Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Багдасаров, Неравенства Колмогорова для функций из классов $W^r H^\omega$ с ограниченной нормой в $\mathbb{L}_p$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 2, 5–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:56:51

УДК 517.988

С. К. Багдасаров

Неравенства Колмогорова для функций из классов $W^r H^\omega$ с ограниченной нормой в $\mathbb{L}_p$

Найдены решения и описаны структурные свойства экстремальных функций задачи Колмогорова $\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B$, для всех $r, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq r$, всех $p, 1 \leq p < \infty$, выпуклых модулей непрерывности ω , всех положительных B и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, где $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ – класс функций с r -й производной, модуль непрерывности которой ограничен ω . Получены точные константы в аддитивных (и мультипликативных в случае гёльдеровских классов) неравенствах для нормы производных $\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})}$ функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{I})$ с конечной нормой $\|f^{(r)}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})}$. Исследованы такие свойства экстремальных функций в случае $r = 1$, как свойство ограниченности носителей, а также получены неравенства между узлами соответствующих ω -сплайнов. В случае гёльдеровских модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$ показано, что длины интервалов между соседними узлами экстремальных ω -сплайнов убывают в геометрической прогрессии, а сами решения задачи Колмогорова обладают фрактальным свойством подобия.

Библиография: 43 наименования.

Ключевые слова: неравенства Колмогорова–Ландау, модули непрерывности.

§ 1. Введение

В настоящей работе предлагается решение задачи о максимизации равномерной нормы производных функций, определенных на прямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и удовлетворяющих двум типам ограничений:

- 1) норма функций в $\mathbb{L}_p(\mathbb{I})$ ограничена данной константой;
- 2) модуль r -й производной функций мажорируется фиксированным выпуклым (вверх) модулем непрерывности.

При линейном модуле непрерывности рассматриваемое множество функций совпадает со стандартным соболевским классом, а решаемая задача представляет собой классический вариант задачи А. Н. Колмогорова о точных неравенствах между верхними гранями промежуточных производных.

1.1. Постановка задачи Колмогорова в соболевских классах. Для формулировки классического варианта задачи Колмогорова на всей оси $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или полуоси $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ введем определение соболевских классов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, $1 \leq s \leq +\infty$ и $r \in \mathbb{N}$. Соболевскими классами $W_s^r(\mathbb{I})$ называются классы функций f с абсолютно непрерывной производной $f^{(r-1)}$ на любом конечном интервале $[\sigma, \xi] \in \mathbb{I}$, удовлетворяющих ограничению $\|f^{(r)}\|_{\mathbb{L}_s(\mathbb{I})} \leq 1$.

Для интервала $\mathbb{I} = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$ и параметров $1 \leq p \leq +\infty$, $r \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, $0 < m < r$, задача Колмогорова о верхних гранях промежуточных производных функций из соболевских классов $W_\infty^r(\mathbb{I})$ может быть сформулирована в следующей форме: найти минимальную константу K в неравенстве

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq K \|f\|_{L_p(\mathbb{I})}^{\frac{r-m}{r+p-1}} \|f^{(r)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})}^{\frac{m+p-1}{r+p-1}} \quad (1.1)$$

и экстремальные функции задачи

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W_\infty^r(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad (1.2)$$

для любого $B > 0$, обращающие точные неравенства (1.1) в равенства.

А. Н. Колмогоров [1], [2] предложил полное (для всех $r \in \mathbb{N}$, $0 < m < r$) решение задачи (1.2) в классическом варианте, когда $p = \infty$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ (см. также элементарное доказательство А. С. Каваретты [3]). В этом случае множество экстремальных функций в (1.1) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ и всех $B > 0$ состоит из функций, называемых *эйлеровыми сплайнами*: $f(t) = \phi_{\lambda,r}(t + \rho)$ для $\rho \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, где $\phi_{\lambda,r} - (2\pi/\lambda)$ -периодическая функция со свойством $\phi_{\lambda,r}^{(r)}(t) = \text{sign} \sin(\lambda t)$.

В случае полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $p = \infty$ решение было дано А. С. Кавареттой и И. Дж. Шенбергом [4]. Альтернирующая между значениями $-B$ и B экстремальная функция, r -я производная которой поочередно принимает значения -1 и 1 , может быть получена путем применения предельной процедуры (см. [5]) к *чебышевским совершенным сплайнам* (см. [6], [7, с. 130–137], [8]).

Наконец, в случае $1 \leq p < \infty$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ решение задачи (1.2) принадлежит Г. Г. Магарил-Ильяеву [9]. Именно этот вариант задачи Колмогорова и будет обобщен и распространен в настоящей статье с соболевских классов на классы функций, определяемых мажорирующим модулем непрерывности.

Обзор основных результатов, полученных в области колмогоровских неравенств для соболевских классов, содержится в комментарии В. М. Тихомирова и Г. Г. Магарил-Ильяева к результату А. Н. Колмогорова в [2]. Кроме того, рецензент данной статьи предлагает читателю более расширенный список литературы о разнообразных вариантах неравенств для норм производных функций, разностей и степеней других линейных операторов, приведенный и обсуждаемый в монографиях [10]–[12], а также предметных обзорах [13], [14].

1.2. Классы $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ как обобщения соболевских классов. Функции, принадлежащие стандартным соболевским классам $W_\infty^{r+1}(\mathbb{I})$, удовлетворяют ограничениям $\|f^{(r+1)}\|_{L_\infty(\mathbb{I})} \leq 1$, эквивалентным неравенству $\omega(f^{(r)}; t) \leq t$ для *модуля непрерывности* непрерывной функции $g(t)$:

$$\omega(g; t) := \sup_{|x-y| \leq t} |g(x) - g(y)|.$$

Следуя терминологии, используемой Д. Джексоном, С. М. Никольским и Н. П. Корнейчуком, мы рассмотрим ограничения $\omega(f^{(r)}; t) \leq \omega(t)$ для некоторого *выпуклого модуля непрерывности* ω и исследуем задачу Колмогорова в классах функций, подчиняющихся этому ограничению.

Д. Джексон [15] оценивал точность аппроксимации *индивидуальной* функции $f \in C^r[a, b]$ данным конечномерным подпространством в терминах модуля непрерывности r -й производной функции f (см. также [16]–[18]). С. М. Никольский [19] первым предложил рассматривать классы функций с общим ограничивающим выпуклым модулем непрерывности ω при постановке задач аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Модулем непрерывности* называется такая функция $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{а) } \omega(0) = 0; \quad \text{б) } \omega(x) \leq \omega(y), \quad x < y; \quad \text{с) } \omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

В настоящей работе мы будем рассматривать только выпуклые (вверх) модули непрерывности, т. е. модули непрерывности, обладающие следующим дополнительным свойством:

$$\omega(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha\omega(x) + (1-\alpha)\omega(y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

ПРИМЕР 1.1. Гёльдеровский модуль $\omega_\alpha(t) = ct^\alpha$ при $0 < \alpha \leq 1$ и $c > 0$ служит типичным примером строго выпуклого модуля непрерывности (удовлетворяющего строгим неравенствам в (1.3) для всех $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\mathbb{I} = [a, b]$, $r \in \mathbb{N}$, $\tau \in [a, b]$ и ω -выпуклый модуль непрерывности. Классы абсолютно непрерывных функций $H^\omega(\mathbb{I})$, $H_\tau^\omega(\mathbb{I})$ и $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H^\omega(\mathbb{I}) &:= \{x \in C(\mathbb{I}) \mid |x(t) - x(\tau)| \leq \omega(|t - \tau|), \quad t, \tau \in \mathbb{I}\}, \\ H_\tau^\omega(\mathbb{I}) &:= \{x \in H^\omega(\mathbb{I}) \mid x(\tau) = 0\}, \\ W^r H^\omega(\mathbb{I}) &:= \{x \in C^r(\mathbb{I}) \mid x^{(r)} \in H^\omega(\mathbb{I})\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соболевский класс $W_\infty^{r+1}[a, b]$ может считаться частным случаем функционального класса $W^r H^\omega[a, b]$ при линейном модуле непрерывности $\tilde{\omega}(t) = t$.

Класс Гёльдера

$$W^r H^\alpha(\mathbb{I}) := W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{I}), \quad \omega_\alpha(t) = t^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (1.5)$$

может рассматриваться как одно из возможных обобщений соболевских классов $W_\infty^r(\mathbb{I})$ для *дробных* r . Действительно, если $r = [r] + \alpha$ – сумма целой части и мантиссы $\alpha \in (0, 1)$, то класс Соболева $W_\infty^r(\mathbb{I})$ может быть определен следующим образом:

$$W_\infty^r(\mathbb{I}) := W^{[r]} H^\alpha(\mathbb{I}).$$

1.3. Задача Колмогорова–Ландау в $W^r H^\omega(\mathbb{I})$. Основной целью в настоящей работе являются нахождение решения и описание структурных свойств экстремальных функций задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad (1.6)$$

для всех $r, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq r$, всех p , $1 \leq p < \infty$, выпуклых модулей непрерывности ω , всех положительных B и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Кроме того, будут получены точные константы в соответствующих *аддитивных* (и *мультипликативных* в случае гёльдеровских классов) неравенствах для нормы $\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})}$ производных функций из $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ с конечной нормой $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})}$. В § 2 мы объясним, что задача (1.6) эквивалентна задаче

$$f^{(m)}(0) \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad (1.7)$$

если $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Более того, в § 6–8 будут построены экстремальные функции задачи (1.6) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ как предельные функции решений задачи (1.7) при специальном выборе отрезков $[0, d_n]$ и $[-d_n, d_n]$ соответственно. Повсюду в статье мы будем называть (1.6) и (1.7) задачами *Колмогорова* и *Колмогорова–Ландау* соответственно.

Описание экстремальных функций и точных неравенств задачи (1.6) в случае $1 \leq p < \infty$ венчает цикл работ автора, посвященных проблеме Колмогорова для норм промежуточных производных функций в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$. Отправной точкой в этих исследованиях было построение в [20] аналогов *золотаревских полиномов* (см. [21]) – семейства экстремальных функций $\mathcal{Z}_B$ задачи (1.7) для $\mathbb{I} = [0, 1]$ и всех B , превышающих норму соответствующей *чебышевской* функции.

Согласно принципу максимума Понтрягина [22] во всех вариантах задачи Колмогорова в соболевских классах функция оптимального управления выбирается таким образом, чтобы почти всюду максимизировать гамильтониан системы. В случае задачи Колмогорова переменная управления совпадает с r -й производной функции из соболевского класса ($u(t) = f^{(r)}(t)$), а гамильтониан принимает форму $H(t) = K(t)u(t)$ для некоторого интегрального ядра $K(t)$. Например, в классическом случае $p = \infty$ таким ядром выступает *полиномиальный сплайн Фредгольма* (см. [5], [23], [24]). Именно поэтому экстремальные функции являются *совершенными сплайнами степени r* , r -я производная которых совпадает со *знаком* генерирующего ядра K .

В случае функций управления, удовлетворяющих ограничениям типа

$$-\omega(|x - y|) \leq u(x) - u(y) \leq \omega(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{I},$$

стандартный поточечный принцип максимума заменяется на *интегральный* вариант, требующий максимизации интеграла гамильтониана. Таким образом, решение общих задач оптимизации в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ невозможно без описания аналогов совершенных сплайнов, также известных в теории оптимального контроля как *релейные (relay, bang-bang) управления*.

В работах [25], [26] автор решил эту проблему, описав структуру решений задачи

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_\tau^\omega[a, b], \quad \tau \in [a, b], \quad (1.8)$$

максимизации интегральных функционалов для интегральных ядер ψ с конечным числом перемен знака на $[a, b]$. Основные результаты статей [25], [26], используемые и в настоящей работе, приведены в § 4.

Еще одним классическим примером интегрального ядра ψ служит произвольный полином степени r , являющийся генерирующей функцией в более общем варианте задачи Колмогорова – описании *геометрического места точек множества значений всех последовательных производных*:

$$\{(x(T), x'(T), x''(T), \dots, x^{(r-1)}(T), x^{(r)}(T)) \mid x \in W^r H^\omega[0, T], x(0) = \Gamma\}, \quad (1.9)$$

для произвольного $\Gamma \in \mathbb{R}^{r+1}$ (см. в [27] решение задачи линейной динамики в $W^r H^\omega$ в общей форме и решение элементарного частного случая этой задачи – описание критических точек множества (1.9) и соответствующих оптимальных траекторий, ведущих в эти точки).

После характеристики экстремальных функций в задаче (1.8) оказалось возможным и решение задачи (1.6) при $p = \infty$ в случаях Колмогорова ($\mathbb{I} = \mathbb{R}$), Шенберга–Каваретты ($\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$) и проблемы (1.7) в случае Карлина ($\mathbb{I} = [0, 1]$); см. работы автора [28]–[30].

1.4. Теория оптимального управления и неравенства для производных. Как мы напомним читателю в § 3, задача (1.7) в соболевском случае $\omega(t) = t$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ эквивалентна следующей задаче выпуклого программирования:

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p dt \rightarrow \inf, \quad x \in W_\infty^r(\mathbb{R}_+), \quad x^{(m)}(0) = 1, \quad (1.10)$$

которая может быть решена стандартными методами классической теории оптимального управления (см. [9]).

В настоящей работе мы предлагаем решение *нелинейной* задачи

$$\int_{\mathbb{I}} |x(t)|^p dt \rightarrow \inf, \quad x \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad x^{(m)}(0) = A, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}_+ \vee \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

В § 5, 8 мы сформулируем *необходимые* (и *достаточные* ввиду строгой выпуклости) условия экстремальности функций в задаче (1.11), эквивалентной (1.6). Подобно классическому варианту (1.10) задачи (1.11) условия экстремальности будут получены в форме *уравнений Эйлера–Лагранжа* и *условий трансверсальности*. Главным отличием в условиях оптимальности является форма условий Вейерштрасса [22], [31], заключающаяся в максимизации гамильтониана системы почти всюду на интервале $\mathbb{I}$. Мы покажем, что поточечная *инфинитезимальная* версия принципа максимума должна быть заменена на *интегральную форму*, отражающую оптимальное поведение системы в целом.

1.5. Структурная организация работы. Элементарные утверждения, на которые мы будем ссылаться в наших доказательствах, приведены в § 2. Поскольку мы постоянно проводим параллели и сравнения между свойствами экстремальных функций задачи Колмогорова в $W^r H^\omega$ и W_∞^r , кратко напомним читателю в § 3 о сведении колмогоровской задачи в соболевском классе к соответствующей задаче оптимального управления и об условиях экстремальности в этой задаче. В § 3 мы также обращаем внимание читателя на интересное фрактальное свойство самоподобия экстремалей задачи (1.6) в $W_\infty^2(\mathbb{R}_+)$.

В § 4 мы объясняем структуру экстремальных функций в задаче (1.11). Как уже было отмечено, интегральные условия Вейерштрасса, определяющие строение r -й производной экстремальной функции, требуют характеристики структуры решений задачи (1.8). Все основные факты о строении решений этой задачи, используемые в настоящей работе, представлены в § 4. В § 5 выводятся формулы дифференцирования и необходимые условия оптимальности в задаче (1.6). Топологическое доказательство основного результата работы, теоремы 5.2, предложено в § 6. Разнообразные свойства экстремальных функций, построенных в § 6, обсуждаются в § 7. Основываясь на этих свойствах, в § 8 мы распространяем экстремальные функции задачи (1.7) с конечных интервалов на полупрямую $\mathbb{R}_+$ и прямую $\mathbb{R}$. В § 9 и § 10 проведены исследования свойств решений колмогоровской задачи в классах $W^1 H^\omega(\mathbb{I}) \cap \mathbb{L}_p(\mathbb{I})$ в случаях $p = 1$ и $p \in (1, +\infty)$ соответственно.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя в Государственном университете штата Огайо профессора Б. С. Митягина за постановку задачи о точных колмогоровских неравенствах и экспертную помощь в подготовке статьи и своего научного руководителя в МГУ профессора В. М. Тихомирова за введение в теорию классов $W^r H^\omega$ и плодотворные обсуждения

приложений теории оптимального управления к решению задачи Колмогорова о производных. Также автор благодарен рецензенту работы за ряд замечаний, направленных на устранение отдельных недочетов и опечаток и улучшение качества библиографических ссылок.

§ 2. Вспомогательные результаты

2.1. Общие факты. Доказательство основного результата, теоремы 5.2, базируется на топологическом факте, известном как теорема Борсука об антиподальности (см. [32], а также [33]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathbb{S}^n = \{\xi: \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| = r\}$, где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $\eta: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\eta(\xi) = \{\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \dots, \eta_n(\xi)\}$ – непрерывное и нечетное ($\eta(-\xi) = -\eta(\xi)$) векторное поле на $\mathbb{S}^n$. Тогда существует вектор $\xi^* \in \mathbb{S}^n$ такой, что $\eta(\xi^*) = 0$.

В настоящей работе будет использоваться следующее определение числа перемен знака суммируемой функции на отрезке без интервалов вырождения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $\psi \in \mathbb{L}_1[a, b]$ меняет свой знак в точках $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = b$, если $(-1)^i \xi \psi(t) > 0$ для почти всех $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = 1, \dots, n+1$, при фиксированном $\xi \in \{-1, 1\}$. В этом случае $\mu(\psi; [a, b]) := n$ служит обозначением числа перемен знака функции ψ на отрезке $[a, b]$.

Следующий результат о взаимосвязи между числами перемен знака функции и ее производной является одной из форм теоремы Ролля (см. [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $g \in \mathbb{L}_1[a, b]$ – функция такая, что $\mu(g; [a, b]) < \infty$. Имеют место следующие неравенства между числами перемен знака функций $g(t)$ и $G(t) = \int_a^t g(u) du$:

$$\begin{aligned} \mu(G; [a, b]) &\leq \mu(g; [a, b]), \\ G(b) = 0, \mu(g; [a, b]) > 0 &\implies \mu(G; [a, b]) \leq \mu(g; [a, b]) - 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.2. Общие свойства классов $W^r H^\omega[a, b]$. Нами будут также использованы следующие свойства выпуклых модулей непрерывности ω (см. [16], [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть ω – выпуклый модуль непрерывности на $\mathbb{R}_+$. Тогда:

(i) ω имеет односторонние производные в любой точке $x > 0$, т. е.

$$\omega'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(x) - \omega(x-h)}{h}, \quad \omega'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\omega(x+h) - \omega(x)}{h}; \quad (2.2)$$

(ii) функции ω'_+ и ω'_- не возрастают на $(0, +\infty)$ и $\omega'_+(x) \leq \omega'_-(x)$, $x > 0$;

(iii) ω абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

Предложение 2.2 позволяет нам однозначно определить производные во всех точках на интервале $(0, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть ω – выпуклый модуль непрерывности и односторонние производные ω'_- и ω'_+ определены в (2.2). Производная ω' определяется в любой точке $u \in (0, +\infty)$ следующим образом:

$$\omega'(u) := \frac{1}{2}[\omega'_+(u) + \omega'_-(u)]. \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $B > 0$ введем класс

$$W^r H_p^\omega[\mathbb{I}; B] := \{f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}) \mid \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B\}. \quad (2.4)$$

В §5–10 мы опишем решения задачи

$$f^{(m)}(0) \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{I}; B]. \quad (2.5)$$

Следующий результат сводит решение задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{I}; B], \quad (2.6)$$

к описанию экстремальных функций задачи (2.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Экстремальная функция задачи (2.5) является решением и задачи (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, зафиксируем $\tau \in \mathbb{I}$ и $f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{I}; B]$. Положим

$$g_{f,\tau,\mathbb{I}}(x) = \begin{cases} f(x + \tau), & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}_+, \\ \frac{1}{2} [(-1)^m f(\tau - x) + f(x - \tau)], & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Тогда $g_{f,\tau,\mathbb{I}} \in W^r H^\omega(\mathbb{I})$, $g_{f,\tau,\mathbb{I}}^{(m)}(0) = f^{(m)}(\tau)$ и $\|g_{f,\tau,\mathbb{I}}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B$. Предложение доказано.

Эта аргументация показывает, что экстремальные функции задачи (2.5) в случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ обладают следующим свойством симметрии:

$$f(-t) = (-1)^m f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.8)$$

Далее, следуя рассуждениям С. Б. Стечкина [34] в частном случае соболевских классов, мы раскроем связь между мультипликативными и аддитивными колмогоровскими неравенствами в гёльдеровских классах. В основе этого соотношения лежит следующее свойство классов Гёльдера:

$$x(\cdot) \in H^\alpha[0, 1] \iff \gamma^\alpha x(\cdot/\gamma) \in H^\alpha[0, \gamma] \quad \forall \gamma > 0. \quad (2.9)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $A > 0$, $B > 0$ и

$$C = (r + \alpha + p^{-1}) \left(\frac{A}{r + \alpha - m} \right)^{\frac{r + \alpha - m}{r + \alpha + p^{-1}}} \left(\frac{B}{m + p^{-1}} \right)^{\frac{m + p^{-1}}{r + \alpha + p^{-1}}}. \quad (2.10)$$

Следующие неравенства эквивалентны для функции $f \in W^r H^\alpha(\mathbb{I})$ в случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$:

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \leq Ah^{-(m+p^{-1})} \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} + Bh^{r+\alpha-m} \quad \forall h > 0, \quad (2.11)$$

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})}^{\frac{r+\alpha-m}{r+\alpha+p^{-1}}}. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Минимизируя правую часть неравенства (2.11) по h , мы получаем неравенство (2.12). С другой стороны, приложение неравенства Янга к (2.12) приводит нас к (2.11).

Нам также понадобится метод продолжения функции $f \in H^\omega[a, b]$ за пределы интервала.

ЛЕММА 2.2. Пусть $a < b < c$ и ω – выпуклый модуль непрерывности. Если $h \in H^\omega[a, b]$ продолжена на интервал $[b, c]$ формулой

$$h(t) = h(b) + \int_b^t \xi \omega'(t - a) dt, \quad t \in [b, c], \quad \xi \in \{-1, 1\}, \quad (2.13)$$

то $h \in H^\omega[a, c]$.

Следующая лемма является следствием определения строгой выпуклости (см. [26]).

ЛЕММА 2.3. Пусть ω – строго выпуклый модуль непрерывности, $x \in H^\omega[a, b]$ и выполнены равенства

$$|x(a_2) - x(a_1)| = \omega(a_2 - a_1), \quad |x(a_4) - x(a_3)| = \omega(a_4 - a_3)$$

для некоторых $a_1 < a_2, a_3 < a_4$. Тогда либо $(a_1, a_2) \cap [a_3, a_4] = \emptyset$, либо $[a_1, a_2] \subseteq [a_3, a_4]$, либо $[a_3, a_4] \subseteq [a_1, a_2]$.

