_3|, |B_4| \leq \alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$. Пусть $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Тогда
 $|B| \leq 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$. Разобьем сумму σ' следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sum_{k \in B} \sum_{r, r'} E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \left| \sum_m E_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k \notin B} \sum_{r, r'} E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \left| \sum_m E_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2 \\ &= \sigma_1 + \sigma_2.\end{aligned}$$

Оценим σ_1 . Поскольку $|B| \leq 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$, выполнено

$$|\sigma_1| \leq 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda'|^4|\Lambda_1|. \quad (3.40)$$

Если $k \notin B$, то $k \notin B_1$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r, r'} f(r, u) f(r', u) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \\ &\quad \times \sum_m f(r, m) f(r', m) E_1^{(2)}(m - k) \\ &= \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r, r'} f(r, u) f(r', u) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') (\Phi_{r,r'}^1 * E_1^{(2)})(-k) \\ &= \beta_1^{(2)} \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r, r'} f(r, u) f(r', u) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \\ &\quad \times \sum_m f(r, m) f(r', m) \Lambda_1^{(2)}(m - k) \\ &\quad + \vartheta \alpha_0^{2/3} |\Lambda'| \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r, r'} f(r, u) f(r', u) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1^{(2)} \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r, r'} f(r, u) f(r', u) E_1^{(2)}(u - k) E_2^{(1)}(k + r) E_2^{(1)}(k + r') \\
&\quad \times \sum_m f(r, m) f(r', m) \Lambda_1^{(2)}(m - k) + 4\vartheta \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

где $|\vartheta| \leq 1$. Применяя эти рассуждения для множеств B_2 , B_3 и B_4 , находим

$$\begin{aligned}
|\sigma_2| &\leq (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_{m, u} \sum_{r, r'} f(r, m) f(r, u) f(r', m) f(r', u) \\
&\quad \times \sum_k \Lambda_1^{(2)}(m - k) \Lambda_1^{(2)}(u - k) \Lambda_2^{(1)}(k + r) \Lambda_2^{(1)}(k + r') + 16\alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
|\sigma'| &\leq |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_{m, u} \sum_{r, r'} f(r, m) f(r, u) f(r', m) f(r', u) \\
&\quad \times \sum_k \Lambda_1^{(2)}(m - k) \Lambda_1^{(2)}(u - k) \Lambda_2^{(1)}(k + r) \Lambda_2^{(1)}(k + r') + 32\alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Применяя неравенство (3.38), получаем

$$\begin{aligned}
|\sigma|^4 &\leq \|h\|_2^4 \sigma^* (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_k \sum_{r, r'} \Lambda_2^{(1)}(k + r) \Lambda_2^{(1)}(k + r') \\
&\quad \times \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2 + 32 \|h\|_2^4 \sigma^* \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Поскольку $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, то $\beta_1^{(2)} \leq 2\beta_1$ и $\beta_2^{(1)} \leq 2\beta_2$, откуда имеем

$$\begin{aligned}
|\sigma_{ij}|^4 &\leq 2^4 \beta_1^2 \beta_2^2 \|h\|_2^4 \sigma_{ij}^* \sum_k \sum_{r, r'} \Lambda_2^{(1)}(k + r) \Lambda_2^{(1)}(k + r') \\
&\quad \times \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2 + 2^5 \alpha_0^{2/3} \|h\|_2^4 \sigma_{ij}^* |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Пусть $\alpha_{ij} = \sum_k \sum_{r, r'} \Lambda_2^{(1)}(k + r) \Lambda_2^{(1)}(k + r') \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m - k) f(r, m) f(r', m) \right|^2$. Предположим, что существуют $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2(i)$ такие, что

$$\|h_j\|_2^2 \geq 8\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_1|.$$

Тогда

$$\sum_{k, m} A(k, m) \Lambda'(m - j) \geq 8\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_1|. \tag{3.46}$$

Пусть $F'_1 = E_1$, $F'_2 = E_2^{(1)}$. Имеем $j \notin \Omega'_2(i)$. Отсюда и из (3.46) получаем

$$\begin{aligned}
|A \cap (F'_1 \times F'_2)| &\geq 4\delta\beta_1\beta_2|F'_1| |F'_2|, \\
|F'_1| &= \beta_1|\Lambda_1|, \quad |F'_2| \geq 2^{-1}\beta_2|\Lambda'|.
\end{aligned}$$

Применяя простые соображения, связанные со средними значениями, легко видеть, что найдутся вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ и два множества $F_1 \subseteq E_1 \cap (\Lambda' + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\Lambda' + y_2)$ такие, что неравенства (3.22), (3.23) выполнены.

Применяя лемму 3.15, получаем

$$\sum_{i \notin \Omega_1, j \notin \Omega'_2(i)} |\sigma_{ij}| \leq 8\delta^{3/4} \beta_1^{3/2} \beta_2^{3/2} |\Lambda'| |\Lambda_1|^{3/4} \left(\sum_{i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2} \alpha_{ij} \right)^{1/4} (|\Lambda_1| |\Lambda_2|)^{3/4} + 4\alpha_0^{1/6} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2|.$$

По условию функция f является (α, ε) -равномерной относительно прямоугольной нормы. Ясно, что

$$\sum_{i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2} \alpha_{ij} = \sum_{i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_{r, r'} \mu_j(k+r) \mu_j(k+r') \left| \sum_m \lambda_i(m-k) f(r, m) f(r', m) \right|^2.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{i \notin \Omega_1, j \notin \Omega'_2(i)} |\sigma_{ij}| \leq 8\alpha^{1/4} \delta^{3/4} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| + 4\alpha_0^{1/6} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2|. \quad (3.47)$$

Применяя неравенства (3.25), (3.27), (3.32) и (3.47), находим

$$|\sigma_0| \leq 16\kappa |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| + 8\alpha_0^{1/2} |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| + 32\alpha_0^{1/2} |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| + 4\alpha_0^{1/6} |\Lambda'|^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| + 8\alpha^{1/4} \delta^{3/4} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2| \leq 16\alpha^{1/4} \delta^{3/4} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda_1|^2 |\Lambda_2|.$$

Теорема доказана.

Следующий результат является основным в настоящем параграфе.

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \Lambda(S, \varepsilon_1)$, $S \subseteq \hat{G}$, и пусть $E_1 \subseteq \Lambda_1$, $E_2 \subseteq \Lambda_2$, $|E_1| = \beta_1 |\Lambda_1|$, $|E_2| = \beta_2 |\Lambda_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ декартово произведение $E_1 \times E_2$.

ТЕОРЕМА 3.17. Пусть A – произвольное подмножество множества $\mathcal{P}$, имеющее мощность $\delta |E_1| |E_2|$. Предположим, что множества E_1, E_2 являются $(\alpha_0, 2^{-10} \varepsilon^2)$ -равномерными, $\alpha_0 = 2^{-2000} \delta^{96} \beta_1^{48} \beta_2^{48}$, $\varepsilon = 2^{-100} \alpha_0^2 / (100d)$. Пусть также A – $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерное относительно прямоугольной нормы множество, $\alpha = 2^{-100} \delta^9$, $\alpha_1 = 2^{-7}$ и

$$\log N \geq 2^{10} d \log \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon}. \quad (3.48)$$

Тогда либо A содержит тройку $\{(k, m), (k+s, m), (k, m+s)\}$, где $s \neq 0$, либо найдутся множество Бора $\tilde{\Lambda}$, два множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$, $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, такие, что $\tilde{\Lambda}$ является $(2^{-4} \varepsilon^2)$ -сопровождающим множества Λ_1 и

$$|F_1| \geq 2^{-20} \beta_1 |\tilde{\Lambda}|, \quad |F_2| \geq 2^{-20} \beta_2 |\tilde{\Lambda}|, \quad (3.49)$$

$$\delta_{F_1 \times F_2}(A) \geq \frac{3}{2} \delta. \quad (3.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ' – некоторое ε -сопровождающее множества Λ_1 , которое мы выберем позже, и $\lambda_i = \Lambda' + i$, $i \in \Lambda_1$. Пусть $G_i = (\lambda_i \times \Lambda_2) \cap A$, $f_i(\vec{s}) = f(s_1 + i, s_2)\Lambda'(s_1, s_2)$, $i \in \Lambda_1$. Обозначим через G_i характеристическую функцию множества G_i . Пусть

$$\begin{aligned} B_1 &= \{i \in \Lambda_1 \mid E_1 \cap \lambda_i \text{ не } (8\alpha_0^{1/4}, \varepsilon)\text{-равномерно}\}, \\ B_2 &= \{i \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\lambda_i}(E_1) - \beta_1| \geq 4\alpha_0^{1/2}\}, \\ B_3 &= \{i \in \Lambda_1 \mid \|f_i\|_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon}^4 > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'_\varepsilon|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\}, \quad B = B_1 \cup B_2 \cup B_3. \end{aligned}$$

По условию множество E_1 является (α_0, ε) -равномерным. Из леммы 3.12 вытекают неравенства $|B_1| \leq 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|$ и $|B_2| \leq 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|$. Поскольку множество A является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерным относительно прямоугольной нормы, то вполне $|B_3| \leq \alpha_1|\Lambda_1|$. Следовательно, $|B| \leq 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1| + \alpha_1|\Lambda_1| \leq 2\alpha_1|\Lambda_1|$.

Применяя лемму 2.7, получаем

$$A(\vec{s}) = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in \Lambda_1} G_i(\vec{s}) + \varepsilon_3(\vec{s}), \quad (3.51)$$

где $\|\varepsilon_3\|_1 \leq 2\kappa|\Lambda_1||\Lambda_2|$, $\kappa = \alpha_0^2$. Рассмотрим сумму

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in \Lambda_1} \sum_{x, y} G_i(x + y, y). \quad (3.52)$$

Имеем $|A| = \delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1||\Lambda_2|$. Применяя формулу (3.51), находим

$$\sigma \geq \frac{7\delta\beta_1\beta_2}{8}|\Lambda_1||\Lambda_2|. \quad (3.53)$$

Разобьем сумму σ следующим образом:

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in B} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \notin B} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.54)$$

Оценим σ_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in B_1 \cup B_2} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \in B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) + 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1||\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Предположим, что найдется $i \notin B_1 \cup B_2$ такое, что

$$\sum_{x, y} G_i(x + y, y) \geq 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_2|,$$

или

$$\sum_{x, y} G_i(x, y) \geq 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_2|.$$

Положим $y_1 = i$, $y_2 = 0$ и $F_1 = (\Lambda' + i) \cap E_1$. Поскольку $i \notin B_2$, то $|F_1| \geq \beta_1|\Lambda'|/2$. Применяя простые соображения, связанные со средними значениями, легко

видеть, что найдется элемент a такой, что множество $F_2 = (\Lambda' + a) \cap E_2$ имеет мощность не меньше $\beta_2|\tilde{\Lambda}_1|/2$, а для вектора $\vec{y} = (i, a)$ выполнено

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| > 2\delta|F_1||F_2|.$$

Таким образом, справедливы неравенства (3.49), (3.50), и в этом случае теорема доказана.

