Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, Х. М. Байод, С. Перес-Гарсиа, А. Ю. Хренников, Р. Чанчи,
Неархимедовы аналоги ортогональных и симметрических операторов, *Изв. РАН.
Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 6, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/im266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:18:44

УДК 519

С. Альбеверии, Х. М. Байод,
К. Перес-Гарсиа, Р. Чанчи, А. Ю. Хренников

Неархимедовы аналоги ортогональных и симметрических операторов

Изучаются ортогональные и симметрические операторы в неархимедовых гильбертовых пространствах в связи с p -адическим квантованием. Это квантование описывает измерения с конечной точностью. Симметрические (ограниченные) операторы в p -адическом гильбертовом пространстве представляют физические наблюдаемые. Мы изучаем спектральные свойства одного из самых важных квантовых операторов, а именно оператора координаты (представленного в p -адическом гильбертовом L_2 -пространстве относительно p -адической гауссовой меры). Ортогональные изометрические изоморфизмы p -адического гильбертового пространства сохраняют точность измерений. Мы изучаем свойства ортогональных операторов. Доказывается, что всякий ортогональный оператор в неархимедовом гильбертовом пространстве непрерывен. Однако существуют разрывные операторы с плотной областью определения, сохраняющие скалярное произведение. Существуют неизометрические ортогональные операторы. Мы описываем некоторые классы ортогональных изометрических операторов в конечномерных пространствах, а также изучаем некоторые общие вопросы теории неархимедовых гильбертовых пространств (в частности, общие соотношения между топологией, нормой и скалярным произведением).

Библиография: 34 наименования.

§ 1. Введение

Построение неархимедовой (особенно p -адической) математической физики [1]–[18] требует развития теории некоторых новых математических структур над неархимедовыми полями (в частности, теории вероятностей с p -адичнозначными вероятностями [2], [19] и неархимедова преобразования Лапласа [2], [20] с приложениями к уравнениям с частными производными [2], [16], [17]). В то же время физические приложения стимулируют исследования во многих традиционных областях неархимедова анализа. В частности, квантовая механика с p -адичнозначными волновыми функциями [2], [16], [17] породила большой интерес к теории гильбертовых пространств над неархимедовыми полями [21]–[25], [1], [2], [10]–[12], [16]–[18] (и к общему функциональному анализу над неархимедовыми банаховыми и локально выпуклыми пространствами [26]–[30]). Эта теория, однако, развита недостаточно для нужд предполагаемых приложений, несмотря на свою довольно долгую историю (первую модель неархимедова гильбертова пространства предложил Г. Калиш [21] в 1946 г., а следующий шаг в этом направлении был сделан Т. Спрингером [22] в 1955 г.). Одна из основных проблем – это существование неизоморфных моделей с весьма различными свойствами. В частности, недавно в [16]–[18] была предложена новая модель p -адического гильбертова пространства, связанная с квантовой физикой.

В настоящей статье мы развиваем общую теорию неархимедовых гильбертовых пространств, а также изучаем конкретные модели, связанные с квантовой физикой. Затем изучаются свойства аналогов ортогональных и симметрических операторов в неархимедовых гильбертовых пространствах. Мы начинаем с некоторых основных вопросов о таких операторах, в частности, даем ответ на следующие фундаментальные вопросы:

- 1) будет ли всякий оператор в неархимедовом гильбертовом пространстве, сохраняющий скалярное произведение, непрерывным?
- 2) будет ли он изометричен?

Ответ в обоих случаях отрицателен. С другой стороны, если, как обычно, определить ортогональный оператор как (алгебраический) изоморфизм гильбертовых пространств, сохраняющий скалярное произведение, то всякий такой оператор непрерывен (см. § 5). Затем мы изучаем спектральные свойства некоторых симметрических операторов в неархимедовых гильбертовых пространствах. Здесь рассматривается одна специальная модель неархимедова гильбертова пространства, введенная в [16]–[18] в связи с p -адической квантовой физикой. Мы используем конкретную реализацию этой модели как L_2 -пространства относительно p -адического гауссова распределения и исследуем спектральные свойства p -адического оператора координаты (см. § 6, 7).

§ 2. Скалярные произведения и мажорантные нормы

Обозначим через K полное неархимедово поле с нетривиальным нормированием $|\cdot|_K$ (т.е. выполняется сильное неравенство треугольника $|x + y|_K \leq \max(|x|_K, |y|_K)$). Положим $U_r(a) = \{x \in K : |x - a|_K \leq r\}$, $U_r^-(a) = \{x \in K : |x - a|_K < r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Это шары в K . Положим $S_r(a) = \{x \in K : |x - a|_K = r\}$. Это сферы в K .

Как обычно, поле p -адических чисел обозначается через $\mathbf{Q}_p$, а поле комплексных p -адических чисел (пополнение алгебраического замыкания $\mathbf{Q}_p^a$ поля $\mathbf{Q}_p$) – через C_p . Группа значений поля K определяется как $|K| = \{|x|_K : x \in K, x \neq 0\}$.

Пусть X – K -линейное пространство. Билинейная форма $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K$ называется *невырожденной*, если из того, что $(y, x) = (x, y) = 0$ для всех $y \in X$, вытекает $x = 0$ ($x \in X$). Симметрическая невырожденная билинейная форма $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow K$ называется [25] *скалярным произведением* на X . Для всякого множества $M \subset X$ обозначим через $M^\perp$ множество $\{x \in X : (x, m) = 0 \ \forall m \in M\}$.

Норма $\|\cdot\|$ на X называется *неархимедовой*, если она удовлетворяет сильному неравенству треугольника: $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ для всех $x, y \in X$. В настоящей статье рассматриваются только неархимедовы нормы. Положим $\|X\| = \{\|x\| : x \in X, x \neq 0\}$. В этом параграфе $(\cdot, \cdot)$ будет обозначать скалярное произведение на X , а τ – топологию на X , определенную неархимедовой нормой. Топология τ на X называется *частично мажорантной* для скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$, если форма $(\cdot, \cdot)$ непрерывна по каждой переменной; τ называется *мажорантной*, если $(\cdot, \cdot)$ непрерывна.

Обозначим пространство линейных функционалов на X через X^* (алгебраический двойственный пространство), а пространство непрерывных линейных функционалов – через X' (топологически двойственное). На X' рассмотрим норму

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|_K}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0 \right\}.$$

Всякое скалярное произведение порождает канонический линейный оператор $h: X \rightarrow X^*$, $h(y)(x) = (y, x)$. Очевидно, топология τ на X частично мажорантна тогда и только тогда, когда $h(X) \subset X'$. Топология τ называется *допустимой*, если $h(X) = X'$, т.е. если всякий непрерывный линейный функционал реализуется с помощью скалярного произведения. В этом случае пространство X называется *автодуальным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Топология τ , заданная нормой $\|\cdot\|$, является мажорантной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

- i) $h(X) \subset X'$ и оператор h непрерывен;
- ii) выполняется α -неравенство Коши–Буняковского–Шварца, т.е. существует $\alpha > 0$ такое, что

$$|(x, y)|_K \leq \alpha \|x\| \|y\| \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (1)$$

Если характеристика поля K отлична от 2 и существует $\beta > 0$ такое, что $|(x, x)|_K \leq \beta \|x\|^2$, $x \in X$, то можно взять $\alpha = \beta/4|_K$ или $\alpha = \beta/4|_K$ в зависимости от того, нормирование K плотно или дискретно. В последнем случае $|\rho|_K > 1$ является образующей группы значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий i) и ii) очевидна. Очевидно также то, что ii) влечет непрерывность скалярного произведения. Покажем теперь, что непрерывность скалярного произведения влечет (1) для некоторого $\alpha > 0$. Если функция $(\cdot, \cdot)$ непрерывна, то существует шар радиуса $r > 0$ в $X \times X$, который отображается в $U_1(0)$. Остаток доказательства зависит от того, является ли нормирование $|\cdot|_K$ плотным или дискретным.

1) Допустим сначала, что $|\cdot|_K$ плотно. Пусть x, y – два ненулевых вектора в X . Тогда существуют $\lambda, \mu \in K$ такие, что $r/2 \leq \|x\|/|\lambda|_K \leq r$, $r/2 \leq \|y\|/|\mu|_K \leq r$. Тем самым, $\frac{|(x, y)|_K}{|\lambda|_K |\mu|_K} \leq 1$, т.е. $|(x, y)|_K \leq (4/r^2) \|x\| \|y\|$.

2) Допустим, что $|\cdot|_K$ дискретно, и пусть $|\rho|_K > 1$ есть образующая его группы значений. Пусть x, y – два ненулевых вектора из X . Найдутся целые числа n и m такие, что

$$|\rho|_K^n \leq \frac{\|x\|}{r} < |\rho|_K^{n+1}, \quad |\rho|_K^m \leq \frac{\|y\|}{r} < |\rho|_K^{m+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{|(x, y)|_K}{|\rho|_K^{n+m}} = \left| \left(\frac{x}{\rho^n}, \frac{y}{\rho^m} \right) \right|_K \leq |\rho|_K^2,$$

т.е. $|(x, y)|_K \leq (|\rho|_K^2 / r^2) \|x\| \|y\|$.

Последняя часть предложения доказывается с помощью той же техники.

Норма $\|\cdot\|$ называется *частично мажорантной* (*допустимой*), если соответствующая топология частично мажорантна (допустима). Норма $\|\cdot\|$ называется *мажорантной*, если *неравенство Коши–Буняковского–Шварца*

$$|(x, y)|_K \leq \|x\| \|y\| \quad (2)$$

справедливо для всех $x, y \in X$. Мажорантная норма называется *минимально мажорантной*, если она минимальна среди всех мажорантных норм, задающих топологию τ .

Пусть $\|\cdot\|$ – частично мажорантная норма. Тогда каноническое отображение $h: X \rightarrow X'$ переносит норму с X' на X :

$$\|x\|' = \|h(x)\| = \sup_{y \neq 0} \frac{|(x, y)|}{\|y\|}, \quad x \in X.$$

Она называется *полярной нормой* для $\|\cdot\|$. Для всякой частично мажорантной топологии τ на X полярная топология для τ определяется нормой $\|\cdot\|'$. Норма или топология называется *автополярной*, если она совпадает со своей полярной. Очевидно, всякая автополярная топология (норма) мажорантна. Мы будем использовать следующие свойства полярных норм и топологий. Пусть $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ – две частично мажорантные нормы, а τ , τ_1 – соответствующие топологии.