2.3. Свойства абсолютно непрерывных функций. Определим классы

$$AC^l[a, b] := \{f \in C^l[a, b] \mid f^{(l)} \text{ абсолютно непрерывна} \}.$$

В наших построениях мы используем ряд элементарных свойств функций из классов $AC^l[a, b]$ (см. [28]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если $f \in C^r[a, b]$ имеет r нулей (с учетом кратностей) на $[a, b]$, то

$$\|f^{(k)}\|_{C[a, b]} \leq [b - a]^{r-k} \|f^{(r)}\|_{C[a, b]}, \quad k = 0, \dots, r-1. \quad (2.14)$$

В частности, если $f \in W^r H^\omega[a, b]$ имеет $r + 1$ нулей, то $f^{(r)}$ имеет нуль на отрезке $[a, b]$ и согласно (2.14) получаем

$$\|f^{(k)}\|_{C[a, b]} \leq [b - a]^{r-k} \omega(b - a), \quad k = 0, \dots, r. \quad (2.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $0 < P, r, n \in \mathbb{N}$ и $f \in AC^{r-1}[a, b]$. Функция f принадлежит классу $\mathcal{F}_{r, n, P}[a, b]$, если существуют такие точки $\{\sigma_i\}_{i=0}^l$ для $l \leq n$, что $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_l = b$ и

$$(-1)^i f^{(r)}(x) \geq P > 0 \text{ для почти всех } x \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i], \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $f \in \mathcal{F}_{r, n, P}(\mathbb{I})$. Тогда

$$\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \geq V_{r, p} P (|\mathbb{I}|/n)^{r+1-p/(p-1)} \quad (2.17)$$

для некоторой константы $V_{r, p} > 0$, зависящей только от r, p .

§ 3. Задача Колмогорова в классах Соболева

3.1. Сведение задачи Колмогорова к задаче выпуклого программирования. В этом пункте мы напомним о решении задачи

$$\|x^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad x \in W_\infty^r(\mathbb{I}), \quad \|x\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad (3.1)$$

в соболевском классе для $B > 0$ и $0 < m < r$, основанное на принципах теории оптимального управления (см. [9], [35]).

Сначала приведем следующие два наблюдения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если функция X экстремальна в задаче (3.1) при $B = 1$, то функция $X_B(t) = B^{\frac{rp}{rp+1}} X(B^{-\frac{p}{rp+1}} t)$ также экстремальна в задаче (3.1).

Далее, согласно предложению 2.3 задача (3.1) эквивалентна задаче

$$x^{(m)}(0) \rightarrow \sup, \quad x \in W_\infty^r(\mathbb{I}), \quad \|x\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B. \quad (3.2)$$

Это наблюдение и применение предложения 3.1 приводят нас к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть Y экстремальна в задаче

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p dt \rightarrow \inf, \quad x \in W_\infty^r(\mathbb{R}_+), \quad x^{(m)}(0) = 1, \quad (3.3)$$

и $\alpha := \|Y\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)}$. Тогда функция $X(t) = \alpha^{-\frac{rp}{rp+1}} Y(\alpha^{\frac{p}{rp+1}} t)$ экстремальна в задаче (3.1) при $B = 1$.

Следовательно, далее мы можем ограничиться рассмотрением решения задачи (3.3). Для простоты рассмотрим лишь случай положительной полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Пусть $x(\cdot)$ – экстремальная функция задачи (3.3). Необходимые и достаточные условия экстремальности в строго выпуклой задаче (3.3) в форме принципа максимума Понтрягина (см. [22], [31]) гарантирует существование функции $Z(t)$, которая удовлетворяет уравнениям Эйлера–Пуассона [9]

$$Z^{(r)}(t) = |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3.4)$$

и принципу Вейерштрасса

$$X^{(r)}(t) = (-1)^{r+1} Z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.5)$$

Граничные условия принимают следующую форму:

$$(-1)^{m+1} Z^{(r-1-m)}(0) > 0, \quad Z^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad k \neq r-1-m. \quad (3.6)$$

Можно показать (см. [9] или рассмотрение более общего случая в § 7, 8), что следующая формула дифференцирования имеет место для функции $f \in W_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ такой, что $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} < \infty$:

$$f^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{m+1}}{Z^{(r-1-m)}(0)} \left[\int_{\mathbb{R}_+} f(t) Z^{(r)}(t) dt + (-1)^{r+1} \int_{\mathbb{R}_+} f^{(r)}(t) Z(t) dt \right]. \quad (3.7)$$

Используя тождество (3.7) и применяя неравенство Гёльдера, мы получаем оценку

$$|f^{(m)}(0)| \leq |Z^{(r-1-m)}(0)|^{-1} (\|Z^{(r)}\|_{\mathbb{L}_q(\mathbb{R}_+)} \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} + \|Z\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)}), \quad (3.8)$$

где $q = \infty$, если $p = 1$, и $q = p/(p-1)$, если $1 < p < \infty$. Уравнение (3.4) и принцип (3.5) гарантируют, что X обращает (3.8) в равенство. Отметим, что точные константы в аддитивном неравенстве (3.8) и соответствующем мультипликативном неравенстве (см. лемму 2.1) выражаются в терминах экстремальной функции Z .

3.2. Фрактальное свойство экстремалей в классах Соболева $W_\infty^2(\mathbb{I})$.

Рассмотрим случай $r = 2$, $m = 0$ более детально. В этом случае пара $(X(\cdot), Z(\cdot))$ удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{X}(t) = -\operatorname{sign} Z(t), \quad \ddot{Z}(t) = |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad Z(0) = 0, \quad X(0) = 1. \quad (3.9)$$

Если τ – первый положительный нуль функции $Z(t)$, легко показать, что $\gamma := X(\tau) \neq 0$. Тогда нормированные функции

$$\tilde{X}(t) = \gamma^{-1} X(|\gamma|^{1/2} t + \tau), \quad \tilde{Z}(t) = |\gamma|^{-p} \operatorname{sign} \gamma Z(|\gamma|^{1/2} t + \tau) \quad (3.10)$$

также удовлетворяют уравнениям (3.9). Следовательно, из единственности решения строго выпуклой задачи (3.3) вытекает следующее фрактальное свойство *самоподобия*:

$$X(t) = \gamma^{-1} X(|\gamma|^{1/2} t + \tau), \quad Z(t) = |\gamma|^{-p} \operatorname{sign} \gamma Z(|\gamma|^{1/2} t + \tau), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.11)$$

В частности, из (3.11) можно сделать вывод, что $X(\cdot)$ и $Z(\cdot)$ имеют конечный носитель на $\mathbb{R}_+$. Этот интересный факт впервые открыли А. Т. Фуллер [36] в случае $p = 2$, а чуть позже В. Н. Габушин [37] и Г. Г. Магарил-Ильяев [35] для всех p , $1 \leq p < \infty$ (см. также результат Г. А. Калябина [38] вычисления точных констант в соответствующих мультипликативных неравенствах). В § 9, 10 мы покажем, что подобными свойствами обладают и экстремальные функции задачи Колмогорова в классах Гёльдера $W^1 H^\alpha(\mathbb{I})$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ для всех $\alpha \in (0, 1)$.

§ 4. Экстремальные функции интегральных функционалов в $H^\omega[a, b]$

В настоящем параграфе мы введем понятие *совершенных ω -сплайнов* как экстремальных функций задачи

$$\int_a^b h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_a^\omega[a, b], \quad (4.1)$$

для ядер $\psi \in \mathbb{L}_1[a, b]$ с конечным числом точек перемены знака на $[a, b]$. Мы также предложим всестороннее обсуждение тех структурных свойств ω -сплайнов, которые нам потребуются при доказательстве основных результатов работы.

4.1. Лемма Корнейчука и простые ядра. В этом пункте мы опишем решение задачи о максимизации интегральных функционалов в $H^\omega[a, b]$ в случае, когда ядро меняет знак только один раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть функция $\psi \in \mathbb{L}_1[a, b]$ обладает следующими свойствами: $\int_a^b \psi(x) dx = 0$ и

$$\psi(x) < 0, \quad x \in [a, a'], \quad \psi(x) = 0, \quad x \in [a', b'], \quad \psi(x) > 0, \quad x \in [b', b], \quad (4.2)$$

для некоторых a', b' , $a < a' \leq b' < b$. Тогда функция $\Psi(x) = \xi \int_b^x \psi(t) dt$ при $\xi \in \{\pm 1\}$ называется *простым ядром* на $[a, b]$, а отрезок $[a', b']$, на котором Ψ' равно нулю, называется *нуль-интервалом* производной $\Psi' = \xi \psi$.

Заметим, что в случае простого ядра Ψ для любой точки $\tau \in [a, a']$ найдется такая единственная точка $\rho(\tau) \in [b', b]$, что $\Psi(\tau) = \Psi(\rho(\tau))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Для простого ядра Ψ с производной $\xi\psi$, $\xi \in \{\pm 1\}$, удовлетворяющей условиям (4.2), положим $c := (a' + b')/2$ и определим функцию $\rho: [a, c] \mapsto [c, b]$ уравнениями

$$\Psi(t) = \Psi(\rho(t)), \quad t \in [a, a'], \quad \rho(t) = a' + b' - t, \quad t \in [a', c]. \quad (4.3)$$

Тогда убывающая перестановка $\Psi^*(\cdot)$ определяется на отрезке $[0, b - a]$ формулой

$$\Psi^*(\rho(t) - t) := |\Psi(t)| = |\Psi(\rho(t))|, \quad t \in [a, c]. \quad (4.4)$$

Следующая лемма Корнейчука (см. [16], [18], [39]) описывает экстремальные функции и численное значение максимума в (4.1) для производной ψ простого ядра.

Рис. 1. Перестановка $\Psi^*(\cdot)$ простого ядра Ψ и функция f_0

ЛЕММА 4.1. Пусть $\Psi(t) := \int_b^t \psi(y) dy$, $a \leq t \leq b$, – простое ядро, где ψ удовлетворяет условиям (4.2), и ω – выпуклый модуль непрерывности. Пусть $c := (a' + b')/2$ и функция $\rho: [a, c] \rightarrow [c, b]$ определена уравнениями (4.3), а убывающая перестановка $\Psi^*(\cdot)$ – формулой (4.4). Тогда

$$\sup_{f \in H^\omega[a,b]} \int_a^b f(t) \psi(t) dt = \int_0^{b-a} \Psi^*(t) \omega'(t) dt. \quad (4.5)$$

Максимум в (4.5) реализуется на функциях $f_0(t) + C$, выраженных через функцию ρ и ее обратную ρ^{-1} :

$$\frac{d}{dt} f_0(t) = \begin{cases} \omega'(\rho(t) - t), & a \leq t \leq c, \\ \omega'(t - \rho^{-1}(t)), & c \leq t \leq b. \end{cases} \quad (4.6)$$

Следующее свойство проясняет структуру f_0 : для всех $t \in [0, c]$ имеем

$$f_0(\rho(t)) - f_0(t) = \int_c^t \omega'(\rho(u) - u) [\rho'(u) - 1] du = \omega(\rho(t) - t). \quad (4.7)$$

Рис. 1 иллюстрирует структуру экстремальных функций в лемме 4.1.

4.2. Обозначения и определения. Все последующие результаты параграфа, касающиеся структуры решений задачи (4.1) для интегральных ядер с произвольным конечным числом точек перемены знака, заимствованы из работ автора [25], [26].

Для $n \in \mathbb{N}$ введем множество интегрируемых функций с n точками перемены знака на отрезке $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $s \in \{-1, 0, +1\}$, $m \in \{0, 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Интегрируемая функция $\psi \in \mathbb{L}[a, b]$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_n^{s,m}[a, b] \subset \mathbb{L}[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\text{sign} \int_a^b \psi(x) dx = s$ и ψ альтернирует знак в точках $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$:

$$\text{meas}\{x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \mid (-1)^{i+m} \psi(x) > 0\} = \alpha_i - \alpha_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad (4.8)$$

для некоторых $a =: \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \alpha_{n+1} := b$.

Далее, определим естественный метод упорядочивания интервалов, не имеющих общих внутренних точек.

Пусть $\mathbb{I}_1 =: [a, b]$ и $\mathbb{I}_2 =: [c, d]$ – интервалы без общих внутренних точек (т.е. или $b \leq c$, или $d \leq a$). Отношение $\mathbb{I}_1 \lesssim \mathbb{I}_2$ ($\mathbb{I}_1 \gtrsim \mathbb{I}_2$) выполняется тогда и только тогда, когда $b \leq c$ ($d \leq a$).

Пусть $\mathbb{I} =: [a, b]$. Внутренность интервала $\mathbb{I}$ обозначим следующим образом: $\overset{\circ}{\mathbb{I}} := \{x \mid a < x < b\}$.

Заметим, что лемма Корнейчука описывает экстремальные функции задачи (4.1) для всех функций $\psi \in \mathcal{M}_1^{0,m}[a, b]$ с одной точкой перемены знака на $[a, b]$.

4.3. Определение ψ -разбиения конечных интервалов. Для произвольного фиксированного ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a, b]$ введем понятие специального ψ -разбиения, которое будет использовано в описании структуры экстремальных функций задачи (4.1) для $n > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть $s \in \{-1, 0, +1\}$, $m \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для данной функции $\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a, b]$ ψ -разбиением называется разбиение отрезка $[a, b]$ на объединение интервалов B_{ij} , $1 \leq i, j \leq n+1$, с непересекающимися внутренностями и со следующими свойствами:

$$B_{ij} \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], \quad 1 \leq i, j \leq n+1, \quad (4.9)$$

$$\int_{B_{ij}} \psi(t) dt + \int_{B_{ji}} \psi(t) dt = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, \quad (4.10)$$

$$\text{sign} \int_{B_{ii}} \psi(t) dt = s := \text{sign} \int_a^b \psi(t) dt, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad (4.11)$$

$$B_{ij} \lesssim B_{kr} \implies B_{rk} \lesssim B_{ji} \text{ или } B_{ji} \lesssim B_{kr}, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, 1 \leq k < r \leq n+1, \quad (4.12)$$

$$\overset{\circ}{B}_{kk} \neq \emptyset \implies B_{ji} \lesssim B_{kk} \text{ или } B_{kk} \lesssim B_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, 1 \leq k \leq n+1. \quad (4.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Свойство (4.9) означает, что для любого $i \in \{1, \dots, n+1\}$ отрезки $\{B_{ij}\}_{j=1}^{n+1}$ образуют разбиение интервала $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, на котором ψ сохраняет свой знак $(-1)^{i+m}$ почти всюду.

Поскольку $(-1)^{i+m}\psi(t) > 0$ для почти всех $t \in B_{ij}$ (см. (4.8)), из свойства (4.10) вытекает, что оба атома разбиения B_{ij} и B_{ji} вырождаются в точку для всех тех пар (i, j) , $i < j$, для которых разность $|i - j|$ четна.

Поскольку $(-1)^{i+m}\psi(t) > 0$ для почти всех $t \in B_{ii}$, свойство (4.11) приводит к следующим двум наблюдениям:

- 1) если $s = 0$, то все интервалы $\{B_{ii}\}_{i=1}^{n+1}$ вырождаются в точку;
- 2) если $s \in \{\pm 1\}$, то для всех i таких, что $(-1)^{i+m+1} = s$, $1 \leq i \leq n+1$, атомы $\{B_{ii}\}$ также вырождаются в точку.

Из соотношения (4.13) вытекает, что оба атома B_{ij} и B_{ji} располагаются либо слева от B_{kk} , либо справа от этого отрезка для тех троек (i, j, k) , для которых все эти три отрезка имеют непустую внутренность.

ПРИМЕР 4.1. Для выборочных троек (n, s, m) перечислим некоторые возможные варианты индексов $\{ij\}$ невырожденных атомов B_{ij} ψ -разбиений для $\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a, b]$ в их естественном порядке (см. замечание 4.1):

$$\begin{aligned}
 (1, 1, 1): & \{11, 12, 21\}; & (1, 0, 1): & \{12, 21\}; & (1, -1, 1): & \{12, 21, 22\}; \\
 (2, 1, 1): & \{11, 12, 21, 23, 32, 33\}; & (2, 1, 1): & \{12, 21, 23, 32, 33\}; \\
 (2, 0, 1): & \{12, 21, 23, 32\}; & (2, -1, 1): & \{12, 21, 22, 23, 32\}; \\
 (3, 1, 1): & \{11, 12, 21, 23, 32, 33, 34, 43\}; & (3, 1, 1): & \{12, 21, 23, 32, 33, 34, 43\}; \\
 (3, 0, 1): & \{14, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 41\}; & (3, -1, 1): & \{12, 21, 22, 23, 32, 34, 43, 44\}; \\
 & (3, -1, 1): & \{14, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 41, 44\}; \\
 & (4, 0, 1): & \{14, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 41, 45, 54\}; \\
 & (4, 0, 1): & \{12, 21, 25, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 52\}; \\
 (5, 0, 1): & \{16, 14, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 41, 45, 54, 56, 65, 61\}; \\
 (5, 0, 1): & \{16, 12, 21, 23, 32, 36, 34, 43, 45, 54, 56, 65, 63, 61\}.
 \end{aligned}$$

Всюду в работе обозначение $\mathcal{X}(E; t)$ резервируется для *индикаторной функции* множества $E \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{X}(E; t) = 1, \quad t \in E, \quad \mathcal{X}(E; t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus E.$$

Следующая теорема в случае $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$ может рассматриваться как обобщение леммы Корнейчука в случае $n \geq 2$; в частности, мы покажем, что если $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$ и $n \geq 2$, то ядро $\Psi(t) = \int_b^t \psi(x) dx$ разлагается на такую сумму простых ядер $\{\Phi_i(\cdot) = \Phi_i(\omega; \cdot)\}_{i=1}^l$, что

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^l \Phi_i(t), \quad \sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t) \psi(t) dt = \sum_{i=1}^l \sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t) \Phi_i'(t) dt. \quad (4.14)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть

$$\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a, b], \quad s \in \{-1, 0, +1\}, \quad m \in \{0, 1\}.$$

Тогда существуют решение $x_{\omega, \psi}$ задачи (4.1) и ψ -разбиение $\mathcal{V}$ отрезка $[a, b]$ со следующими свойствами:

- (i) для всех таких индексов $1 \leq i \leq n+1$, что $B_{ii} \neq \emptyset$, имеем

$$x_{\omega, \psi}(t) = (-1)^{m+i} \omega(t-a), \quad t \in B_{ii}; \quad (4.15)$$

Рис. 2. Графики экстремальной функции x^* , ядра Ψ и интервалы разбиения в случае $(n, s, m) = (2, 1, 1)$

(ii) для всех пар (i, j) , $1 \leq i < j \leq n+1$, функция $x_{\omega, \psi}$ экстремальна в задаче

$$\int_a^b h(t) \psi_{ij}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b], \quad (4.16)$$

$$\psi_{ij}(t) := \psi(t) \mathcal{X}(B_{ij} \cup B_{ji}; t), \quad t \in [a, b]. \quad (4.17)$$

Рис. 2, 3 иллюстрируют структуру экстремальных функций из теоремы 4.1. Каждый рисунок содержит графики экстремальной функции x^* и ядра Ψ , а также идентифицирует атомы оптимального ψ -разбиения.

Рис. 3. Графики экстремальной функции x^* , ядра Ψ и интервалы разбиения в случае $(n, s, m) = (3, 1, 1)$

4.4. Структурные свойства экстремальных функций. Все ядра

$$\Psi_{ij}(t) = \int_a^t \psi_{ij}(y) dy, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, \quad (4.18)$$

являются *простыми* на соответствующих носителях в смысле определения 4.1 при условии, что атомы разбиения B_{ij} и B_{ji} не вырождаются в точку. Действительно, из включений $B_{ij} \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $1 \leq i < j \leq n+1$, в силу замечания 4.1 мы можем заключить, что

$$\text{sign } \psi(t) = \begin{cases} (-1)^{i+m}, & t \in B_{ij}, \\ (-1)^{i+m+1}, & t \in B_{ji}, \end{cases} \quad (4.19)$$

поскольку разность $j - i$ должна быть нечетной для невырожденных атомов разбиения.

Следовательно, согласно (4.19) и (4.10) каждое из ядер Ψ_{ij} в (4.18) является простым, если $\overset{\circ}{B}_{ij} \neq \emptyset$. В этом случае лемма 4.1 предоставляет нам следующие формулы для производной $\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t)$:

$$\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t) = \begin{cases} (-1)^{i+m+1} \omega'(\rho_{ij}(t) - t), & t \in B_{ij}, \\ (-1)^{i+m+1} \omega'(t - \rho_{ij}^{-1}(t)), & t \in B_{ji}, \end{cases} \quad (4.20)$$

для всех пар (i, j) таких, что $\overset{\circ}{B}_{ij} \neq \emptyset$, где отображение $\rho_{ij}: B_{ij} \rightarrow B_{ji}$ определяется уравнением

$$\Psi_{ij}(t) = \Psi_{ij}(\rho_{ij}(t)), \quad t \in B_{ij}, \quad \rho_{ij}(t) \in B_{ji}. \quad (4.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Как следует из (4.20), функция $\frac{d}{dt} x_{\omega, \psi}(t)$ может иметь не более $n+1$ перемен знака на $[a, b]$, если $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$ или $\psi \in \mathcal{M}_n^{1,m}[a, b]$, и n перемен знака на $[a, b]$, если $\psi \in \mathcal{M}_n^{-1,m}[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Положим

$$[\alpha_{ij}, \beta_{ij}] := B_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n+1. \quad (4.22)$$

Для всех простых ядер Ψ_{ij} из (4.18), для которых B_{ij} не вырождается в точку, отрезок $[\alpha_{ij}, \beta_{ji}]$ является носителем ядра Ψ_{ij} , а отрезок $[\beta_{ij}, \alpha_{ji}]$ совпадает с нуль-интервалом производной $\psi_{ij} = \Psi'_{ij}$. Тогда определяющее свойство (4.12) ψ -разбиений приводит нас к следующей особенности носителей простых ядер Ψ_{ij} : для любой пары простых ядер экстремального ψ -разбиения либо их носители не пересекаются, либо носитель одного ядра лежит в нуль-интервале производной другого ядра.

Формулы (4.20) гарантируют единственность экстремальной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a, b]$, то задача (4.1) имеет единственное решение.