Имеем $\alpha_1 = 2^{-7}$. Применяя $|B_3| \leq \alpha_1|\Lambda_1|$ и $\alpha_0^{1/4} \leq 2^{-4}\alpha_1\beta_1\beta_2$, получаем

$$\sigma_1 \leq 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |B_3| |\Lambda_2| + 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1| |\Lambda_2| \leq 2^{-3}\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2|. \quad (3.56)$$

Далее, из неравенства (3.56) и неравенств (3.53), (3.54) находим

$$\frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{i \notin B} \sum_{x, y} G_i(x + y, y) \geq \frac{3\delta\beta_1\beta_2}{4} |\Lambda_1| |\Lambda_2|. \quad (3.57)$$

Из формулы (3.57) вытекает, что найдется $i_0 \notin B$ такой, что

$$\sum_{x, y} G_{i_0}(x + y, y) \geq \frac{3}{4} \delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_2|. \quad (3.58)$$

Пусть $G'(\vec{s}) = G_{i_0}(\vec{s})$. Имеем

$$\sum_k \sum_m G'(k + m, m) \geq 2^{-3}\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'| |\Lambda_2|. \quad (3.59)$$

Кроме того, $m \in \Lambda_2$ и $k + m \in \lambda_i$. Отсюда $k \in \lambda_i - \Lambda_2$. Применяя лемму 2.7, получаем, что k принадлежит некоторому множеству, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_2|$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$2^{-6}\delta^2\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|^2 \leq \sum_k \left(\sum_m G'(k + m, m) \right)^2 \cdot 2|\Lambda_2|. \quad (3.60)$$

Отсюда

$$\sum_k \left(\sum_m G'(k + m, m) \right)^2 = \sum_k \sum_{m, p} G'(k + m, m) G'(k + p, p) \geq 2^{-7}\delta^2\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|. \quad (3.61)$$

Рассмотрим сумму

$$\sigma_0 = \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) A(s_1, s_2 + r). \quad (3.62)$$

Имеем

$$G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) f(s_1, s_2 + r) = G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) f_{i_0}(s_1, s_2 + r), \quad (3.63)$$

где f_{i_0} – ограничение функции f на G' . Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \delta \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) \mathcal{P}(s_1, s_2 + r) \\
 &\quad + \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) f(s_1, s_2 + r) \\
 &= \delta \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) \\
 &\quad + \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2) G'(s_1 + r, s_2 + r) f_{i_0}(s_1, s_2 + r). \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Из неравенства в (3.61) вытекает, что первое слагаемое в (3.64) не меньше $2^{-7} \delta^3 \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2|$. Поскольку $i_0 \notin B$, то $\|f_{i_0}\|^4 \leq \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2|$ и $\delta_{\lambda_{i_0}}(E_1) \leq 2\beta_1$. По условию имеем $\alpha = 2^{-100} \delta^9$. Применяя теорему 3.14 и неравенство (3.58), получаем, что либо второе слагаемое в формуле (3.64) не превосходит

$$2^{10} \alpha^{1/4} \delta^{3/4} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2| \leq 2^{-8} \delta^3 \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2|,$$

либо найдутся вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ и два множества $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, для которых справедливы неравенства (3.49), (3.50). Во втором случае теорема доказана, причем $\tilde{\Lambda}$ есть ε -сопровождающее множества Λ' . В первом случае $\sigma_0 \geq 2^{-7} \delta^3 \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2|$.

Сумма (3.62) равна количеству троек $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $k \in \Lambda_{i_0}$, $m \in \Lambda_2$, $s \in G$. Число троек с $s = 0$ не превосходит $|\Lambda'| |\Lambda_2|$. По условию $\log N \geq 2^{10} d \log \frac{1}{\varepsilon_{1\varepsilon}}$. Применяя лемму 2.3, получаем $|\Lambda'| > 2^8 (\delta^3 \beta_1^2 \beta_2^2)^{-1}$. Следовательно, $2^{-8} \delta^3 \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_2| > |\Lambda'| |\Lambda_2|$. Отсюда множество A содержит тройку $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $s \neq 0$. Теорема доказана.

§ 4. О структуре множеств, не являющихся α -равномерными относительно прямоугольной нормы

ЛЕММА 4.1. Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ и Λ' – некоторое ε -сопровождающее множества Λ_1 , $\varepsilon = \kappa/(100d)$. Пусть $A \subseteq C \subseteq \Lambda_1 \times \Lambda_2$ и $|A| = \delta |C|$, $0 \leq \delta \leq 1$. Обозначим через B множество тех $s \in \Lambda_1$, для которых выполнено $|A \cap ((\Lambda' + s) \times \Lambda_2)| < (\delta - \eta) |C \cap ((\Lambda' + s) \times \Lambda_2)|$, где $\eta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \Lambda_1 \setminus B} |A \cap ((\Lambda' + s) \times \Lambda_2)| &\geq \delta \sum_{s \in \Lambda_1 \setminus B} |C \cap ((\Lambda' + s) \times \Lambda_2)| \\
 &\quad + \eta \sum_{s \in B} |C \cap ((\Lambda' + s) \times \Lambda_2)| - 4\kappa |\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2|.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 2.7, находим

$$\delta |C| = \sum_{\vec{s}} A(\vec{s}) \Lambda_1(k) \Lambda_2(m) = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{n \in \Lambda_1} \sum_{\vec{s}} A(\vec{s}) ((\Lambda' + n) \times \Lambda_2)(\vec{s}) + 2\vartheta \kappa |\Lambda_1| |\Lambda_2|, \tag{4.1}$$

где $|\vartheta| \leq 1$. Разобьем (4.1) на сумму по $n \in B$ и на сумму по $n \in \Lambda_1 \setminus B$. Получим

$$\begin{aligned} \delta|C| &< \frac{1}{|\Lambda'|}(\delta - \eta) \sum_{n \in B} |C \cap ((\Lambda' + n) \times \Lambda_2)| \\ &+ \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{n \in \Lambda_1 \setminus B} |A \cap ((\Lambda' + n) \times \Lambda_2)| + 2\kappa|\Lambda_1||\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Аналогично,

$$|C| = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{n \in B} |C \cap ((\Lambda' + n) \times \Lambda_2)| + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{n \in \Lambda_1 \setminus B} |C \cap ((\Lambda' + n) \times \Lambda_2)| + 2\vartheta_1\kappa|\Lambda_1||\Lambda_2|, \quad (4.3)$$

где $|\vartheta_1| \leq 1$. Объединяя неравенства (4.2) и (4.3), получаем требуемый результат.

Пусть X – конечное множество, μ – мера на X , и пусть $Z: X \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция. Обозначим через $\mathbf{E}Z$ сумму $\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} Z(x)$. Следующая лемма хорошо известна (см., например, [21]).

ЛЕММА 4.2. Пусть p – действительное число. Пусть $Z: X \rightarrow [-1, 1]$ – некоторая функция такая, что $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{E}|Z|^p = \sigma^p$. Тогда

$$\mu\left\{x \in X: Z > \frac{\sigma^p}{5}\right\} \geq \frac{\sigma^p}{5}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неравенство (4.4) неверно. Поскольку $\mathbf{E}Z = 0$, то

$$-\mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z < 0\}} = \mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z > 0\}} \leq \mu\{x: Z > 5^{-1}\sigma^p\} + \mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{0 < Z \leq 5^{-1}\sigma^p\}} \leq \frac{2}{5}\sigma^p,$$

где $\mathbf{1}_{\{Z < 0\}}$, $\mathbf{1}_{\{Z > 0\}}$ – характеристические функции множеств $\{x: Z(x) < 0\}$ и $\{x: Z(x) > 0\}$ соответственно. Для всех $x \in X$ выполнено $|Z(x)| \leq 1$. Отсюда имеем

$$\sigma^p = \mathbf{E}|Z|^p = \mathbf{E}|Z|^p\mathbf{1}_{\{Z < 0\}} + \mathbf{E}|Z|^p\mathbf{1}_{\{Z > 0\}} \leq 2\mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z > 0\}} \leq \frac{4}{5}\sigma^p. \quad (4.5)$$

Противоречие. Лемма доказана.

Нам понадобится одно предположение, касающееся свойств не α -равномерных множеств. Аналоги следующего предложения были доказаны в работах [14], [18], [20], [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, имеющее мощность $\delta|E_1||E_2|$. Пусть $\alpha > 0$ – действительное число, $\alpha \leq \delta^4/8$, и A – не α -равномерное относительно прямоугольной нормы множество. Тогда существуют два множества $F_1 \subseteq E_1$ и $F_2 \subseteq E_2$ такие, что

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| > (\delta + 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5})|F_1||F_2|, \quad (4.6)$$

$$|F_1| \geq 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5}|E_1|, \quad |F_2| \geq 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5}|E_2|. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – балансовая функция множества A . Предположим, что

$$\sum_x \left| \sum_y f(x, y) \right|^2 \leq \frac{\alpha \delta^{-2}}{16} |E_1| |E_2|^2, \quad (4.8)$$

$$\sum_y \left| \sum_x f(x, y) \right|^2 \leq \frac{\alpha \delta^{-2}}{16} |E_1|^2 |E_2|. \quad (4.9)$$

Если одно из неравенств (4.8) или (4.9) не выполнено, то существование множеств F_1 , F_2 , для которых справедливы оценки (4.6), (4.7), легко вытекает из леммы 4.2. Докажем неравенство

$$\|A\|^4 \geq \left(\delta^4 + \frac{\alpha}{2} \right) |E_1|^2 |E_2|^2. \quad (4.10)$$

По условию $\|f\|^4 \geq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2$. Применяя очевидные формулы $A = f + \delta(E_1 \times E_2)$ и $\sum_{x,y} f(x, y) = 0$, находим

$$\begin{aligned} \|A\|^4 &\geq (\delta^4 + \alpha) |E_1|^2 |E_2|^2 \\ &+ \delta \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x', y) f(x, y') + \delta \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x', y) f(x', y') \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$+ \delta \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x, y') f(x', y') + \delta \sum_{x, x', y, y'} f(x', y) f(x, y') f(x', y') \quad (4.12)$$

$$+ \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x', y') + \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x', y) f(x, y') \quad (4.13)$$

$$+ \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x', y) E_2(y') + \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x, y) f(x, y') E_1(x') \quad (4.14)$$

$$+ \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x', y) f(x', y') E_1(x) + \delta^2 \sum_{x, x', y, y'} f(x, y') f(x', y') E_2(y). \quad (4.15)$$

Легко видеть, что оба слагаемых в строке (4.13) равны нулю. Применяя неравенства (4.8) и (4.9), находим, что сумма четырех слагаемых в строках (4.14), (4.15) не превосходит $\alpha |E_1|^2 |E_2|^2 / 4$. Докажем, что каждое слагаемое в (4.11), (4.12) не больше $(\alpha / (16\delta)) |E_1|^2 |E_2|^2$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что первое слагаемое в строке (4.11) не меньше $(\alpha / (16\delta)) |E_1|^2 |E_2|^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{16\delta} |E_1|^2 |E_2|^2 &\leq \left(\sum_{x,y} |f(x, y)|^3 \right)^{1/3} \left(\sum_{x,y} \left| \sum_{x'} f(x', y) \right|^{3/2} \left| \sum_{y'} f(x, y') \right|^{3/2} \right)^{2/3} \\ &\leq 2\delta^{1/3} (|E_1| |E_2|)^{1/3} \left(\sum_y \left| \sum_{x'} f(x', y) \right|^{3/2} \sum_x \left| \sum_{y'} f(x, y') \right|^{3/2} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Отсюда, не ограничивая общности, получаем

$$\sum_y \left| \sum_{x'} f(x', y) \right|^{3/2} \geq \frac{\alpha^{3/4}}{16\delta} |E_1|^{3/2} |E_2| \geq \frac{\alpha^2}{16\delta^5} |E_1|^{3/2} |E_2|.$$

Применяя лемму 4.2, находим множества F_1, F_2 , для которых выполнены неравенства (4.6), (4.7). Таким образом, каждое слагаемое в строках (4.11), (4.12) не превосходит $(\alpha/(16\delta))|E_1|^2|E_2|^2$, и мы получаем неравенство (4.10).