а) Если $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1$, то $\|\cdot\|' \geq \|\cdot\|'_1$. Если $\tau \leq \tau_1$, то $\tau' \geq \tau'_1$.

б) Полярная норма (топология) частично мажорантна. Следовательно, она тоже имеет полярную норму (топологию) (называемую *биполярной*). Имеем $\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|$ и $\|\cdot\|''' = \|\cdot\|'$. Далее, $\tau'' \leq \tau$ и $\tau''' = \tau'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Частично мажорантная топология (норма) мажорантна тогда и только тогда, когда она тоньше своей полярной топологии (нормы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.1 если τ частично мажорантна, то она является мажорантной в том и только том случае, когда h непрерывно, т.е. когда существует такое $M > 0$, что $\|x\|' = \|h(x)\| \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$. Это означает, что полярная топология τ' грубее, чем τ . Если норма $\|\cdot\|$ частично мажорантна, то она является мажорантной в том и только том случае, когда h – сжимающее отображение, т.е. $\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|$.

Следующая лемма – шаг на пути к характеристизации минимальных мажорант.

ЛЕММА 2.1. *Для всякой мажорантной топологии (нормы) существует более грубая автополярная топология (норма).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать этот результат для норм. Пусть норма $\|\cdot\|$ мажорантна, т.е. выполняется (2). Положим

$$\|y\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{[\|x\| \|x\|']^{1/2}}, \quad y \in X.$$

Это – неархимедова норма на X . Поскольку $|{(x, y)}|_K \leq \|y\|_1 [\|x\| \|x\|']^{1/2}$ для всех $x, y \in X$, то норма $\|\cdot\|_1$ частично мажорантна. Далее,

$$\|y\|'_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{\|x\|_1} \leq [\|y\| \|y\|']^{1/2} \quad \text{для всех } y \in X.$$

Так как $|{(x, y)}|_K \leq \|x\| \|y\|'$ и $|{(x, y)}|_K \leq \|y\| \|x\|'$, получаем

$$|{(x, y)}|_K \leq [\|x\| \|x\|' \|y\| \|y\|']^{1/2}, \quad x, y \in X,$$

т.е. по определению $\|\cdot\|_1$ имеем $\|y\|_1 \leq [\|y\| \|y\|']^{1/2}$ для всех $y \in X$. Следовательно,

$$\|y\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{[\|x\| \|x\|']^{1/2}} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{\|x\|_1} = \|y\|'_1 \quad \text{для всех } y \in X.$$

Определим по индукции последовательность неархимедовых норм

$$\|y\|_{n+1} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{[\|x\|_n \|x\|'_n]^{1/2}}, \quad y \in X.$$

Эти нормы обладают следующими свойствами:

$$|(x, y)|_K \leq \|y\|_{n+1} [\|x\|_n \|x\|'_n]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\|y\|'_{n+1} \leq [\|y\|_n \|y\|'_n]^{1/2}, \quad (4)$$

$$\|y\|_{n+1} \leq \|y\|'_{n+1}. \quad (5)$$

Докажем, что это – возрастающая последовательность норм. В силу (4) для всех $y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|y\|_{n+1} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{[\|x\|_n \|x\|'_n]^{1/2}} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{\|x\|'_{n+1}} = \|y\|''_{n+1}.$$

По свойству б) полярных норм

$$\|y\|_{n+1} = \|y\|''_{n+1}. \quad (6)$$

Из (5), (6) получаем

$$\|y\|_{n+1} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{[\|x\|_n \|x\|'_n]^{1/2}} \geq \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, y)|_K}{\|x\|'_n} = \|y\|''_n = \|y\|_n.$$

Таким образом, последовательность норм $\{\|\cdot\|_n\}$ возрастает. По свойству а) полярных норм последовательность норм $\{\|\cdot\|'_n\}$ убывает. Согласно (4) имеем $\lim \|\cdot\|'_n \leq [\lim \|\cdot\|_n \lim \|\cdot\|'_n]^{1/2}$. Следовательно, $\lim \|\cdot\|'_n \leq \lim \|\cdot\|_n$. Из (5) вытекает, что $\|\cdot\|_0 = \lim \|\cdot\|_n = \lim \|\cdot\|'_n$. Легко проверить, что $\|\cdot\|_0$ – неархимедова норма. Далее, из (3) следует, что $|(x, y)|_K \leq \|x\|_0 \|y\|_0$ для всех $x, y \in X$. Следовательно, $\|\cdot\|_0$ мажорантна; в частности, $\|\cdot\|'_0 \leq \|\cdot\|_0$. По определению $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|'_n$ для всех n . Пользуясь (6) и переходя к полярам, получаем

$$\|\cdot\|'_0 \geq \|\cdot\|''_n = \|\cdot\|_n$$

для всех n . Следовательно, $\|\cdot\|'_0 \geq \|\cdot\|_0$. Значит, норма $\|\cdot\|_0$ автополярна.

Наконец, применяя предложение 2.1, получаем

$$\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|'_1 \leq [\|\cdot\| \|\cdot\|']^{1/2} \leq \|\cdot\|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Следующие условия на норму $\|\cdot\|$ (топологию τ) эквивалентны:*

- i) *она минимальная мажорантная;*
- ii) *она частично мажорантна и автополярна;*
- iii) *$h(X) \subset X'$ и отображение h бинепрерывно (изометрично).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 имеем i) $\Rightarrow$ ii). По определению ii) $\Rightarrow$ iii) и iii) $\Rightarrow$ i).

Теперь мы изучим случай банаховых пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть X с топологией τ – банахово пространство.*

- a) *Если τ частично мажорантна, то она мажорантна.*
- b) *Если τ допустима, то она – минимальная мажорантная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По предложению 2.1 достаточно показать, что отображение $h: X \rightarrow X'$ непрерывно. Последнее вытекает из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Сначала рассмотрим случай плотного нормирования. Для каждого $x \neq 0$ существует $\lambda_x \in K$ такое, что $1 \leq \|x\|/|\lambda_x|_K \leq 2$. Следовательно, семейство функционалов $\{h(x)/\lambda_x: x \in X\}$ равномерно непрерывно, т.е. существует $M > 0$ такое, что $\sup_{x \in X} \|h(x)/\lambda_x\| \leq M$. Тем самым, $\|h(x)\| \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$.

Пусть теперь нормирование дискретно и $|\rho|_K > 1$ – образующая группы значений. Следовательно, для всякого $x \neq 0$ существует целое n такое, что $|\rho|_K^n \leq \|x\| \leq |\rho|_K^{n+1}$. Значит, семейство функционалов $\{h(x)/\rho^n: x \in X\}$ равномерно непрерывно, и доказательство продолжается, как выше.

Пункт б) вытекает из а), теоремы об открытом отображении и предложения 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Имеется не более одной банаховой частично мажорантной топологии, ассоциированной с данным скалярным произведением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ_1 и τ_2 – банаховы частично мажорантные топологии, определенные нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Введем норму

$$\|\cdot\| = \max\{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2\}.$$

Покажем, что соответствующая топология τ банахова. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность Коши относительно нормы $\|\cdot\|$. Тогда она является последовательностью Коши относительно $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$. Обозначим соответствующие пределы через y_i . Пусть $z \in X$. Тогда $(x_n, z) \rightarrow (y_i, z)$, $i = 1, 2$. Следовательно, $(y_1, z) = (y_2, z)$ для всех $z \in X$. Тем самым, $y = y_1 = y_2$ есть предел $\{x_n\}$ относительно $\|\cdot\|$. Наконец, применяя теорему об открытом отображении, мы доказываем, что $\tau \leq \tau_i$, $i = 1, 2$.

§ 3. Неархимедовы гильбертовы пространства

В свете предыдущих рассмотрений очень естественно дать следующее определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Неархимедово гильбертово пространство – это тройка $(E, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$, где E – неархимедово банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, а $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на E , причем норма и скалярное произведение связаны α -неравенством Коши–Буняковского–Шварца (1).

Таким образом, топология, определенная на E нормой $\|\cdot\|$, является мажорантной для скалярного произведения. По предложению 2.5 всякая мажорантная банахова топология на E совпадает с топологией, порожденной $\|\cdot\|$. Поэтому фактически мы определяем неархимедово гильбертово пространство, фиксируя одну из этих эквивалентных норм.

Положим $s_2(x) = (x, x)$. Следует отметить, что, вообще говоря, $\|x\| \neq \sqrt{|s_2(x)|_K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Слабая топология на неархимедовом гильбертовом пространстве $(E, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ – это локально выпуклая топология, заданная системой неархимедовых полунорм $\{p_y : y \in E\}$, где $p_y(x) = |(x, y)|_K$, $x, y \in E$.

Обозначим эту топологию через $\sigma_0(E)$. Если E – автодуальное пространство, то слабая топология $\sigma_0(E)$ совпадает с обычной слабой топологией $\sigma(E, E')$. Напомним, что слабая топология $\sigma(E, E')$ определяется системой полунорм $\{p_y : y \in E'\}$, где $p_y(x) = |y(x)|_K$. Однако в общем случае свойства этих топологий различны.

Рассмотрим пространство последовательностей, сходящихся к нулю:

$$c_0 \equiv c_0(K) = \left\{ x = (x_j) \in K^\infty : \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0 \right\},$$

с нормой $\|x\| = \max_j |x_j|$ и скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$. Тройка $(c_0(K), \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ является неархимедовым гильбертовым пространством. (Норма этого пространства автополярна.)

Это пространство называется *каноническим координатным гильбертовым пространством*.

Оно не автодуально, и $c'_0 = l_\infty$, где l_∞ – пространство ограниченных последовательностей в K . Хорошо известно (см. [28]), что всякая $\sigma(c_0, l_\infty)$ -сходящаяся последовательность сходится. Положим $e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^\infty$ (канонический базис пространства c_0). Эта последовательность $\sigma_0(c_0)$ -сходится к нулю, но не сходится. Таким образом, в этом случае $\sigma_0 < \sigma$.

Сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ изоморфно каноническому координатному гильбертову пространству

$$l_2(\mathbb{R}) = \left\{ f = (f_j) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ряд } \|f\|^2 = \sum_{j=1}^\infty f_j^2 \text{ сходится в } \mathbb{R} \right\}.$$

Очевидно, что каноническое координатное гильбертово пространство над K можно определить тем же способом:

$$\begin{aligned} c_0(K) \equiv l_2(K) &= \left\{ f = (f_j) \in K^\infty : \text{ряд } s_2(f) = \sum_{j=1}^\infty f_j^2 \text{ сходится в } K \right\} \\ &= \left\{ f = (f_j) \in K^\infty : \lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Как обычно, система векторов $\{v_i\}_{i \in I}$ называется *ортгогональной относительно данного скалярного произведения*, если $(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$. Если к тому же $s_2(v_i) = 1$ для всех i , то система называется *ортонормальной*. Соответственно

определяются ортогональные и ортонормальные базисы в неархимедовом гильбертовом пространстве.

Другое понятие ортогональности, а именно ортогональность относительно нормы [26]–[28], играет существенную роль в теории неархимедовых нормированных пространств. Пусть X – нормированное пространство. Система векторов $\{a_i\}_{i \in I}$ называется *ортогональной*, если

$$\left\| \sum_{i \in A} \lambda_i a_i \right\| = \max_{i \in A} |\lambda_i|_K \|a_i\|$$

для каждого конечного множества $A \subset I$ и каждого набора $\{\lambda_i\}_{i \in A} \in K$. Если к тому же $\|a_n\| = 1$ для всех n , то система называется *ортонормальной*.

Вообще говоря, эти понятия ортогональности (и ортонормальности) не совпадают. Но, например, стандартный ортогональный базис $e_n = (0 \dots 0 1 0 \dots 0 \dots)$ канонического координатного гильбертова пространства c_0 ортонормален относительно скалярного произведения и нормы.

Пусть $(E_j, \|\cdot\|_j, (\cdot, \cdot)_j)$, $j = 1, 2$, – два неархимедовых гильбертовых пространства, и пусть L – плотное подпространство в E_1 . Линейный оператор $V: L \rightarrow E_2$ называется *сохраняющим скалярное произведение* (или IP-оператором), если $(Vx, Vy) = (x, y)$ для всех $x, y \in L$. Как обычно, область определения L линейного оператора A обозначается через $\text{Dom } A$, а его образ – через $\text{Im } A$.

Следующий результат очевиден.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Всякий IP-оператор инъективен.*

Нас интересует следующая задача: является ли всякий IP-оператор V изометричным на $\text{Dom } V$, т.е. верно ли, что $\|Vx\| = \|x\|$ для всех $x \in \text{Dom } V$?

Мы покажем, что ответ отрицателен (см. § 4).

Следующий естественный вопрос: обязательно ли V – непрерывный оператор?

Ответ также отрицателен (см. § 5).

Пространство непрерывных линейных операторов $A: E_1 \rightarrow E_2$ обозначается через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Как и в обычной теории вещественных гильбертовых пространств, IP-оператор называется *ортогональным*, если $\text{Dom } V = E_1$ и $\text{Im } V = E_2$. Обозначим множество ортогональных операторов через $O(E_1, E_2)$, а множество изометрических операторов – через $I(E_1, E_2)$. Мы используем обозначения $\mathcal{L}(E)$, $O(E)$, $I(E)$ для соответствующих пространств операторов, действующих на гильбертовом пространстве E . Мы покажем, что $O(E_1, E_2) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ (см. § 5), но, вообще говоря, $O(E_1, E_2) \not\subset I(E_1, E_2)$ (см. § 4). Если гильбертово пространство E конечномерно, то, разумеется, всякий IP-оператор ортогонален.

Два гильбертовых пространства $(E_j, (\cdot, \cdot)_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$, называются *изоморфными*, если существует оператор $V \in O(E_1, E_2) \cap I(E_1, E_2)$.

В заключение параграфа дадим еще несколько примеров неархимедовых гильбертовых пространств.

1. *Пространства Калиша* [21]. Первый неархимедов аналог гильбертова пространства был рассмотрен Г.К. Калишем. Калиш ввел гильбертовы пространства над полным сепарабельным неархимедовым полем K , нормирование которого удовлетворяет следующим условиям:

(K1) $|2|_K = 1$;

(K2) всякий элемент $x \in K$ с $|x|_K = 1$ (единица поля K) имеет квадратный корень в K .

Последнее условие очень ограничительно. В частности, $\mathbf{Q}_p$ и его квадратичные расширения не удовлетворяют этому условию. Интересный пример неархимедова поля, удовлетворяющего этому условию, – это C_p . Неархимедово гильбертово пространство Калиша удовлетворяет некоторым специальным условиям:

(K3) E сепарабельно;

(K4) выполняется неравенство Коши–Буняковского–Шварца (2);

(K5) $\|E\| \subset |K|$;

(K6) для всякого $x \in E$ существует $x' \in E$, $x' \neq 0$, такой, что $|(x, x')|_K = \|x\| \|x'\|$.

Гильбертово пространство Калиша изометрично каноническому координатному гильбертову пространству.

2. *Пространства Спрингера* [22]. Т. Спрингер ввел класс гильбертовых пространств над полями K характеристики, отличной от 2, в которых скалярное произведение удовлетворяет условию

$$(\text{Sp})(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

В частности, это условие влечет, что неравенство Коши–Буняковского–Шварца выполняется с $\alpha = 1/|2|_K$. Норма на гильбертовом пространстве Спрингера определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Хорошо известно, что всякая знакоопределенная квадратичная форма от пяти (или более) переменных представляет 0 в $\mathbf{Q}_p$. Поэтому всякое гильбертово пространство Спрингера над $\mathbf{Q}_p$ имеет размерность ≤ 4 .

Чтобы ввести следующий класс неархимедовых гильбертовых пространств, определим каноническое отображение j из неархимедова банахова пространства E в его второе сопряженное пространство E'' : $j(x)(z) = z(x)$ для $x \in E$ и $z \in E'$.

3. *Пространства ван дер Пута* [23]. Пусть E – неархимедово банахово пространство, и пусть существует линейный гомеоморфизм $h: E \rightarrow E'$ такой, что $h' \circ j = h$. Здесь $h': E'' \rightarrow E'$ – оператор, сопряженный к h . Положим $(x, y) = h(x)(y)$ для $x, y \in E$. Это – билинейная форма, причем симметричная: $(x, y) = j(y)(h(x)) = h' \circ j(y)(x) = h(y)(x) = (y, x)$. Она невырождена и удовлетворяет неравенству Коши–Буняковского–Шварца с константой $\alpha = \|h\|$.

4. *Пространства Трайбера и Владимирова–Воловича* [24], [1]. Трайбер [24] предполагает, что должен существовать базис v_n , ортонормальный относительно нормы и скалярного произведения. Следовательно, его гильбертовы пространства изоморфны $l_2(K)$. Определение Трайбера – самое полезное для приложений к p -адической квантовой физике [1], [2]. На самом деле эта модель неархимедова гильбертова пространства была независимо предложена Владимиром и Воловичем как основа для p -адичнозначного квантования (см., например, [1]).

Однако эта модель не является достаточно общей для описания всех пространств, используемых в приложениях. Основная трудность в том, что в этой модели $\|E\| \subset |K|$.

5. *Пространства Хренникова* [16]–[18], [2]. Для последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in K^\infty$, $\lambda_n \neq 0$, положим

$$l_{2,\lambda}(K) = \left\{ f = (f_n) \in K^\infty : \text{ряд } \sum f_n^2 \lambda_n \text{ сходится в } K \right\}.$$

Имеем

$$l_{2,\lambda}(K) = \left\{ f = (f_n) \in K^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p} = 0 \right\}.$$

В пространстве $l_{2,\lambda}(K)$ введем норму $\|f\|_\lambda = \max_n |f_n|_p \sqrt{|\lambda_n|_p}$ и скалярное произведение $(f, g)_\lambda = \sum f_n g_n \lambda_n$. Имеет место неравенство Коши–Буняковского–Шварца (2). Тройка $(l_{2,\lambda}(K), \|\cdot\|_\lambda, (\cdot, \cdot)_\lambda)$ есть неархимедово гильбертово пространство (координатное гильбертово пространство). Тройка $(E, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ называется *КН-гильбертовым пространством*, если оно изоморфно координатному гильбертову пространству для некоторого λ . Отношение изоморфности разбивает семейство всех КН-гильбертовых пространств на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности описывается некоторым координатным представителем $l_{2,\lambda}$. Классификация всех КН-гильбертовых пространств – нерешенная математическая задача.

§ 4. Ортогональные операторы в конечномерных гильбертовых пространствах

Рассмотрим конечномерное гильбертово пространство $E_m = K^m$, где $(x, y) = \sum_{j=1}^m x_j y_j$ и $\|x\| = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|_K$. Положим $e_j = (0 \dots 1 0 \dots 0)$, где 1 стоит на j -м месте. Это канонический ортонормированный базис E_m . Обозначим через $L(E_m)$ пространство линейных операторов $A: E_m \rightarrow E_m$. Рассмотрим матрицу (a_{ij}) оператора $A \in L(E_m)$ в базисе (e_j) . Хорошо известно, что всякий оператор A непрерывен и $\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|_K$. Мы будем использовать следующий простой результат.

ЛЕММА 4.1. Пусть $A \in L(E_m)$ – биективный оператор с $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$. Тогда A изометричен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Очевидно, что всякий диагональный ортогональный оператор изометричен. Более того, если A – такой ортогональный оператор, что при каждом $k = 1, \dots, m$ имеем $a_{kj} \neq 0$ лишь для одного $j = j_k$, то A изометричен.

Пусть $A \in O(E_m)$. Тогда, в частности, $\sum_{j=1}^m a_{1j}^2 = 1$. Как следствие из сильного неравенства треугольника получаем $\|A\| \geq 1$.

Обозначим наибольший общий делитель натуральных чисел $a_1, \dots, a_n$ через $(a_1, \dots, a_n)$. В дальнейшем (до конца параграфа) мы будем изучать случай $K = \mathbb{Q}_p$.