Свойство (4.7), примененное к функциям ρ_{ij} в (4.20), приводит нас к соотношениям

$$|x_{\omega, \psi}(\rho_{ij}(t)) - x_{\omega, \psi}(t)| = \omega(\rho_{ij}(t) - t), \quad t \in B_{ij}. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23), (4.15) и свойства функций класса $H^\omega[a, b]$ из леммы 2.3 объясняют, почему мы наделили ψ -разбиения свойствами, перечисленными в определении 4.4.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть v – любая точка на $[a, b]$, кроме точки перемены знака ядра ψ и конечных точек атомов экстремального разбиения отрезка $[a, b]$. Тогда существуют точка $w = w(v) \in [a, b]$, $w \neq v$, и знак $\xi \in \{-1, 1\}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} x_{\omega, \psi}(w) - x_{\omega, \psi}(v) &= \xi \omega(|w - v|), \\ x'_{\omega, \psi}(w) - x'_{\omega, \psi}(v) &= \xi \omega'(|w - v|). \end{aligned} \quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из соотношений (4.23), (4.20) и (4.15).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Перестановка $\mathfrak{R}_\omega(\Psi; \cdot)$ определяется следующим образом на отрезке $[0, b - a]$:

$$\mathfrak{R}_\omega(\Psi; x) := \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \Psi_{ij}^*(x) + |\Psi(x + a)| \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{X}(B_{ii}; x), \quad (4.25)$$

где простые ядра $\{\Psi_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n+1}$ были введены в (4.18), а их убывающие перестановки Ψ_{ij}^* – в (4.4).

Формула Корнейчука (4.6), примененная к простым ядрам в (4.18), дает числовое решение задачи (4.1).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если ω – выпуклый модуль непрерывности, то

$$\sup_{h \in H_0^\omega[a, b]} \int_a^b h(t) \psi(t) dt = \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\omega(\Psi; x) \omega'(x) dx. \quad (4.26)$$

Следующий результат может быть выведен либо из формул теоремы 4.1, либо из следующих свойств гёльдеровских классов ($\omega(t) = \omega_\alpha(t) = t^\alpha$):

$$x(\cdot) \in H^\alpha[0, 1] \iff \gamma^\alpha x(\cdot/\gamma) \in H^\alpha[0, \gamma] \quad \forall \gamma > 0. \quad (4.27)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $\alpha \in (0, 1]$ и $\psi \in \mathcal{M}_n^{s, m}[a, b]$. Если функция $z_{\alpha, \psi}(t) \in H^\alpha[0, 1]$ экстремальна в задаче

$$\int_0^1 h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_0^\alpha[0, 1],$$

то для всех $\zeta > 0$ функция $z_\zeta(t) := \zeta^\alpha z_{\alpha, \psi}(t/\zeta)$ экстремальна в задаче

$$\int_0^\zeta h(t) \psi(t/\zeta) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_0^\alpha[0, \zeta].$$

4.5. Некоторые неравенства для перестановок. В нашем анализе мы используем следующие свойства перестановок, полученные в [40].

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть ядро $\Psi(t) = \int_b^t \psi(y) dy$ на отрезке $[a, b]$ имеет производную $\psi \in \mathcal{M}_n^{0, m}[a, b]$ и $\sigma(t)$, $\mu(t)$ – два выпуклых модуля непрерывности на $[0, b - a]$ со свойством $\sigma(t) \leq \mu(t)$ для всех $t \in [0, b - a]$. Тогда

$$\int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\sigma(\Psi; t) \sigma'(t) dt \leq \int_0^{b-a} \mathfrak{R}_\sigma(\Psi; t) \mu'(t) dt. \quad (4.28)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $\Psi(t) = \int_b^t \psi(y) dy$ на $[a, b]$ имеет производную $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$. Тогда

$$\|\Psi\|_{\mathbb{L}_p[0,a]} \leq \|\Re_\omega(\Psi; \cdot)\|_{\mathbb{L}_p[0,a]} \quad \forall p \geq 1.$$

С дальнейшим обсуждением неравенств между стандартными убывающими перестановками Ψ^* , перестановками Корнейчука $\Sigma(\Psi; \cdot)$ и ω -перестановками $\Re_\omega(\Psi; \cdot)$ можно ознакомиться в работе [40].

4.6. Варианты задачи (4.1). Решение задач Колмогорова (1.6) и Колмогорова–Ландау (1.7) в случае прямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ и последней производной $m = r$ требует точного описания структуры экстремальных функций задачи

$$\int_a^b h(t)\psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_\tau^\omega[a, b], \quad (4.29)$$

для внутренних точек τ отрезка $[a, b]$. Детальное обсуждение структурных свойств экстремальных функций задачи (4.29) предложено автором в [26], [28].

Решение подобно описанному в теореме 4.1, за исключением того, что экстремальная функция задается формулой

$$x_{\omega,\psi}(t) = (-1)^{m+i}\omega(|t - \tau|), \quad t \in B_{ii}, \quad (4.30)$$

для всех таких $1 \leq i \leq n+1$, что $\overset{\circ}{B}_{ii} \neq \emptyset$.

4.7. Критерий тривиальности для ψ -разбиений. Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Экстремальное ψ -разбиение задачи (4.1) для функции $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$ называется *тривиальным разбиением*, если

$$\overset{\circ}{B}_{ij} = \emptyset \quad \forall (i, j): |i - j| \neq 1, \quad 1 \leq i, j \leq n+1.$$

Другими словами, $[a, b] = \bigcup_{j=1}^n B_{j,j+1} \cup B_{j+1,j}$. Тривиальность разбиения $\mathcal{V}$ эквивалентна следующему представлению невырожденных атомов:

$$B_{i,i+1} = [\beta_{i-1}, \alpha_i], \quad B_{i+1,i} = [\alpha_i, \beta_i], \quad i = 1, \dots, n+1, \quad (4.31)$$

где $\{\beta_i\}_{i=0}^n$, $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = b$, являются нулями функции $\Psi(x) = \int_b^x \psi(t) dt$. Заметим, что в этом случае $n+1$ нулей $\{\beta_i\}_{i=0}^n$ альтернируют с точками $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ перемен знака Ψ' :

$$\beta_i \leq \alpha_{i+1} \leq \beta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.32)$$

Следующий критерий тривиальности для ψ -разбиений предлагается в [40].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$ и $\{\beta_i\}_{i=0}^n$ – нули функции Ψ . Экстремальное ψ -разбиение тривиально тогда и только тогда, когда

$$\sum_{l=i}^{j-1} (-1)^{i+l} \omega(\beta_{l+1} - \beta_l) \leq \omega(\beta_j - \beta_i), \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad j - i = 2k + 1, \quad (4.33)$$

при $0 \leq k \leq n/2$.

Рис. 4. Тривиальное ψ -разбиение

Рис. 4 иллюстрирует график экстремальной функции и интервалы тривиального ψ -разбиения.

Приведем *достаточные условия тривиальности ψ -разбиений*:

1) если ω – линейный модуль непрерывности, т.е. $\omega(t) = Kt$, $K > 0$, то условия (4.33) выполняются для любого упорядоченного набора точек $\{\beta_i\}_{i=0}^n$, $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = b$;

2) если точки $\{\beta_i\}_{i=0}^n$ таковы, что

$$\beta_{i+1} - \beta_i \geq \beta_i - \beta_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.34)$$

то условия (4.33) выполняются для любого выпуклого модуля непрерывности ω .

Достаточное условие 2) используется в настоящей работе при описании строения экстремальных функций задачи Колмогорова в $W^1 H^\omega$ на прямой и полупрямой.

4.8. Предельные свойства экстремальных функций $x_{\omega, \psi}$. Введем классы ядер с ограниченным числом перемен знака.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Для $n \in \mathbb{N}$ класс $M_n[a, b]$ определяется следующим образом:

$$M_n[a, b] := \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{s=-1}^1 \bigcup_{m=0}^1 \mathcal{M}_k^{s,m}[a, b],$$

где классы ядер $\mathcal{M}_k^{s,m}[a, b]$ введены в определении 4.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a_0$, и $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = b_0$, – две такие сходящиеся последовательности, что $a_i < a < b < b_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ и некоторых a, b . Мы скажем, что последовательность функций $f_i \in \mathbb{L}_p[a_i, b_i]$ сходится в метрике $\mathbb{L}_p[a_0, b_0]$ к функции $f_0 \in \mathbb{L}_p[a_0, b_0]$, если $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\bar{f}_i - \bar{f}_0\|_{\mathbb{L}_p[a, b]} = 0$, где $\bar{f}_i(t) = f_i(\frac{b_i - a_i}{b - a}(t - a) + a_i)$, $t \in [a, b]$, для всех $i \in \mathbb{Z}_+$.

Следующее предельное свойство экстремальных функций задачи (4.1) используется особенно часто в геометрических конструкциях, базирующихся на приложениях теоремы о неподвижной точке.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть $\mathbb{S}$ – компакт в $\mathbb{R}^d$ и семейства выпуклых модулей непрерывности $\{\omega_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ и ядер $\psi_s(t)$, определенных на $a_s \leq t \leq b_s$ для $s \in \mathbb{S}$, наделены следующими свойствами:

- (i) функции a_s, b_s непрерывно зависят от s на $\mathbb{S}$ и $a_s < a < b < b_s$ для любого $s \in \mathbb{S}$;
- (ii) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\psi_s \in M_n[a_s, b_s]$ для всех $s \in \mathbb{S}$;
- (iii) семейства $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ и $\{\omega_s\}_{s \in \mathbb{S}}$ непрерывно зависят от s в смысле определения 4.8 в метриках пространств $\mathbb{L}_1[a, b]$ и $\mathbb{L}_\infty[a, b]$ соответственно.

Если z_s – экстремальная функция задачи

$$\int_{a_s}^{b_s} f(t) \psi_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad f \in H_{a_s}^{\omega_s}[a_s, b_s],$$

то отображение $s \mapsto z_s$ непрерывно на $\mathbb{S}$ в равномерной метрике $\mathbb{L}_\infty[a, b]$.

4.9. Связь задачи максимизации функционалов с транспортной задачей Канторовича–Монжа. Пусть начальное ν и конечное μ – борелевские распределения (например, сырья) на отрезке $[a, b]$ – удовлетворяют

$$d(\nu - \mu)(x) = \psi(x) dx, \quad \int_a^b \psi(x) dx = 0.$$

Задача Канторовича–Монжа заключается в перемещении первого распределения во второе при минимальных издержках этой трансформации при условии, что стоимость транспортировки единицы сырья из точки x в точку y равна $\omega(|x - y|)$ (см. строгую формулировку в [41] или [42]). Тогда этот вариант транспортной задачи дуален (см. [43]) задаче

$$\int_a^b h(t) \psi(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[a, b].$$

Предположим, что конечный интервал $[a, b]$, на котором добывается или потребляется продукция, распадается на конечное число областей добычи и потребления. Другими словами, в наших обозначениях плотность распределения ψ принадлежит классу $\mathcal{M}_n^{0,m}[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Как мы показали ранее, функция распределения $\Psi(t) = \int_b^t \psi(x) dx$ разлагается на сумму простых ядер $\{\Phi_i(\cdot) = \Phi_i(\omega; \cdot)\}_{i=1}^l$ со свойством (4.14).

Напомним (см. (4.2)), что с каждым простым ядром Φ_i , имеющим носитель $[a_i, b_i]$ из этого экстремального разложения, ассоциированы такие промежуточные точки a'_i, b'_i , $a_i < a'_i \leq b'_i < b_i$, а также знак $\zeta \in \{\pm 1\}$, что

$$\zeta \psi(x) < 0, \quad x \in [a, a'], \quad \psi(x) = 0, \quad x \in [a', b'], \quad \zeta \psi(x) > 0, \quad x \in [b', b]. \quad (4.35)$$

Следовательно, для простого распределения Φ_i существуют только две непрерывные области $[a_i, a'_i]$ и $[b'_i, b_i]$, на одной из которых сырье добывается, а на другой потребляется.

Тогда общий оптимальный план перевозки продукции заключается в перевозе сырья из области $[a_i, a'_i]$ в область $[b'_i, b_i]$ (или наоборот) для всех $i = 1, \dots, l$, причем внутри каждой пары областей перевозка осуществляется между точками $x \in [a_i, a'_i]$ и $y \in [b'_i, b_i]$, подчиняющимися условию (см. (4.21))

$$\Psi_i(x) = \Psi_i(y).$$

Наконец, общая “стоимость” трансформации одного распределения в другое определяется величиной

$$\int_0^{b-a} \Re_\omega(\Psi; x) \omega'(x) dx = \sup_{h \in H^\omega[a, b]} \int_a^b h(t) \psi(t) dt. \quad (4.36)$$

История и современный прогресс в теории “транспортной задачи” широко представлены, прежде всего, в работе [41], посвященной прямому решению транспортной задачи, и монографии [42].

§ 5. Условия экстремальности

Зафиксируем отрезок $[0, d]$ и целые числа $r, m \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq m \leq r$. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $q = q(p) = p/(p-1)$ при $1 < p < \infty$ и $q = \infty$ при $p = 1$. Пусть $B > 0$, ω – выпуклый модуль непрерывности и $f \in W^r H^\omega[0, d]$ подчиняется ограничению $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0, d]} \leq B$.

В этом параграфе мы опишем достаточные условия экстремальности функции f в задаче

$$F^{(m)}(0) \rightarrow \sup, \quad F \in W^r H^\omega[0, d], \quad \|F\|_{\mathbb{L}_p[0, d]} \leq B. \quad (5.1)$$

5.1. Формулы дифференцирования для $f^{(m)}(0)$, $0 \leq m < r$. Пусть функция $Z \in C^r[0, d]$ наделена свойствами:

$$Z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, r-2-m, r-m, \dots, r-1, \quad (5.2)$$

$$Z^{(i)}(d) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1, \quad (5.3)$$

$$(-1)^{m+1} Z^{(r-1-m)}(0) > 0, \quad (5.4)$$

$$\int_0^d Z(t) dt = 0. \quad (5.5)$$

Интегрируя по частям $\int_0^d f(t) Z^{(r)}(t) dt$ и используя свойства (5.2)–(5.5) функции Z , мы получаем формулу

$$f^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{m+1}}{Z^{(r-1-m)}(0)} \left[\int_0^d f(t) Z^{(r)}(t) dt + (-1)^{r+1} \int_0^d f^{(r)}(t) Z(t) dt \right]. \quad (5.6)$$

Неравенство Гёльдера приводит нас к следующей оценке значения m -й производной функции f в нуле:

$$f^{(m)}(0) \leq |Z^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left[\|Z^{(r)}\|_{\mathbb{L}_q[0, d]} B + \sup_{h \in H^\omega[0, d]} \int_0^d h(t) Z(t) dt \right]. \quad (5.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Свойство (5.5) функции Z означает, что

$$\sup_{h \in H^\omega[0, d]} \int_0^d h(t) Z(t) dt = \sup_{h \in H_0^\omega[0, d]} \int_0^d h(t) Z(t) dt. \quad (5.8)$$

5.2. Формулы дифференцирования для $f^{(r)}(0)$. Пусть $Z \in C^r[0, d]$ удовлетворяет следующим условиям:

$$Z^{(i)}(0) = Z^{(i)}(d) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1, \quad \int_0^d Z(t) dt > 0. \quad (5.9)$$

Интегрируя по частям $\int_0^d f(t)Z^{(r)}(t) dt$ с использованием свойств (5.9) функции Z , мы приходим к тождеству

$$f^{(r)}(0) = \left(\int_0^d Z(t) dt \right)^{-1} \times \left[(-1)^{r+1} \int_0^d f(t)Z^{(r)}(t) dt - \int_0^d [f^{(r)}(t) - f^{(r)}(0)]Z(t) dt \right] \quad (5.10)$$

и оценке

$$|f^{(r)}(0)| \leq \left| \int_0^d Z(t) dt \right|^{-1} \left[\|Z^{(r)}\|_{\mathbb{L}_q[0,d]} B + \sup_{h \in H_0^\omega[0,d]} \int_0^d h(t)Z(t) dt \right]. \quad (5.11)$$

5.3. Достаточные условия экстремальности. Приведем достаточные условия экстремальности в задаче Колмогорова–Ландау.

5.3.1. Следствия формулы дифференцирования. Равенства (5.6) для значений $m \in \{0, \dots, r-1\}$ и (5.10) для $m = r$ приводят нас к *достаточным условиям экстремальности* функций $X \in W^r H^\omega[0, d]$ и $Z \in C^r[0, d]$ в неравенствах (5.7) и (5.11) соответственно:

$$Z^{(r)}(t) = |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in [0, d], \quad (5.12)$$

$$\int_0^d [X^{(r)}(t) - X^{(r)}(0)]Z(t) dt = \sup_{h \in H_0^\omega[0,d]} \int_0^d h(t)Z(t) dt, \quad (5.13)$$

$$\|X\|_{\mathbb{L}_p[0,d]} = B. \quad (5.14)$$

5.3.2. Условия экстремальности в форме операторного уравнения. Условия (5.12)–(5.14) экстремальности функций X и Z в задаче (5.1) могут быть переписаны в компактной форме операторного уравнения. Сначала введем определения и обозначения *оператора дифференцирования*

$$D_r: C^r[0, d] \rightarrow C[0, d], \quad (D_r x)(t) := x^{(r)}(t) - x^{(r)}(0),$$

оператора Гёльдера

$$\mathcal{H}: C[0, d] \rightarrow C[0, d], \quad (\mathcal{H}x)(t) := |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t),$$

оператора интегрирования

$$I_r: C[0, d] \rightarrow C^r[0, d], \quad (I_r x)(t) := \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^d (y-t)_+^{r-1} x(y) dy,$$

и *оператора M* из пространства $\widehat{C}[0, d]$ всех непрерывных функций на $[0, d]$ с конечным или счетным множеством нулей в класс $H_0^\omega[0, d]$:

$$(Mx)(t) := z(t), \quad x \in \widehat{C}[0, d],$$

где функция $z \in H_0^\omega[0, d]$ однозначно определяется свойством

$$\int_0^d z(t)x(t) dt = \sup_{h \in H_0^\omega[0,d]} \int_0^d h(t)x(t) dt. \quad (5.15)$$

Структура экстремальных функций $z(t)$ в (5.15) описана в теореме 4.1. Мы также введем отображение $\Gamma: C^r[0, d] \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}$ посредством формулы

$$\Gamma x = (x'(0), \dots, x^{(r-m-2)}(0), x^{(r-m)}(0), \dots, x^{(r)}(0)), \quad x \in C^r[0, d].$$

Тогда условия (5.12)–(5.14) экстремальности функции X в задаче Колмогорова–Ландау (5.1) могут быть переформулированы в следующей форме.

ТЕОРЕМА 5.1. *Функция $X \in W^r H^\omega[0, d]$ экстремальна в задаче (5.1), если $\|X\|_{\mathbb{L}_p[0, d]} = B$ и X удовлетворяет операторному уравнению*

$$[D_r - M \circ I_r \circ \mathcal{H}]X = 0 \quad (5.16)$$

с граничными условиями

$$\Gamma((I_r \circ \mathcal{H})X) = 0. \quad (5.17)$$

5.4. Теорема существования. Следующий результат утверждает существование функции X с данным числом нулей, которая удовлетворяет условиям (5.16), (5.17).

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $r, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq r$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r + 1$, $B > 0$, $p \geq 1$ и ω – выпуклый модуль непрерывности.*

I. Существуют $d_{n,m} = d(\omega, p, B, n, r, m) > 0$, наборы точек $\{t_i(n, m) = t_i(\omega, p, B, n, r, m)\}_{i=1}^n$ и $\{\vartheta_i(n, m) = \vartheta_i(\omega, p, B, n, r, m)\}_{i=1}^{n-r+l}$, где $l = 0$ при $0 \leq m < r$, $l = 1$ при $m = r$, и функция $X_{n,m} = X_{\omega, p, B, n, r, m} \in W^r H^\omega[0, d_{n,m}]$ со следующими свойствами:

- 1) $X_{n,m}$ имеет n простых нулей $\{t_i(n, m)\}_{i=1}^n$ на $[0, d_{n,m}]$;
- 2) $X_{n,m}^{(r)}$ имеет $n - r + l$ простых нулей $\{\vartheta_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r+l}$ на $[0, d_{n,m}]$;
- 3) $\|X_{n,m}\|_{\mathbb{L}_p[0, d_{n,m}]} = B$;
- 4) $X_{n,m}$ удовлетворяет уравнению (5.16) с граничным условием (5.17).

II. Пусть $F_{n,m}(x) = \int_{d_{n,m}}^x Z_{n,m}(t) dt$, $x \in [0, d_{n,m}]$, где функция $Z_{n,m} = Z_{\omega, p, B, n, r, m} \in C^r[0, d_{n,m}]$ определена формулой

$$Z_{n,m}(t) := \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^{d_{n,m}} |X_{n,m}(y)|^{p-1} \operatorname{sign} X(y) (y-t)_+^{r-1} dy, \quad t \in [0, d_{n,m}]. \quad (5.18)$$

Тогда для функций $f \in W^r H^\omega[0, d_{n,m}]$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0, d_{n,m}]} \leq B$, справедливы следующие неравенства:

$$f^{(m)}(0) \leq X_{n,m}^{(m)}(0) = |Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left[B^p + \int_0^{d_{n,m}} \Re_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt \right] \quad (5.19)$$

при $0 \leq m < r$ и

$$f^{(r)}(0) \leq X_{n,r}^{(r)}(0) = \left| \int_0^{d_{n,r}} Z_{n,r}(t) dt \right| \left[B^p + \int_0^{d_{n,r}} \Re_\omega(F_{n,m}; t) dt \right]. \quad (5.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Из (5.12) и (5.14) немедленно следует, что

$$\|Z_{n,m}^{(r)}\|_{\mathbb{L}_q[0, d]} = \|X_{n,m}\|_{\mathbb{L}_p[0, d]}^{p-1} = B^{p-1},$$

так что неравенства (5.19) вытекают из (5.7), (5.11) и следствия 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Из условий экстремальности (5.18) или (5.12) следует, что в случае $p = 1$ функция $Z_{n,m}$ является совершенным сплайном:

$$\xi Z_{n,m}(t) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i t^i + \frac{t^r}{r!} + \frac{2}{r!} \sum_{j=1}^n (-1)^j (t - t_j)_+^r \quad (5.21)$$

для некоторого $\xi \in \{\pm 1\}$. Как мы увидим в п. 8.7, этот факт позволяет предложить упрощенное построение экстремальных функций $X_{n,m}$ и $Z_{n,m}$ из теоремы 5.2 в случае $p = 1$.

§ 6. Построение экстремальных функций

6.1. Предварительные замечания. Первоначально теорема 5.2 будет доказана для выпуклого модуля непрерывности ω , наделенного дополнительным свойством

$$\omega'(t) \geq \omega_0 > 0. \quad (6.1)$$

Обозначим через $V_{r,p}$, $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, константу из леммы 2.4. Для фиксированного $B > 0$ введем $C > 0$ уравнением

$$V_{r+1,p} \omega_0 \left(\frac{C}{n} \right)^{r+2-p/(p-1)} = 2B. \quad (6.2)$$

Лемма 2.4 гарантирует справедливость следующего неравенства для длины области определения любой функции $f \in \mathcal{F}_{r+1,n-r,\omega_0}[0, T]$, подчиняющейся ограничению $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0,T]} \leq B$:

$$T < C. \quad (6.3)$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. После выбора C введем константу A посредством формулы

$$A := 3(C + nNC^r \omega(C)). \quad (6.4)$$

6.2. Отображение Борсука. Для конструкции экстремальной функции воспользуемся теоремой Борсука.