Пусть $e(x, y) = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in A \mid (\bar{x}, y) \in A, (x, \bar{y}) \in A\}$. Пусть также $N_x = \{y \mid (x, y) \in A\}$, $N_y = \{x \mid (x, y) \in A\}$. Ясно, что

$$\|A\|^4 = \sum_{(x, y) \in A} e(x, y). \quad (4.16)$$

Пусть $\tilde{X} = \{x \in E_1 : |\sum_y f(x, y)| \leq \alpha|E_2|/(32\delta^3)\}$, $\tilde{Y} = \{y \in E_2 : |\sum_x f(x, y)| \leq \alpha|E_1|/(32\delta^3)\}$, и пусть $X^c = E_1 \setminus \tilde{X}$, $Y^c = E_2 \setminus \tilde{Y}$. Заметим, что имеют место неравенства $|X^c| \leq \zeta|E_1|$, $|Y^c| \leq \zeta|E_2|$, где $\zeta = \alpha/(128\delta^2)$. В самом деле, если, например, $|X^c| > \zeta|E_1|$, то $\sum_x |\sum_y f(x, y)| > \alpha^2|E_1||E_2|/(2^{12}\delta^5)$. Применяя лемму 4.2, мы находим множества F_1, F_2 , для которых выполнены неравенства (4.6), (4.7).

Докажем, что

$$\sum_{x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}} A(x, y)e(x, y) \geq \left(\delta^4 + \frac{\alpha}{4}\right)|E_1|^2|E_2|^2. \quad (4.17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|A\|^4 &= \sum_{x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}, x', y'} A(x, y)A(x', y)A(x, y')A(x', y') \\ &+ \sum_{x \in \tilde{X}, y \in Y^c, x', y'} A(x, y)A(x', y)A(x, y')A(x', y') \\ &+ \sum_{x \in X^c, y \in \tilde{Y}, x', y'} A(x, y)A(x', y)A(x, y')A(x', y') \\ &+ \sum_{x \in X^c, y \in Y^c, x', y'} A(x, y)A(x', y)A(x, y')A(x', y') = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \end{aligned}$$

Ясно, что $\sigma_3 \leq |X^c||Y^c|\delta|E_1||E_2| \leq \alpha|E_1|^2|E_2|^2/16$. Далее,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq |Y^c| \sum_{x, x', y'} A(x, y')A(x', y') = |Y^c| \sum_{y' \in \tilde{Y}} \left| \sum_x A(x, y') \right|^2 + |Y^c| \sum_{y' \in Y^c} \left| \sum_x A(x, y') \right|^2 \\ &\leq 4\delta^2|Y^c||E_1|^2|E_2| + |Y^c|^2|E_1|^2 \leq \frac{\alpha}{16}|E_1|^2|E_2|^2. \end{aligned}$$

Аналогично, $\sigma_2 \leq \alpha|E_1|^2|E_2|^2/16$. Применяя (4.10) и (4.16), получаем (4.17).

Из неравенства (4.17) вытекает, что найдется $(x_0, y_0) \in A \cap (\tilde{X} \times \tilde{Y})$ такое, что

$$e(x_0, y_0) \geq \left(\delta^3 + \frac{\alpha}{4\delta}\right)|E_1||E_2|. \quad (4.18)$$

Положим $F_1 = N_{y_0}$, $F_2 = N_{x_0}$. По определению множеств $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ мы имеем $||N_x| - \delta|E_2|| \leq \alpha|E_2|/(32\delta^3)$ и $||N_y| - \delta|E_1|| \leq \alpha|E_1|/(32\delta^3)$. В частности, $|F_1|, |F_2| \geq \delta/2$, и неравенство (4.6) выполнено. Очевидно, что $e(x, y) = |(N_y \times N_x) \cap A|$. Применяя неравенство (4.18) и оценку $\alpha \leq \delta^4/8$, находим

$$\begin{aligned} |A \cap (F_1 \times F_2)| &\geq \left(\delta + \frac{\alpha}{4\delta^3}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{32\delta^4}\right)^{-2} |F_1| |F_2| \\ &\geq \left(\delta + \frac{\alpha}{4\delta^3}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{16\delta^4}\right) |F_1| |F_2| \geq \left(\delta + \frac{\alpha}{8\delta^3}\right) |F_1| |F_2| \end{aligned}$$

и получаем (4.7). Предложение доказано.

Предложение 4.3 показывает, что множества, не α -равномерные относительно прямоугольной нормы, не являются квазислучайными (см. [30]).

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \Lambda(S, \varepsilon_0)$, $|S| = d$ и $E_1 \subseteq \Lambda_1$, $E_2 \subseteq \Lambda_2$, $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $|E_2| = \beta_2|E_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество $E_1 \times E_2$.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть A – подмножество множества $\mathcal{P}$, имеющее мощность $\delta|E_1||E_2|$. Предположим, что A не содержит троек $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d \neq 0$, множества E_1, E_2 являются $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$ -равномерными, $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = 2^{-100}\alpha_0^2/(100d)$, $\varepsilon' = 2^{-10}\varepsilon^2$ и

$$\log N \geq 2^{10} d \log \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Тогда существуют множество Бора $\tilde{\Lambda}$, множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$, $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, такие, что

$$|F_1| \geq 2^{-500}\delta^{22}\beta_1|\tilde{\Lambda}|, \quad |F_2| \geq 2^{-500}\delta^{22}\beta_2|\tilde{\Lambda}|, \quad (4.19)$$

$$\delta_{F_1 \times F_2}(A) \geq \delta + 2^{-500}\delta^{22}. \quad (4.20)$$

Кроме того, $\tilde{\Lambda} = \Lambda(\tilde{S}, \tilde{\varepsilon})$, где $\tilde{S} = S$ и $\tilde{\varepsilon} \geq 2^{-5}\varepsilon'\varepsilon_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ' является ε -сопровождающим множества Λ_1 , а Λ'' – ε -сопровождающим множества Λ' . Мы уточним наш выбор Λ' , Λ'' ниже. Предположим, что A является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерным относительно прямоугольной нормы с параметрами $\alpha = 2^{-100}\delta^9$, $\alpha_1 = 2^{-7}$. Применяя теорему 3.17, получаем, что либо A содержит тройку $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d \neq 0$, либо выполнены неравенства (4.19), (4.20). Поскольку по условию множество A не содержит уголков, то мы получаем требуемый результат. Следовательно, A не является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерным относительно прямоугольной нормы.

Пусть

$$\begin{aligned} B_1 &= \{s \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_1) - \beta_1| \geq 4\alpha_0^{1/2}\}, \\ B_2 &= \{s \in \Lambda_1 \mid \Lambda' \cap (E_1 - s) \text{ не } (8\alpha_0^{1/4}, \varepsilon)\text{-равномерно}\}, \\ B &= \{i \in \Lambda_1 \mid \|f_i\|_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon}^4 > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'_\varepsilon|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\}. \end{aligned}$$

Поскольку A не является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$ -равномерным относительно прямоугольной нормы, то $|B| > \alpha_1|\Lambda_1|$. По условию E_1, E_2 суть (α_0, ε') -равномерные множества. Применяя лемму 3.12, получаем $|B_1| \leq 4\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$, $|B_2| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$.

Пусть $B_3 = B_1 \cup B_2$. Тогда $|B_3| \leq 12\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$. Пусть $B' = B \setminus B_3$. Поскольку $32\alpha_0^{1/2} < \alpha_1$, то $|B'| \geq \alpha_1|\Lambda_1|/2$. Заметим, что для всех $l \in B'$ выполнено

$$|\delta_{\Lambda'+l}(E_1) - \beta_1| < 4\alpha_0^{1/2}. \quad (4.21)$$

Пусть $\eta = 2^{-100}\alpha^3\delta^{-5}$ и $\lambda_l = \Lambda' + l$, $l \in \Lambda_1$. Предположим, что для всех $l \in B'$ справедливо неравенство

$$|A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \leq (\delta - \eta)|\lambda_l \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2|. \quad (4.22)$$

Пусть $(B')^c = \Lambda_1 \setminus B'$. Применяя лемму 4.1 и неравенство (4.21), находим

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in (B')^c} |A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \\ & \geq \delta |\Lambda_2 \cap E_2| \sum_{l \in (B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + \eta |\Lambda_2 \cap E_2| \sum_{l \in B'} |\lambda_l \cap E_1| - \alpha_0^2 |\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2| \\ & \geq \delta \beta_2 |\Lambda_2| \sum_{l \in (B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + \eta \frac{\alpha_1 |\Lambda_1|}{2} \frac{\beta_1 |\Lambda'|}{4} \beta_2 |\Lambda_2| \\ & \geq \delta \beta_2 |\Lambda_2| \sum_{l \in (B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + 2^{-3} \alpha_1 \eta \beta_1 \beta_2 |\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Имеем

$$\sum_{l \in B_1} |A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \leq 4\alpha_0^{1/2} |\Lambda_1| |\Lambda'| |\Lambda_2| \leq 2^{-4} \alpha_1 \eta \beta_1 \beta_2 |\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2|. \quad (4.24)$$

Объединяя неравенства (4.23) и (4.24), получаем

$$\sum_{l \in (B')^c \setminus B_1} |A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \geq \delta \beta_1 |\Lambda_2| \sum_{l \in (B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + 2^{-4} \alpha_1 \eta \beta_1 \beta_2 |\Lambda'| |\Lambda_1| |\Lambda_2|. \quad (4.25)$$

Отсюда найдется $l \in (B')^c \setminus B_1$ такое, что

$$|A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| > (\delta + 2^{-5} \alpha_1 \eta) |\lambda_l \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2|. \quad (4.26)$$

Положим $\tilde{\Lambda} = \Lambda'$, $y_1 = l_0$ и $F_1 = (\tilde{\Lambda} + l_0) \cap E_1$. Поскольку $l_0 \notin B_1$, то $|F_1| \geq \beta_1 |\tilde{\Lambda}|/2$. Множество E_2 является $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$ -равномерным. Следовательно, найдется элемент a такой, что множество $F_2 = (\tilde{\Lambda} + a) \cap E_2$ имеет мощность по крайней мере $\beta_2 |\tilde{\Lambda}_1|/2$, и, кроме того, для $\vec{y} = (l_0, a)$ выполнено

$$|A \cap (\tilde{\Lambda} + \vec{y})| > (\delta + 2^{-6} \alpha_1 \eta) |F_1| |F_2|.$$

В этом случае теорема доказана.