ТЕОРЕМА 4.1. Если $p = 2$ или $p = 3 \pmod{4}$, то $O(E_2) \subset I(E_2)$. Если $p = 1 \pmod{4}$, то $O(E_2) \not\subset I(E_2)$ и кроме того существуют ортогональные операторы со сколь угодно большой нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in O(E_2)$ и $\|A\| = p^n$, $n = 1, 2, \dots$. По замечанию 4.1 можно считать, что $a_{11}, a_{12} \neq 0$. Допустим, что $|a_{11}|_p = \|A\|$, т.е. $a_{11} = p^{-n}a$, $a_{12} = p^{-n}b$, где $|a|_p = 1$, $|b|_p \leq 1$. Получаем

$$a^2 + b^2 = p^{2n}, \tag{7}$$

т.е. $b^2 = -a^2(1 - a^{-2}p^{2n})$. Сначала рассмотрим случай, когда $p \neq 2$ или $n > 1$. С помощью биномиального разложения можно показать, что существует $c = \sqrt{1 - a^{-2}p^{2n}} \in \mathbf{Q}_p$. Таким образом, $-1 = (b/ac)^2$. Хорошо известно, что $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{Q}_p$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$. Следовательно, если $p \not\equiv 1 \pmod{4}$, то всякий оператор $A \in O(E_2)$ имеет норму единица. По лемме 4.1 он изометричен. Наконец, если $p \equiv 1 \pmod{4}$, то при каждом $n = 1, 2, \dots$ можно взять $a_{11} = a_{22} = 1/p^n$ и $a_{12} = -a_{21} = i\sqrt{1 - p^{2n}}/p^n$. Этот оператор ортогонален и $\|A\| = p^n$.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$ и $n = 1$. Как и выше, имеем $b^2/a^2 = -1 + a^{-2}2^2$. Но можно записать $a^{-2} = 1 + 2\alpha$, $|\alpha|_2 \leq 1$. Следовательно, $b^2/a^2 = 3 + \alpha 2^3$, т.е. $b^2/a^2 \equiv 3 \pmod{8}$. Но это противоречит общей теореме о существовании квадратных корней в $\mathbf{Q}_2$ [28], [29], [2].

Линейные преобразования $A = (a_{ij})$ в p -адических пространствах с рациональными коэффициентами a_{ij} играют важную роль в приложениях к квантовой физике (см. работу [4] о роли рациональных чисел в теоретической физике). Обозначим множество ортогональных матриц с рациональными коэффициентами через $O_{\mathbf{Q}}(E_m)$. Это подгруппа в $O(E_m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если $p \equiv 1 \pmod{4}$, то существует $A \in O_{\mathbf{Q}}(E_2)$ со сколь угодно большой нормой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [31, с. 390] для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует решение (7) с взаимно простыми $a, b \in \mathbb{N}$. Значит, хотя бы одно из этих чисел (например, a) не делится на p . Таким образом, $|a|_p = 1$. Положим $a_{11} = a_{22} = a/p^n$, $a_{12} = -a_{21} = b/p^n$.

Изучим теперь 3-мерный случай. Если $p \equiv 1 \pmod{4}$, то с помощью 2-мерных и 1-мерных блоков мы можем построить ортогональные операторы со сколь угодно большой нормой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Если $p = 2$, то $O(E_3) \subset I(E_3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 4^n$, $n = 1, 2, \dots$, и $\max(|a|_2, |b|_2, |c|_2) = 1$. По замечанию 4.1 и теореме 4.1 можно ограничить наши рассмотрения случаем $a, b, c \neq 0$. Допустим, что значение нормирования на одном из этих чисел строго больше 1. Например, пусть $|b|_2 < 1$ и $|a|_2 = 1$. Имеем

$$\frac{c^2}{a^2} = 4^n a^{-2} - b^2 a^{-2} - 1.$$

Как и в доказательстве теоремы 4.1, мы можем записать $a^{-2} = 1 + 2\alpha$, $|\alpha|_2 \leq 1$, и тем самым получить

$$\frac{c^2}{a^2} = 4^n + 4^n 2\alpha - b^2 - b^2 2\alpha - 1.$$

Используя известный результат о квадратах в $\mathbf{Q}_2$ (см., например, [2, теорема 4.2]), получаем

$$4^n + 4^n 2\alpha - b^2 - b^2 2\alpha - 1 \equiv 1 \pmod{8},$$

откуда вытекает

$$4^n - b^2 - 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

(потому что $n \geq 1$ и $|b|_2 < 1$), и, следовательно,

$$|4^n - b^2 - 2|_2 \leq 2^{-3},$$

что невозможно ни при каком натуральном n .

Нам ничего не известно о случае $m = 3$ и $p = 3 \pmod{4}$.

Изучим 4-мерный случай. Для натурального числа N обозначим через $R(N)$ число целых решений (x_1, x_2, x_3, x_4) уравнения E_N , заданного так:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N. \quad (8)$$

Тогда имеем формулу Якоби: $R(N) = 8S(N)$ при нечетном N и $R(N) = 24S(N)$ при четном N , где $S(N)$ означает сумму всех нечетных делителей N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $p \neq 2$. Тогда существуют $A \in O_{\mathbf{Q}}(E_4)$ со сколь угодно большой нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – нечетное простое число, а N – натуральное число. Если все решения $(x_1, \dots, x_4)$ уравнения (8) удовлетворяют $\max |x_i|_p < 1$, то p^2 делит N и всякое решение уравнения E_N получается из одного решения уравнения E_{N/p^2} , а именно $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (py_1, py_2, py_3, py_4)$ для одного решения (y_1, y_2, y_3, y_4) уравнения E_{N/p^2} . Тогда $R(N) = R(N/p^2)$, что противоречит приведенной выше формуле Якоби. Следовательно, для каждого $N = p^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$, найдется решение уравнения (8) с $\max |x_i|_p = 1$. Матрица

$$A = \frac{1}{p^n} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \end{pmatrix}$$

принадлежит $O_{\mathbf{Q}}(E_4)$ и имеет норму p^n .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $p \neq 2$ и $m \geq 4$. Тогда существуют $A \in O_{\mathbf{Q}}(E_m)$ со сколь угодно большой нормой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $p = 2$ и $m \geq 4$. Тогда $O_{\mathbf{Q}}(E_m) \not\subset I(E_m)$. Если $m \geq 8$, то существуют $A \in O_{\mathbf{Q}}(E_m)$ со сколь угодно большой нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать первую часть утверждения, достаточно убедиться в том, что $x_1 = \dots = x_4 = 1$ есть решение (8) с $N = 4$. Далее мы используем хорошо известный факт из теории чисел: если $N = 4^k$, $k \geq 2$, то N всегда представимо как сумма квадратов восьми нечетных чисел (см. [31, с. 373]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $p = 2$. Тогда $\max_{A \in O(E_4)} \|A\| = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $x_1, \dots, x_4 \in \mathbf{Q}_2$, $\max_j |x_j|_2 = 1$, есть решение уравнения (8) для $N = 4^k$, $k \geq 2$. Разложим числа x_j в сумму $x_j = \alpha_j + \beta_j 2 + \theta_j 2^2$, где $\alpha_j, \beta_j = 0, 1$ и $|\theta_j|_2 \leq 1$. Тогда получаем

$$\Sigma = x_1^2 + \dots + x_4^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_4^2 + 4(\beta_1^2 + \dots + \beta_4^2) + 4(\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_4 \beta_4) + 8\xi,$$

где $|\xi|_2 \leq 1$. Рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть $\alpha_j = 1$, $j = 1, \dots, 4$. Тогда $\alpha_j \beta_j = \beta_j = \beta_j^2$ и $\Sigma = 4 + 8(\beta_1^2 + \dots + \beta_4^2) + 8\xi$. Тем самым, $0 = \Sigma = 4 \pmod{8}$.

б) Пусть только два числа α_j равны нулю. Тогда $0 = \Sigma = 2 \pmod{4}$.

в) Пусть только одно из чисел α_j равно единице. Тогда $0 = \Sigma = 1 \pmod{4}$.

г) Пусть только одно из чисел α_j равно нулю. Тогда $0 = \Sigma = 3 \pmod{4}$.

Во всех этих случаях мы приходим к противоречию.

В случаях $m = 5, 6, 7$ ситуация выглядит более сложной. Нам неизвестно значение $\max_{A \in O(E_m)} \|A\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Вопрос об изометричности ортогонального оператора очень важен в рамках p -адической квантовой теории с p -адичнозначными волновыми функциями [2]. Здесь изометрические ортогональные операторы сохраняют точность измерения, а неизометрические операторы меняют эту точность (см. [32]).

§ 5. Операторы, сохраняющие скалярное произведение, и ортогональные операторы

Теперь мы рассмотрим бесконечномерный случай.

ТЕОРЕМА 5.1. *В p -адическом гильбертовом пространстве $c_0(\mathbf{Q}_p)$ существуют разрывные IP-операторы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 4.1 и предложению 4.4 для каждого $n = 1, 2, \dots$ существует $A_n \in O_{\mathbf{Q}}(E_8)$ с $\|A_n\| = p^n$. Следовательно, мы можем построить разрывный IP-оператор A в $c_0(\mathbf{Q}_p)$, заданный матрицей с рациональными коэффициентами и такой, что $\text{Dom } A = \{x \in c_0(\mathbf{Q}_p) : x \text{ имеет конечное число ненулевых координат}\}$.

Однако ответ на следующий вопрос неизвестен.

ВОПРОС. Пусть E_1 и E_2 – неархимедовы гильбертовы пространства, и пусть $A: \text{Dom } A = E_1 \rightarrow E_2$ – линейный IP-оператор. Вытекает ли отсюда, что A непрерывен?

Ясно, что если топология E_1 мажорантна, а E_2 – пространство Спрингера (см. определение этих пространств в § 3), то ответ положителен. Но в общем случае задача не решена. Дальнейшие результаты этого параграфа дают частичное продвижение в этой области.

Будем считать, что E_1 , E_2 и A такие же, как в вопросе, сформулированном выше, и что топологии τ_1 и τ_2 , определенные нормами на E_1 и E_2 соответственно, частично мажорантны (следовательно, они мажорантны по предложению 2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если сужение скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_2$ на замыкание образа $\overline{\text{Im } A}$ невырождено (например, если $\text{Im } A$ замкнуто или $(\text{Im } A)^\perp = \{0\}$), то отображение A непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о замкнутом графике [28, п. 3.5] достаточно доказать, что A – замкнутое отображение.

Пусть (x_n) – такая последовательность в E_1 , что $x_n \rightarrow 0$ в (E_1, τ_1) и $Ax_n \rightarrow z$ в (E_2, τ_2) . Покажем, что $z = 0$. Поскольку A является IP-оператором, а τ_1 и τ_2 частично мажорантны, то для всякого $y \in E_1$ имеем

$$(z, Ay)_2 = \lim_n (x_n, y)_1 = 0,$$

т.е. $(z, u)_2 = 0$ для всех $u \in \text{Im } A$. Снова пользуясь тем, что τ_2 частично мажорантна, мы выводим, что $(z, v)_2 = 0$ для всех $v \in \overline{\text{Im } A}$. Это по условию означает, что $z = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Всякий ортогональный оператор непрерывен.*

В качестве приложения предложения 5.1 получаем описание тех линейных IP-операторов $A: E_1 \rightarrow E_2$, которые непрерывны.