6.2.1. *Определения наборов точек.* Пусть $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{(N+1)n} - ((N+1)n)$ -мерная сфера с радиусом A в $l_1^{(N+1)n+1}$:

$$\mathbb{S} := \left\{ s = (s_1, \dots, s_{(N+1)n+1}) \in \mathbb{R}^{(N+1)n+1} \mid \sum_{i=1}^{(N+1)n+1} |s_i| = A \right\}. \quad (6.5)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $s = (s_1, \dots, s_{(N+1)n+1}) \in \mathbb{S}$ введем наборы точек $\{t_i = t_i(s)\}_{i=0}^n$ и $\{\tau_i = \tau_i(s)\}_{i=0}^n$ такие, что

$$\begin{aligned} t_0(s) &:= 0, \quad t_i(s) = \sum_{j=1}^i |s_j|, \quad i = 1, \dots, n, \\ \tau_i(s) &:= \frac{t_i(s) + \varepsilon i t_n(s)}{1 + n\varepsilon}, \quad i = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Отметим следующие отношения между точками $\{t_i(s)\}_{i=0}^n$ и $\{\tau_i(s)\}_{i=0}^n$:

$$t_0(s) = t_0(s); \quad \tau_i(s) \in [0, t_n(s)], \quad i = 1, \dots, n; \quad \tau_n(s) = t_n(s), \quad (6.7)$$

для всех $s \in \mathbb{S}$. Мы также выделим два других свойства наборов $\{\tau_i(s)\}_{i=0}^n$:

$$\tau_i(s) - \tau_{i-1}(s) > \frac{\varepsilon t_n(s)}{1 + n\varepsilon}, \quad |t_i(s) - \tau_i(s)| \leq (\varepsilon n)t_n(s), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

Далее, определим наборы точек $\xi_{i,j}(s)$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq N$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_{i,0}(s) &:= \tau_{i-1}(s), & i = 1, \dots, n, \\ \xi_{i,j}(s) &:= \tau_{i-1}(s) + \frac{\tau_i(s) - \tau_{i-1}(s)}{N}j, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Другими словами, для каждого $i = 1, \dots, n$ отрезки $\mathbb{I}_{i,j}(s) := [\xi_{i,j-1}(s), \xi_{i,j}(s)]$, $j = 1, \dots, N$, образуют равномерное разбиение интервала $\mathbb{I}_i(s) := [\tau_{i-1}(s), \tau_i(s)]$ на N интервалов одинаковой длины $|\mathbb{I}_i(s)|/N$.

6.2.2. Функции h_s , g_s , G_s , X_s , Y_s . Кусочно постоянные функции h_s и g_s определены на интервале $(0, t_n(s))$ соответственно формулами

$$h_s(t) = (|s_{n+(i-1)N+j}| + \varepsilon)^{p-1}, \quad t \in (\xi_{i,j-1}(s), \xi_{i,j}(s)), \quad (6.10)$$

для $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$ и

$$g_s(t) = h_s(t) \operatorname{sign} s_i, \quad t \in (t_{i-1}(s), t_i(s)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.11)$$

Заметим, что $s \mapsto h_s(\cdot)$ и $s \mapsto g_s(\cdot)$ — соответственно *четное* и *нечетное* отображения $\mathbb{S}$.

Функция $G_s(x)$ определена как r -й интеграл $g_s(x)$:

$$G_s(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^{t_n(s)} g_s(t)(t-x)_+^{r-1} dt, \quad x \in [0, t_n(s)], \quad (6.12)$$

равный нулю в $t_n(s)$ со всеми $r-1$ производными $\{G_s^{(k)}\}_{k=1}^{r-1}$. Положим

$$I_s := \int_0^{t_n(s)} G_s(t) dt. \quad (6.13)$$

Определим x_s как экстремальную функцию в задаче

$$\int_0^{t_n(s)} h(t)G_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_0^\omega[0, t_n(s)]. \quad (6.14)$$

Структура x_s описывается теоремой 4.1. Тогда функция X_s вводится как r -й интеграл x_s , удовлетворяющий нулевым граничным условиям в нуле:

$$X_s(y) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{t_n(s)} x_s(t)(y-t)_+^{r-1} dt, \quad y \in [0, t_n(s)]. \quad (6.15)$$

Пусть $p_s(t) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i(s)t^i$ — алгебраический многочлен степени $r-1$, интерполирующий $X_s(t)$ в точках $\{\tau_i(s)\}_{i=1}^r$, определенных в (6.6):

$$p_s(\tau_i(s)) = X_s(\tau_i(s)), \quad i = 1, \dots, r. \quad (6.16)$$

Положим

$$Y_s(t) = X_s(t) - p_s(t), \quad 0 \leq t \leq t_n(s). \quad (6.17)$$

Согласно (6.16) имеем

$$Y_s(\tau_i(s)) = 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6.18)$$

Для всех пар (i, j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$, точка $e_{i,j}(s)$ определяется как середина отрезка $I_{i,j}(s) = [\xi_{i,j-1}(s), \xi_{i,j}(s)]$:

$$e_{i,j}(s) := \frac{1}{2}[\xi_{i,j-1}(s) + \xi_{i,j}(s)], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.19)$$

где набор $\xi_{i,j}(s)$, $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq N$, определен в (6.9). Семейство функций $R_{i,j}(s)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$, вводится следующим образом:

$$R_{i,j}(s) := Y_s(e_{i,j}(s)) - s_{n+(i-1)N+j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.20)$$

Введем функции

$$D_i(s) := \begin{cases} \|Y_s\|_{\mathbb{L}_p[t_{i-1}(s), t_i(s)]} - \frac{B}{A}(t_i(s) - t_{i-1}(s)), & i = 1, \dots, n, \\ -\frac{B}{A}(t_i(s) - t_{i-1}(s)), & i = n+1, \dots, (N+1)n+1, \end{cases} \quad (6.21)$$

$$D(s) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \operatorname{sign} s_i D_i(s) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N (-1)^{i+r} \operatorname{sign} s_{(i-1)N+j+n} D_{(i-1)N+j+n}(s) - \operatorname{sign} s_{(N+1)n+1} D_{(N+1)n+1}(s). \quad (6.22)$$

6.2.3. *Определение отображения Борсука $\varkappa$: $\mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}^{(N+1)n}$.* Наконец, мы можем определить отображение Борсука $\varkappa$: $\mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}^{(N+1)n}$:

$$\varkappa(s) := \{Y_s(\tau_i(s))\}_{i=r+1}^n \times \{G_s^{(i)}(0)\}_{i=0}^{r-2-m} \times \{G_s^{(i)}(0)\}_{i=r-m}^{r-1} \times I_s \times \{R_{i,j}(s)\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq N}} \times D(s), \quad (6.23)$$

где функция Y_s , точки $\{\tau_i(s)\}_{i=r+1}^n$, функции G_s и $D(s)$ и наборы функций $\{R_{i,j}(s)\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq N}}$ определены в (6.17), (6.6), (6.12), (6.22) и (6.20) соответственно.

6.2.4. *Непрерывность и нечетность $\varkappa$ на $\mathbb{S}$.* Отметим непрерывность отображений $s \mapsto \{t_i(s)\}_{i=0}^n$, $s \mapsto \{\tau_i(s)\}_{i=0}^n$ и $s \mapsto \{\xi_{i,j}(s)\}$ для $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$, определенных в (6.6) и (6.9). Следовательно, отображения $s \mapsto h_s$ и $s \mapsto g_s$ из (6.10), (6.11) непрерывно зависят от s в интегральной метрике $\mathbb{L}_1[0, A]$. Таким образом, r -й интеграл G_s функции g_s на отрезке $[0, t_n(s)]$ непрерывно зависит от s в равномерной метрике $C[0, A]$ (если продлить функцию G_s на весь отрезок $[0, A]$ формулой $G_s(t) := 0$, $t \in (t_n(s), A]$), что, в свою очередь, влечет непрерывность от s интеграла I_s ядра G_s на отрезке $[0, t_n(s)]$.

Следствие 4.6 приводит нас к заключению, что экстремальная функция x_s задачи (6.14) и ее r -й интеграл X_s из (6.15) также непрерывно зависят от s на $C[0, t_n(s)]$ в смысле определения 4.8.

Интерполяционная формула Лагранжа

$$p_s(t) = \sum_{i=1}^r X_s(\tau_i(s)) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{t - \tau_j(s)}{\tau_i(s) - \tau_j(s)} \quad (6.24)$$

вместе со свойствами разделенности (6.8) и непрерывностью отображений $s \mapsto \{\tau_i(s)\}_{i=1}^r$ и $s \mapsto X_s$ приводит нас к непрерывности отображений $s \mapsto p_s$ и $s \mapsto Y_s$ в $C[0, t_n(s)]$. В свою очередь, непрерывность отображения $s \mapsto Y_s$ на компакте $\mathbb{S}$ влечет существование постоянной $\mathcal{M}$ такой, что

$$\|Y_s\|_{C[0, t_n(s)]} \leq \mathcal{M}. \quad (6.25)$$

Непрерывность всех точек $e_{i,j}(s)$ из (6.19) как функций от s при $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq N$ в сочетании с непрерывностью отображений $s \mapsto Y_s$ в $C[0, t_n(s)]$ влечет за собой непрерывность $R_{i,j}(s)$ из (6.20) как функций от s для каждой пары индексов (i, j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$. Ограниченность (6.25) нормы $\|Y_s\|_{C[0, t_n(s)]}$ доказывает непрерывность $\{D_i(s)\}_{i=1}^{(N+1)n+1}$ и предельное свойство

$$\lim_{s_i \rightarrow 0} D_i(s) = 0, \quad i = 1, \dots, (N+1)n+1, \quad (6.26)$$

где $s = (s_1, \dots, s_{(N+1)n+1})$. Это наблюдение завершает доказательство непрерывности отображения $\varkappa$ на сфере $\mathbb{S}$.

Нечетная зависимость отображений $s \mapsto Y_s$, $s \mapsto G_s$, $s \mapsto I_s$ и $s \mapsto R_{i,j}(s)$ для $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq N$ немедленно следует из определений (6.11) функции g_s , в то время как множители $\{\text{sign } s_i\}_{i=1}^{(N+1)n+1}$ гарантируют нечетность $s \mapsto D(s)$.

Подытожив наши рассуждения в этом пункте, мы установили и *непрерывность*, и *нечетность* отображения $s \mapsto \varkappa(s)$ на сфере $\mathbb{S}$.

6.3. Знаки элементов вектора решения уравнения $\varkappa(s) = 0$. В настоящем пункте мы вычислим знаки компонент вектора решения уравнения $\varkappa(s) = 0$.

6.3.1. Свойства вектора s^* . Согласно теореме Борсука существует такой вектор $s^* \in \mathbb{S}$, что $\varkappa(s^*) = 0$, или, эквивалентно, выполнены условия:

$$Y_{s^*}(\tau_i(s^*)) = 0, \quad i = r+1, \dots, n, \quad (6.27)$$

$$G_{s^*}^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, r-2-m, r-m, \dots, r-1, \quad (6.28)$$

$$I_{s^*} := \int_0^{t_n(s^*)} G_{s^*}(t) dt = 0, \quad (6.29)$$

$$R_{i,j}(s^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.30)$$

$$D(s^*) = 0. \quad (6.31)$$

Введем более удобные обозначения для всех наборов точек для $s = s^*$:

$$\begin{aligned} t_i^* &:= t_i(s^*), & i &= 0, \dots, n, \\ \tau_i^* &:= \tau_i(s^*), & i &= 0, \dots, n, \\ \xi_{i,j}^* &:= \xi_{i,j}(s^*), & i &= 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, N, \\ e_{i,j}^* &:= e_{i,j}(s^*), & i &= 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.32)$$

6.3.2. Доказательство оценки $t_n^* > 0$. Покажем, что отрезок $[0, t_n(s^*)]$ не вырождается в точку.

ЛЕММА 6.1. Пусть точка t_n^* определена в (6.32). Тогда $t_n^* > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что $t_n^* = \sum_{i=1}^n |s_i^*| = 0$, т. е. согласно соотношениям (6.6) имеем

$$s_i^* = 0, \quad \tau_i^* = e_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, N. \quad (6.33)$$

Из (6.27) при $i = n$ и (6.7) вытекает, что $Y_{s^*}(t_n^*) = Y_{s^*}(\tau_n^*) = 0$. Тогда свойство (6.30) и определение (6.20) означают, что для всех $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$ мы имеем

$$0 = R_{i,j}(s^*) := Y_{s^*}(e_{i,j}^*) - s_{n+(i-1)N+j}^* = Y_{s^*}(t_n^*) - s_{n+(i-1)N+j}^* = -s_{n+(i-1)N+j}^*. \quad (6.34)$$

В частности, в добавление к (6.33) мы получаем

$$s_i^* = 0, \quad i = n+1, \dots, (N+1)n, \quad (6.35)$$

следовательно, $t_{(N+1)n}^* = 0$. Тогда

$$|s_{(N+1)n+1}^*| =: t_{(N+1)n+1}^* - t_{(N+1)n}^* = A - t_{(N+1)n}^* = A,$$

таким образом, $s_{(N+1)n+1}^* = \pm A$. Используя свойство (6.31) в сочетании с соотношениями (6.33) и (6.35), мы приходим к противоречию:

$$0 = D(s^*) := \sum_{i=1}^n \|Y_s\|_{L_p[t_{i-1}^*, t_i^*]} \operatorname{sign} s_i^* - \frac{B}{A} \sum_{i=1}^{(N+1)n+1} s_i^* = -\frac{B}{A} s_{(N+1)n+1}^* = \pm B, \quad (6.36)$$

которое означает, что наше предположение $t_n^* = 0$ было неверным. Лемма доказана.

6.3.3. Знаки элементов вектора $\{s_i^*\}_{i=1}^n$. Таким образом, отрезок $[0, t_n^*]$ не вырожден. По определениям (6.11) и (6.12) функция $g_{s^*} = G_{s^*}^{(r)}$ может иметь не более $n-1$ точек $\{t_i^*\}_{i=1}^{n-1}$ перемены знака на $[0, t_n^*]$. По (6.28) и определению (6.12) имеем

$$G_{s^*}^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, r-2-m, r-m, \dots, r-1, \quad (6.37)$$

$$G_{s^*}^{(j)}(t_n^*) = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (6.38)$$

Тогда согласно теореме Ролля число перемен знака функции G_{s^*} на отрезке $[0, t_n^*]$ не превышает $n-1-(r-1) = n-r$. Вдобавок, согласно (6.29) интеграл функции G_{s^*} на отрезке $[0, t_n^*]$ равен нулю. Как следует из замечания 4.2, число перемен знака производной x'_{s^*} экстремальной функции в (6.14) на единицу меньше, чем число перемен знака порождающего ядра G_{s^*} в задаче (6.14). Таким образом, x'_{s^*} имеет не более $n-r-1$ перемен знака на $[0, t_n^*]$. Еще одно применение теоремы Ролля позволяет заключить, что $(r+1)$ -й интеграл Y_{s^*} функции x'_{s^*} из (6.17) имеет максимум n нулей на отрезке $[0, t_n^*]$.

С другой стороны, в соответствии с (6.27), определением (6.18) и нашим наблюдением (6.7) функция Y_{s^*} имеет минимум n различных нулей $\{\tau_i^*\}_{i=1}^n$ на отрезке $[0, t_n^*]$. Следовательно, функция Y_{s^*} имеет в точности n простых (т. е. кратности 1) нулей $\{\tau_i^*\}_{i=1}^n$: для некоторого фиксированного $\xi \in \{-1, 1\}$

$$\operatorname{sign} Y_{s^*}(t) = (-1)^i \xi, \quad t \in (\tau_{i-1}^*, \tau_i^*), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.39)$$

Более того, функция $g_{s^*}(t)$ имеет ровно $n-1$ перемен знака в точках $\{t_i^*\}_{i=1}^{n-1}$. Таким образом, из (6.11) следует, что для фиксированного $\zeta \in \{-1, 1\}$

$$\operatorname{sign} s_i^* = (-1)^i \zeta, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.40)$$

Используемая аргументация, базирующаяся лишь на приложении теоремы Ролля, в точности идентифицирует число точек перемены знака для всех производных $\{G_{s^*}^{(i)}\}_{i=0}^r$ и $\{Y_{s^*}^{(i)}\}_{i=1}^r$:

$$\mu(G_{s^*}^{(i)}; [0, t_n^*]) = \begin{cases} n + i - r, & 0 \leq i \leq r - 2 - m, \\ n - 1 + i - r, & r - 1 - m \leq i \leq r; \end{cases} \quad (6.41)$$

$$\mu(Y_{s^*}^{(i)}; [0, t_n^*]) = n - i, \quad i = 0, \dots, r. \quad (6.42)$$

Отметим также отношения между левосторонними производными G_{s^*} и Y_{s^*} в точке $t = t_n^*$:

$$\begin{aligned} G_{s^*}^{(i)}(t_n^*) G_{s^*}^{(i+1)}(t_n^*) &< 0, \quad Y_{s^*}^{(i)}(t_n^*) Y_{s^*}^{(i+1)}(t_n^*) > 0, \quad i = 0, \dots, r-1, \\ Y_{s^*}^{(r+1)}(t_n^*) G_{s^*}(t_n^*) &> 0, \quad \text{sign } Y_{s^*}(t_n^*) = (-1)^n \xi, \end{aligned} \quad (6.43)$$

которые следуют из (6.38), (6.42), формул теоремы 4.1 и (6.39).

Свойства (6.43) и (6.40) позволяют нам найти связь между ξ из соотношения (6.39) и ζ из соотношения (6.40):

$$\xi = (-1)^r \zeta. \quad (6.44)$$

6.3.4. Знаки элементов $\{s_i^*\}_{i=n+1}^{(N+1)n}$. По определениям (6.19), (6.9) справедливости включения $e_{i,j}^* \in (\tau_{i-1}^*, \tau_i^*)$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, N$. Следовательно, свойства (6.39), (6.32) приводят нас к заключению, что

$$\text{sign } Y_{s^*}(e_{i,j}^*) = (-1)^i \xi = (-1)^{i+r} \zeta, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (6.45)$$

и следующим равенствам для всех пар (i, j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$:

$$0 = R_{i,j}(s^*) = Y_{s^*}(e_{i,j}^*) - s_{N(i-1)+j+n}^* \Rightarrow \text{sign } Y_{s^*}(e_{i,j}^*) = \text{sign } s_{N(i-1)+j+n}^*. \quad (6.46)$$

Свойства (6.45), (6.46) позволяют вычислить знаки элементов $\{s_i^*\}_{i=n+1}^{(N+1)n}$ вектора s^* :

$$\text{sign } s_{N(i-1)+j+n}^* = (-1)^r \text{sign } s_i^* = (-1)^{i+r} \zeta, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (6.47)$$

6.3.5. Вычисление $D(s^*)$ и знака $s_{(N+1)n+1}^*$. Основываясь на значении знаков $\{s_i^*\}_{i=1}^{(N+1)n}$ в (6.40), (6.44) и (6.46), а также свойстве $D(s^*) = 0$ из (6.31), мы получаем

$$\begin{aligned} 0 = D(s^*) &:= \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{sign } s_i \left[\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[t_{i-1}(s), t_i(s)]} - \frac{B}{A} |s_i^*| \right] \\ &\quad - \frac{B}{A} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N (-1)^{i+r} |s_{(i-1)N+j+n}^*| \text{sign } s_{(i-1)N+j+n}^* + \frac{B}{A} s_{(N+1)n+1}^* \\ &= \zeta \left[\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[0, t_n^*]} - \frac{B}{A} t_{(N+1)n}^* \right] - \frac{B}{A} s_{(N+1)n+1}^*. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Из формулы (6.48) немедленно вытекает, что

$$\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[0, t_n^*]} \leq \frac{B}{A} \left[t_{(N+1)n}^* + |s_{(N+1)n+1}^*| \right] = B. \quad (6.49)$$

Как мы уже отмечали, функция $Y_{s^*}^{(r+1)} = x'_{s^*}$ меняет знак не более $n - r - 1$ раз на отрезке $[0, t_n^*]$. Следствие 4.1 гарантирует, что производная $x'_{s^*}(t) = Y_{s^*}^{(r+1)}(t)$ экстремальной функции задачи (6.14) допускает следующее представление на отрезке $[0, t_n^*]$:

$$|Y_{s^*}^{(r+1)}(t)| = \omega'(e_t) \quad \text{для п. в. } t \in [0, t_n^*]$$

и некоторого $e_t \in [0, t_n^*]$. Таким образом, согласно свойству (6.1) модуля непрерывности выполнено $|Y_{s^*}^{(r+1)}(t)| \geq \omega_0$ для п. в. $t \in [0, t_n^*]$. Следовательно, Y_{s^*} принадлежит классу $\mathcal{F}_{r+1, n-r, \omega_0}[0, t_n^*]$, где $\mathcal{F}_{r, n, P}[a, b]$ были введены в определении 2.4. Тогда (6.49) и наш выбор (6.2) константы C приводит нас к следующему неравенству, аналогичному (6.3):

$$t_n^* < C. \quad (6.50)$$

6.3.6. Оценка длины интервала $[0, t_{(N+1)n}^*]$. Согласно (6.18) и (6.27) функция Y_{s^*} имеет $n \geq r + 1$ нулей $\{\tau_i^*\}_{i=1}^n$. Применяя предложение 2.4 к функции $Y_{s^*} \in W^r H^\omega[0, t_n^*]$, мы приходим к оценке

$$\|Y_{s^*}\|_{C[0, t_n^*]} \leq (t_n^*)^r \omega(t_n^*). \quad (6.51)$$

ЛЕММА 6.2. Пусть константа C определена в (6.2). Тогда

$$t_{(N+1)n}^* \leq C + nNC^r \omega(C). \quad (6.52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.30) имеем $0 = R_{i,j}(e_{i,j}^*) - s_{n+(i-1)N+j}^*$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$. Таким образом, из (6.51), (6.50) мы получаем следующую оценку для всех $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq N$:

$$|s_{n+(i-1)N+j}^*| = |Y_{s^*}(e_{i,j}^*)| \leq \|Y_{s^*}\|_{C[\tau_{i-1}^*, \tau_i^*]} \leq (t_n^*)^r \omega(t_n^*) \leq C^r \omega(C). \quad (6.53)$$

Из (6.53) и (6.50) вытекает требуемая оценка:

$$t_{(N+1)n}^* = \sum_{i=1}^{(N+1)n} |s_i^*| = \sum_{i=1}^n |s_i^*| + \sum_{i=n+1}^{(N+1)n} |s_i^*| \leq t_n^* + nNC^r \omega(C) \leq C + nNC^r \omega(C). \quad (6.54)$$

Лемма доказана.