Пусть $f(\vec{x})$ – балансовая функция множества A . Существует $l_0 \in B'$ такое, что

$$|A \cap (\lambda_{l_0} \times \Lambda_2)| > (\delta - \eta) |\lambda_{l_0} \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2|.$$

Если

$$|A \cap (\lambda_{l_0} \times \Lambda_2)| \geq (\delta + \eta) |\lambda_{l_0} \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2|, \quad (4.27)$$

то теорема доказана. Значит, найдется $l_0 \in B'$ такое, что

$$\left| \sum_{r,m} f(r,m) \lambda_{l_0}(r) \Lambda_2(m) \right| < \eta |\lambda_{l_0} \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2|. \quad (4.28)$$

Пусть $\Lambda_0 = \Lambda' + l_0$. Положим $\nu_i = \Lambda'' + i$, $i \in \Lambda_0$, и $\mu_j = \Lambda'' + j$, $j \in \Lambda_2$. Рассмотрим сумму

$$\sigma^* = \sum_{i \in \Lambda_0} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \nu_i(m-k) \mu_j(k+r). \quad (4.29)$$

Предположим, что в сумме (4.29) зафиксированы i и j . Применяя лемму 2.7, получаем, что k пробегает некоторое множество, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_0|$. Кроме того, если зафиксированы i, j, k , то переменные m, r пробегают множества, мощность которых не превосходит $|\Lambda''|$. Применяя лемму 2.7 еще раз, находим

$$\sigma^* = |\Lambda''|^2 \sum_k \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \Lambda_0(m-k) \Lambda_2(k+r) + \vartheta \alpha_0^2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|, \quad (4.30)$$

где $|\vartheta| \leq 1$. Пусть $\Lambda_3 = \Lambda_2 - \Lambda' - l_0$. Снова применяя лемму 2.7, получаем $|\Lambda_2| \leq |\Lambda_3| \leq (1 + \alpha_0^2) |\Lambda_2|$. Заметим, что в равенстве (4.30) переменная k принадлежит множеству Λ_3 . Если $k \in \Lambda_2^- - l_0$, то $\Lambda_2(k+r) = 1$ для всех $r \in \Lambda_0$. Наконец, если зафиксировать k в (4.30), то r и m будут пробегать некоторые множества, мощность которых не превосходит $|\Lambda_0|$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^*}{|\Lambda''|^2} &= \sum_{k \in \Lambda_2^- - l_0} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \Lambda_0(m-k) \\ &\quad + \sum_{k \in \Lambda_3 \setminus (\Lambda_2^- - l_0)} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \Lambda_0(m-k) \Lambda_2(k+r) \\ &= \sum_{k \in \Lambda_2^- - l_0} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \Lambda_0(m-k) + \alpha_0^2 \vartheta_1 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2| \\ &= \sum_k \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) \Lambda_0(m-k) + 2\alpha_0^2 \vartheta_2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2| \\ &= |\Lambda_0| \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m) + 2\alpha_0^2 \vartheta_2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|, \end{aligned}$$

где $|\vartheta_1|, |\vartheta_2| \leq 1$. Применяя (4.28), находим

$$|\sigma^*| < \eta |\Lambda''|^2 |\Lambda_0| |\Lambda_0 \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2| + 4\alpha_0^2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \quad (4.31)$$

Если зафиксировать j , то в равенстве (4.29) переменная k пробегает множество $-\Lambda_0 + j + \Lambda''$. Ясно, что мощность этого множества не превосходит $(1 + \alpha_0^2) |\Lambda'|$. Следовательно, заменяя в (4.31) член $4\alpha_0^2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|$ на $8\alpha_0^2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|$, мы можем предположить, что в (4.29) переменная k принадлежит множеству $-\Lambda_0 + j$.

Поскольку $l \in B'$, то $\beta_1|\Lambda_0|/2 \leq |\Lambda_0 \cap E_1| \leq 2\beta_1|\Lambda_0|$. Кроме того, $16\alpha_0^2 < \eta\beta_1\beta_2$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i \in \Lambda_0} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_{k \in -\Lambda_0 + j} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \right| \\ & < 2\eta|\Lambda''|^2|\Lambda_0| |\Lambda_0 \cap E_1| |\Lambda_2 \cap E_2| \leq 4\eta\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Пусть

$$\Omega = \left\{ j \in \Lambda_2 \mid \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{k \in \Lambda' + j} |\delta_{\Lambda''+k}(E_2) - \beta_2|^2 \geq 4\alpha_0^{1/2} \right\}, \quad G = \Lambda_2 \setminus \Omega.$$

Так как множество E_2 является (α_0, ε') -равномерным, то $|\Omega| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Зафиксируем $i \in \Lambda_0$. Пусть

$$\Omega(i) = \left\{ j \in \Lambda_2 \mid \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{k \in -\Lambda_0 + j} |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2|^2 \geq 4\alpha_0^{1/2} \right\}, \quad G(i) = \Lambda_2 \setminus \Omega(i).$$

Поскольку

$$\sum_{k \in -\Lambda_0 + j} |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2|^2 = \sum_{k \in \Lambda' + j + (i - l_0)} |\delta_{\Lambda''+k}(E_2) - \beta_2|^2,$$

то $\Lambda_2 \cap (G + l_0 - i) \subseteq G(i)$. Следовательно, $|\Omega(i)| \leq |\Lambda_2| - |\Lambda_2 \cap (G + l_0 - i)|$. Так как $i \in \Lambda_0$, то $a := l_0 - i$ принадлежит Λ' . Применяя лемму 2.7 для множества Бора Λ_2 и его ε -сопровождающего Λ' , получаем $(G \cap \Lambda_2^-) + a \subseteq \Lambda_2$ и

$$|\Lambda_2 \cap (G + a)| \geq |\Lambda_2 \cap ((G \cap \Lambda_2^-) + a)| \geq |(G \cap \Lambda_2^-) + a| = |G \cap \Lambda_2^-| \geq |G| - 8\alpha_0^2|\Lambda_2|.$$

Следовательно, $|\Omega(i)| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$.

Поскольку $l_0 \in B'$, то

$$\frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{k \in \Lambda'} |\delta_{\Lambda''+k}((E_1 - l_0) \cap \Lambda') - \beta_1|^2 \leq 2^6\alpha_0^{1/2}. \quad (4.33)$$

Ясно, что для всех j сумма (4.33) равна сумме

$$\frac{1}{|\Lambda'|} \sum_{k \in -\Lambda_0 + j} |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1|^2.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in -\Lambda_0 + j} |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1|^2 &= \sum_{k \in \Lambda' + l_0} |\delta_{\Lambda''+k}(E_1 \cap (\Lambda' + l_0)) - \beta_1|^2 \\ &= \sum_{k \in \Lambda'} |\delta_{\Lambda''+k}((E_1 - l_0) \cap \Lambda') - \beta_1|^2. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_1(i, j) &= \{k \in -\Lambda_0 + j : |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2| \geq 4\alpha_0^{1/8}\}, \\ \Omega_2(i, j) &= \{k \in -\Lambda_0 + j : |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1| \geq 4\alpha_0^{1/8}\}, \\ \Omega_3(i, j) &= \Omega_1(i, j) \cup \Omega_2(i, j). \end{aligned}$$

Для всех $j \notin \Omega(i)$ имеем $|\Omega_1(i, j)| \leq 2\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$. Из неравенства (4.33) вытекает оценка $|\Omega_2(i, j)| \leq 4\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$. Следовательно, если $j \notin \Omega(i)$, то $|\Omega_3(i, j)| \leq 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$.

Поскольку $l_0 \in B'$, то

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i \in \Lambda_0} \sum_{j \in \Lambda_2} \sum_k \sum_{m, u} \nu_i(m-k) \nu_i(u-k) \left| \sum_r \mu_j(k+r) \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \\ &\geq \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $\tilde{f}_{l_0}$ – ограничение функции f на $\lambda_{l_0} \times \Lambda_2$. Зафиксируем j в соотношении (4.34). Тогда переменная k будет пробегать множество $-\Lambda_0 + j + \Lambda''$. Ясно, что мощность этого множества не превосходит $(1 + \alpha_0^2)|\Lambda'|$. Заменяя в формуле (4.34) число α на $\alpha/2$, мы можем предполагать, что k пробегает множество $-\Lambda_0 + j$. Применяя оценку $|\Omega(i)| \leq 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$, находим

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i \in \Lambda_0} \sum_{j \notin \Omega(i)} \sum_k \sum_{m, u} \nu_i(m-k) \nu_i(u-k) \left| \sum_r \mu_j(k+r) \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{4} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы. Пусть

$$\begin{aligned} J &= \left\{ (i, j, k) \mid i \in \Lambda_0, j \notin \Omega(i), k \notin \Omega_3(i, j): \right. \\ &\quad \left. \sum_{m, u} \nu_i(m-k) \nu_i(u-k) \left| \sum_r \mu_j(k+r) \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \geq \frac{\alpha}{64} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 \right\}. \end{aligned}$$

Применяя (4.35), находим

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Lambda_0} \sum_{j \notin \Omega(i)} \sum_{k \notin \Omega_3(i, j)} \sum_{m, u} \nu_i(m-k) \nu_i(u-k) \left| \sum_r \mu_j(k+r) \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \\ \geq \frac{\alpha}{8} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(i, j, k) \in J} \sum_{m, u} \nu_i(m-k) \nu_i(u-k) \left| \sum_r \mu_j(k+r) \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \\ \geq \frac{\alpha}{16} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Оценим мощность множества J . Для любой тройки (i, j, k) из J выполнено

$$\begin{aligned} \left| |E_2 \cap (\nu_i + k)| - \beta_2 |\Lambda''| \right| &\leq 4\alpha_0^{1/8} |\Lambda''|, \\ \left| |(E_1 \cap \Lambda_0) \cap (\mu_j - k)| - \beta_1 |\Lambda''| \right| &\leq 4\alpha_0^{1/8} |\Lambda''|. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (4.37), получаем

$$32|J| |\Lambda''|^4 \beta_1^2 \beta_2^2 \geq \frac{\alpha}{16} \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \quad (4.38)$$

Отсюда имеем $|J| \geq 2^{-12} \alpha |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|$.

Предположим, что для всех $(i, j, k) \in J$ выполнено

$$\sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) < -2^{15} \frac{\eta}{\alpha} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2. \quad (4.39)$$

Применяя неравенство (4.32), находим

$$\sum_{(i, j, k) \in \bar{J}} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq 4\eta \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|, \quad (4.40)$$

где $\bar{J} = \{(i, j, k) : (i, j, k) \in (\Lambda_0 \times \Lambda_2 \times (-\Lambda_0 + j)) \setminus J\}$. Поскольку $|\Omega(i)| \leq 8\alpha_0^{1/2} |\Lambda_2|$, $i \in \Lambda_0$, то

$$\sum_{(i, j, k) \in \bar{J}, j \notin \Omega(i)} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq 2\eta \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|^2 |\Lambda_2|. \quad (4.41)$$

Следовательно, существуют i и j , $j \notin \Omega(i)$, такие, что

$$\sum_{k \in Q(i, j)} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq \frac{\eta}{2} \beta_1 \beta_2 |\Lambda'|^2 |\Lambda_0|, \quad (4.42)$$

где $Q(i, j)$ – подмножество множества $-\Lambda_0 + j$. Так как $j \notin \Omega(i)$, то $|\Omega_3(i, j)| \leq 8\alpha_0^{1/4} |\Lambda'|$. Следовательно,

$$\sum_{k \in Q(i, j) \setminus \Omega_3(i, j)} \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq \frac{\eta}{4} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2 |\Lambda_0|. \quad (4.43)$$

Отсюда найдется $k \notin \Omega_3(i, j)$ такое, что

$$\sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq \frac{\eta}{8} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2. \quad (4.44)$$

Положим $\tilde{\Lambda} = \Lambda''$, $\vec{y} = (j - k, k + i)$ и $F_1 = (\tilde{\Lambda} + y_1) \cap (E_1 \cap \Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde{\Lambda} + y_2) \cap E_2$. Поскольку $k \notin \Omega_3(i, j)$, то $\beta_1 |\Lambda''|/2 \leq |F_1| \leq 2\beta_1 |\Lambda''|$, $\beta_2 |\Lambda''|/2 \leq |F_2| \leq 2\beta_2 |\Lambda''|$. Применяя эти оценки и неравенство (4.44), получаем

$$\begin{aligned} |A \cap (F_1 \times F_2)| &= |A \cap (((\mu_j - k) \cap \Lambda_0) \times ((\nu_i + k) \cap \Lambda_2))| \\ &\geq \delta |(\mu_j - k) \cap E_1 \cap \Lambda_0| |(\nu_i + k) \cap E_2| + \frac{\eta}{8} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2 \\ &\geq \left(\delta + \frac{\eta}{32} \right) |F_1| |F_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, если для всех $(i, j, k) \in J$ выполнено (4.39), то теорема доказана.