ТЕОРЕМА 5.2. а) *Если топология τ_1 автополярна, то следующие свойства эквивалентны:*

- i) A непрерывен;
- ii) $A: E_1 \rightarrow \text{Im } A$ есть линейный гомеоморфизм;
- iii) $\text{Im } A$ является τ_2 -замкнутым в E_2 ;
- iv) сужение скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_2$ на замыкание образа $\overline{\text{Im } A}$ невырождено.

б) *Если кроме того топология τ_1 допустима, а τ_2 автополярна, то свойства i)–iv) эквивалентны свойству*

- v) $\tau_{\text{Im } A}$ допустима относительно $(\cdot, \cdot)_2 \mid \text{Im } A$ (где $\tau_{\text{Im } A}$ означает сужение топологии τ_2 на $\text{Im } A$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Ясно, что ii) $\Rightarrow$ iii) и iii) $\Rightarrow$ iv). Кроме того, из предложения 5.1 немедленно вытекает, что iv) $\Rightarrow$ i).

Чтобы доказать i) $\Rightarrow$ ii), заметим, что инъективность A следует из предложения 3.1.

С другой стороны, поскольку топология τ_2 мажорантна, то для $(\cdot, \cdot)_2$ имеет место α -неравенство Коши–Буняковского–Шварца (предложение 2.1). В силу автополярности τ_1 существует также $\beta > 0$ такое, что

$$\|x\|_1 \leq \beta \sup_{\|u\|_1 \leq 1} |(x, u)_1| \quad \text{для всех } x \in E_1.$$

Фиксируем $\lambda \in K$ с $\|A\| \leq |\lambda|$. Тогда для каждого $x \in E_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &\geq \frac{1}{\alpha} \sup \{ |(Ax, Ay)_2| : y \in E_1, \|Ay\|_2 \leq 1 \} \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \sup \left\{ |(Ax, Ay)_2| : y \in E_1, \|y\|_1 \leq \frac{1}{|\lambda|} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup \left\{ |(x, y)_1| : y \in E_1, \|y\|_1 \leq \frac{1}{|\lambda|} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha|\lambda|} \sup \{ |(x, u)_1| : u \in E_1, \|u\|_1 \leq 1 \} \geq \frac{1}{\alpha|\lambda|\beta} \|x\|_1, \end{aligned}$$

что влечет ii).

б) Прежде всего заметим, что, поскольку A есть IP-оператор, сужение $(\cdot, \cdot)_2$ на $\text{Im } A$ есть также некоторое скалярное произведение на $\text{Im } A$.

i) $\Rightarrow$ v). Поскольку τ_2 мажорантна, то $\tau_{\text{Im } A}$ также мажорантна относительно суженного скалярного произведения. Кроме того, непрерывность A и допустимость τ_1 влекут, что для всякого $f \in (\text{Im } A)'$ найдется $x \in E_1$ такой, что $(f \cdot A)(y) = (x, y)_1$ для всех $y \in E_1$. Следовательно, элемент $z = Ax \in \text{Im } A$ удовлетворяет

$$f(Ay) = (z, Ay)_2 \quad \text{для всех } y \in E_1,$$

откуда вытекает v).

$v) \Rightarrow i)$. Из того, что A сохраняет скалярное произведение, вытекает, что $A : (E_1, \sigma_0(E_1)) \rightarrow (\text{Im } A, \sigma_0(\text{Im } A))$ есть линейный гомеоморфизм, где $\sigma_0(E_1)$ и $\sigma_0(\text{Im } A)$ означают слабые топологии, ассоциированные с E_1 и $\text{Im } A$ соответственно, как определено в § 2. Из $v)$ следует также, что $\sigma_0(\text{Im } A)$ совпадает с обычной слабой топологией $\sigma(\text{Im } A, (\text{Im } A)')$ на $\text{Im } A$. В частности, отображение $A : (E_1, \tau_1) \rightarrow (\text{Im } A, \sigma(\text{Im } A, (\text{Im } A)'))$ непрерывно и, следовательно, множество $A(B_{E_1})$ является $\sigma(\text{Im } A, (\text{Im } A)')$ -ограниченным в $\text{Im } A$, где B_{E_1} – замкнутый единичный шар в E_1 .

С другой стороны, поскольку τ_2 мажорантна и автополярна, мы получаем, что (E_2, τ_2) есть полярное пространство в смысле определения 3.5 из [34] и, следовательно, $(\text{Im } A, \tau_{\text{Im } A})$ есть также полярное пространство [34, предложение 5.3]. Значит, множество $A(B_{E_1})$ ограничено в $(\text{Im } A, \tau_{\text{Im } A})$ [34, теорема 7.5], что влечет непрерывность A .

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть E_1 и E_2 такие же, как в теореме 5.2, а). Пусть M – собственное плотное подпространство в E_2 . Тогда не существует линейных $\mathbb{R}$ -операторов $A : E_1 \rightarrow E_2$ таких, что $\text{Im } A = M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если такое отображение существует, то мы выводим из предложения 5.1, что A непрерывно, и видим по теореме 5.2, а), что $\text{Im } A$ является τ_2 -замкнутым. Это означает, что $M = E_2$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. 1) Теорема 5.2, а) справедлива, если E_1 или E_2 есть любое из неархимедовых гильбертовых пространств, рассмотренных в § 3, а теорема 5.2, б) справедлива, если, кроме того, в качестве E_1 взято пространство ван дер Пута.

2) В условиях теоремы 5.2, а) свойства i)–iv) влекут то, что топология $\tau_{\text{Im } A}$ автополярна относительно $(\cdot, \cdot)_2 \mid \text{Im } A$.

Действительно, поскольку $(\cdot, \cdot)_2$ удовлетворяет α -неравенству Коши–Буняковского–Шварца, это справедливо и для $(\cdot, \cdot)_2 \mid \text{Im } A$. Кроме того, если β и λ такие же, как в доказательстве теоремы 5.2, а), то легко видеть, что для каждого $x \in E_1$ имеем

$$\|Ax\|_2 \leq \beta |\lambda|^2 \sup_{\|Ay\|_2 \leq 1} |(Ax, Ay)_2|,$$

так что $\tau_{\text{Im } A}$ автополярна относительно суженного скалярного произведения.

§ 6. p -адиочнозначное гауссово интегрирование и пространства функций, интегрируемых с квадратом

В этом параграфе K будет означать неархимедово поле с плотным нормированием такое, что $\mathbf{Q}_p \subset K$ и нормирование $|\cdot|_K$ поля K продолжает p -адическое нормирование. Шар $\{\lambda \in K : |\lambda|_K \leq r\}$, $r > 0$, будем в этом параграфе обозначать символом $\mathcal{U}_r$. Обозначим пространство аналитических функций $f : \mathcal{U}_r \rightarrow K$ символом $\mathcal{A}(\mathcal{U}_r)$. Оно является банаховым пространством относительно стандартной max -нормы $\|\cdot\|_r$, заданной формулой $\|f\|_r = \sup_n |a_n|_K r^n$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x|_K \leq r$.

Мы будем часто использовать следующий простой факт [29]: если натуральное число n записать по основанию p ,

$$n = a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m, \quad a_j = 0, 1, \dots, p-1, \quad (9)$$

и обозначить сумму цифр числа n через $S_n = \sum_{j=0}^m a_j$, то

$$|n!|_p = p^{(S_n - n)/(p-1)}. \quad (10)$$

Как обычно, определим биномиальные коэффициенты $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $k \leq n$. Мы будем также пользоваться следующим простым свойством чисел S_n .

ЛЕММА 6.1. *Для всех натуральных чисел j, k справедливо неравенство*

$$S_{j+k} \leq S_j + S_k. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью равенства (10) и очевидной оценки $|C_n^k|_p \leq 1$ для биномиальных коэффициентов мы получаем

$$1 \geq |C_{j+k}^k|_p = p^{\frac{-(j+k)+S_{j+k}}{p-1}} p^{\frac{j-S_j}{p-1}} p^{\frac{k-S_k}{p-1}}.$$

Следовательно, $p^{(S_{j+k}-S_j-S_k)/(p-1)} \leq 1$.

Мы будем также применять следующую оценку чисел S_n :

$$p^{\frac{S_n}{p-1}} \leq p^{\frac{1}{p-1}} n. \quad (12)$$

Чтобы доказать это неравенство, рассмотрим разложения (9) с $a_m \neq 0$. Максимальное значение S_n для натуральных чисел n такого вида равно $(p-1)(m+1)$. С другой стороны, наименьшее натуральное число такого вида равно p^m .

В [2] было предложено общее определение p -адичнозначного гауссова интеграла на основе теории распределений. (Гауссово распределение определялось как распределение, преобразование Лапласа которого имеет вид $\exp\{b(x, x)/2\}$, где $b(x, x)$ – квадратичная функция.) Для наших приложений можно использовать более простой подход, основанный на моментах гауссового распределения.

Пусть b – p -адическое число, $b \neq 0$. Тогда p -адическое гауссово распределение ν_b определяется своими моментами ($n = 0, 1, \dots$):

$$M_{2n} = \int x^{2n} \nu_b(dx) = \frac{(2n)! b^n}{n! 2^n}, \quad M_{2n+1} = \int x^{2n+1} \nu_b(dx) = 0.$$

(При $b = 1/2$ это распределение совпадает с гауссовым распределением, определенным в [2, с. 42].)

Мы определяем по линейности гауссов интеграл (функционал) для полиномиальных функций. Легко видеть, что этот функционал можно продолжить по непрерывности на пространство целых функций на K . Мы покажем, что этот функционал можно распространить даже на более широкие классы аналитических функций. Аналитическая функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n \in K,$$

называется *интегрируемой относительно гауссова распределения ν_b* , если ряд

$$\int f(x) \nu_b(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} M_{2n} \quad (13)$$

сходится. Фактически аналитичность на всем K не обязательна для того, чтобы можно было определить гауссов интеграл (см. рассуждения, приведенные ниже).