В частности, определение (6.4) константы A гарантирует, что

$$|s_{(N+1)n+1}^*| = t_{(N+1)n+1}^* - t_{(N+1)n}^* = A - t_{(N+1)n}^* > A - (C + nNC^r \omega(C)) > 0. \quad (6.55)$$

6.3.7. Норма Y_{s^*} . Вычислим здесь норму функции Y_{s^*} в $\mathbb{L}_p$.

ЛЕММА 6.3. Пусть s^* – решение уравнения $\kappa(s) = 0$. Тогда

$$\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[0, t_n^*]} = B. \quad (6.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основываясь на (6.48), (6.55), мы рассмотрим два случая:

- 1) $\text{sign } s_{(N+1)n+1}^* = \zeta$;
- 2) $\text{sign } s_{(N+1)n+1}^* = -\zeta$.

В случае 1) согласно (6.48) мы получаем желательную норму:

$$\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[0, t_n^*]} = B. \quad (6.57)$$

В случае 2) согласно (6.48) имеем равенство

$$\|Y_{s^*}\|_{\mathbb{L}_p[0, t_n^*]} = \frac{B}{A} [2t_{(N+1)n}^* - A], \quad (6.58)$$

поскольку $s_{(N+1)n+1}^* = t_{(N+1)n+1}^* - t_{(N+1)n}^*$; в частности,

$$t_{(N+1)n}^* \geq \frac{A}{2}. \quad (6.59)$$

Неравенство $\frac{A}{2} < C + nNC^r\omega(C)$, которое следует из сопоставления оценок (6.52) и (6.59), находится в прямом противоречии с нашим выбором (6.4) константы A , что доказывает невозможность случая 2).

6.4. Предельный переход. Для построения экстремальной функции совершим предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$.

6.4.1. *Предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$.* Напомним, что отображение $\varkappa$ и решение уравнения $\varkappa(s) = 0$ зависят от ε : $\varkappa(\cdot) = \varkappa(\cdot; \varepsilon)$, $s^* = s^*(\varepsilon)$. Выберем сходящуюся последовательность $\{s^*(\varepsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ со свойствами

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} s^*(\varepsilon_k) &= \hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_{(N+1)n+1}) \quad \text{в } l_1^{(N+1)n+1}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{s^*(\varepsilon_k)} &= x \quad \text{в } C[0, t_n(\hat{s})]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

По определению (6.6) и оценкам (6.8) и (6.50) последовательности $\{t_i^*(\varepsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{\tau_i^*(\varepsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ имеют один предел:

$$t_i := t_i(\hat{s}) = \lim_{k \rightarrow \infty} t_i^*(\varepsilon_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_i^*(\varepsilon_k). \quad (6.61)$$

Для любых $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq N$ определим $\xi_{i,j}$ как предел последовательности $\{\xi_{i,j}(s_k^*)\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\xi_{i,0} := t_{i-1}, \quad \xi_{i,j} := t_{i-1} + \frac{t_i - t_{i-1}}{N} j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.62)$$

Пусть также g будет пределом в $\mathbb{L}_1[0, t_n]$ последовательности $\{g_{s^*(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ функций, определенных в (6.11):

$$g(t) = |\hat{s}_{n+(i-1)N+j}|^{p-1} \text{sign } \hat{s}_i, \quad t \in (\xi_{i,j-1}, \xi_{i,j}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.63)$$

Согласно (6.28) имеем, что $G(x) := \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^{t_n} g(t)(t-x)_+^{r-1} dt$ удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} G^{(j)}(0) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-2-m, r-m, \dots, r-1, \\ G^{(j)}(t_n) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (6.64)$$

а (6.29) означает, что $\int_0^{t_n} G(t) dt = 0$. Согласно следствию 4.6 мы можем предположить, что $s^*(\varepsilon_k)$ выбраны таким образом, что x экстремальна в задаче

$$\int_0^{t_n} h(t)G(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_0^\omega[0, t_n]. \quad (6.65)$$

Выберем коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=0}^{r-1}$ таким образом, чтобы функция

$$Y(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{t_n} x(y)(t-y)_+^{r-1} dy + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i v^i \quad (6.66)$$

была равна нулю в точках $\{t_i\}_{i=1}^r$. Согласно (6.15) и (6.18) функция Y является пределом в $C^{r-1}[0, t_n]$ последовательности $\{Y_{s^*(\varepsilon_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, а поэтому наследует свойство, аналогичное (6.27):

$$Y(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.67)$$

с учетом кратности нулей, т.е. если $t_{l-1} < t_l = t_{l+1} = \dots = t_{l+j} < t_{l+j+1}$ для $l > 1$, $j \leq \min\{r, n-l-1\}$, то $Y^{(k)}(t_l) = 0$, $k = 0, \dots, j$.

ЛЕММА 6.4. Если $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{(N+1)n+1}) \in \mathbb{S}$ – предельный вектор последовательности $\{s^*(\varepsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ и функция Y определена в (6.66), то

$$\text{sign } \hat{s}_l := \begin{cases} (-1)^l, & l = 1, \dots, n, \\ (-1)^i, & l = N(i-1) + j + n, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N, \\ -1, & l = (N+1)n + 1. \end{cases} \quad (6.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем точки $\{t_i\}_{i=0}^n$:

$$0 = t_{i_0} = \dots = t_{i_1-1} < t_{i_1} = \dots = t_{i_2-1} < t_{i_2} = \dots = t_{i_{k+2}-1}, \quad (6.69)$$

где $i_0 := 0$, $i_{k+2} := n+1$, $i_1 \geq 1$, $i_{j+1} - i_j \geq 1$ при $j = 1, \dots, k+1$. Согласно (6.67) имеем, что t_{i_j} – нуль функции Y кратности $\min\{i_{j+1} - i_j, r\}$ для всех $j = 1, \dots, k+1$ и 0 – нуль функции Y кратности $\min\{i_1 - 1, r\}$, если $i_1 > 1$. Следовательно, число $Z(Y)$ нулей (с учетом кратности) функции Y на отрезке $[0, t_n]$ может быть оценено следующим образом:

$$Z(Y) \geq \min\{i_1 - 1, r\} + \sum_{j=1}^{k+1} \min\{i_{j+1} - i_j, r\} \geq k+1. \quad (6.70)$$

С другой стороны, по определению (6.63) и согласно (6.69) функция g имеет не более k перемен знака в $\{t_{i_j}\}_{j=1}^k$ на отрезке $[0, t_n]$. Следовательно, теорема Ролля позволяет заключить, что G имеет не более $k - r + 1$ перемен знака на $[0, t_n]$ как r -й интеграл функции g , удовлетворяющий нулевым граничным условиям (6.64). Из свойства нулевого среднего функции G и замечания 4.2 вытекает, что производная $x'(t)$ экстремальной функции задачи (6.65) меняет знак максимум $k - r$ раз на отрезке $[0, t_n]$. Из еще одного приложения теоремы Ролля вытекает, что $(r+1)$ -й интеграл $Y(t)$ функции $x'(t)$ имеет не более $k+1$ нулей на $[0, t_n]$:

$$Z(Y) \leq k+1. \quad (6.71)$$

Сопоставление неравенств (6.70) и (6.71) позволяет найти точное число $Z(Y) = k+1 = n$ нулей функции Y и установить следующий результат:

$$\{i_1 = 1, i_{j+1} - i_j = 1, j = 1, \dots, k+1\} \implies \{i_j = j, j = 1, \dots, k+1 = n\}.$$

Таким образом, мы показали, что точки $\{t_i\}_{i=0}^n$ остаются разделенными, т.е. $\hat{s}_i \neq 0$, $i = 0, \dots, n$. Теперь свойство (6.68) немедленно следует из унаследованных свойств (6.40), (6.44)–(6.47) функций последовательности. Лемма доказана.

6.4.2. Структура $G^{(r)}$. Опишем структуру r -й производной функции G .

ЛЕММА 6.5. Пусть $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{(N+1)n+1}) \in \mathbb{S}$ – предельный вектор последовательности $\{s^*(\varepsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ и функция Y определена в (6.66). Тогда существует такая не зависящая от N константа $E = E(r, m, n, B)$, что

$$\| |Y|^{p-1} \operatorname{sign} Y - G^{(r)} \|_{C[0, t_n]} \leq \frac{E}{N}. \quad (6.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.63) и (6.68) имеем

$$G^{(r)}(t) = g(t) = (-1)^i |\hat{s}_{n+(i-1)N+j}|^{p-1}, \quad t \in (\xi_{i,j-1}, \xi_{i,j}), \quad (6.73)$$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N$, в то время как из (6.46) следует, что

$$\operatorname{sign} Y(e_{i,j}) = (-1)^i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (6.74)$$

Используя еще одно унаследованное свойство (6.30) и определение (6.20) функции $R_{i,j}$, мы приходим к формулам

$$|Y(e_{i,j})|^{p-1} \operatorname{sign} Y(e_{i,j}) = (-1)^i |\hat{s}_{n+(i-1)N+j}|^{p-1} = G^{(r)}(t), \quad t \in (\xi_{i,j-1}, \xi_{i,j}), \quad (6.75)$$

для всех $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq N$. Наконец, используя вытекающие из соотношения (6.50) неравенства

$$t_n \leq C, \quad \|Y'\|_{C[0, t_n]} \leq C^{r-1} \omega(C), \quad \|Y\|_{C[0, t_n]} \leq C^r \omega(C)$$

и применяя предложение 2.4 и неравенство (2.15), мы приходим к следующей цепочке неравенств для $t \in [\xi_{i,j-1}, \xi_{i,j}]$:

$$\begin{aligned} & \left| |Y(t)|^{p-1} \operatorname{sign} Y(t) - G^{(r)}(t) \right| = \left| ((-1)^i Y(t))^{p-1} - ((-1)^i Y(e_{i,j}))^{p-1} \right| \\ & \leq \left| \int_{e_{i,j}}^t \frac{d}{dt} ((-1)^i Y(t))^{p-1} dt \right| \leq (p-1) \|Y'\|_{C[0, t_n]} \|Y\|_{C[0, t_n]}^{p-2} |t - e_{i,j}| \\ & \leq \frac{1}{2} (p-1) C^{r(p-1)} [\omega(C)]^{p-1} N^{-1}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

поскольку $e_{i,j}$ – центр отрезка $[\xi_{i,j-1}, \xi_{i,j}]$ длиной $(t_j - t_{j-1})/n \leq t_n/n \leq C/n$. Лемма доказана.

Основываясь на лемме 6.5 в реализации предельного перехода при $N \rightarrow \infty$, мы заканчиваем построение экстремальных функций с требуемыми свойствами. Доказательство теоремы 5.2 завершено для модулей непрерывности ω со свойством (6.1).

В общем случае мы можем ввести последовательность $\{\omega_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ выпуклых модулей непрерывности формулами

$$\omega_l(t) = \begin{cases} \omega(t), & t \in [0, l], \\ \omega(l) + (t-l)\omega_l, & t \in [l, +\infty), \end{cases} \quad (6.77)$$

где $\omega_l := \lim_{t \rightarrow l-} \omega'(t)$. Тогда теорема 5.2 гарантирует существование экстремальных функций $X_{n,m,l}$ задачи Колмогорова–Ландау для $\omega = \omega_l$, наделенных требуемыми свойствами. Предельный переход в последовательности $\{X_{n,m,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ приводит нас к требуемой функции.

§ 7. Свойства экстремальных функций

7.1. Оценки для экстремальных функций. Исследуем свойства построенных экстремальных функций.

ЛЕММА 7.1. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq m \leq r$, $B > 0$, $p \in [1, +\infty)$ и ω – выпуклый модуль непрерывности. Тогда для всех $d > 0$

$$\begin{aligned} \sup\{\|f^{(m)}\|_{C[0,2d]} \mid f \in W^r H^\omega[0, 2d]: \|f\|_{\mathbb{L}_p[0,2d]} \leq B\} \\ \leq \sup\{f^{(m)}(0) \mid f \in W^r H^\omega[0, d]: \|f\|_{\mathbb{L}_p[0,d]} \leq B\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $f \in W^r H^\omega[0, 2d]$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0,2d]} \leq B$. Пусть точка $\tau \in [0, 2d]$ обладает свойством $|f^{(m)}(\tau)| = \|f^{(m)}\|_{C[0,2d]}$. При $x \in [0, d]$ положим

$$g_f(x) := \begin{cases} f(\tau + x), & \tau \leq d, \\ f(\tau - x), & \tau > d. \end{cases} \quad (7.2)$$

Очевидно, что $|g_f^{(m)}(0)| = \|f^{(m)}\|_{C[0,2d]}$ и $\|g_f\|_{\mathbb{L}_p[0,d]} \leq B$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Пусть $L > 0$ и функция $f \in W^r H^\omega[0, L]$ обладает свойством $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0,L]} \leq B$, причем f имеет $r+1$ нулей на отрезке $[0, L]$. Тогда существует такая константа $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{r,\omega,B,p}$, что

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty[0,L]} \leq \mathcal{E}, \quad 0 \leq m \leq r. \quad (7.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7.1 достаточно предоставить оценку для значения $\sup\{f^{(m)}(0) \mid f \in W^r H^\omega[0, L/2]: \|f\|_{\mathbb{L}_p[0,L/2]} \leq B\}$.

Пусть $V_m(\cdot) := \mathcal{Z}_{\omega,p,n,B,r,m}(\cdot)$, где $n = r$, будет функцией, определенной на отрезке $[0, d_m]$, из теоремы 5.2. Согласно (5.19) и (5.20) следующие неравенства справедливы для функций $f \in W^r H^\omega[0, L/2]$ таких, что $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0,L/2]} \leq B$, $[0, d_m] \subseteq [0, L/2]$:

$$|f^{(m)}(0)| \leq E_m := |V_m^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left[B^p + \int_0^{d_m} \Re_\omega(\mathcal{F}_m; t) \omega'(t) dt \right] \quad (7.4)$$

при $0 < m < r$ и

$$|f^{(r)}(0)| \leq E_r := \left| \int_0^{d_r} V_r(t) dt \right|^{-1} \left[B^p + \int_0^{d_r} \Re_\omega(\mathcal{F}_r; t) \omega'(t) dt \right], \quad (7.5)$$

где $\mathcal{F}_m(x) = \int_{d_m}^x V_m(t) dt$, $0 \leq x \leq d_m$.

Если $L/2 < d_m$, то из предложения 2.4 следует, что

$$\|f^{(m)}\|_{[0,L/2]} \leq \omega(L/2)(L/2)^{r-m} < \omega(d_m)d_m^{r-m}. \quad (7.6)$$

Остается положить $\mathcal{E} := \max_{1 \leq m \leq r} \{E_m, \omega(d_m)d_m^{r-m}\}$. Лемма доказана.

Теперь мы уделим основное внимание рассмотрению случая $0 \leq m < r$. Случай $m = r$ анализируется аналогично.

Пусть $X_{n,m} = X_{\omega,p,B,n,r,m}$ и $Z_{n,m} = Z_{\omega,p,B,n,r,m}$ – функции из теоремы 5.2.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Существует такая константа $D = D(r, \omega, B, p)$, что

$$|Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)| \geq D, \quad 0 \leq m < r, \quad \left| \int_0^{d_{n,r}} Z_{n,r}(t) dt \right| > D. \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $X_{n,m}$ имеет $n \geq r + 1$ нулей, и на отрезке $[0, d_{n,m}]$ выполнено $\|X_{n,m}\|_{L_p[0, d_{n,m}]} = B$. Тогда по лемме 7.2 имеем

$$\|X_{n,m}^{(i)}\|_{C[0, d_{n,m}]} \leq \mathcal{E}, \quad i = 0, \dots, r. \quad (7.8)$$

Поскольку функции $X_{n,m}$ и $Z_{n,m}$ обращают неравенство (5.19) в равенство, для $0 \leq m < r$ мы получаем оценки

$$|X_{n,m}^{(m)}(0)| > |Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)|^{-1} B^p. \quad (7.9)$$

Сочетание соотношений (7.8) и (7.9) приводит нас к неравенству

$$|Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)| \geq |X_{n,m}^{(m)}(0)|^{-1} B^p \geq B^p \mathcal{E}^{-1} =: D. \quad (7.10)$$

Аналогично доказывается, что $|\int_0^{d_{n,m}} X_{n,r}(x) dx| \geq D$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Существует такая константа $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{r,\omega,B,p} > 0$, что

$$|X_{n,m}^{(r+1)}(\xi)| \geq \mathcal{N} \quad \text{для п. в. } \xi \in [0, d_{n,m}]. \quad (7.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 4.1 мы имеем следующее свойство для всех точек $x \in [0, d_{n,m}]$, за исключением конечного числа: существуют такие $v_x \in [0, d_{n,m}]$, $v_x \neq x$, что

$$\begin{aligned} |X_{n,m}^{(r)}(v_x) - X_{n,m}^{(r)}(x)| &= \omega(|v_x - x|), \\ |X_{n,m}^{(r+1)}(v_x)| &= |X_{n,m}^{(r+1)}(x)| = \omega'(|v_x - x|). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Согласно (7.12) и лемме 7.2 имеем

$$2\mathcal{E} \geq 2\|X_{n,m}^{(r)}\|_{L_\infty[0, d_{n,m}]} \geq \omega(|v_x - x|) \quad (7.13)$$

для почти всех $x \in [0, d_{n,m}]$. Следовательно, (7.13) и (7.12) приводят к оценке

$$|X_{n,m}^{(r+1)}(x)| \geq \omega'(\omega^{-1}(2\mathcal{E})) =: \mathcal{N}. \quad (7.14)$$

Следствие доказано.

7.2. Ограниченность нулей и узлов. Для реализации предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ нам потребуются свойства ограниченности нулей $\{t_i(n, m)\}_{i=1}^n$ функции $X_{n,m}$, нулей $\{\vartheta_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r}$ функции $X_{n,m}^{(r)}$ и точек $\{z_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r-1}$ перемены знака функции $X_{n,m}^{(r+1)}$.

Сначала отметим те отношения между наборами этих точек, которые немедленно следуют из теоремы Ролля:

$$\begin{aligned} t_i(n, m) &< \vartheta_i(n, m) < t_{i+r}(n, m), & i = 1, \dots, n-r, \\ \vartheta_i(n, m) &< z_i(n, m) < \vartheta_{i+1}(n, m), & i = 1, \dots, n-r-1. \end{aligned} \quad (7.15)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Существует такая константа $\mathcal{A} = \mathcal{A}(r, \omega, B, p)$, что

$$z_j(n, m) \leq \mathcal{A}j \quad \forall n \geq j + r + 1. \quad (7.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 7.2 и следствие 7.2 предоставляют нам следующую оценку для всех $i = 1, \dots, n-r$ ($z_0(n, m) := 0$, $z_{n-r}(n, m) := d_{n,m}$):

$$\mathcal{E} \geq \|X_{n,m}^{(r)}\|_{C[0, d_{n,m}]} \geq \frac{1}{2} \int_{z_{i-1}(n, m)}^{z_i(n, m)} |X_{n,m}^{(r+1)}(t)| dt \geq \frac{1}{2} \mathcal{N}(z_i(n, m) - z_{i-1}(n, m)). \quad (7.17)$$

Остается положить $\mathcal{A} := 2\mathcal{E}\mathcal{N}^{-1}$. Следствие доказано.

Из неравенств (7.15) и (7.16) следует ограниченность $\vartheta_j(n, m)$ и $t_j(n, m)$ числом $\mathcal{A}j$ для всех $n \geq j - r + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *Существует такая константа $\mathcal{D} = \mathcal{D}(r, \omega, B, p)$, что*

$$|Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)| \leq \mathcal{D}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через ν^k обозначим второй положительный нуль функции $Z_{n,m}^{(k)}$ при $k = 0, \dots, r-1-m$ и первый положительный нуль $Z_{n,m}^{(k)}$ при $k = r-2-m, \dots, r$. Из граничных условий

$$Z_{n,m}^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, \dots, r-2-m, r-m, \dots, r-1,$$

и теоремы Ролля следует, что $\nu^k < \nu_{k-1}$, $k = 1, \dots, r$. Применяя предложение 2.4, получаем оценку

$$|Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)| \leq [\nu_0]^m \|Z^{(r)}\|_{C[0, \nu_0]}. \quad (7.18)$$

Соотношения $\tau_i(n, m) < z_i(n, m) < \tau_{i+1}(n, m)$ между нулями $\{\tau_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r}$ порождающего ядра $Z_{n,m}$ и точками $\{z_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r-1}$ перемен знака производной $X_{n,m}^{(r+1)}$ экстремальной функции задачи

$$\int_0^{d_{n,m}} h(t) Z_{n,m} dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, d_{n,m}],$$

в сочетании с (7.16) позволяют нам заключить, что $2\mathcal{A} \geq z_2 \geq \tau_1 =: \nu^0$. Согласно (5.12) и лемме 7.2 имеем $\|Z_{n,m}^{(r)}\|_{C[0, d_{n,m}]} = \|X_{n,m}\|_{C[0, d_{n,m}]}^{p-1} \leq \mathcal{E}^{p-1}$. Наконец, из оценки (7.18) мы получаем

$$|Z_{n,m}^{(r-1-m)}(0)| \leq (2j\mathcal{A})^m \mathcal{E}^{p-1} =: \mathcal{D}.$$

Следствие доказано.

7.3. Структура $X_{n,m}^{(r)}$. По определению функция $X_{n,m}^{(r)}(t)$ экстремальна в задаче

$$\int_0^{d_{n,m}} h(t) Z_{n,m}(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, d_{n,m}].$$

Пусть $\{\tau_i(n, m)\}_{i=1}^{n-r}$ — точки перемен знака $Z_{n,m}$. Положим $\tau_0(n, m) := 0$ и $\tau_{n-r+1} := d_{n,m}$. Теорема 4.1 дает нам возможность описать строение $X_{n,m}$. Существует разбиение $[0, d_{n,m}] = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n+1} B_{ij}[n, m]$, наделенное свойствами

$$B_{ij}[n, m] \subset [\tau_{i-1}(n, m), \tau_i(n, m)], \quad i = 1, \dots, n-r+1, \quad (7.19)$$

$$\int_{B_{ij}[n, m] \cup B_{ji}[n, m]} Z_{n,m}(t) dt = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n-r+1. \quad (7.20)$$

Для всех пар (i, j) , $1 \leq i < j \leq n-r+1$, для которых $B_{ij}[n, m]$ обладает непустой внутренностью, функция $X_{n,m}^{(r)}(t)$ экстремальна в задаче

$$\begin{aligned} \int_0^{d_{n,m}} h(t) Z_{ij}^{nm}(t) dt &\rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, d_{n,m}], \\ Z_{ij}^{nm}(t) &= Z_{n,m}(t) \mathcal{X}(B_{ij}[n, m] \cup B_{ji}[n, m]; t), \quad t \in [0, d_{n,m}]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

В соответствии с леммой 4.1 имеем

$$X_{n,m}^{(r+1)}(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1} \omega'(\rho_{ij}(t) - t), & t \in B_{ij}[n, m], \\ (-1)^{i+1} \omega'(t - \rho_{ij}^{-1}(t)), & t \in B_{ji}[n, m], \end{cases} \quad (7.22)$$

где функция $\rho_{ij} = \rho_{i,j,n} : B_{ij}[n, m] \rightarrow B_{ji}[n, m]$ определяется уравнением

$$F_{ij}^{nm}(t) = F_{ij}^{nm}(\rho_{ij}(t)), \quad t \in B_{ij}[n, m], \quad \rho_{ij}(t) \in B_{ji}[n, m].$$

7.4. Свойства перестановок. Сформулируем лемму.