Предположим теперь, что найдется тройка $(i, j, k) \in J$ такая, что

$$\sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \geq -2^{15} \frac{\eta}{\alpha} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2. \quad (4.45)$$

Мы можем предположить, что для всех $(i, j, k) \in J$ выполнено

$$\left| \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) \right| \leq 2^{15} \frac{\eta}{\alpha} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2. \quad (4.46)$$

В самом деле, если

$$\sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r, m) \nu_i(m - k) \mu_j(k + r) > 2^{15} \frac{\eta}{\alpha} \beta_1 \beta_2 |\Lambda''|^2,$$

то мы применяем рассуждения, использованные выше. Для множеств $\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda''$, $\tilde{\Lambda}_2 = \Lambda''$, вектора $\vec{y} = (j - k, k + i)$ и множеств $F_1 = (\tilde{\Lambda}_1 + y_1) \cap (E_1 \cap \Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde{\Lambda}_2 + y_2) \cap E_2$ выполнено $|F_1| \geq \beta_1 |\tilde{\Lambda}_1|/2$, $|F_2| \geq \beta_2 |\tilde{\Lambda}_2|/2$ и

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| \geq \left(\delta + 2^6 \frac{\eta}{\alpha} \right) |F_1| |F_2|.$$

Поскольку $(i, j, k) \in J$, то выполнено неравенство

$$\sum_{m, u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} \tilde{f}_{l_0}(r, m) \tilde{f}_{l_0}(r, u) \right|^2 \geq 2^{-6} \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4. \quad (4.47)$$

Заметим, что в формуле (4.47) переменные m, u принадлежат множеству $\nu_i + k \cap \Lambda_2$, а переменная r — множеству $\mu_j - k \cap \Lambda_0$. Положим $\mathcal{L}_1 = \mu_j - k \cap \Lambda_0$, $\mathcal{L}_2 = \nu_i + k \cap \Lambda_2$, $E'_1 = E_1 \cap \mathcal{L}_1$ и $E'_2 = E_2 \cap \mathcal{L}_2$. Можно считать, что в формуле (4.47) функция $\tilde{f}_{l_0}$ равна нулю вне $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$. Пусть $A_1 = A \cap (\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2)$, $\delta_1 = \delta_{E'_1 \times E'_2}(A)$ и f_1 — балансовая функция множества A_1 . Применяя (4.46), получаем $|\delta_1 - \delta| \leq 2^{20} \frac{\eta}{\alpha}$. Имеем $k \notin \Omega_3(i, j)$. Отсюда

$$\|\tilde{f}_{l_0} - f_1\|^4 = |E'_1|^2 |E'_2|^2 (\delta_1 - \delta)^2 \leq 2^{44} \beta_1^2 \beta_2^2 \frac{\eta^2}{\alpha^2} |\Lambda''|^4. \quad (4.48)$$

Применяя лемму 3.5, находим

$$\sum_{m, u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} f_1(r, m) f_1(r, u) \right|^2 \geq 2^{-7} \alpha \beta_1^2 \beta_2^2 |\Lambda''|^4. \quad (4.49)$$

Поскольку $k \notin \Omega_3(i, j)$, то $2^{-1} \beta_1 |\Lambda''| \leq |E'_1| \leq 2 \beta_1 |\Lambda''|$, $2^{-1} \beta_2 |\Lambda''| \leq |E'_2| \leq 2 \beta_2 |\Lambda''|$. Следовательно,

$$\sum_{m, u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} f_1(r, m) f_1(r, u) \right|^2 \geq 2^{-11} \alpha |E'_1|^2 |E'_2|^2. \quad (4.50)$$

Применяя предложение 4.3, получаем множества $F_1 \subseteq E'_1 \subseteq \mu_j - k$, $F_2 \subseteq E'_2 \subseteq \nu_i + k$ такие, что

$$\begin{aligned} |A \cap (F_1 \times F_2)| &\geq |A_1 \cap (F_1 \times F_2)| \geq \left(\delta_1 + 2^{-37} \frac{\alpha^2}{\delta_1^5} \right) |F_1| |F_2| \\ &\geq \left(\delta + 2^{-40} \frac{\alpha^2}{\delta^5} \right) |F_1| |F_2| \geq (\delta + 2^{-240} \delta^{13}) |F_1| |F_2|, \quad (4.51) \\ |F_i| &\geq 2^{-40} \frac{\alpha^2}{\delta^5} |E'_i| \geq 2^{-300} \delta^{13} \beta_i |\Lambda''|, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{\Lambda} = \Lambda''$, $\vec{y} = (j-k, k+i)$ и $F_1 = (\tilde{\Lambda}_1 + y_1) \cap (E_1 \cap \Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde{\Lambda}_2 + y_2) \cap E_2$. Множества $\tilde{\Lambda}$ и F_1, F_2 удовлетворяют неравенствам (4.19), (4.20). Теорема доказана.

§ 5. О плотных подмножествах множеств Бора

Следующие леммы были доказаны в [15].

ЛЕММА 5.1. Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε -сопровождающее множества Λ , $\varepsilon = \kappa/(100d)$ и Q – подмножество множества Λ . Пусть $g: 2^G \times (G \times G) \rightarrow \mathbf{D}$ – функция такая, что $g(\Lambda, \vec{x}) := \delta_{\Lambda\vec{x}}^2(Q)$. Тогда

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} g(\Lambda', \vec{x}) \geq g(\Lambda, 0) - 8\kappa. \quad (5.1)$$

ЛЕММА 5.2. Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε -сопровождающее множества Λ , $\varepsilon = \kappa/(100d)$, $\alpha > 0$ – действительное число и Q – подмножество множества Λ , $|Q| = \delta|\Lambda|$. Предположим, что

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |\delta_{\Lambda'\vec{n}}(Q) - \delta|^2 \geq \alpha. \quad (5.2)$$

Тогда

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} \delta_{\Lambda'\vec{n}}^2(Q) \geq \delta^2 + \alpha - 4\kappa. \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Ясно, что справедливы и одномерные аналоги леммы 5.1 и леммы 5.2.

Также в работе [15] было доказано следствие.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть Λ – множество Бора, $\alpha > 0$ – действительное число и E_1, E_2 – некоторые множества, $|E_1 \cap \Lambda| = \beta_1|\Lambda|$, $|E_2 \cap \Lambda| = \beta_2|\Lambda|$. Предположим, что либо для множества E_1 , либо для множества E_2 не выполнено неравенство (3.13). Пусть также Λ' – произвольное $(2^{-10}\alpha^2\beta_1^2\beta_2^2/(100d))$ -сопровождающее множества Λ . Тогда

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \delta_{\Lambda'\vec{n}}^2(E_1 \times E_2) \geq \beta_1^2\beta_2^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right). \quad (5.4)$$

Следующая лемма была доказана Ж. Бургеном в [27]. Для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

ЛЕММА 5.5. Пусть $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора, $|S| = d \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ – действительное число и Q – множество, $|Q \cap \Lambda| = \delta|\Lambda|$. Предположим, что

$$\|(Q \cap \Lambda - \delta\Lambda)^\wedge\|_\infty \geq \alpha|\Lambda|. \quad (5.5)$$

Тогда существует множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$, $|S'| = d + 1$, такое, что Λ' является ε_1 -сопровождающим множества Λ , $\varepsilon_1 = \kappa/(100d)$, $\kappa \leq \alpha/32$ и

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{n \in \Lambda} |\delta_{\Lambda'+n}(Q) - \delta|^2 \geq \frac{\alpha^2}{4}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_1 = Q \cap \Lambda$. Применяя неравенство (5.5), получаем

$$|\widehat{Q}_1(\xi_0) - \delta\widehat{\Lambda}(\xi_0)| \geq \alpha|\Lambda|, \quad (5.7)$$

где $\xi_0 \in \widehat{G}$. Имеем $\Lambda = \Lambda_{S, \varepsilon}$, причем $S \subseteq \widehat{G}$. Положим $S' = S \cup \{\xi_0\} \subseteq \widehat{G}$, и пусть $\Lambda' = \Lambda_{S', \varepsilon'}$ – некоторое ε_1 -сопровождающее множества Λ . Применяя лемму 2.7, находим

$$\widehat{Q}_1(\xi_0) = \sum_n Q(n)\Lambda(n)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot n)} = \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_n (\Lambda * \Lambda')(n)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot n)} + 2\kappa\vartheta|\Lambda|,$$

где $|\vartheta| \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_1(\xi_0) &= \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_m \sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot n)} + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_m \sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)} \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_m \sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)[e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot n)} - e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)}] + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \sum_{m \in \Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)} \\ &\quad + \vartheta_1 \frac{1}{|\Lambda'|} \sum_m \sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)|e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot (n-m))} - 1| + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \sum_{m \in \Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)} + (14\kappa\vartheta_1 + 2\kappa\vartheta)|\Lambda|, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $|\vartheta_1| \leq 1$. Применяя неравенства (5.5) и (5.8), получаем

$$\left| \sum_{m \in \Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)} - \delta \sum_{m \in \Lambda} e^{-2\pi i(\xi_0 \cdot m)} \right| \geq \frac{\alpha}{2}|\Lambda|. \quad (5.9)$$

Следовательно,

$$\sum_{m \in \Lambda} |\delta_{\Lambda'+m}(Q) - \delta| \geq \frac{\alpha}{2}|\Lambda|. \quad (5.10)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, окончательно находим

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} |\delta_{\Lambda'+\vec{n}}(Q) - \delta|^2 \geq \frac{\alpha^2}{4}. \quad (5.11)$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора, $\alpha > 0$ – действительное число и E_1, E_2 – некоторые множества, $|E_1 \cap \Lambda| = \beta_1 |\Lambda|$, $|E_2 \cap \Lambda| = \beta_2 |\Lambda|$. Предположим, что либо для E_1 , либо для E_2 выполнено неравенство (5.5). Тогда существует множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$, $\varepsilon' = 2^{-10} \alpha^2 \beta_1^2 \beta_2^2 / (100d)$, являющееся ε' -сопровождающим множества Λ и такое, что

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \delta_{\Lambda'_n}^2(E_1 \times E_2) \geq \beta_1^2 \beta_2^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right), \quad (5.12)$$

$$|S'| = d + 1. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{n} = (x, y)$ и $\kappa = 2^{-10} \alpha^2 \beta_1^2 \beta_2^2$. Имеем

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \delta_{\Lambda'_n}^2(E_1 \times E_2) = \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \delta_{\Lambda' + x}^2(E_1) \right) \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{y \in \Lambda} \delta_{\Lambda' + y}^2(E_2) \right). \quad (5.14)$$

Без ограничения общности можно считать, что неравенство (5.5) справедливо для множества E_1 . Применяя лемму 5.5 и лемму 5.2, получаем

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \delta_{\Lambda' + x}^2(E_1) \geq \beta_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 4\kappa. \quad (5.15)$$

Оценим второй член в (5.14). Применяя лемму 5.1, находим

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{y \in \Lambda} \delta_{\Lambda' + y}^2(E_2) \geq \beta_2^2 - 8\kappa. \quad (5.16)$$

Объединяя (5.15) и (5.16), получаем

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} \delta_{\Lambda'_n}^2(E_1 \times E_2) \geq \left(\beta_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 4\kappa \right) (\beta_2^2 - 8\kappa) \geq \beta_1^2 \beta_2^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \right).$$

Следствие доказано.