Следующая константа будет играть фундаментальную роль:

$$\theta_b \equiv p^{\frac{1}{2(1-p)}} \sqrt{\left| \frac{b}{2} \right|_p}.$$

Если $p \neq 2$, то $\theta_b = p^{(1)/(2(1-p))} \sqrt{|b|_p}$. Если $p = 2$, то $\theta_b = \sqrt{|b|_2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть f принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$. Если $\tau > \theta_b$, то интеграл (13) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in K$ и $\theta_b < |\mu|_K < \tau$. В силу (10) имеем

$$|c_{2n} M_{2n}|_K = |c_{2n}|_K \theta_b^{2n} p^{\frac{s_{2n}-s_n}{p-1}} = |c_{2n}|_p |\mu|_K^{2n} \left(\frac{\theta_b}{|\mu|_K} \right)^{2n} p^{\frac{s_{2n}-s_n}{p-1}}.$$

Согласно (12) ряд (13) сходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|_p |\mu|_K^n = 0$ и $|\mu|_K > \theta_b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Существуют функции, аналитические в шаре $\mathcal{U}_{\theta_b}$, но не интегрируемые. Пример будет приведен ниже (см. пример 6.2).

Можно показать, что гауссово распределение является непрерывным линейным функционалом на пространстве аналитических функций $\mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$ ($\tau > \theta_b$), т.е. аналитической обобщенной функцией (распределением). Мы будем использовать знак интеграла для обозначения формы двойственности между пространством пробных функций $\mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{A}'(\mathcal{U}_\tau)$: $(\mu, f) \equiv \int f(x) \mu(dx)$ для $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$ и $\mu \in \mathcal{A}'(\mathcal{U}_\tau)$. Как обычно, определим производную от обобщенной функции μ равенством

$$\int f(x) \mu'(dx) = - \int f'(x) \mu(dx).$$

Следует отметить, что распределение ν_b не является ограниченной мерой ни на каком шаре из $\mathbf{Q}_p$. (Это было доказано в [2] для случая $p \neq 2$. В случае $p = 2$ вопрос все еще открыт.) Таким образом, мы не можем интегрировать произвольные непрерывные функции относительно p -адического гауссова распределения.

Введем теперь аналог полиномов Эрмита на K :

$$H_{n,b} = \frac{n!}{b^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k x^{n-2k} b^k}{k! (n-2k)! 2^k}. \quad (14)$$

Из (14) можно получить стандартную рекуррентную формулу

$$H_{n+1,b}(x) = \frac{[x H_{n,b}(x) - n H_{n-1,b}(x)]}{b}. \quad (15)$$

Как следствие из (15) получаем следующее равенство (см. [16], [2]) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{A}'(\mathcal{U}_\tau)$, $\tau > \theta_b$:

$$H_{n,b}(x) \nu_b(dx) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \nu_b(dx). \quad (16)$$

Это показывает, что умножение гауссова распределения на полином Эрмита эквивалентно взятию соответствующей производной (в смысле теории распределений).

В пространстве $\mathcal{P}(K)$ полиномов на K введем скалярное произведение

$$(f, g) = \int f(x)g(x)\nu_b(dx). \quad (17)$$

Полиномы $H_{n,b}$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности относительно этого скалярного произведения:

$$\int H_{m,b}(x)H_{n,b}(x)\nu_b(dx) = \frac{\delta_{nm}n!}{b^n}.$$

Всякий полином $f \in \mathcal{P}(K)$ однозначно записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^N f_n H_{n,b}(x), \quad N = N(f), \quad f_n \in K.$$

Введем норму $\|f\|^2 = \max_n |f_n|_K^2 \frac{|n!|_p}{|b|^n}$ и определим $L_2(K, \nu_b)$ как пополнение $\mathcal{P}(K)$ относительно $\|\cdot\|$. Ясно, что пространство $L_2(K, \nu_b)$ изоморфно следующему пространству формальных рядов от полиномов Эрмита:

$$\left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x), f_n \in K: \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2 n!}{b^n} \text{ сходится} \right\}.$$

В дальнейшем мы отождествляем каждый элемент f пространства $L_2(K, \nu_b)$ с соответствующим формальным рядом.

Скалярное произведение на пространстве $L_2(K, \nu_b)$ определяется формулой

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n g_n n!}{b^n}. \quad (18)$$

Норма на $L_2(K, \nu_b)$ мажорантна для этого скалярного произведения. Скалярное произведение на $L_2(K, \nu_b)$ есть продолжение скалярного произведения (17), определенного на $\mathcal{P}(K)$ на основе гауссова интеграла. Поэтому естественно определить гауссов интеграл для функции $\phi(x) = f(x)g(x)$, где $f, g \in L_2(K, \nu_b)$, как скалярное произведение f и g , т.е. по формуле (17). Тем самым мы существенно расширяем класс функций, интегрируемых относительно гауссова распределения, потому что существуют $f \in L_2(K, \nu_b)$ такие, что $f \notin \mathcal{A}(\mathcal{U}_{\theta_b})$ (см. пример 6.1).

Для $f \in L_2(K, \nu_b)$ положим $\sigma_n^2(f) \equiv \sigma_{n,b}^2(f) = |f_n|_K^2 |n!|_p / |b|^n$, где f_n — коэффициенты Эрмита функции f , заданные выражением

$$f_n = \frac{b^n}{n!} \int f(x) H_{n,b}(x) \nu_b(dx). \quad (19)$$

Изучим теперь связь между $L_2(K, \nu_b)$ -функциями и аналитическими функциями.

ТЕОРЕМА 6.1. *Допустим, что $p \neq 2$. Пусть $f \in L_2(K, \nu_b)$ имеет коэффициенты Эрмита f_n . Тогда $i(f): \mathcal{U}_{\theta_b} \rightarrow K: x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x)$ есть корректно определенная функция, принадлежащая $\mathcal{A}(\mathcal{U}_{\theta_b})$. Кроме того, отображение $i: L_2(K, \nu_b) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{U}_{\theta_b}): f \rightarrow i(f)$ непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = (f_n) \in L_2(K, \nu_b)$. Для всех $j, k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим

$$a_{jk} = \frac{1}{b^j j!} \frac{(-1)^k f_{j+2k} (j+2k)!}{b^k 2^k k!}.$$

Мы хотим доказать, что:

i) для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ ряд

$$c_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} = \frac{1}{b^j j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f_{j+2k} (j+2k)!}{b^k 2^k k!} \quad (20)$$

сходится;

ii) для всех $x \in K$ с $|x|_K \leq \theta_b$ ряды $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ и $\sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x)$ сходятся к одной и той же сумме.

Для этого заметим, что при всех $j, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} |a_{jk}|_p &\leq \frac{1}{|b|_p^{j/2} |j!|_p} |f_{j+2k}|_K \sqrt{\frac{|(j+2k)!|_p}{|b|_p^{j+2k}}} \sqrt{|(j+2k)!|_p} \frac{1}{|k!|_p |2|_p^k} \\ &= |b|_p^{-\frac{j}{2}} p^{\frac{j-S_j}{p-1}} \sigma_{j+2k}(f) p^{\frac{-(j+2k)+S_{j+2k}}{2(p-1)}} p^{\frac{k-S_k}{p-1}}. \end{aligned}$$

Мы применяли представление (10) для p -адического нормирования $n!$.

Следовательно,

$$|a_{jk}|_K \leq \theta_b^{-j} \sigma_{j+2k}(f) p^{\frac{S_{j+2k}-2S_j-2S_k}{2(p-1)}},$$

и с помощью (11) получаем

$$|a_{jk}|_K \leq \theta_b^{-j} \sigma_{j+2k}(f) p^{\frac{-S_j}{2(p-1)}} \leq \theta_b^{-j} \sigma_{j+2k}(f), \quad (21)$$

что дает i). Далее, для всех $x \in K$ с $|x|_K \leq \theta_b$ имеем $|a_{jk}|_K |x|_K^j \leq \sigma_{j+2k}(f)$ и, применяя упражнения 23.А и 23.В из [29], получаем ii).

Из (21) следует также, что отображение i непрерывно.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$. В этом случае существуют L_2 -функции, для которых степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n H_{n,b}(x)$ расходится всюду. Более того, существуют функции, для которых тейлоровские коэффициенты (20) не определены. Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР 6.1. Рассмотрим функцию f , для которой $f_{4n} = b^{2n}/2^n \in \mathbf{Q}_2$, а остальные коэффициенты Эрмита равны нулю. Тогда $\sigma_{4n}(f) = 2^{-3n} 2^{S_{4n}/2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. f принадлежит $L_2(K, \nu_b)$. Однако ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_{4n} H_{4n,b}(0)$ (который определяет коэффициент c_0) расходится, поскольку $\lambda_{4n} = |f_{4n} H_{4n,b}(0)|_2 = 2^n 2^{S_{4n}-S_{2n}} = 2^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим $I_{k,n,b} = \int x^k H_{n,b} \nu_b(dx)$.

ЛЕММА 6.2. Если $k = n + 2l$, $l = 0, 1, \dots$, то

$$I_{k,n,b} = \frac{k! b^l}{l! 2^l}. \quad (22)$$

Все остальные интегралы $I_{k,n,b}$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (16) имеем, что $I_{k,n} = 0$ при $k < n$. Если $k \geq n$, то

$$I_{k,n,b} = (-1)^n \int x^k \frac{d^n}{dx^n} \nu_b(dx) = k(k-1) \dots (k-n+1) M_{k-n}.$$

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\tau > \theta_b$. Тогда включение $\mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau) \subset L_2(K, \nu_b)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим каноническое вложение $j: \mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau) \rightarrow L_2(K, \nu_b)$ следующим образом. По предложению 6.1 для каждой функции $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$ можно определить коэффициенты Эрмита формулой (19):

$$f_n = \frac{b^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k I_{k,n,b},$$

где c_k – тейлоровские коэффициенты f . Сопоставим функции $f(x)$ последовательность $f = (f_n)$. Надо лишь доказать, что последовательность $f = (f_n)$ определяет элемент $L_2(K, \nu_b)$.