ЛЕММА 7.3. Пусть $F_{n,m}(x) := \int_0^x X_{n,m}(t) dt$, $x \in [0, d_{n,m}]$.

I. Существует такая константа $\kappa = \kappa(r, \omega, B, p)$, что

$$\text{supp } \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; \cdot) \subset [0, \kappa] \quad \forall n \geq r+1, \quad 0 \leq m < r.$$

II. Существуют константы $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1(r, \omega, B, p)$ и $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2(r, \omega, B, p)$ со свойствами

$$\int_0^{d_{n,m}} \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt < \mathcal{E}_1, \quad \|F_{n,m}\|_{\mathbb{L}_1[0, d_{n,m}]} + \|\mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; \cdot)\|_{\mathbb{L}_1[0, d_{n,m}]} < \mathcal{E}_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $[\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2] := B_{ij}[n, m]$, $1 \leq i, j \leq n - r + 1$.

С одной стороны, из формулы (7.22) и свойства (4.7) следует, что если имеет место $\beta_{ij}^1 < \beta_{ij}^2$, то

$$|X_{n,m}^{(r)}(\beta_{ji}^2) - X_{n,m}^{(r)}(\beta_{ij}^1)| = |X_{n,m}^{(r)}(\rho_{ij}(\beta_{ij}^1)) - X_{n,m}^{(r)}(\beta_{ij}^1)| = \omega(\beta_{ji}^2 - \beta_{ij}^1), \quad (7.23)$$

с другой – согласно лемме 7.2 имеем

$$\|X_{n,m}^{(r)}\|_{C[0, d_{n,m}]} \leq \mathcal{E}. \quad (7.24)$$

Из (7.23), (7.24) можно заключить, что

$$\text{supp}(\mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; \cdot)) = \max_{1 \leq i < j \leq n-r+1} (\beta_{ji}^2 - \beta_{ij}^1) \leq \omega^{-1}(2\mathcal{E}) =: \kappa. \quad (7.25)$$

Функция $X_{n,m}$ обращает неравенство (5.7) в равенство:

$$|X_{n,m}^{(m)}(0)| = |Z_{n,m}(0)^{(r-1-m)}|^{-1} \left(B^p + \int_0^{d_{n,m}} \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt \right). \quad (7.26)$$

Следовательно, согласно лемме 7.2 и следствию 7.1 имеем

$$\int_0^{d_{n,m}} \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt \leq \mathcal{E} \mathcal{D} =: \mathcal{E}_1. \quad (7.27)$$

Из (7.27), (7.25), следствия 4.5 и того факта, что $\omega'(x)$ убывает на интервале $(0, +\infty)$, мы заключаем, что

$$\mathcal{E}_1 \geq \int_0^{d_{n,m}} \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt = \int_0^\kappa \mathfrak{R}_\omega(F_{n,m}; t) \omega'(t) dt \geq \omega'(\kappa) \|F_{n,m}\|_{\mathbb{L}_1[0, d_{n,m}]}, \quad (7.28)$$

так что можно положить $\mathcal{E}_2 := 2\mathcal{E}_1[\omega'(\kappa)]^{-1}$. Лемма доказана.

§ 8. Предельный переход

В этом параграфе мы осуществим предельный переход для завершения построения экстремальных функций задачи

$$\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \leq B.$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < r$. Случай $m = r$ рассматривается аналогично.

8.1. Определение предельной функции. Следствия 7.1, 7.3 вместе с приложением теоремы Арцела–Асколи позволяют нам выбрать такую подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} t_i(n_k, m) &= t_i, & i \in \mathbb{Z}_+, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_i(n_k, m) = \vartheta_i, & i \in \mathbb{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} z_i(n_k, m) &= z_i, & i \in \mathbb{N}, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_j(n_k, m) = \tau_j, & j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

а также

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k, m} = X, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Z_{n_k, m} = Z \quad \text{в } C^r(K) \quad (8.2)$$

для любого компакта K в $[0, d]$, $d := \lim_{k \rightarrow \infty} d_{n_k, m}$. Поскольку функции $Z_{n_k, m}$ и $X_{n_k, m}$ удовлетворяют условиям (5.12), эти равенства справедливы и для предельной функции:

$$Z^{(r)}(t) = |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in [0, d]. \quad (8.3)$$

Кроме того, последовательность $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ может быть выбрана таким способом, что существуют пределы атомов разбиения:

$$B_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} B_{ij}[n_k, m], \quad (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (8.4)$$

где сходимость отрезков понимается, конечно, в смысле сходимости концов интервалов.

8.2. Перестановки ядра Z . Из свойств (7.19), (7.20) и равномерной сходимости семейства ядер $\{Z_{n_k, m}\}_{k \in \mathbb{N}}$ к Z на каждом из компактов в $\mathbb{R}_+$ следует, что

$$B_{ij} \subset [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \mathbb{N}, \quad \int_{B_{ij} \cup B_{ji}} Z(t) dt = 0, \quad (i, j) \in \mathbb{N}^2. \quad (8.5)$$

Для всех пар $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ положим

$$Z_{ij}(t) := Z(t) \chi(B_{ij} \cup B_{ji}; t), \quad F_{ij}(t) := \int_0^t Z_{ij}(y) dy, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (8.6)$$

Согласно (8.5) каждое из ядер в (8.6) для невырожденных интервалов B_{ij} является простым. Через Φ^* обозначим убывающую перестановку простого ядра Φ . Пусть

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := \sum_{(i, j) \in \mathbb{N}^2} F_{ij}^*(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (8.7)$$

По определениям (8.6) для всех пар $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ имеем

$$\operatorname{supp} F_{ij} = [\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2], \quad \text{где} \quad [\beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2] := B_{ij}. \quad (8.8)$$

Согласно оценке (7.25) длины носителей в (8.8) ограничены константой $\omega^{-1}(2\mathcal{E})$, зависящими только от r, ω, B, p . Следовательно, носитель перестановки $\mathfrak{R}_\omega(F; t)$ конечен:

$$\text{supp } \mathfrak{R}_\omega(F; t) = [0, \kappa], \quad \kappa := \sup_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |\beta_{ji}^2 - \beta_{ij}^1|. \quad (8.9)$$

Предельные отношения (8.1)–(8.4) и результат следствия 4.6 в применении к простым ядрам $\{F_{ij}^{n_k m}\}_{k \in \mathbb{N}: n_k > j}$ для $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ гарантируют, что $X^{(r)}$ также экстремальна в задаче

$$\int_0^d h(t) Z(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[0, d]. \quad (8.10)$$

8.3. Экстремальные неравенства для $\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Применяя к равенству (7.26) теорему Фату, получаем оценку

$$|X^{(m)}(0)| \geq |Z^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{R}_\omega(F; t) dt \right). \quad (8.11)$$

В частности, согласно лемме 7.3 имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{R}_\omega(F; t) \omega'(t) dt = \int_0^\kappa \mathfrak{R}_\omega(F; t) \omega'(t) dt < \mathcal{E}_1 < \infty. \quad (8.12)$$

Поскольку $\omega'(t) \geq \omega'(\kappa) > 0$, $0 \leq t \leq \kappa$, из следствия 4.5 (см. также цепочку неравенств в (7.28)) мы заключаем, что

$$\|F\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq \|\mathfrak{R}_\omega(F; \cdot)\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} < \omega'(\kappa) \mathcal{E}_1 =: \mathcal{E}_2. \quad (8.13)$$

Вспомним определение (2.4) функционального класса:

$$W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B] := \{f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+) \mid \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B\}. \quad (8.14)$$

Мы утверждаем, что для любой функции $f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B]$ верна оценка

$$|f^{(m)}(0)| \leq |Z^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{R}_\omega(F; t) \omega'(t) dt \right). \quad (8.15)$$

Для доказательства неравенства (8.15) введем любую функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ со свойствами

$$\begin{aligned} \chi(x) &\equiv 1, & x &\in [0, 1], \\ \chi(x) &\equiv 0, & x &\geq 2, \\ -2 &< \chi'(x) &\leq 0, & x &\in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Для произвольной функции $f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B]$ положим

$$f_N(x) = f(x) \chi\left(\frac{x}{N}\right), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (8.17)$$

Очевидно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N - f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad (8.18)$$

В следующей лемме дается оценка модуля непрерывности r -й производной функции f_N .

ЛЕММА 8.1. Если для данной функции $f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B]$ семейство $\{f_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ определяется в (8.17), то существует такая константа $M = M(\omega, r, B)$, что для всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\omega(f_N^{(r)}; t) \leq \omega(t) + \frac{M}{N} t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Лейбница имеем

$$f_N^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^r f^{(j)}(x) \chi^{(r-j)}\left(\frac{x}{N}\right) N^{j-r}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (8.19)$$

Зафиксируем индекс $N \in \mathbb{N}$ и любую пару точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$. Согласно формуле (8.19) получаем

$$\begin{aligned} f_N^{(r)}(x_2) - f_N^{(r)}(x_1) &= \sum_{j=0}^r (f^{(j)}(x_2) - f^{(j)}(x_1)) \chi^{(r-j)}(x_2) N^{j-r} \\ &\quad + \sum_{j=0}^r f^{(j)}(x_1) (\chi^{(r-j)}(x_2) - \chi^{(r-j)}(x_1)) N^{j-r}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Неравенства (5.19), (5.20) гарантируют существование такой константы $\mathcal{E}$, что

$$\|g^{(l)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \mathcal{E}, \quad l = 1, \dots, r-1,$$

для всех $g \in W^r H^\omega[\mathbb{R}_+; B]$. Тогда разности в (8.20) могут быть оценены следующим образом:

$$|f^{(j)}(x_2) - f^{(j)}(x_1)| \leq \|f^{(j+1)}\|_{C[x_1, x_2]} |x_2 - x_1| \leq \mathcal{E} |x_1 - x_2| \quad (8.21)$$

для $j = 0, \dots, r-1$. Кроме того, по определению (8.14) класса $W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B]$ имеем

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq \omega(|x_2 - x_1|). \quad (8.22)$$

Пусть $\Gamma = \Gamma(\chi) := \max_{0 \leq i \leq r+1} \|\chi^{(i)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Тогда для всех $j = 0, \dots, r$ выполнено

$$|\chi^{(r-j)}(x_2) - \chi^{(r-j)}(x_1)| \leq \Gamma |x_2 - x_1|. \quad (8.23)$$

Положив $M := 2(r+1)\mathcal{E}\Gamma$, из тождества (8.20) и неравенств (8.21)–(8.23) мы выводим, что

$$|f_N^{(r)}(x_2) - f_N^{(r)}(x_1)| \leq \omega(|x_2 - x_1|) + \frac{M}{N} |x_2 - x_1|.$$

Лемма доказана.

Для $N \in \mathbb{N}$ введем выпуклый модуль непрерывности σ формулой

$$\sigma(x) = \omega(x) + \frac{M}{N} x, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Согласно лемме 8.1 имеем $f_N \in W^r H^\sigma(\mathbb{R}_+)$. Поскольку $\omega(t) \leq \sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, следствие 4.4 позволяет получить оценку

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sigma'(x) \Re_\sigma(F; x) dx \leq \int_{\mathbb{R}_+} \sigma'(x) \Re_\omega(F; x) dx, \quad (8.24)$$

где $\mathfrak{R}_\sigma(F; t)$ и $\mathfrak{R}_\omega(F; t)$ – экстремальные перестановки, ассоциированные с модулями $\sigma(t)$ и $\omega(t)$ соответственно.

Поскольку функции f_N , $N \in \mathbb{N}$, имеют компактные носители, применение формулы интегрирования по частям, как и в § 5, приводит к тождеству

$$\begin{aligned} f^{(m)}(0) &= f_N^{(m)}(0) \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{Z^{(r-1-m)}(0)} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f_N(t) Z^{(r)}(x) dx + (-1)^r \int_{\mathbb{R}_+} f_N^{(r)}(x) Z(x) dx \right). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Используя оценку (8.24), тождество (8.25) и лемму 8.1, мы получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(0)| &\leq |Z^{(r-1-m)}(0)|^{-1} \left(\|f_N\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \|Z^{(r)}\|_{\mathbb{L}_q(\mathbb{R}_+)} + \int_{\mathbb{R}_+} \sigma'(x) \mathfrak{R}_\sigma(F; x) dx \right) \\ &\leq \frac{1}{|Z^{(r-1-m)}(0)|} \left(\|f_N\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} B^{p-1} + \int_{\mathbb{R}_+} \sigma'(x) \mathfrak{R}_\omega(F; x) dx \right) = \frac{1}{|Z^{(r-1-m)}(0)|} \\ &\quad \times \left(\|f_N\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} B^{p-1} + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(x) \mathfrak{R}_\omega(F; x) dx + \frac{M}{N} \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{R}_\omega(F; x) dx \right) \end{aligned}$$

для всех функций $f \in W^r H_p^\omega[\mathbb{R}_+; B]$ и натуральных N . Согласно (8.13) интегральная норма перестановки $\mathfrak{R}_\omega(F; t)$ конечна. Следовательно, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ и используя (8.18), мы получаем оценку (8.15).

Оценка (8.11) означает, что неравенство (8.15) точное. Более того, переходя к пределу в (8.25), мы получаем формулу дифференцирования для всех функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B$:

$$f^{(m)}(0) = \frac{(-1)^{m+1}}{Z^{(r-1-m)}(0)} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t) Z^{(r)}(t) dt + (-1)^r \int_{\mathbb{R}_+} f^{(r)}(t) Z(t) dt \right). \quad (8.26)$$

8.4. Экстремальные функции задачи Колмогорова на полупрямой.

В пп. 8.1–8.3 мы доказали существование функций $X \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$ и F , наделенных следующими свойствами:

$$\begin{aligned} F^{(r+1)}(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \int_{\mathbb{R}_+} [X^{(r)}(t) - X^{(r)}(0)] F'(t) dt &= \sup_{h \in H_0^\omega(\mathbb{R}_+)} \int_{\mathbb{R}_+} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} &= B, \\ F^{(i)}(0) &= 0, \quad i = 0, \dots, \widehat{r-m}, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Формула дифференцирования (8.26) (при $Z := F'$) справедлива для всех функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$ таких, что $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} < \infty$, и неравенство

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |F^{(r-m)}(0)|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)}^p + \int_{\mathbb{R}_+} \mathfrak{R}_\omega(F; t) \omega'(t) dt \right)$$

является точным для функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} < B$. Следующий результат о структуре экстремальных функций и форме мультипликативного неравенства в задаче Колмогорова

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\alpha(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} < B, \quad (8.27)$$

в классах Гёльдера $W^r H^\alpha(\mathbb{R}_+) := W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$, является прямым следствием леммы 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть Υ – экстремальная функция в (8.27) при $B = 1$ и $C := |\Upsilon^{(m)}(0)|$. Точное неравенство

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)}^{\frac{r+\alpha-m}{r+\alpha+p-1}}$$

справедливо для всех $f \in W^r H^\alpha(\mathbb{R})$, и $\Upsilon_B(t) := B^{\frac{r+\alpha}{r+\alpha+p-1}} \Upsilon(B^{-\frac{1}{r+\alpha+p-1}} t)$ экстремальна в задаче (8.27) при любом $B > 0$.

8.5. Экстремальные функции задачи Колмогорова на прямой. Экстремальные функции задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R})} \leq B,$$

строятся точно так же, как и в случае полупрямой. В этом пункте мы приведем окончательные результаты.

Существуют функции $X \in W^r H^\omega(\mathbb{R})$ и F , наделенные следующими свойствами. Функции X и F обладают симметричностью относительно начала координат:

$$X(-t) = (-1)^m X(t), \quad F(-t) = (-1)^{r+1+m} F(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Функция $F(t)$ допускает представление

$$F(t) = \mathcal{F}(t) + \gamma H_m(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

для некоторого $\gamma = \gamma(\omega, r, m, B) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $\mathcal{F}$ – функция с абсолютно непрерывной r -й производной и

$$H_m(t) := \frac{1}{2(r-m)!} (t_+^{r-m} + (-1)^{r-m+1} (-t)_+^{r-m}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Другими словами, $F^{(r-m)}$ имеет “скачок” в нуле: $F^{(r-m)}(0+) - F^{(r-m)}(0-) = 1$. Далее, функции X и F удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} F^{(r+1)}(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \int_{\mathbb{R}} (X^{(r)}(t) - X^{(r)}(0)) F'(t) dt &= \sup_{h \in H_0^\omega(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} &= B. \end{aligned}$$

Формула дифференцирования

$$f^{(m)}(0) = \gamma^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) F^{(r+1)}(t) dt + (-1)^r \int_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) F'(t) dt \right)$$

верна для всех функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R})$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R})} < \infty$, и неравенство

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})} \leq |\gamma|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R})}^p + \int_{\mathbb{R}} \Re_\omega(F; t) \omega'(t) dt \right)$$

является точным для всех функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R})$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R})} < B$.

8.6. Дополнительные свойства экстремальных функций X . В этом пункте мы выведем некоторые дополнительные свойства экстремальных функций X задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B, \quad (8.28)$$

для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Как обычно, мы в деталях рассмотрим случай полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Аналогичные результаты могут быть установлены для экстремалей в (8.28) в случае всей прямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть X – экстремальная функция задачи (8.28) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $\sup X = [0, d]$, $0 < d \leq +\infty$. Кратность любого нуля $\xi \in (0, d)$ функции X не превышает r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ξ – нуль кратности не меньше $r + 1$ внутри носителя X , то $\tilde{X}(t) := X(t)\mathcal{X}([0, \xi]; t) \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$, $\|\tilde{X}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} =: \tilde{B} < B$ и $\tilde{X}^{(m)}(0) = X^{(m)}(0)$. Функция

$$\hat{X}(t) := \left(\frac{B}{\tilde{B}}\right)^{\frac{r+1}{r+1+p-1}} \tilde{X}\left(\left(\frac{\tilde{B}}{B}\right)^{\frac{1}{r+1+p-1}} t\right)$$

обладает свойствами $\|\hat{X}\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} = B$ и $\hat{X} \in W^r H^\omega(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, неравенство $|\tilde{X}^{(m)}(0)| > |X^{(m)}(0)|$ противоречит экстремальности X в задаче (8.28). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Функции X и $-X$ – единственные решения задачи (8.28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (8.26) вытекает, что любая экстремальная функция g задачи (8.28) совпадает с X или $-X$ на носителе $[0, d]$ функции X . Согласно предположению 8.2 имеем $g(x) \equiv 0$, $x \in [d, +\infty)$. Следствие доказано.

Через $\mathfrak{F}$ обозначим множество всех троек (ω, p, B) , где ω – выпуклый модуль непрерывности, $p \geq 1$ и $B > 0$. Метрику в $\mathfrak{F}$ введем следующим образом:

$$\rho((\omega_1, p_1, B_1), (\omega_2, p_2, B_2)) = \|\omega_1 - \omega_2\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} + |p_1 - p_2| + |B_1 - B_2|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Пусть $X_{\omega, p, B}$ – такая экстремальная функция задачи (8.28), что $X_{\omega, p, B}^{(m)}(0) > 0$. Тогда функция $X_{\omega, p, B}$ непрерывно зависит от параметров $(\omega, p, B) \in \mathfrak{F}$ в метрике $\mathbb{L}_\infty^r(\mathbb{I})$, т. е. для всех $(\omega, p, B) \in \mathfrak{F}$ имеем

$$\lim_{\mathfrak{F} \ni (\omega', p', B') \rightarrow (\omega, p, B)} \|X_{\omega', p', B'}^{(k)} - X_{\omega, p, B}^{(k)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} = 0, \quad k = 0, \dots, r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобно нашим рассуждениям в пп. 8.1–8.3, доказательство опирается на следствие 8.1 о единственности решений и применение предельного перехода для семейства $X_{\omega', p', B'}$ при $(\omega', p', B') \rightarrow (\omega, p, B)$ в $\mathfrak{F}$.

8.7. Упрощенное построение экстремальных функций в случае $p = 1$. Как и было обещано, в этом пункте мы приведем гораздо более простое построение экстремальных функций теоремы 5.2 в случае $p = 1$. При этом мы ограничимся использованием борсуковского отображения в случае $0 < m < r$.

Пусть $\mathbb{S}^{n+1}$ – $(n + 1)$ -мерная сфера в l_1^{n+2} радиуса A , определенного в (6.4):

$$\mathbb{S}^{n+1} := \left\{ s = (s_1, \dots, s_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum_{i=1}^{n+2} |s_i| = A \right\}.$$

Для каждого $s = (s_1, \dots, s_{n+2}) \in \mathbb{S}^{n+1}$ введем наборы точек $\{t_i = t_i(s)\}_{i=0}^{n+2}$:

$$t_0(s) := 0, \quad t_i(s) = \sum_{j=1}^i |s_j|, \quad i = 1, \dots, n+2, \quad (8.29)$$

и функции

$$z_s(t) := \text{sign } s_i, \quad t \in (t_{i-1}(s), t_i(s)), \quad i = 1, \dots, n+2,$$

а также Z_s как r -й интеграл z_s , равный нулю в $t = t_{n+1}(s)$ со всеми своими производными $\{Z_s^{(i)}\}_{i=0}^{r-1}(t_{n+1}(s))$:

$$Z_s(t) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^{t_{n+1}(s)} z_s(x)(x-t)_+^{r-1} dx, \quad t \in [0, t_{n+1}(s)].$$

Положим $I_s := \int_0^{t_{n+1}(s)} Z_s(t) dt$. Определим y_s как экстремальную функцию в задаче

$$\int_0^{t_{n+1}(s)} h(t) Z_s(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H_0^\omega[0, t_{n+1}(s)].$$

Тогда функция Y_s вводится как r -й интеграл y_s , удовлетворяющий нулевым граничным условиям в нуле:

$$Y_s(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^{t_{n+1}(s)} y_s(x)(t-x)_+^{r-1} dx, \quad t \in [0, t_{n+1}(s)].$$

Пусть $p_s(t) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i(s)t^i$ — алгебраический многочлен степени $r-1$, интерполирующий $Y_s(t)$ в точках $\{t_i(s)\}_{i=1}^r$, определенных в (8.29):

$$p_s(t_i(s)) = Y_s(t_i(s)), \quad i = 1, \dots, r.$$

Положим

$$X_s(t) = Y_s(t) - p_s(t), \quad 0 \leq t \leq t_n(s).$$

Мы также введем функции

$$D_i(s) := \begin{cases} \|X_s\|_{\mathbb{L}_p[t_{i-1}(s), t_i(s)]} - \frac{B}{A}(t_i(s) - t_{i-1}(s)), & i = 1, \dots, n+1, \\ -\frac{B}{A}(t_i(s) - t_{i-1}(s)), & i = n+2, \end{cases}$$

$$D(s) := \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i D_i(s) \text{sign } s_i.$$

Отображение Борсука $\varkappa: \mathbb{S}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ определим следующим образом:

$$\varkappa(s) := \{X_s(t_i(s))\}_{i=r+1}^n \times \{Z_s^{(i)}(0)\}_{i=0}^{r-2-m} \times \{Z_s^{(i)}(0)\}_{i=r-m}^{r-1} \times I_s \times D(s).$$

Повторяя аргументацию из §6 mutatis mutandis, мы можем установить, что знаки координат $\{s_i^*\}_{i=1}^{n+2}$ решения s^* уравнения $\varkappa(s^*) = 0$ альтернируют и функции $X_{n,m} := X_{s^*}$, $Z_{n,m} := Z_{s^*}$, определенные на отрезке $[0, d_{n,m}]$, $d_{n,m} := t_{n+1}(s^*)$, обладают всеми свойствами, приведенными в теореме 5.2.