Будем говорить, что множество S' из (5.13) было получено из следствия 5.6.

Ясно, что все доказанные леммы применимы и для трансляций множеств Бора.

В наших дальнейших рассуждениях мы следуем работе [15].

Пусть Λ – объединение двух семейств: множеств Бора $\Lambda_0^*, \Lambda_1^*(\vec{x}_0), \dots, \dots, \Lambda_n^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ и трансляций множеств Бора $\Lambda_0, \Lambda_1(\vec{x}_0), \dots, \Lambda_n(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$, такое, что множества $\Lambda_1(\vec{x}_0)$ и $\Lambda_1^*(\vec{x}_0)$ определены тогда и только тогда, когда $\vec{x}_0 \in \Lambda_0$; множества $\Lambda_2(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ и $\Lambda_2^*(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ определены тогда и только тогда, когда $\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_0 \in \Lambda_0$; ...; множества $\Lambda_n(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ и $\Lambda_n^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ определены тогда и только тогда, когда

$$\vec{x}_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-2}), \quad \vec{x}_{n-2} \in \Lambda_{n-2}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-3}), \quad \dots, \quad \vec{x}_0 \in \Lambda_0. \quad (5.17)$$

Пусть $m \geq 0$ – целое число и Λ – семейство множеств Бора, для которых выполнено (5.17). Пусть $g: 2^G \times (G \times G) \rightarrow \mathbf{D}$ – некоторая функция. Для всех

$k = 0, \dots, m$ определим индекс функции g относительно Λ по формуле

$$\begin{aligned} \text{ind}_k(\Lambda)(g) &= \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \dots \\ &\dots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-2})} \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Пусть $M_k = M_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ – произвольное семейство множеств таких, что $M_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \subseteq \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ для всех $(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$. Для любого $k = 0, \dots, m$ величина $\text{ind}_k(\Lambda, M)(g)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{ind}_k(\Lambda, M)(g) &= \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \dots \\ &\dots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-2})} \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in M_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ясно, что для всех целых $k \geq 0$, любого семейства M_k и произвольной функции $g: 2^G \times (G \times G) \rightarrow \mathbf{D}$ выполнено $|\text{ind}_k(\Lambda, M)(g)| \leq 1$.

Следующая лемма была доказана в [15].

ЛЕММА 5.7. Пусть Q – подмножество множества $\Lambda_0 \times \Lambda_0$ и $|Q| = \delta|\Lambda_0|^2$. Пусть $\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ – некоторое ε -сопровождающее множества $\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, $\varepsilon = \kappa/(100d)$, и $g(M, \vec{x}) = \delta_{M+\vec{x}}(Q)$. Тогда для всех $k = 0, \dots, n$ выполнено

$$|\text{ind}_k(\Lambda)(g) - \delta| \leq 4\kappa(k+1). \quad (5.20)$$

Следующий результат является основным в настоящем параграфе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Пусть $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$ – множество Бора, $|S| = d$ и $\vec{s}' = (s_1, s_2)$ – некоторый вектор. Пусть $\varepsilon, \sigma, \tau, \delta \in (0, 1)$ – действительные числа, E_1, E_2 – некоторые множества, $E_i = \beta_i|\Lambda|$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\mathbf{E} = E_1 \times E_2$ – произвольное подмножество множества $(\Lambda + s_1) \times (\Lambda + s_2)$, $A \subset \mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta + \tau$ и $\varepsilon \leq \kappa/(100d)$, $\kappa = 2^{-100}(\tau\beta_1\beta_2)^5\sigma^3$. Пусть

$$N \geq (2^{-100}\varepsilon_0\varepsilon)^{-2^{100}((\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3}+d)^2} \quad (5.21)$$

и $\sigma \leq 2^{-100}\tau\beta_1\beta_2$. Тогда существуют множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$, $|S'| = D$, $D \leq 2^{30}(\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3} + d$, $\varepsilon' \geq (2^{-10}\varepsilon)^D\varepsilon_0$, и вектор $\vec{t} = (t_1, t_2)$ такие, что для множеств $E'_1 = (E_1 - t_1) \cap \Lambda'$, $E'_2 = (E_2 - t_2) \cap \Lambda'$, $\mathbf{E}' = E'_1 \times E'_2$ выполнено:

- 1) $|\mathbf{E}'| \geq \beta_1\beta_2\tau|\Lambda'|/16$;
- 2) E'_1, E'_2 являются (σ, ε) -равномерными подмножествами в Λ' ;
- 3) $\delta_{\mathbf{E}'}(A - \vec{t}) \geq \delta + \tau/16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta = \beta_1\beta_2$ и $\tilde{E}_1 = E_1 - s_1$, $\tilde{E}_2 = E_2 - s_2$, $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2$. Если множества $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ являются (σ, ε) -равномерными подмножествами множества Λ , то предложение доказано.

Предположим, что $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ не являются (σ, ε) -равномерными подмножествами множества Λ . Построим семейство множеств Бора Λ , удовлетворяющее

включениям (5.17). Доказательство предложения представляет собой алгоритм. На нулевом шаге нашего алгоритма положим $\Lambda_0 = \Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$. Если множество $\tilde{E}_1$ или множество $\tilde{E}_2$ не удовлетворяет неравенству (3.14) с $\alpha = \sigma/2$, то пусть Λ_0^* есть ε -сопровождающее множества Λ_0 , полученное из следствия 5.6. В остальных случаях пусть Λ_0^* – произвольное ε -сопровождающее множества Λ_0 с тем же самым множеством S . Пусть также $R_0 = \{\vec{p} = (p_1, p_2) \in \Lambda_0 \mid \tilde{E}_1 - p_1, \tilde{E}_2 - p_2 \text{ являются } (\sigma, \varepsilon)\text{-равномерными в } \Lambda_0^* \text{ или } \delta_{(\Lambda_0^* + p_1) \times (\Lambda_0^* + p_2)}(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2) < \beta\tau/16\}$ и $\bar{R}_0 = (\Lambda_0 \times \Lambda_0) \setminus R_0$.

Пусть $\tilde{\Lambda}$ – произвольное множество Бора и $\vec{n} \in G \times G$ – любой вектор. Положим $g(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = \delta_{\tilde{\Lambda} \vec{n}}^2(\tilde{E})$, $g_1(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = \delta_{\tilde{\Lambda} \vec{n}}(\tilde{E})$, $g_2(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = \delta_{\tilde{E} \cap \tilde{\Lambda} \vec{n}}(\tilde{E})$ и $g_3(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = \delta_{\tilde{\Lambda} \vec{n}}(\tilde{E})$. Ясно, что $g(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = g_3^2(\tilde{\Lambda}, \vec{n})$ и $g_1(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) \leq g_3(\tilde{\Lambda}, \vec{n})$. Кроме того, выполнено

$$g_1(\tilde{\Lambda}, \vec{n}) = g_2(\tilde{\Lambda}, \vec{n})g_3(\tilde{\Lambda}, \vec{n}).$$

Пусть $\Lambda_0 = \{\Lambda_0\}$. Если $\text{ind}_0(\Lambda_0, \bar{R}_0)(g_3) < \tau\beta/4$, то мы останавливаем наш алгоритм на нулевом шаге.

Применяя лемму 2.10 и неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\text{ind}_0(\Lambda_0)(g) \geq \left(\frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{y_1, y_2 \in \Lambda_0} \delta_{(\Lambda_0^* + y_1) \times (\Lambda_0^* + y_2)}(\tilde{E}) \right)^2 \geq \frac{\beta}{2}. \quad (5.22)$$

Предположим, что на k -м шаге алгоритма, $k \geq 0$, мы построили семейство множеств Бора Λ_k . Пусть

$$\Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k) = \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + \vec{x}_k, \quad \vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}).$$

Пусть также $\vec{x}_k = (a, b)$ и $\Lambda_k^* = \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$. В случае, если множество $(\tilde{E}_1 - a) \cap \Lambda_k^*$ или множество $(\tilde{E}_2 - b) \cap \Lambda_k^*$ не удовлетворяет неравенству (3.14) с $\alpha = \sigma/2$, пусть $\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ – произвольное ε -сопровождающее множества $\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ такое, что множество $\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ получено в результате применения следствия 5.6. В остальных случаях пусть $\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ – произвольное ε -сопровождающее множества $\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ с тем же самым порождающим множеством.

Обозначим через $R_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$, $\bar{R}_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ множества $R_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k) = \{\vec{p} = (p_1, p_2) \in \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + \vec{x}_k \mid \tilde{E}_1 - p_1, \tilde{E}_2 - p_2 \text{ являются } (\sigma, \varepsilon)\text{-равномерными в } \Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k) \text{ или } \delta_{\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k) + \vec{p}}(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2) < \tau\beta/16\}$ и $\bar{R}_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k) = (\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + \vec{x}_k) \setminus R_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ соответственно. Пусть также

$$E_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \left\{ \vec{p} = (p_1, p_2) \in \Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}) + \vec{x}_{k-1} \mid \delta_{\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + \vec{p}}(\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2) < \frac{\tau\beta}{16} \right\}.$$

Очевидно, что $E_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \subseteq R_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, $k = 0, 1, \dots$.

Пусть $\Lambda'_{k+1} = \{\Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)\}$, $\vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, и $\Lambda_{k+1} = \{\Lambda_k, \Lambda'_{k+1}\}$. Если $\text{ind}_{k+1}(\Lambda_{k+1}, \bar{R}_{k+1})(g_3) < \tau\beta/4$, то мы останавливаем алгоритм на $(k+1)$ -м шаге.

Пусть $\Lambda_{k-1}^* = \Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$ и $\beta'_k = \delta_{\Lambda_{k-1}^*}(\tilde{E}_1)$, $\beta''_k = \delta_{\Lambda_{k-1}^*}(\tilde{E}_2)$. Предположим, что $\vec{x}_{k-1} = (a', b')$ принадлежит $\bar{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$. Тогда вектор $\vec{x}_{k-1}$ не принадлежит $E_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$. Рассмотрим три ситуации:

- 1) либо множество $(\tilde{E}_1 - a') \cap \Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\tilde{E}_2 - b') \cap \Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.12);
- 2) либо множество $(\tilde{E}_1 - a') \cap \Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\tilde{E}_2 - b') \cap \Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.13);
- 3) либо множество $(\tilde{E}_1 - a') \cap \Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\tilde{E}_2 - b') \cap \Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.14).

Заметим, что во всех трех случаях число α равно σ .