Согласно (22) имеем

$$f_n = \frac{b^n}{n!} \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l} \frac{(n+2l)! b^l}{l! 2^l}. \quad (23)$$

Следовательно, из (10) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n(f) &\leq \frac{|b|^{\frac{n}{2}}}{|n!|^{\frac{1}{2}}} \max_{0 \leq m < \infty} |c_{n+2m}|_K \left| \frac{b}{2} \right|_p^m \frac{|(n+2m)!|_p}{|m!|_p} \\ &\leq |2|^{\frac{p}{2}} \max_{0 \leq m < \infty} |c_{n+2m}|_K \left| \frac{b}{2} \right|_p^{m+\frac{p}{2}} p^{\frac{-(n+2m)}{2(p-1)}} p^{\frac{2S_{n+2m}-2S_m-S_n}{2(p-1)}}. \end{aligned}$$

Пусть $\mu \in K$ таково, что $\theta_b < |\mu|_K < r$. Из (11) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n(f) &\leq |2|^{\frac{n}{2}} p^{\frac{S_n}{2(p-1)}} \left(\frac{\theta_b}{|\mu|_K} \right)^n \\ &\quad \times \max_{0 \leq m < \infty} |c_{n+2m}|_K |\mu|_K^{n+2m} \max_{0 \leq m < \infty} \left(\frac{\theta_b}{|\mu|_K} \right)^{2m} p^{\frac{S_m}{(p-1)}}. \end{aligned}$$

Пользуясь аналитичностью f в шаре $\mathcal{U}_\tau$ и оценкой (12), получаем, что $\sigma_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и что отображение j непрерывно.

Существуют функции $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_{\theta_b})$, для которых нельзя определить соответствующие L_2 -функции с помощью (23).

ПРИМЕР 6.2. Пусть $p \neq 2$. Рассмотрим функцию f , для которой

$$c_{2l_m} = \left(\frac{2}{b}\right)^{l_m} p^{m - \frac{l_m}{p-1}}$$

при $2l_m = p^{4m} - 1$, $m = 1, 2, \dots$, а остальные тейлоровские коэффициенты равны нулю. Эта функция аналитична в шаре $\mathcal{U}_{\theta_b}$, потому что $|c_{2l_m}|_p \theta_b^{2l_m} = p^{-m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отметим, что тейлоровские коэффициенты f принадлежат $\mathbf{Q}_p$.

Покажем, что коэффициент Эрмита f_0 не может быть определен для этой функции, поскольку ряд (23) расходится. Имеем

$$\delta_{2l_m} = \left| c_{2l_m} \frac{(2l_m)! b^{l_m}}{l_m! 2^{l_m}} \right|_p = p^{-m} p^{\frac{S_{2l_m} - S_{l_m}}{p-1}} \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

(Здесь мы пользовались тем, что $S_{2l_m} = 4m(p-1)$ и $S_{l_m} = 2m(p-1)$.)

Та же функция дает пример функции, аналитической в шаре $\mathcal{U}_{\theta_b}$, но не интегрируемой относительно гауссова распределения ν_b (см. замечание после предложения 6.1), поскольку ряд (13), определяющий гауссов интеграл, совпадает с рядом (23) для коэффициента Эрмита f_0 .

Пусть $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ есть $(\mathbf{Q}_p$ -векторное) пространство полиномов на K с p -адическими коэффициентами. Всякий полином $f \in \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ однозначно записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^N f_n H_{n,b}(x), \quad N = N(f), \quad f_n \in \mathbf{Q}_p.$$

Введем на $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ норму

$$\|f\|^2 = \max_n |f_n|_p^2 \frac{|n!|_p}{|b|_p}, \quad f \in \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p),$$

и определим $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ как пополнение $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ по норме $\|\cdot\|$. (На самом деле пространство $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ не зависит от выбора расширения K поля $\mathbf{Q}_p$.)

Обозначим через $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{U}_\tau)$ пространство аналитических функций $f: \mathcal{U}_\tau \rightarrow K$, тейлоровские коэффициенты которых принадлежат полю $\mathbf{Q}_p$. Положим $U_\tau = \{\lambda \in \mathbf{Q}_p: |\lambda|_p \leq \tau\}$, т.е. $U_\tau \equiv U_\tau(0)$. Для каждой функции $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{U}_\tau)$ имеем $f(U_\tau) \subset \mathbf{Q}_p$.

Прямая проверка показывает, что все результаты этого параграфа, связывающие $L_2(K, \nu_b)$ и $\mathcal{A}(\mathcal{U}_\tau)$, верны в случае, когда мы рассматриваем $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ и $\mathcal{A}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{U}_\tau)$.

Введем скалярное произведение по формуле (18) на пространстве $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$. Это – неархимедово гильбертово пространство над $\mathbf{Q}_p$. В следующем параграфе мы изучим спектральные свойства оператора координаты в этом гильбертовом пространстве.

§ 7. Спектр p -адического оператора координаты

Будем использовать такие обозначения: если $x, y \in \mathbf{Q}_p$ и $|x|_p = |y|_p$, то будем писать $x \sim y$ в $\mathbf{Q}_p$. Если x, y – натуральные числа, то $x \sim y$ означает, что x и y делятся в точности на одну и ту же степень p .

Подобно обычной шрёдингеровской квантовой механике определим оператор координаты в $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ как

$$\hat{\mathbf{Q}}f(x) = xf(x),$$

где $f \in \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$. Этот оператор ограничен [10, теорема 5.1] и его можно продолжить по непрерывности на все пространство $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$, причем

$$\alpha_b = \|\hat{\mathbf{Q}}\| = \sqrt{|b|_p}.$$

Оператор координаты симметричен.

Как обычно, определим резольвентное множество $\mathbf{Q}_p$ -линейного ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b))$:

$$\text{Res}(A) = \{\lambda \in \mathbf{Q}_p : \text{существует ограниченный оператор } (A - \lambda I)^{-1}\},$$

а также спектр A : $\text{Spec}(A) = \mathbf{Q}_p \setminus \text{Res}(A)$. Очевидно, $\mathbf{Q}_p \setminus U_{\alpha_b} \subset \text{Res}(\hat{\mathbf{Q}})$. Значит, $\text{Spec}(\hat{\mathbf{Q}}) \subset U_{\alpha_b}$. Совпадает ли спектр $\hat{\mathbf{Q}}$ с шаром U_{α_b} ? В данный момент мы не располагаем окончательным решением этой задачи. Мы только получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $p \neq 2$. Тогда $U_{\theta_b} \subset \text{Spec } \hat{\mathbf{Q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение $(\hat{\mathbf{Q}} - \lambda)f(x) = 1$ в пространстве $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$. По теореме 6.1 можно рассматривать это уравнение как уравнение на аналитическую функцию в шаре $\mathcal{U}_{\theta_b}$. Конечно, это уравнение не имеет решений в пространстве аналитических функций и, следовательно, не имеет решений в L_2 -пространстве.

Если $p \neq 2$, то $\theta_b < \alpha_b$ и множество $U_{\theta_b} \setminus U_{\alpha_b}$ непусто.

Для случая $p = 2$ у нас нет результатов о спектральном множестве оператора координаты.

Далее мы изучим точечный спектр оператора координаты.

В квантовой механике над полем вещественных чисел точечный спектр оператора координаты $\hat{\mathbf{Q}}$ пуст, т.е. $\hat{\mathbf{Q}}$ не имеет собственных значений $\lambda \in \mathbb{R}$. Это происходит потому, что если рассмотреть стандартное представление оператора $\hat{\mathbf{Q}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}, dx)$, то уравнение

$$\hat{\mathbf{Q}}f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \tag{24}$$

не имеет решений в $L_2(\mathbb{R}, dx)$ ни при каком $\lambda \in \mathbb{R}$.

Действительно, в смысле распределений $f_\lambda(x) = \delta(x - \lambda)$, а δ -функция не принадлежит $L_2(\mathbb{R}, dx)$. Даже если изменить представление и рассмотреть $\hat{\mathbf{Q}}$ как оператор умножения в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \nu_b)$, где ν_b есть гауссова мера на $\mathbb{R}$ с ковариацией b и средним значением нуль, то ситуация не изменится. Уравнение (24) не имеет решений $f_\lambda \in L_2(\mathbb{R}, \nu_b)$.

Покажем теперь, что p -адическая картина не отличается от вещественной, если $p \neq 2$.

ТЕОРЕМА 7.2. Если $p \neq 2$, то точечный спектр оператора координаты $\hat{\mathbf{Q}}$ в $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ пуст.

Доказательство этой теоремы довольно длинно. Мы разобьем его на несколько шагов. К сожалению, последний шаг нашего доказательства не проходит для случая $p = 2$. Однако все подготовительные результаты верны и для этого случая. Поэтому мы рассматриваем общий случай. Мы надеемся, что эти результаты могут быть полезны для того, чтобы найти доказательство и в случае $p = 2$.

ЛЕММА 7.1. Допустим, что уравнение (24) имеет ненулевое решение f_λ , принадлежащее $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$. Тогда имеем следующую формулу для коэффициентов Эрмита $f_{\lambda,n}$ функции f_λ :

$$f_{\lambda,n} = \frac{b^n}{n!} H_{n,b}(\lambda) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \lambda^{n-2k} b^k}{k! (n-2k)! 2^k}, \quad (25)$$

где выбрана нормировочная константа $c = \int f_\lambda(x) \nu_b(dx) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь уравнением (24) и симметрией $\hat{\mathbf{Q}}$, находим, что $\int x^k f_\lambda(x) \nu_b(dx) = \lambda^k$ для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$. Чтобы получить формулу (25), достаточно применить общую формулу (19) для коэффициентов Эрмита.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Точка $\lambda = 0$ не принадлежит точечному спектру оператора координаты $\hat{\mathbf{Q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь (25), видим, что коэффициенты $f_{0,2m+1} = 0$ и $f_{0,2m} = (-1)^m b^m / 2^m m!$, $m = 0, 1, \dots$. Получаем

$$\sigma_{2m}^2(f_0) = |2|_p^{-2m} \left| \frac{2m!}{m!^2} \right|_p = |2|_p^{-2m} p^{\frac{S_{2m}-2S_m}{p-1}}.$$

Покажем, что существует подпоследовательность $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ такая, что σ_{2m_k} не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Достаточно взять $m_k = p^k$. Здесь если $p \neq 2$, то $S_{2p^k} = 2$, т.е. $S_{2p^k} - 2S_{p^k} = 0$. Следовательно, $\sigma_{2p^k}^2(f_0) = 1$ для всех k . Если $p = 2$, то $S_{2^{k+1}} = S_{2^k}$, т.е. $S_{2^{k+1}} - 2S_{2^k} = -1$. Следовательно, $\sigma_{2^{k+1}}^2(f_0) = 2^{2^{k+1}-1}$.