§ 9. Задача Колмогорова–Ландау в $W^1 H^\omega(\mathbb{I}) \cap \mathbb{L}_1(\mathbb{I})$

Получение дополнительных результатов для экстремальных функций задачи Колмогорова в классах $W^1 H^\omega(\mathbb{I}) \cap \mathbb{L}_p(\mathbb{I})$ для всех $p \in [1, +\infty)$ осуществляется следующим образом. Сначала в настоящем параграфе мы установим необходимые свойства решений для $p = 1$, поскольку в этом случае анализ значительно упрощается ввиду того, что генерирующая функция F является квадратичным сплайном. В следующем пункте мы распространим соответствующие результаты на случай всех $p > 1$.

9.1. Максимизация нормы $\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Данный пункт проясняет структуру экстремальных функций в задаче

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq B. \quad (9.1)$$

9.1.1. *Условия экстремальности.* Теорема 5.2 и результаты из п. 8.4 гарантируют существование квадратичного сплайна F на $\mathbb{R}_+$ (рис. 5) со свойствами:

- (a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (x - \theta_i)_+^2 + \alpha x$, $\alpha < 0$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$;
- (b) F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots$, F' имеет в точности один нуль η_i на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

Рис. 5. Графики функций F' и X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

Заметим, что из условия (a) вытекает, что $F(0) = 0$ и $F'(0) < 0$, в то время как (b) означает, что ограничения $\{F|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются простыми ядрами в смысле определения 4.1. Согласно (5.6) и (5.7) формула дифференцирования имеет следующий вид:

$$f(0) = -[F'(0)]^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x) F''(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+} f'(x) F'(x) dx \right),$$

для любой функции $f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+)$, $\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq B$, а точное аддитивное неравенство принимает форму

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |F'(0)|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \Re_\omega(F; t) dt \right).$$

Тогда условия экстремальности (5.12)–(5.14) переписываются в следующей форме:

$$\begin{aligned} F''(x) &= \operatorname{sign} X(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ \sup_{h \in H^\omega(\mathbb{R}_+)} \int_{\mathbb{R}_+} h(x) F'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} X'(x) F'(x) dx. \end{aligned} \quad (9.2)$$

9.1.2. Свойства узлов функции F . Исследуем свойства узлов ядра F .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Если $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ – нули функции F , то

$$|\xi_i - \xi_{i-1}| > |\xi_{i+1} - \xi_i| \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (9.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$ – набор нулей функции X , $\theta_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Согласно первому равенству в (9.2) нули X совпадают с узлами F и

$$F''(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1}, & t \in [\xi_i, \theta_i], \\ (-1)^i, & t \in [\theta_i, \xi_{i+1}]. \end{cases}$$

Производная F' имеет нулевое среднее на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$: $\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} F'(t) dt = 0$, поскольку $F(\xi_i) = F(\xi_{i+1}) = 0$. Это свойство эквивалентно следующему соотношению между точками ξ_i, θ_i и ξ_{i+1} (можно использовать тождество $\eta_i - \xi_i = |F'(\xi_i)|$; см. рис. 5):

$$[F'(\xi_i)]^2 = [\theta_i - \xi_i - |F'(\xi_i)|]^2 + 3(\xi_{i+1} - \theta_i)^2,$$

или, после упрощений,

$$2(\theta_i - \xi_i)|F'(\xi_i)| = (\theta_i - \xi_i)^2 + 3(\xi_{i+1} - \theta_i)^2. \quad (9.4)$$

С другой стороны, прямое вычисление (см. рис. 5) приводит нас к выводу, что

$$-|F'(\xi_i)| + \theta_i - \xi_i - (\xi_{i+1} - \theta_i) = |F'(\xi_{i+1})|. \quad (9.5)$$

Умножая обе части тождества (9.5) на $2(\theta_i - \xi_i)$ и используя (9.4), мы получаем уравнение

$$2(\theta_i - \xi_i)|F'(\xi_{i+1})| = (\theta_i - \xi_i)^2 - 2(\theta_i - \xi_i)(\xi_{i+1} - \theta_i). \quad (9.6)$$

Сравнивая (9.4) и (9.6), получим неравенство

$$|F'(\xi_{i+1})| < |F'(\xi_i)|, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (9.7)$$

Положим

$$k_i := \frac{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}}{\xi_{i+1} - \xi_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Заметим, что графики функций $F'(x)$ на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ и $[\xi_{i+1}, \xi_{i+2}]$ подобны:

$$F'(x) = -\frac{1}{k_i} F'(\xi_{i+1} + k_i(x - \xi_i)). \quad (9.8)$$

Подставляя $x = \xi_i$ в (9.8) и используя (9.7), мы заключаем, что

$$k_i = \frac{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}}{\xi_{i+1} - \xi_i} = \frac{|F'(\xi_{i+1})|}{|F'(\xi_i)|} < 1. \quad (9.9)$$

Предложение доказано.

Из предложений 9.1 и 4.2 следует, что атомы $\{A_i := [\xi_{i-1}, \xi_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ образуют тривиальное разбиение носителя F в смысле определения 4.6. Другими словами, каждое из ограничений $X'|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}$ является решением задачи

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} h(t) F'(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[\xi_{i-1}, \xi_i].$$

Из (4.6) мы получаем формулы для $X''|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]}$, $j \in \mathbb{N}$:

$$X''(t) = \begin{cases} (-1)^{j+1} \omega'(\rho_j(t) - t), & \xi_j \leq t < \eta_j, \\ (-1)^{j+1} \omega'(t - \rho_j^{-1}(t)), & \eta_j < t \leq \xi_{j+1}, \end{cases}$$

где функция $\rho_j: [\xi_j, \eta_j] \rightarrow [\eta_j, \xi_{j+1}]$ определена как решение уравнения $F(t) = F(\rho_j(t))$, $t \in [\xi_j, \eta_j]$, $\rho_j(t) \in [\eta_j, \xi_{j+1}]$. Перестановка $\mathfrak{R}_\omega(F; \cdot)$ допускает представление

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]})^*(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (9.10)$$

Из неравенства (9.3) и формулы (9.10) следует, что $\text{supp } \mathfrak{R}_\omega(F; \cdot) = [0, \xi_1]$.

9.1.3. *Строение экстремальной функции X .* Для всех $j \in \mathbb{N}$ введем следующие функции:

$$X_j(t) = X(t + \xi_j), \quad F_j(t) = F(t + \xi_j), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (9.11)$$

и положим

$$B_j := \|X_j\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)}, \quad \xi_i(j) = \xi_{i+j}, \quad \eta_i(j) = \eta_{i+j}, \quad \theta_i(j) = \theta_{i+j}, \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

где, как и прежде, $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — точки перемен знака функций F , F' и F'' соответственно.

Рис. 6. График производной X' экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

Ссылаясь на свойства (а)–(с) из пп. 9.1.1 и (9.2) функций X и F , мы приходим к выводу, что X_j и F_j обладают всеми свойствами X и F относительно наборов точек $\{\xi_i(j)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{\eta_i(j)\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{\theta_i(j)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Следовательно, для каждого $j \in \mathbb{N}$ функция X_j является решением задачи

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq B_j.$$

Рис. 6 иллюстрирует график производной X' экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$.

9.1.4. *Свойства экстремальных функций в классах Гёльдера.* В частном случае гёльдеровских модулей непрерывности $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ экстремальная функция X задачи

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\alpha(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq B, \quad (9.12)$$

обладает интересным *фрактальным* свойством самоподобия. Действительно, пусть Υ является решением в (9.12) при $B = 1$ и Υ_j – сдвиги Υ , определенные посредством (9.11). Тогда согласно следствию 4.3 решение X_B задачи (9.12) совпадает с нормированной функцией Υ :

$$X_B(t) = B^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \Upsilon(B^{-\frac{1}{2+\alpha}} t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В частности, для каждого $j \in \mathbb{N}$ функция X_{B_j} экстремальна в (9.12) при $B = B_j$ вместе с функцией $\Upsilon_j(t) := \Upsilon(t + \xi_j)$. Ввиду того, что множество экстремальных функций задачи (9.12) состоит лишь из функций Υ_j и $-\Upsilon_j$ и $\text{sign } \Upsilon_j(0) = (-1)^j \text{sign } \Upsilon(0)$, мы заключаем, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\Upsilon(t + \xi_j) =: \Upsilon_j(t) = (-1)^j X_{B_j}(t) := (-1)^j B_j^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \Upsilon(B_j^{-\frac{1}{2+\alpha}} t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (9.13)$$

Свойства (9.13) приводят нас к наблюдению, что узлы $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ образуют геометрическое разбиение (другими словами, длины отрезков $\{[\xi_{i-1}, \xi_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ убывают в геометрической прогрессии)

$$\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\xi_j - \xi_{j-1}} = a \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (9.14)$$

для некоторого $a = a(\alpha) \in (0, 1)$.

Суммируя наши результаты, мы получаем, что для всех $i \in \mathbb{N}$

$$X_B(t + \xi_i) = (-1)^i \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_1} \right)^{1+\alpha} X_B\left(\frac{\xi_1}{\xi_{i+1} - \xi_i} t \right), \quad t \in [0, \xi_{i+1} - \xi_i].$$

Как уже было упомянуто в § 3, в случае $\omega(t) = t$ эта особенность экстремальных функций была открыта американским инженером А. Т. Фуллером [36] для $p = 2$, затем В. Н. Габушиным [37] и Г. Г. Магарил-Ильяевым [35] для всех значений $p \in [1, +\infty)$.

Свойство (9.14) означает, что носитель X_B – конечный отрезок. Далее, в п. 9.5, мы покажем, что решения задачи (9.1) имеют компактные носители для всех выпуклых модулей непрерывности ω и $B > 0$.

9.2. Максимизация нормы $\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$. В соответствии с результатами п. 8.4 в случае $r = m = 1$ существует такой квадратичный сплайн Z на $\mathbb{R}_+$, что:

- (i) $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i+1} (x - \theta_i)_+^2 + \beta$, $\beta > 0$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$;
- (ii) F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots$, F' имеет единственный нуль η_i на (ξ_i, ξ_{i+1}) для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

Согласно (i) имеем $F(0) = \beta$, $F'(0) = 0$, а из (ii) следует, что каждое из ограничений $F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]}$ является простым ядром для $i \in \mathbb{N}$. В соответствии с (5.10)

Рис. 7. Графики функций F' и X в случае $m = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

и (5.11) формула дифференцирования и точное неравенство для $\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}$ имеют вид

$$f'(0) = [F(0)]^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(t) F''(t) dt + \int_{\mathbb{R}_+} [f'(t) - f'(0)] F'(t) dt \right),$$

$$\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |F(0)|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \Re_\omega(F; t) dt \right).$$

Согласно (5.12)–(5.14) функции F и X обладают следующими свойствами (рис. 7):

$$F''(x) = \text{sign } X(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$\sup_{h \in H_0^\omega(\mathbb{R}_+)} \int_{\mathbb{R}_+} h(x) F'(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} [X'(x) - X'(0)] F'(x) dx.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Пусть ξ_1 – первый положительный нуль функции F , $\Upsilon(t) := X(t + \xi_1)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $\widehat{B} := \|X\|_{\mathbb{L}_\infty[\xi_1, +\infty)}$. Тогда

$$X'(t) - X'(0) = -\omega(t), \quad t \in [0, \xi_1], \quad (9.15)$$

и функция Υ экстремальна в задаче

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq \widehat{B}. \quad (9.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предложении 9.1, мы можем доказать, что длины отрезков $\{[\xi_i, \xi_{i+1}]\}_{i \in \mathbb{N}}$ убывают: $\xi_{i+1} - \xi_i > \xi_{i+2} - \xi_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда экстремальное разбиение $\text{supp } F$ состоит из атома $B_{11} = [0, \xi_1]$ (и X' задается формулой (9.15)) и атомов $B_{i,i+1} := [\xi_i, \eta_i]$, $B_{i+1,i} = [\eta_i, \xi_{i+1}]$, $i \in \mathbb{N}$, так что

$$\sup_{h \in H^\omega[\xi_1, +\infty)} \int_{\xi_1}^{\infty} h(x) F'(x) dx = \int_{\xi_1}^{\infty} X'(x) F'(x) dx.$$

Положим $\Upsilon(x) := X(\xi_1 + x)$, $\mathcal{F}(x) = F(x + \xi_1)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Сравнивая свойства Υ и $\mathcal{F}$ со свойствами (а)–(с) и (9.2) функций X и F из п. 9.1, мы замечаем, что Υ является решением задачи (9.16) при $B = \widehat{B} := \|\Upsilon\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)}$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ – нули F , $\xi_i < \xi_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, и $\xi_0 := 0$. Тогда

$$\xi_{i+1} - \xi_i > \xi_{i+2} - \xi_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Рис. 8. График производной X' экстремальной функции X в случае $m = 1, \mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду предложения 9.2 достаточно доказать, что $\xi_1 = \xi_1 - \xi_0 > \xi_2 - \xi_1$. Действительно, согласно предложению 2.3 функция X' достигает своей нормы в $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)$ в нуле: $X'(0) = \|X'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Более того, свойство единственности X гарантирует, что $X'(0) > X'(\tau)$ для любого $\tau > 0$. В соответствии с формулой Корнейчука (4.7) мы имеем

$$X'(0) - X'(\xi_1) = \omega(\xi_1), \quad X'(\xi_2) - X'(\xi_1) = \omega(\xi_2 - \xi_1). \quad (9.17)$$

Ввиду (9.17) получаем, что $|X'(0)| > |X'(\xi_2)|$ эквивалентно неравенству $\xi_1 > \xi_2 - \xi_1$. Следствие доказано.

Рис. 8 иллюстрирует график производной X' экстремальной функции X в случае $m = 1, \mathbb{I} = \mathbb{R}_+$.

Из следствия 9.1 вытекает, что перестановка $\mathfrak{R}_\omega(F; \cdot)$ равна нулю вне $[0, \xi_1]$ и допускает следующее представление:

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) = F(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(t), \quad t \in [0, \xi_1].$$

9.3. Максимизация нормы $\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})}$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R})} \leqslant B.$$

В данном случае мы воспользуемся результатами из п. 8.5. Пусть F — четная функция со следующими свойствами на $(0, +\infty)$:

- 1) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (x - \theta_i)_+^2 + \gamma x$, $\gamma < 0$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$;
- 2) F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots$, F' имеет один нуль η_i на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

Формула дифференцирования и точные неравенства для всех функций $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R})$ стандартны:

$$f(0) = \frac{1}{2} [F'(0+)]^{-1} \left(- \int_{\mathbb{R}} f(x) F''(x) dx - \int_{\mathbb{R}} f'(x) F'(x) dx \right),$$

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{2} |F'(0+)|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}_\omega(F; x) \omega'(x) dx \right),$$

где $F(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} F(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Пусть ξ_1 – первый положительный нуль функции F , $\Upsilon(t) := X(t + \xi_1)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $\widehat{B} := \|X\|_{L_1[\xi_1, +\infty)}$. Тогда

$$X'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2t), & t \in [0, \xi_1], \\ -\frac{1}{2}\omega(-2t), & t \in [-\xi_1, 0], \end{cases} \quad (9.18)$$

и функция Υ экстремальна в задаче

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \leq \widehat{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая часть утверждения предложения может быть установлена при помощи тех же аргументов, которые использовались при доказательстве предложения 9.2. Проверка равенств (9.18) основывается на экстремальности X' в задаче

$$\int_{-\xi_1}^{\xi_1} h(t)F'(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[-\xi_1, \xi_1],$$

и на том свойстве, что F' нечетна, а также применении леммы 4.1. Действительно, если порождающее ядро F' нечетно, то F четна и функция $\rho(t)$ (см. теорему 4.1) допускает представление

$$\rho(-t) = t, \quad \rho^{-1}(t) = -t, \quad t \in [0, \xi_1].$$

Таким образом, формула (9.18) немедленно следует из (4.6). Предложение доказано.

Рис. 9. График производной X' экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

Рис. 9 иллюстрирует график производной X' экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Перестановка $\mathfrak{R}_\omega(F; x)$ определяется следующей формулой:

$$\mathfrak{R}_\omega(F; x) = F\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(x), \quad 0 \leq x \leq 2\xi_1.$$

9.4. Максимизация нормы $\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$. В рассматриваемом случае функция F нечетна на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ с точкой разрыва в нуле, и ее ограничение на $(0, +\infty)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} (x - \theta_i)_+^2 + \sigma$, $\sigma < 0$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots$;

(ii) F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots$, F' имеет один нуль η_i на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$.

Первая производная любой функции $f \in W^r H^\omega(\mathbb{R})$, $\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R})} \leq B$, в начале координат может быть выражена формулой

$$f'(0) = \frac{1}{2} [F(0+)]^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} [f'(x) - f'(0)] F'(x) dx + \int_{\mathbb{R}} f'(x) F'(x) dx \right).$$

Следовательно, точное неравенство для $\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})}$ принимает вид

$$\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} |F(0+)|^{-1} \left(\|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}_+} \omega(t) \Re_\omega(F; t) dt \right).$$

Следующий результат устанавливается так же, как и предложение 9.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. Пусть ξ_1 – первый положительный нуль функции F , $\Upsilon(t) := X(t + \xi_1)$, $t \in \mathbb{R}_+$, и $\widehat{B} := \|X\|_{\mathbb{L}_\infty[\xi_1, +\infty)}$. Тогда

$$X'(t) - X'(0) = -\omega(|t|), \quad -\xi_1 \leq t \leq \xi_1,$$

и Υ экстремальна в задаче

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq \widehat{B}.$$

Нули $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ функции F подчиняются неравенствам

$$\xi_1 > \xi_2 - \xi_1 > \xi_3 - \xi_2 > \dots > \xi_{k+1} - \xi_k > \dots,$$

а перестановка $\Re_\omega(F; x)$ задается формулой

$$\Re_\omega(F; x) = 2F(x) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(x), \quad 0 \leq x \leq \xi_1.$$

Рис. 10 иллюстрирует график производной X' экстремальной функции X в случае $m = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Рис. 10. График производной X' экстремальной функции X в случае $m = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

9.5. Компактность носителей экстремальных функций. В этом пункте мы докажем свойство компактности носителей для всех экстремальных функций в задачах Колмогорова

$$|f^{(m)}(0)| \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{I})} \leq B, \quad (9.19)$$

при $m = 0, 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$, $B > 0$ и всех ω .

В пп. 9.1–9.4 мы описали строение функций $X = X_{B,m,\mathbb{I}}$ и $F = F_{B,m,\mathbb{I}}$. Пусть ξ_1 – первый положительный нуль F . Как было показано во всех четырех случаях, функция $\Upsilon = X(t + \xi_1)$, $t \in \mathbb{R}_+$, экстремальна в задаче (9.19) для $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ и $\widehat{B} = \|\Upsilon\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)}$. Кроме того, решения задачи (9.19) для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ либо четны, либо нечетны. Следовательно, для доказательства компактности носителей решений задачи (9.19) на $\mathbb{I}$ достаточно доказать это свойство лишь для экстремальных функций задачи (9.19) в случае $m = 0$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$.

Следующий результат является уточнением предложения 9.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. Пусть $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ – нули функции $F_{B,0,\mathbb{R}_+}$. Тогда

$$\xi_{i+1} - \xi_i < \frac{1}{2}(\xi_i - \xi_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (9.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty$ обозначим точки перемен знака F , F' и F'' соответственно. На каждом из интервалов $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ производная X' имеет нуль γ_i , $i \in \mathbb{N}$. Покажем, что имеет место более строгое включение.

ЛЕММА 9.1. Для $j \in \mathbb{N}$ пусть $\gamma_j \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$ будет нулем производной X' . Тогда

$$\gamma_j \in [\theta_j, \xi_{j+1}], \quad j \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы доказали в п. 9.1, что для всех $j \in \mathbb{N}$ функция $X_j(t) = X(t + \xi_j)$ экстремальна в задачах

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} \leq \widehat{B}_j,$$

где $\widehat{B}_j = \|X_j\|_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+)} = \|X\|_{\mathbb{L}_1[\xi_j, +\infty)}$. Следовательно,

$$|X(\xi_j)| = |X_j(0)| = \|X\|_{\mathbb{L}_\infty[\xi_j, +\infty)} > |X(t)| \quad \forall t > \xi_j. \quad (9.21)$$

Свойство (9.21) может иметь место только в том случае, когда

$$\text{sign } X'(t) = -\text{sign } X(\xi_j), \quad t \in [\xi_j, \gamma_j).$$

С другой стороны, $X(\theta_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, наше предположение, что X' не меняет знак на (θ_j, ξ_j) , приводит нас к равенству $\text{sign } X'(\xi_j) = \text{sign } X(\xi_j)$. Это противоречие доказывает утверждение леммы.