Рассмотрим ситуацию 3) при $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Пусть

$$S_0 = \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}), \quad (5.23)$$

где $\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ – некоторое ε -сопровождающее множества $\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, полученное в результате применения следствия 5.6. Используя это следствие, находим

$$\begin{aligned} S_0 &\geq g(\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), 0)(1 + 2^{-11}\sigma^3) \\ &= g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-11}\sigma^3). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Заметим, что в этом случае выполнено

$$\dim \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \dim \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + 1.$$

Рассмотрим ситуацию 2) при $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Применяя следствие 5.4, получаем

$$S_0 \geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-11}\sigma^3) \quad (5.25)$$

и, кроме того, $\dim \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \dim \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$.

Наконец, рассмотрим ситуацию 1) при $\alpha = \sigma$. Заметим, что для множеств $(\tilde{E}_1 - a') \cap \Lambda_{k-1}^*$ и $(\tilde{E}_2 - b') \cap \Lambda_{k-1}^*$ выполнено неравенство (3.13) при $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Пусть $\Lambda_k^* = \Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$. Положим

$$\begin{aligned} B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) &= \{\vec{p} = (p_1, p_2) \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) : \\ &\|((\tilde{E}_1 - p_1) - \beta'_k \Lambda_k^*)^\wedge\|_\infty \geq \sigma |\Lambda_k^*| \text{ или } \|((\tilde{E}_2 - p_2) - \beta''_k \Lambda_k^*)^\wedge\|_\infty \geq \sigma |\Lambda_k^*|\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$|B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})| \geq \sigma |\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2. \quad (5.26)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) &= \left\{ \vec{p} = (p_1, p_2) \in B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) : \right. \\ &\left. |\delta_{\Lambda_k^*}(\tilde{E}_1 - p_1) - \beta'_k| \leq \frac{\sigma}{8}, |\delta_{\Lambda_k^*}(\tilde{E}_2 - p_2) - \beta''_k| \leq \frac{\sigma}{8} \right\}. \end{aligned}$$

Для всех векторов $\vec{p} \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ выполнено следующее: либо множество $(\tilde{E}_1 - p_1) \cap \Lambda_k^*$, либо множество $(\tilde{E}_2 - p_2) \cap \Lambda_k^*$ не является $(\sigma/2)$ -равномерным.

Для множеств $(\tilde{E}_1 - a') \cap \Lambda_{k-1}^*$ и $(\tilde{E}_2 - b') \cap \Lambda_{k-1}^*$ справедливо неравенство (3.13) при $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Отсюда имеем

$$|\tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})| \geq \frac{\sigma}{2} |\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2. \quad (5.27)$$

Предположим, что

$$g_3(\Lambda_{k-1}^*, \vec{x}_{k-1}) = \beta'_k \beta''_k \geq \frac{\tau\beta}{8}. \quad (5.28)$$

Из неравенства (5.28) вытекает, что для всех $\vec{p} \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ выполнено

$$g_3(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{p}) \geq \beta'_k \beta''_k - \frac{\sigma}{2} \geq \frac{\tau\beta}{16}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S = S(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) &= \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} \frac{1}{|\Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)|^2} \\ &\times \sum_{\vec{y} \in \Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)} g(\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k), \vec{y}). \end{aligned}$$

Разобьем сумму S на два слагаемых: $S = S' + S''$, причем суммирование в S' идет по $\vec{x}_k \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, а суммирование в S'' — по $\vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \setminus \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$. Заметим, что если $\vec{x}_k \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, то множество Бора $\Lambda_{k+1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ получено в результате применения следствия 5.6. Используя это следствие, находим

$$S' \geq \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}) \left(1 + \frac{\sigma^2}{32}\right). \quad (5.30)$$

Оценим сумму S'' . Применяя лемму 5.1, получаем

$$S'' \geq \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \setminus \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}) - 8\kappa. \quad (5.31)$$

Объединяя неравенства (5.29)–(5.31) и (5.27), находим

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}) \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \tilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} 2^{-13}\tau^2\beta^2\sigma^2 - 2^4\kappa \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}) + 2^{-14}\tau^2\beta^2\sigma^3 - 2^4\kappa. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5.1, получаем

$$\begin{aligned} S &\geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) + 2^{-14}\tau^2\beta^2\sigma^3 - 2^5\kappa \\ &\geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3 \\ &\geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3). \end{aligned} \quad (5.32)$$

С другой стороны, сумма S_0 является оценкой для суммы S . Точнее, применяя лемму 5.1, находим

$$S \geq S_0 - 8\kappa.$$

Таким образом, если вектор $\vec{x}_{k-1}$ принадлежит множеству $\bar{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$ и для $\vec{x}_{k-1}$ выполнено (5.28), то мы имеем оценку

$$S \geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3) - 8\kappa. \quad (5.33)$$

Теперь предположим, что $\vec{x}_{k-1}$ — произвольный вектор, $\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$. Дважды применяя лемму 5.1, получаем неравенство

$$S \geq g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) - 16\kappa. \quad (5.34)$$

Оценим величину $\text{ind}_{k+1}(\Lambda_{k+1})(g)$ снизу. Имеем

$$\begin{aligned} \text{ind}_{k+1}(\Lambda_{k+1})(g) \\ = \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} S(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}). \end{aligned}$$

По условию $\text{ind}_{k-1}(\Lambda_{k-1}, \bar{R}_{k-1})(g_3) \geq \tau\beta/4$, или

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \\ \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \bar{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} g_3(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) \geq \frac{\tau\beta}{4}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Обозначим через $M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$ множество тех $\vec{x}_{k-1} \in \bar{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$, для которых справедливо неравенство (5.28). Применяя (5.35), получаем

$$\begin{aligned} S_M := \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \\ \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} g_3(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) \geq \frac{\tau\beta}{8}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Применяя неравенства (5.28), (5.33), (5.34) и (5.36), находим

$$\begin{aligned} \text{ind}_{k+1}(\Lambda_{k+1})(g) &\geq \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \\ &\quad \left\{ \sum_{\vec{x}_{k-1} \in M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} (g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3) - 8\kappa) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}) \setminus M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} (g(\Lambda_{k-1}^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) - 16\kappa) \right\} \\ &\geq \text{ind}_{k-1}(\Lambda_{k-1})(g) + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3 \left(\frac{\tau\beta}{8} \right) S_M - 24\kappa \\ &\geq \text{ind}_{k-1}(\Lambda_{k-1})(g) + 2^{-24}\tau^4\beta^4\sigma^3 - 24\kappa \geq \text{ind}_{k-1}(\Lambda_{k-1})(g) + 2^{-25}\tau^4\beta^4\sigma^3. \end{aligned}$$

Другими словами, для всех $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\text{ind}_{k+1}(\Lambda_{k+1})(g) \geq \text{ind}_{k-1}(\Lambda_{k-1})(g) + 2^{-25}\tau^4\beta^4\sigma^3. \quad (5.37)$$

Поскольку для всех k выполнено $\text{ind}_k(\Lambda_k)(g) \leq 1$, то общее число шагов нашего алгоритма не превосходит $K_0 = 2^{30}\tau^{-4}\beta^{-4}\sigma^{-3}$.

Предположим, что наш алгоритм остановился на K -м шаге, $K \geq 1$, $K \leq 2^{30}\tau^{-4}\beta^{-4}\sigma^{-3}$. Имеем

$$\text{ind}_K(\Lambda_K, \bar{R}_K)(g_3) < \frac{\tau\beta}{4}. \quad (5.38)$$

Применяя лемму 5.7, находим

$$\text{ind}_K(\Lambda_K)(g_1) \geq (\delta + \tau)\beta - 8\kappa K \geq \left(\delta + \frac{7\tau}{8}\right)\beta.$$

Применяя неравенство (5.38), получаем

$$\text{ind}_K(\Lambda_K, R_K)(g_1) \geq \left(\delta + \frac{3\tau}{8}\right)\beta. \quad (5.39)$$

Суммирование в неравенстве (5.39) проходит по множеству $\Lambda_K^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})\vec{y}$, где $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$.

Пусть E_K – семейство векторов $\vec{y}$ таких, что $\vec{y} \in E_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$, а R_K^* – семейство векторов $\vec{y}$ таких, что $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$, но $\vec{y}$ не принадлежит $E_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$. Имеем

$$\text{ind}_K(\Lambda_K, E_K)(g_1) < \frac{\tau\beta}{16} \text{ind}_K(\Lambda_K)(1) \leq \frac{\tau\beta}{16}. \quad (5.40)$$

Объединяя неравенства (5.39) и (5.40), находим

$$\text{ind}_K(\Lambda_K, R_K^*)(g_1) > \left(\delta + \frac{\tau}{4}\right)\beta. \quad (5.41)$$

Предположим, что для всех $\vec{y} \in R_K^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$ выполнено $g_2(\Lambda_K^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1}), \vec{y}) < \delta + \tau/16$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\delta + \frac{\tau}{4}\right)\beta &< \text{ind}_K(\Lambda_K, R_K^*)(g_1) \leq \left(\delta + \frac{\tau}{16}\right) \text{ind}_K(\Lambda_K, R_K^*)(g_3) \\ &\leq \left(\delta + \frac{\tau}{16}\right) \text{ind}_K(\Lambda_K)(g_3). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Применяя лемму 5.7 еще раз, получаем противоречивое неравенство

$$\left(\delta + \frac{\tau}{4}\right)\beta < \left(\delta + \frac{\tau}{16}\right) \text{ind}_K(\Lambda_K)(g_3) \leq \left(\delta + \frac{\tau}{16}\right)(\beta + 8\kappa K) \leq \left(\delta + \frac{\tau}{4}\right)\beta.$$

Следовательно, существуют векторы $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1}$, $\vec{y}$ такие, что выполнены неравенство $g_2(\Lambda_K^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1}), \vec{y}) \geq \delta + \tau/16$ и включение $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1}) \setminus E_K(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$. Положим $\vec{t} = \vec{y} + \vec{s}$ и $\Lambda' = \Lambda_K^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{K-1})$. Мы нашли вектор $\vec{t}$, множества $E'_1 = (\tilde{E}_1 - y_1) \cap \Lambda'$, $E'_2 = (\tilde{E}_2 - y_2) \cap \Lambda'$ и множество Бора Λ' , удовлетворяющие условиям 1)–3).

Оценим величины D и ε' . На каждом шаге нашего алгоритма мы строим новые множества Бора, причем их размерность увеличивается не более чем на 1. Поскольку общее число шагов не превосходит K_0 , то $D \leq d + 2^{30}\tau^{-5}\beta^{-5}\sigma^{-3}$ и $\varepsilon' \geq (2^{-10}\varepsilon)^D \varepsilon_0$. Применяя лемму 2.3 и неравенство (5.21), получаем, что множество Λ' не пусто. Предложение доказано.