Теперь мы покажем, что для достаточно малых $|\lambda_p|$ поведение коэффициентов Эрмита $f_{\lambda,2p^k}$ совпадает с поведением $f_{0,2p^k}$.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\lambda \in U_{\theta_b}^-$. Тогда

$$|f_{\lambda,2p^k}|_p = |f_{0,2p^k}|_p. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем выражение (25) для коэффициентов Эрмита в виде

$$f_{\lambda,2m} = (-1)^m \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j \lambda^{2j} b^{m-j}}{(m-j)! (2j)! 2^{m-j}} = \sum_{j=0}^m a_j. \quad (27)$$

Здесь $a_0 = f_{0,2m}$. Перепишем также a_j , $j = 1, \dots, m$, в виде

$$a_j = a_0 (-1)^j \left(\frac{2\lambda^2}{b} \right)^j \frac{m!}{(m-j)! (2j)!}.$$

Далее имеем

$$\left| \frac{m!}{(m-j)!(2j)!} \right|_p = p^{\frac{j}{p-1}} p^{\frac{S(m,j)}{p-1}}$$

где $S(m, j) = S_m - S_{m-j} - S_{2j}$. Наконец,

$$|a_j|_p = |a_0|_p \left(\frac{|\lambda|_p}{\theta_b} \right)^{2j} p^{\frac{S(m,j)}{p-1}}.$$

Всегда имеем $S_{m-j} + S_{2j} \geq 1$ для $j = 1, \dots, m$. Если $m = p^k$, то $S_m = 1$. Значит, в этом случае $S(m, j) \leq 0$. Таким образом, $|a_j|_p < |a_0|_p$ для всех $j = 1, \dots, p^k$. Теперь (26) вытекает из сильного неравенства треугольника для $|\cdot|_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если $p \neq 2$, то сфера $S_{\theta_b}(0) = \emptyset$. Таким образом, в этом случае не надо проверять равенство (26) на этой сфере. Однако если $p = 2$, то (26), вообще говоря, неверно при $|\lambda|_2 = \theta_b = \sqrt{|b|_2}$ (например, возьмем $k = 1$, $b = 4$, $\lambda = 2$).

Эвристически очевидно, что член из (25) с максимальной степенью λ ,

$$a_m = \frac{\lambda^{2m}}{2m!}, \quad (28)$$

должен доминировать для достаточно больших $|\lambda|_p$. Мы сначала изучим L_2 -поведение этих коэффициентов.

ЛЕММА 7.3. *Функция $g_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m H_{2m,b}(x)$ не принадлежит пространству $L_2(\mathbf{Q}_p, \nu_b)$ для всех λ , удовлетворяющих неравенству $|\lambda|_p \geq \theta_b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sigma_{2m}^2(g_\lambda) = \frac{|\lambda|_p^{4m}}{|b|_p^{2m} |2m!|_p} = \left(\frac{|\lambda|_p}{\theta_b} \right)^{4m} |2|_p^{-2m} p^{-\frac{S_{2m}}{p-1}}.$$

Положим $m = p^k$. Тогда $S_{2p^k} = 2$ для $p \neq 2$ и $S_{2p^k} = 1$ для $p = 2$. В любом случае $\sigma_{2p^k}^2(g_\lambda) \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, если $|\lambda|_p \geq \theta_b$.

ЛЕММА 7.4. *Если $|\lambda|_p > \theta_b$, то $|f_{\lambda, 2p^l}|_p = |a_{p^l}|_p$ для достаточно больших l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно переписать коэффициенты Эрмита в виде

$$f_{\lambda, 2m} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \lambda^{2m-2k} b^k}{k! (2m-2k)! 2^k} = \sum_{k=0}^m a_{m-k}.$$

Покажем, что член a_m строго доминирует в этой сумме. Пусть $k = 1, \dots, m$. Имеем

$$|a_{m-k}|_p = \left| \frac{\lambda^{2m}}{2m!} \right|_p \left| \frac{b^k}{2^k \lambda^{2k}} \right|_p \left| \frac{2m!}{k! (2m-2k)!} \right|_p.$$

Получаем

$$\left| \frac{2m!}{k! (2m-2k)!} \right|_p = p^{-\frac{k}{p-1}} p^{\frac{A(m,k)}{p-1}},$$

где $A(m, k) = S_{2m} - S_k - S_{2(m-k)}$. Следовательно, получаем

$$|a_{m-k}|_p = |a_m|_p \left(\frac{\theta_b}{|\lambda|_p} \right)^{2k} p^{\frac{A(m,k)}{p-1}}.$$

Положим теперь $m = p^l$. Рассмотрим случай $p \neq 2$. Здесь $S_{2p^l} = 2$. Если $k \neq m$, то $S_k + S_{2(m-k)} \geq 2$ и, следовательно, $A(m, k) \leq 0$. Если же $m = k$, то $S_{2(m-k)} = 0$ и $S_{2m} - S_m = 1$. Следовательно, $p^{A(m,k)/(p-1)} = p^{1/(p-1)}$. Итак, имеем $|a_{m-k}|_p = |a_m|_p (\theta_b/|\lambda|_p)^{2k}$ для $k = 1, \dots, m-1$ и $|a_0|_p = |a_m|_p (\theta_b/|\lambda|_p)^{2m} p^{1/(p-1)}$. Так как $|\lambda|_p > \theta_b$, обе эти величины меньше, чем $|a_m|_p$ для достаточно больших $m = p^l$.

Рассмотрим случай $p = 2$. Здесь $S_{2m} = S_m = 1$. Если $k \neq m$, то $S_k + S_{2(m-k)} \geq 2$ и, значит, $A(m, k) \leq 0$. Если $k = m$, то $A(m, k) = 0$. В обоих случаях имеем $|a_{m-k}|_2 < |a_m|_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.2. Если $|\lambda|_p < \theta_b$, то при $m = p^k$ из леммы 7.2 следует, что $|f_{\lambda, 2m}|_p = |f_{0, 2m}|_p$. Остается применить предложение 7.1. Если $|\lambda|_p > \theta_b$, то при $m = p^k$ из леммы 7.4 следует, что $|f_{\lambda, 2m}|_p = |a_m|_p$. Остается применить лемму 7.3. Наконец, напомним, что если $p \neq 2$, то $S_{\theta_b}(0) = \emptyset$ (замечание 7.1).

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. *p*-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
2. Khrennikov A. Yu. *p*-adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
3. Vladimirov V. S., Volovich I. V. *p*-adic quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659–676.
4. Volovich I. V. Number theory as the ultimate physical theory. Preprint CERN. Geneva. TH. 4781/87, 1987.
5. Volovich I. V. *p*-adic strings // Class. Quant. Gravity. 1987. V. 4. P. 83–87.
6. Frampton P. H., Okada Y. *p*-adic string *N*-point function // Phys. Rev. Lett. B. 1988. V. 60. P. 484–486.
7. Freund P. G. O., Olson M. Non-Archimedean strings // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 186–190.
8. Freund P. G. O., Witten E. Adelic string amplitudes // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191–195.
9. Владимиров В. С. Адельные формулы для гамма- и бета-функций пополнений полей алгебраических чисел и их применения к струнным амплитудам // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 63–86.
10. Albeverio S., Khrennikov A. Yu. Representation of the Weyl group in spaces of square integrable functions with respect to *p*-adic valued Gaussian distributions // J. of Phys. A. 1996. V. 29. P. 5515–5527.
11. Albeverio S., Khrennikov A. Yu. *p*-adic Hilbert space representation of quantum systems with an infinite number of degrees of freedom // Int. J. of Modern Phys. 1996. V. 10. № 13/14. P. 1665–1673.
12. Aref'eva I. Ya., Dragovich B., Frampton P. H., Volovich I. V. The wave function of the universe and *p*-adic gravity // Int. J. of Modern Phys. A. 1991. V. 6. № 24. P. 4341–4358.
13. Dragovich B. Adelic wave function of the universe: Proc. 3-d A. Friedmann Int. Seminar on Grav. and Cosmology. St.-Petersburg: St.-Petersburg Univ. Press., 1995.
14. Dragovich B. Adelic harmonic oscillator // Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 2349–2365.
15. Хренников А. Ю. Математические методы неархимедовой физики // УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 79–110.

17. *Хренников А. Ю.* Обобщенные функции на неархимедовом суперпространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 6. С. 1257–1286.
18. *Khrennikov A. Yu.* p -adic quantum mechanics with p -adic valued functions // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 4. P. 932–937.
19. *Khrennikov A. Yu.* Statistical interpretation of p -adic quantum theories with p -adic valued wave functions // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 12. P. 6625–6632.
20. *De Grande – De Kimpe N., Khrennikov A. Yu.* The non-Archimedean Laplace transform // Bull. Belgian Math. Soc. 1996. V. 3. P. 225–237.
21. *Kalisch G. K.* On p -adic Hilbert spaces // Ann. of Math. 1947. V. 48. P. 180–192.
22. *Springer T. A.* Quadratic forms over fields with a discrete valuation. 1, 2 // Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 1955. V. 58. P. 352–362; 1955. V. 59. P. 238–246.
23. *Van Der Put M.* Espaces de Banach non-Archimediennes // Bull. Soc. Math. France. 1974. V. 97. P. 309–320.
24. *Treiber D.* Beiträge zur nicht-archimedischen funktional analysis. Dissertation an der Univ. Köln, 1971.
25. *Bayod J. M.* Productos internos en espacios normados no Arquimedianos. Bilbao: Univ. de Bilbao Press, 1976.
26. *Monna A.* Analyse non-Archimédienne. New York: Springer, 1970.
27. *Narici L., Beckenstein E., Bachman G.* Functional analysis and valuation theory. New York: Marcel Dekker, Inc., 1971.
28. *Van Rooij A.* Non-archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker, Inc., 1978.
29. *Schikhov W.* Ultrametric calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
30. *Kakol J., Perez-Garsia C., Schikhov W. H.* Cardinality and Mackey topologies of non-Archimedean Banach and Frechet spaces // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 1996. V. 44. P. 131–141.
31. *Sierpinski W.* Elementary theory of numbers. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964.
32. *Khrennikov A. Yu.* The ultrametric Hilbert-space description of quantum measurements with a finite exactness // Foundation of Physics. 1996. V. 26. № 8. P. 1033–1054.
33. *Escassut A.* Analytic elements in p -adic analysis. Singapore: World Scientific, 1995.
34. *Schikhov W. H.* Locally convex spaces over non-spherically complete valued fields. I–II // Bull. Soc. Math. Belgique. 1986. V. 38. P. 187–224.

Поступило в редакцию
28.X.1997

Перевод с английского А. В. ДОМРИНА