Продолжая доказательство предложения, отметим, что X' равно нулю в γ_i на отрезке $[\theta_i, \xi_i]$ и принадлежит $H^\omega(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$|X'(\xi_i)| \leq \omega(\xi_i - \theta_i), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (9.22)$$

Через $\sigma_i \in [\xi_i, \eta_i]$, $i \in \mathbb{N}$, обозначим точки, определяемые уравнениями $\eta_i - \sigma_i = \theta_{i+1} - \eta_i$, или, эквивалентно, из условия $F(\sigma_i) = F(\theta_{i+1})$. Тогда согласно (4.7) имеем

$$|X'(\theta_{i+1}) - X'(\sigma_i)| = \omega(\theta_{i+1} - \sigma_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

В соответствии с леммой 9.1 производная X' нигде не равна нулю на (ξ_i, θ_{i+1}) . Следовательно, функция X монотонна на интервале, и

$$|X'(\xi_i)| > |X'(\xi_i) - X'(\theta_{i+1})| > |X'(\theta_{i+1}) - X'(\sigma_i)| = \omega(\theta_{i+1} - \sigma_i). \quad (9.23)$$

Таким образом, из комбинации неравенств (9.23) и (9.22) следует, что (см. рис. 5)

$$\xi_i - \theta_i \geq \theta_{i+1} - \sigma_i > \theta_{i+1} - \eta_i. \quad (9.24)$$

Однако

$$|F'(\theta_{i+1})| = \theta_{i+1} - \eta_i, \quad (9.25)$$

и согласно (9.24) имеем

$$|F'(\theta_i)| = \eta_i - \theta_i > \eta_i - \sigma_i + \xi_i - \theta_i = (\theta_{i+1} - \eta_i) + (\xi_i - \theta_i) > 2(\theta_{i+1} - \eta_i). \quad (9.26)$$

Согласно свойству (9.8) самоподобия, соотношению (9.9) и неравенствам (9.25) и (9.26) мы имеем

$$\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_i - \xi_{i-1}} = \frac{|F'(\xi_i)|}{|F'(\xi_{i-1})|} = \frac{|F'(\theta_i)|}{|F'(\theta_{i-1})|} < \frac{1}{2}.$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Если ξ_1 – первый положительный нуль функции $F = F_{B,0,\mathbb{R}_+}$, то

$$\text{supp } X = \text{supp } F \subset [0, 2\xi_1].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Исследование свойств экстремальных функций и порождающих ядер в задаче Колмогорова–Ландау в $W^1 H^\omega(\mathbb{I})$ несколько проще при $p = 1$, поскольку порождающее ядро F' в (b), (c) пп. 9.1.1 является кусочно линейной функцией ввиду условий (5.12)–(5.14). Заметим, что неравенства (9.3) и (9.20) были получены путем рассмотрения свойств экстремальных функций X и F на отрезках $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ и $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ вне зависимости от индекса i . Используя этот факт, а также аргументацию из § 7 и § 8, ограниченность узлов ω -сплайнов и непрерывную зависимость решений задачи

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B,$$

от параметра p , получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую $\delta(\varepsilon) \in [0, \frac{1}{2}[$, что для всех $p \in [1, 1 + \delta]$ справедливы следующие неравенства между нулями $\{\xi_i(p)\}_{i=0}^\infty$ ядра F_p :

$$\xi_{i+1}(p) - \xi_i(p) < \left(\frac{1}{2} + \delta\right)(\xi_i - \xi_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

§ 10. Задача Колмогорова–Ландау в $W^1 H^\omega(\mathbb{I}) \cap \mathbb{L}_p(\mathbb{I})$

Настоящий параграф посвящен обсуждению структуры экстремальных функций задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B,$$

для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, $m = 0, 1$ и всех $p > 1$.

10.1. Структура экстремальных функций в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$. Как и в § 9, сначала проясним строение решений задачи

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B. \quad (10.1)$$

Теорема 5.2 и результаты из п. 8.4 гарантируют существование таких экстремальных функций $F = F_{\omega,p,B}$ и $X = X_{\omega,p,B}$ на $\mathbb{R}_+$, что

$$\begin{aligned} F''(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \int_{\mathbb{R}_+} X'(t) F'(t) dt &= \sup_{h \in H^\omega(\mathbb{R}_+)} \int_{\mathbb{R}_+} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} &= B. \end{aligned}$$

Точные аддитивные неравенства принимают форму

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |F'(0)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \Re_\omega(F; t) dt \right).$$

Функция F имеет счетное число нулей $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, перенумерованных в возрастающем порядке, и F' имеет единственный нуль η_i на $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, ограничения $\{F|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются простыми ядрами в смысле определения 4.1. Следующая ключевая лемма обобщает результаты предложения 9.1 на случай всех $p \in (1, +\infty)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Пусть $\{\xi_i = \xi_i(\omega, p, B)\}_{i=0}^\infty$ — нули функции $F = F_{\omega,p,B}$. Тогда

$$\xi_i - \xi_{i-1} > \xi_{i+1} - \xi_i \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем выпуклый модуль непрерывности ω и $B > 0$. Согласно предложениям 8.1, 8.3, простые нули $\{\xi_i(p) = \xi_i(\omega, p, B)\}_{i=0}^\infty$ функции $F_p = F_{\omega,p,B}$ непрерывно зависят от параметра p на $[1, +\infty)$. Как мы уже отмечали в замечании 9.1, из предложения 9.5 можно вывести неравенства

$$\xi_i(p) - \xi_{i-1}(p) > \xi_{i+1}(p) - \xi_i(p) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (10.3)$$

справедливые для всех $p \in [1, 1 + \varepsilon)$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Как и в § 9, из соотношения (10.3) следует, что каждое из ограничений $X_p'|_{[\xi_{i-1}(p), \xi_i(p)]}$ экстремально в задаче

$$\int_{\xi_{i-1}(p)}^{\xi_i(p)} h(t) F_p'(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[\xi_{i-1}(p), \xi_i(p)], \quad (10.4)$$

а из формулы Корнейчука (4.7) следует, что

$$X_p'(\xi_i(p)) - X_p'(\xi_{i-1}(p)) = (-1)^i \omega(\xi_i(p) - \xi_{i-1}(p)), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (10.5)$$

Учитывая наши рассуждения из п. 9.1, мы выводим из (10.3), что функция $X_p^j(t) := X_p(t + \xi_j)$ является решением задачи

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B_j, \quad (10.6)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, где $B_j := \|X_p^j\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} = X_p(\xi_j)$.

Через $p^* > 1$ обозначим минимум тех чисел в $(1, +\infty)$, при которых нарушаются неравенства (10.3), т. е. существует индекс $i \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\xi_i(p^*) - \xi_{i-1}(p^*) = \xi_{i+1}(p^*) - \xi_i(p^*). \quad (10.7)$$

Допустим, что $p^* < \infty$. Согласно предложению 8.3 функция X'_{p^*} также является решением задач (10.4) и (10.6). В частности, свойство экстремальности в (10.4) и результирующие отношения (10.5) приводят к заключению, что

$$X'_{p^*}(\xi_{i-1}(p^*)) = X'_p(\xi_i(p^*)) + (-1)^{i+1}\omega(\xi_i(p^*) - \xi_{i-1}(p^*)) = X'_{p^*}(\xi_{i+1}(p^*)). \quad (10.8)$$

Используя (10.8), мы построим экстремальную функцию $\hat{X}$ задачи

$$\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}_+)} \leq \hat{B}, \quad (10.9)$$

для некоторого такого значения $\hat{B}$, что $\|\hat{X}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}_+)} < \hat{B}$. Это противоречие с результатом следствия 8.1 о единственности приведет нас к выводу о невозможности выполнения равенства (10.7) для конечного p^* и, наоборот, справедливости свойства (10.3) для всех $p \in [1, +\infty)$.

Реализуя этот план, определим функции $X, \hat{X} \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+)$ и F формулами

$$\begin{aligned} X(t) &= X_{p^*}(t + \xi_{i-1}(p^*) - c), & F(t) &= F_{p^*}(t + \xi_{i-1}(p^*) - c), & t &\in [c, +\infty), \\ \hat{X}(t) &= X_{p^*}(t + \xi_{i+1}(p^*) - c), & & & t &\in [c, +\infty), \end{aligned} \quad (10.10)$$

и посредством условий непрерывности $X, X', \hat{X}, \hat{X}'$ и F, F' в точке $c > 0$ следующими формулами для вторых производных $X, \hat{X}$ и F :

$$X''(t) = \hat{X}''(t) = (-1)^{i+1}\omega(t), \quad F''(t) = |X(t)|^{p^*-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in [0, c], \quad (10.11)$$

где число $c > 0$ выбирается из условия $F'(0) = 0$. Тогда (см. рассуждения из п. 9.2) функции X и F удовлетворяют условиям экстремальности (5.12)–(5.14) в задаче (10.9) для $\hat{B} := \|X\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}_+)}$. В то же время тождество (10.8) в сочетании с определением (10.11) показывает, что $X_{[0,c]} \equiv \hat{X}_{[0,c]}$. Таким образом, $|\hat{X}'(0)| = X'(0) = \|X'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$, и $\hat{X}$ также является решением задачи (10.9) для этого значения $\hat{B}$. Однако согласно (10.10), (10.11) имеем

$$\begin{aligned} \hat{B} &:= \|X\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}_+)} = \|X\|_{L_{p^*}[0,c]} + \|X\|_{L_{p^*}[\xi_{i-1}(p^*), +\infty)} \\ &> \|X\|_{L_{p^*}[0,c]} + \|X\|_{L_{p^*}[\xi_{i+1}(p^*), +\infty)} = \|\hat{X}\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Свойство (10.2) полностью установлено ввиду упомянутого выше противоречия с единственностью решений в (10.9). Предложение доказано.

Как и в п. 9.1, из предложений 9.1, 4.2 вытекает, что атомы декомпозиции $B_{i,i+1} = [\xi_{i-1}, \eta_{i-1}]$, $B_{i+1,i} = [\eta_{i-1}, \xi_i]$, $i \in \mathbb{N}$, образуют тривиальное разбиение носителя F в терминах определения 4.6 и ограничение $X'|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]}$ является решением задачи

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} h(t)F'(t) dt \rightarrow \sup, \quad h \in H^\omega[\xi_{i-1}, \xi_i],$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Согласно формуле Корнейчука (4.6) имеем

$$X''(t) = \begin{cases} (-1)^{j+1}\omega'(\rho_j(t) - t), & \xi_j \leq t < \eta_j, \\ (-1)^{j+1}\omega'(t - \rho_j^{-1}(t)), & \eta_j < t \leq \xi_{j+1}, \end{cases}$$

где η_j – нуль F' на (ξ_i, ξ_{i+1}) и $\rho_j: [\xi_j, \eta_j] \rightarrow [\eta_j, \xi_{j+1}]$ определяется уравнением $F(t) = F(\rho_j(t))$, $t \in [\xi_j, \eta_j]$, $\rho_j(t) \in [\eta_j, \xi_{j+1}]$. Перестановка $\mathfrak{R}_\omega(F; \cdot)$ определяется формулой

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_{i-1}, \xi_i]})^*(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Более того, функция $X_j(\cdot) = X(\cdot + \xi_j)$ экстремальна в задаче

$$\|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B_j,$$

для всех $j \in \mathbb{N}$, где $B_j := \|X_j\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} = \|X\|_{\mathbb{L}_p[\xi_j, +\infty)}$. В случае гёльдеровских модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, функция X обладает следующим фрактальным свойством: графики каждой из функций $X_j(\cdot) := X(\cdot + \xi_j)$ подобны графику функции X . Более точно,

$$X(t + \xi_j) = (-1)^j \beta_j^{\frac{1+\alpha}{1+\alpha+p-1}} X(\beta_j^{-\frac{1}{1+\alpha+p-1}} t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для $\beta_j := B_j/B$, $j \in \mathbb{N}$, где $B := \|X\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)}$ и $B_j := \|X\|_{\mathbb{L}_p[\xi_j, +\infty)}$. В частности, узлы $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ образуют геометрическое разбиение:

$$\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\xi_j - \xi_{j-1}} = a \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (10.13)$$

для некоторого $a = a(\alpha, p) \in (0, 1)$. Свойство (10.13), в свою очередь, приводит к тождеству

$$X(t + \xi_j) = (-1)^j \left(\frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\xi_1} \right)^{1+\alpha} X\left(\frac{\xi_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} t \right), \quad t \in [0, \xi_{j+1} - \xi_j],$$

для всех $j \in \mathbb{N}$.

10.2. Экстремальные функции в оставшихся случаях. Сначала рассмотрим задачу

$$\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} \leq B.$$

В соответствии с теоремой 5.2 в этом случае экстремальные функции X и F обладают свойствами

$$\begin{aligned} F''(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \int_{\mathbb{R}_+} [X'(t) - X'(0)] F'(t) dt &= \sup_{h \in H_0^\omega(\mathbb{R}_+)} \int_{\mathbb{R}_+} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{R}_+)} &= B. \end{aligned}$$

Точное аддитивное неравенство принимает форму

$$\|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq |F(0)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \mathfrak{R}_\omega(F; t) dt \right).$$

Функция F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$. На отрезке $[0, \xi_1]$ экстремальная функция X определяется формулой

$$X'(t) - X'(0) = -\omega(t), \quad t \in [0, \xi_1],$$

а функция $\tilde{X}(\cdot) := X(\cdot + \xi_1)$ – решение задачи (10.1) для $B := \|X\|_{L_p[\xi_1, +\infty)}$. Перестановка функции F имеет вид

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := F|_{[0, \xi_1]}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(t), \quad t \in [0, \xi_1],$$

и равна нулю на $[\xi_1, +\infty)$.

Далее, рассмотрим задачу

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq B.$$

В этом случае четная функция X и нечетная функция F удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} F''(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} X'(t) F'(t) dt &= \sup_{h \in H^\omega(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{L_p(\mathbb{R})} &= B. \end{aligned}$$

Приведем также экстремальное аддитивное неравенство

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} |F'(0+)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \mathfrak{R}_\omega(F; t) dt \right).$$

Функция F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$. На отрезке $[-\xi_1, \xi_1]$ производная экстремальной функции X имеет вид

$$X'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega(2t), & x \in [0, \xi_1], \\ -\frac{1}{2} \omega(-2t), & x \in [-\xi_1, 0], \end{cases}$$

а функция $\tilde{X}(\cdot) := X(\cdot + \xi_1)$ экстремальна в задаче (10.1) для $B := \|X\|_{L_p[\xi_1, +\infty)}$. Перестановка F определяется формулой

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := F|_{[0, \xi_1]} \left(\frac{t}{2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а ее носитель совпадает с отрезком $[0, 2\xi_1]$.

Наконец, проанализируем структуру решений задачи

$$\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \sup, \quad f \in W^1 H^\omega(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq B.$$

В этом случае нечетная функция X и нечетная (на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) функция F удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} F''(t) &= |X(t)|^{p-1} \operatorname{sign} X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \int_{\mathbb{R}} X'(t) F'(t) dt &= \sup_{h \in H_0^\omega(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} h(t) F'(t) dt, \\ \|X\|_{L_p(\mathbb{R})} &= B. \end{aligned}$$

Экстремальное аддитивное неравенство принимает вид

$$\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} |F'(0+)|^{-1} \left(B^p + \int_{\mathbb{R}_+} \omega'(t) \mathfrak{R}_\omega(F; t) dt \right).$$

Функция F имеет счетное множество нулей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$ на положительной полупрямой. Функция X на отрезке $[-\xi_1, \xi_1]$ задается формулой

$$X'(t) - X'(0) = -\omega(|t|), \quad t \in [-\xi_1, \xi_1].$$

При этом функция $\tilde{X}(\cdot) := X(\cdot + \xi_1)$ экстремальна в задаче (10.1) для $B := \|X\|_{L_p[\xi_1, +\infty)}$. Перестановка функции F с носителем $[0, 2\xi_1]$ задается формулой

$$\mathfrak{R}_\omega(F; t) := 2F|_{[0, \xi_1]}(t) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (F|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]})^*(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Полное описание экстремальных функций в задаче Колмогорова–Ландау в $W^1 H^\omega(\mathbb{I}) \cap L_p(\mathbb{I})$ завершено.

Список литературы

1. А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале”, *Ученые записки МГУ*, **30** (1939), 3–16.
2. А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, *Selected works of A. N. Kolmogorov. Vol. I. Mathematics and mechanics*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **25**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
3. A. S. Cavaretta, jr., “An elementary proof of Kolmogorov’s theorem”, *Amer. Math. Monthly*, **81**:5 (1974), 480–486.
4. I. J. Schoenberg, A. Cavaretta, “Solution of Landau’s problem concerning higher derivatives on the halfline”, *Constructive theory of functions*, Proc. of the Intern. Conf. (Varna, 1970), **1**, Izdat. Bolgar. Akad. Nauk, Sofia, 1972, 297–308.
5. S. Karlin, “Some one-sided numerical differentiation formulae and applications”, *Studies in spline functions and approximation theory*, Academic Press, New York, 1976, 485–500.
6. В. М. Тихомиров, “Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C_{[-1,1]}$ ”, *Матем. сб.*, **80(122)**:2(10) (1969), 290–304; англ. пер.: V. M. Tihomirov, “Best methods of approximation and interpolation of differentiable functions in the space $C_{[-1,1]}$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **9**:2 (1969), 275–289.
7. В. М. Тихомиров, *Некоторые проблемы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.
8. В. Н. Малозёмов, А. Б. Певный, *Полиномиальные сплайны*, Изд-во ЛГУ, Л., 1986.
9. Г. Г. Магарил-Ильяев, “Неравенства для производных и двойственность”, Тр. МИАН, **161**, Наука, М., 1983, 183–194; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, “Inequalities for derivatives and duality”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **161** (1984), 199–212.
10. M. K. Kwong, A. Zettl, *Norm inequalities for derivatives and differences*, Lecture Notes in Math., **1536**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
11. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*, Math. Appl. (East European Ser.), **53**, Kluwer, Dordrecht, 1991.
12. В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
13. В. В. Арестов, В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 11, 42–68; англ. пер.: V. V. Arestov, V. N. Gabushin, “Best approximation of unbounded operators by bounded ones”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **39**:11 (1996), 38–63.

14. В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51:6** (1996), 89–124; англ. пер.: V. V. Arestov, “Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **51:6** (1996), 1093–1126.
15. D. Jackson, *Über die Genauigkeit des Annäherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung*, Diss., Göttingen, 1911.
16. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближений*, Наука, М., 1976.
17. Н. П. Корнейчук, “С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР”, *УМН*, **40:5** (1985), 71–131; англ. пер.: N. P. Korneichuk, “S. M. Nikol’skii and the development of research on approximation theory in the USSR”, *Russian Math. Surveys*, **40:5** (1985), 83–156.
18. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: N. Korneichuk, *Exact constants in approximation theory*, Encyclopedia Math. Appl., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
19. С. М. Никольский, “Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности”, *Докл. АН СССР*, **52:3** (1946), 191–194.
20. S. K. Bagdasarov, “Zolotarev ω -polynomials in $W^r H^\omega[0, 1]$ ”, *J. Approx. Theory*, **90:3** (1997), 340–378.
21. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
22. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1976; англ. пер.: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Selected works. Vol. 4. The mathematical theory of optimal processes*, Classics Soviet Math., Gordon & Breach, New York, 1986.
23. S. Karlin, “Oscillatory perfect splines and related extremal problems”, *Studies in spline functions and approximation theory*, Academic Press, New York, 1976, 371–460.
24. S. Karlin, *Total positivity*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1968.
25. С. К. Багдасаров, “Максимизация функционалов в $H^\omega[a, b]$ ”, *Матем. сб.*, **189:2** (1998), 3–72; англ. пер.: S. K. Bagdasarov, “Maximization of functionals in $H^\omega[a, b]$ ”, *Sb. Math.*, **189:2** (1998), 159–226.
26. С. К. Багдасаров, “Экстремальные функции интегральных функционалов в $H^\omega[a, b]$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63:3** (1999), 3–62; англ. пер.: S. K. Bagdasarov, “Extremal functions of integral functionals in $H^\omega[a, b]$ ”, *Izv. Math.*, **63:3** (1999), 425–480.
27. S. K. Bagdasarov, “Generalizations of the time optimal problem and Lyapunov theorem on the range of vector measures”, *J. Approx. Theory*, **147:1** (2007), 81–111.
28. S. K. Bagdasarov, *Chebyshev splines and Kolmogorov inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl., **105**, Birkhäuser, Basel, 1998.
29. С. К. Багдасаров, “Общая конструкция чебышевских ω -сплайнов данной нормы”, *Алгебра и анализ*, **10:6** (1998), 93–134; англ. пер.: S. K. Bagdasarov, “General construction of Chebyshev ω -splines with given norm”, *St. Petersburg Math. J.*, **10:6** (1999), 965–996.
30. S. K. Bagdasarov, “Kolmogorov problem in $W^r H^\omega[0, 1]$ and extremal Zolotarev ω -splines”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **379** (1998), 1–81.
31. Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, Wiley, New York, 1983.
32. K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.

33. R. A. DeVore, H. Kierstead, G. G. Lorentz, "A proof of Borsuk's theorem", *Functional analysis* (Austin, TX, 1986–87), Lecture Notes in Math., **1332**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 195–202.
34. S. B. Stechkin, "Ungleichungen zwischen den Normen der Ableitungen einer beliebigen Funktion", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **26** (1965), 225–230.
35. Г. Г. Магарил-Ильяев, "О неравенствах Колмогорова на полупрямой", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **31** (1976), 33–41 №5; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, "On Kolmogorov inequalities on a half-line", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **31**:5–6 (1976), 25–32.
36. A. T. Fuller, "Optimization of non-linear control systems with transient inputs", *J. Electronics Control* (1), **8**:6 (1960), 465–479.
37. В. Н. Габушин, "Неравенства для норм функций и их производных в L_p ", *Матем. заметки*, **1**:3 (1967), 291–298; англ. пер.: V. N. Gabushin, "Inequalities for the norms of a function and its derivatives in metric L_p ", *Math. Notes*, **1**:3 (1967), 194–198.
38. Г. А. Калябин, "Эффективные формулы для констант в задаче Стечкина–Габушина", *Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям*, Тр. МИАН, **248**, Наука, М., 2005, 124–129; англ. пер.: G. A. Kalyabin, "Effective formulas for constants in the Stechkin–Gabushin problem", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **248**:1 (2005), 118–124.
39. Н. П. Корнейчук, "Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:1 (1971), 93–124; англ. пер.: N. P. Korneĭčuk, "Extreme values of functionals and best approximation on classes of periodic functions", *Math. USSR-Izv.*, **5**:1 (1971), 97–129.
40. С. К. Багдасаров, "Свойства ω -перестановок", *Функц. анализ и его прил.*, **33**:3 (1999), 1–20; англ. пер.: S. K. Bagdasarov, "Properties of ω -rearrangements", *Funct. Anal. Appl.*, **33**:3 (1999), 161–177.
41. R. J. McCann, "Exact solutions to the transportation problem on the line", *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **455**:1984 (1999), 1341–1380.
42. C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Grad. Stud. Math., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
43. V. L. Levin, "General Monge–Kantorovich problem and its applications in measure theory and mathematical economics", *Functional analysis, optimization, and mathematical economics*, Oxford Univ. Press, New York, 1990, 141–176.

С. К. БАГДАСАРОВ (S. K. BAGDASAROV)
 Parametric Technology Corporation, Needham, MA, USA
 E-mail: skbgdsrv@gmail.com

Поступило в редакцию
 07.05.2007
 14.05.2008