§ 6. Доказательство основного результата

Объединим теорему 4.4 и предложение 5.8 в единое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$ – множество Бора, $|S| = d$ и $\vec{s} = (s_1, s_2) \in G \times G$. Пусть E_1, E_2 – некоторые множества, $E_i = \beta_i |\Lambda|$, $i = 1, 2$, $\beta = \beta_1 \beta_2$. Пусть $\mathbf{E} = E_1 \times E_2$ – подмножество множества $(\Lambda + s_1) \times (\Lambda + s_2)$, множества E_1, E_2 являются $(\alpha_0, 2^{-10} \varepsilon^2)$ -равномерными подмножествами множеств $\Lambda + s_1, \Lambda + s_2$ соответственно, $\alpha_0 = 2^{-2000} \delta^{96} \beta_1^{48} \beta_2^{48}$, $\varepsilon = 2^{-100} \alpha_0^2 / (100d)$. Предположим, что A – подмножество множества $\mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta$ и A не содержит троек $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $s \neq 0$. Пусть

$$\log N \geq 2^{1000000} (2^{250000} \delta^{-20000} \beta^{-200} + d)^3 \log \frac{1}{\delta \beta \varepsilon_0}. \quad (6.1)$$

Тогда существуют множество Бора $\tilde{\Lambda}$, вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ и множества $E'_1 \subseteq (E_1 - y_1 \cap \tilde{\Lambda})$, $E'_2 \subseteq (E_2 - y_2 \cap \tilde{\Lambda})$ такие, что:

- 1) при $|E'_1| = \beta'_1 |\tilde{\Lambda}|$, $|E'_2| = \beta'_2 |\tilde{\Lambda}|$ и $\beta' = \beta'_1 \beta'_2$ выполнено $\beta' \geq 2^{-1500} \delta^{100} \beta$;
- 2) E'_1, E'_2 являются $(\alpha'_0, 2^{-10} (\varepsilon')^2)$ -равномерными, где $\alpha'_0 = 2^{-2000} \delta^{96} (\beta')^{48}$, $\varepsilon' = 2^{-100} (\alpha'_0)^2 / (100D')$, $D \leq D' = 2^{250000} \delta^{-20000} \beta^{-200} + d$;
- 3) для $\tilde{\Lambda} = \Lambda(\tilde{S}, \tilde{\varepsilon})$ выполнено $|\tilde{S}| = D$ и $\tilde{\varepsilon} \geq (2^{-100} (\varepsilon')^2)^D \varepsilon_0$;
- 4) $\delta_{E'_1 \times E'_2}(A) \geq \delta + 2^{-600} \delta^{22}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Предположим, что $A \subseteq G \times G$, $|A| = \delta N^2$ и A не содержит троек $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $s \neq 0$.

Доказательство представляет собой алгоритм. На i -м шаге алгоритма строится вектор $\vec{s}_i = (s_i^{(1)}, s_i^{(2)})$ и следующие множества: регулярное множество Бора $\Lambda_i = \Lambda(S_i, \varepsilon_i)$, а также $E_i^{(1)} - s_i^{(1)} \subseteq \Lambda_i$, $E_i^{(2)} - s_i^{(2)} \subseteq \Lambda_i$. Пусть $|E_i^{(1)}| = \beta_i^{(1)} |\Lambda_i|$, $|E_i^{(2)}| = \beta_i^{(2)} |\Lambda_i|$, $\beta_i = \beta_i^{(1)} \beta_i^{(2)}$, $\mathbf{E}_i = E_i^{(1)} \times E_i^{(2)}$.

Множества $\Lambda_i, E_i^{(1)}, E_i^{(2)}$ обладают следующими свойствами:

- i) $\beta_i \geq 2^{-1500} \delta^{100} \beta_{i-1}$;
- ii) $E_i^{(1)}, E_i^{(2)}$ являются $(\alpha_0^{(i)}, 2^{-10} (\varepsilon_i')^2)$ -равномерными, $\alpha_0^{(i)} = 2^{-2000} \delta^{96} \beta_i^{48}$, $\varepsilon_i' = 2^{-100} (\alpha_0^{(i)})^2 / (100d_i)$;
- iii) $\Lambda_i = \Lambda(S_i, \varepsilon_i)$, $|S_i| = d_i$, $d_i \leq 2^{250000} \delta^{-20000} \beta_{i-1}^{-200} + d_{i-1}$, $\varepsilon_i \geq (2^{-100} (\varepsilon_i')^2)^{d_i} \varepsilon_{i-1}$;
- iv) $\delta_{\mathbf{E}_i}(A') \geq \delta_{\mathbf{E}_{i-1}}(A') + 2^{-600} \delta^{22}$.

Предложение 6.1 позволяет провести $(i + 1)$ -й шаг алгоритма. По этому предположению существуют новый вектор $\vec{s}_{i+1} = (s_{i+1}^{(1)}, s_{i+1}^{(2)}) \in G \times G$ и регулярное множество Бора $\Lambda_{i+1} = \Lambda(S_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$, а также множества $E_{i+1}^{(1)} - s_{i+1}^{(1)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $E_{i+1}^{(2)} - s_{i+1}^{(2)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $\mathbf{E}_{i+1} = E_{i+1}^{(1)} \times E_{i+1}^{(2)}$, удовлетворяющие условиям 1)–4) предложения 6.1.

Положим $S_0 = \{0\}$, $\Lambda_0 = \Lambda(S_0, 1)$ и $E_1 = E_2 = G$, $\beta_0 = 1$. Ясно, что множества E_1, E_2 являются $(2^{-2000} \delta^{96}, 2^{-10000} \delta^{400})$ -равномерными. Значит, мы провели нулевой шаг алгоритма.

Оценим общее число шагов нашей процедуры. Для любого i мы имеем $\delta_{\mathbf{E}_i}(A') \leq 1$. Используя последнее неравенство и свойство iv), получаем, что общее число шагов не превосходит $2^{700} \delta^{-21} = K$.

Из свойства iii) вытекает, что $\beta_i \geq (2^{-1500} \delta^{100})^i$. Следовательно, $d_i \leq (C_1 \delta)^{-C'_1 i}$, где $C_1, C'_1 > 0$ – абсолютные константы.

Для доказательства теоремы проверим выполнение условия (6.1) на последнем шаге нашего алгоритма. Перепишем (6.1) в виде

$$N \geq (C'_2 \delta)^{-C'_3 \delta^{-C'_4 K}} = \exp(\delta^{-C' \delta^{-21}}), \quad (6.2)$$

где $C'_2, C'_3, C'_4, C' > 0$ – абсолютные константы. По условию

$$\delta \gg \frac{1}{(\log \log N)^{1/22}},$$

и мы получаем (6.2). Следовательно, множество A' содержит тройку $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $s \neq 0$. Это противоречие доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Безусловно, константа 22 в теореме 1.5 (см. замечание 1.6) может быть несколько понижена. Тем не менее, по мнению автора, эта константа не может быть заменена на число, близкое к единице, без использования какой-то новой идеи.

Применяя следующую лемму Б. Грина (см., например, [15] или [31]), можно вывести следствие из теоремы 1.5 относительно подмножеств $\{-N, \dots, N\}^2$, не содержащих уголков (детали доказательства могут быть найдены в [15]).

ЛЕММА 6.3. Пусть N – натуральное число. Пусть A – подмножество множества $\{-N, \dots, N\}^2$, $|A| = \delta(2N + 1)^2$, не содержащее троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, $d > 0$. Тогда существует множество $A_1 \subseteq A$ такое, что:

- 1) $|A_1| \geq \delta^2(2N + 1)^2/4$;
- 2) A_1 не содержит троек $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, $s \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Пусть $\delta > 0$ и $N \gg \exp \exp(\delta^{-43})$. Пусть A – подмножество множества $\{1, \dots, N\}^2$, имеющее мощность не меньше δN^2 . Тогда A содержит тройку $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, $s > 0$.

Список литературы

1. E. Szemerédi, “On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 199–245.
2. T. Tao, V. H. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **105**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
3. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
4. B. L. van der Waerden, “Beweis einer Baudetschen Vermutung”, *Nieuw Archief*, **15** (1927), 212–216.
5. K. F. Roth, “On certain sets of integers”, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 104–109.
6. J. Bourgain, “Roth’s theorem on progressions revisited”, *J. Anal. Math.*, **104**:1 (2008), 155–192.
7. H. Furstenberg, “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”, *J. Analyse Math.*, **31**:1 (1977), 204–256.
8. H. Furstenberg, Y. Katznelson, “An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations”, *J. Analyse Math.*, **34**:1 (1978), 275–291.
9. H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, “The ergodic theoretical proof of Szemerédi’s theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **7**:3 (1982), 527–552.

10. F. A. Behrend, "On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **23** (1946), 331–332.
11. R. A. Rankin, "Sets of integers containing not more than a given number of terms in arithmetical progression", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **65**:4 (1961), 332–344.
12. W. T. Gowers, "A new proof of Szemerédi's theorem", *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
13. M. Ajtai, E. Szemerédi, "Sets of lattice points that form no squares", *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **9** (1974), 9–11.
14. И. Д. Шкредов, "Об одном обобщении теоремы Семереди", *Докл. РАН*, **405**:3 (2005), 315–319; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a generalization of Szemerédi's theorem", *Dokl. Math.*, **72**:3 (2005), 899–902.
15. I. D. Shkredov, "On a generalization of Szemerédi's theorem", *Proc. London Math. Soc.*, **93**:3 (2006), 723–760.
16. J. Solymosi, "Note on a generalization of Roth's theorem", *Discrete and computational geometry*, Algorithms Combin., **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 825–827.
17. V. H. Vu, "On a question of Gowers", *Ann. Comb.*, **6**:2 (2002), 229–233.
18. И. Д. Шкредов, "Об одной задаче Гауэрса", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 179–221; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a problem of Gowers", *Izv. Math.*, **70**:2 (2006), 385–425.
19. И. Д. Шкредов, "Об одной задаче Гауэрса", *Докл. РАН*, **400**:2 (2005), 169–172; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a problem of Gowers", *Dokl. Math.*, **71**:1 (2005), 46–48.
20. B. Green, "Finite field models in additive combinatorics", *Surveys in combinatorics 2005* (University of Durham, Durham, UK, 2005), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **327**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 1–27.
21. V. F. Lev, "Progression-free sets in finite Abelian groups", *J. Number Theory*, **104**:1 (2004), 162–169.
22. T. C. Brown, J. C. Buhler, "A density version of a geometric Ramsey theorem", *J. Combin. Theory Ser. A*, **32**:1 (1982), 20–34.
23. P. Frankl, R. L. Graham, V. Rödl, "On subsets of abelian groups with no 3-term arithmetic progression", *J. Combin. Theory Ser. A*, **45**:1 (1987), 157–161.
24. R. Meshulam, "On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **71**:1 (1995), 168–172.
25. V. F. Lev, "Progression-free sets in finite Abelian groups", *J. Number Theory*, **104**:1 (2004), 162–169.
26. M. T. Lacey, W. McClain, *On an argument of Shkredov on two-dimensional corners*, [arXiv:math.CO/0510491](https://arxiv.org/abs/math.CO/0510491).
27. J. Bourgain, "On triples in arithmetic progression", *Geom. Funct. Anal.*, **9**:5 (1999), 968–984.
28. B. Green, "A Szemerédi-type regularity lemma in Abelian groups, with applications", *Geom. Funct. Anal.*, **15**:2 (2005), 340–376.
29. T. Tao, *Lecture notes 5 for Math 254A: Behrend's example; Bourgain's refinement of Roth's theorem*, <http://math.ucla.edu/~tao/254a.1.03w/>.
30. F. R. K. Chung, R. L. Graham, R. M. Wilson, "Quasi-random graphs", *Combinatorica*, **9**:4 (1989), 345–362.
31. W. T. Gowers, "Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs", *Combin. Probab. Comput.*, **15**:1–2 (2006), 143–184.

И. Д. ШКРЕДОВ (I. D. SHKREDOV)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: ishkredov@rambler.ru

Поступило в редакцию
 03.05.2007