Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Гоголадзе, К вопросу о восстановлении коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 2, 83–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 10:07:20

УДК 517.521

Л. Д. Гоголадзе

К вопросу о восстановлении коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов

Доказана теорема о восстановлении коэффициентов сходящихся по параллелепипедам кратных функциональных рядов.

Библиография: 9 наименований.

Пусть $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$, – евклидово пространство, $\mathbb{Z}_0^s \subset \mathbb{R}^s$ – множество точек, координаты которых – неотрицательные целые числа. Через $x = (x_1, \dots, x_s)$, $y = (y_1, \dots, y_s)$, ... обозначаются точки пространства $\mathbb{R}^s$, а через $n = (n_1, \dots, n_s)$, $m = (m_1, \dots, m_s)$, ... – точки из $\mathbb{Z}_0^s$.

Пусть даны системы функций, конечных в каждой точке отрезка $I = [0, 1]$:

$$\Phi^{(j)} = \{\varphi_{n_j}^{(j)}(x_j)\}_{n_j=0}^{\infty}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Рассмотрим s -кратную систему

$$\Phi = \{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \Phi_n(x) = \prod_{j=1}^s \varphi_{n_j}^{(j)}(x_j)$$

и s -кратный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x). \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $E \subset I^s$, $s \geq 1$, называется V -множеством для системы Φ , если из сходимости по параллелепипедам ряда (1) на множестве $E' = I^s \setminus E$ к конечной интегрируемой на I^s функции f , являющейся для любых фиксированных $j \in B \subset \bar{S} = \{1, \dots, s\}$ интегрируемой на $I^{|B'|}$ по переменным x_j , $j \in B' = \bar{S} \setminus B$, следует, что (1) есть ряд Фурье функции f . Когда $f = 0$, множество E принято называть U -множеством (см. [1, с. 193]).

Пусть для каждого $j \in \bar{S}$ известно, какие множества являются V -множествами (U -множествами) для рядов

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} a_{n_j} \varphi_{n_j}^{(j)}(x_j), \quad j = 1, \dots, s.$$

Возникает вопрос: какие множества будут V -множествами (U -множествами) для ряда (1)? (Об истории этого вопроса см. работы [2]–[5] и указанную в этих работах литературу.)

В настоящей работе будут доказаны результаты, анонсированные в работе [6] и доложенные на международной конференции, проведенной в Ереване (см. [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [8]. Множество $E \subset I^s$ назовем *множеством линейной независимости* (ЛН-множеством) системы Φ , если любая ее конечная часть линейно независима на множестве E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество E назовем *множеством нулей* (0-множеством) для системы $\Phi^{(j)}$, если существует натуральное число n_j такое, что $\varphi_{n_j}^{(j)}(x_j) = 0$, когда $x_j \in E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что множество $E \subset I$ обладает свойством А относительно системы $\Phi^{(j)}$, $j \in \bar{S}$, если не существует последовательности 0-множеств e_{n_j} таких, что

$$e_{n_j} \subseteq e_{n_j+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n_j \rightarrow \infty} e_{n_j} = E' = I \setminus E.$$

В дальнейшем понадобится

ЛЕММА 1 [9, с. 14]. Пусть дана последовательность $\{S_n\}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Если для каждого n_s существует предел

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} S_n, \quad n' = (n_1, \dots, n_{s-1}),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \left(\lim_{n' \rightarrow \infty} S_n \right) = S.$$

В монографии [9] лемма 1 доказана, когда $s = 2$. Для $s > 2$ доказательство аналогично.

Пусть дана бесконечная последовательность полиномов степени n

$$T_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(m)} \Phi_k(x), \quad m \in A \subset \mathbb{Z}_0^d, \quad d \geq 1.$$

Следующая лемма доказывается таким же образом, как лемма 2 из работы [8].

ЛЕММА 2. Пусть $E \subset I^s$ является ЛН-множеством для системы Φ и в каждой точке $x \in E$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |T_n^{(m)}(x)| < \infty.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |a_k^{(m)}| < \infty, \quad 0 \leq k \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда будет существовать последовательность полиномов

$$T_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(p)} \Phi_k(x)$$

такая, что в каждой точке $x \in E$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{T_n^{(p)}(x)}{\overline{a_p}} = 0, \quad (2)$$

где

$$\overline{a_p} = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k^{(p)}|. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\frac{|a_k^{(p)}|}{\overline{a_p}} \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n, \quad \frac{1}{\overline{a_p}} \sum_{k=0}^n |a_k^{(p)}| \geq 1. \quad (4)$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что существуют конечные пределы

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{a_k^{(p)}}{\overline{a_p}} = b_k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (5)$$

Пусть

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \Phi(x).$$

Отсюда и из соотношений (2), (4), (5) имеем

$$T_n(x) = 0, \quad x \in E, \\ \sum_{k=0}^n |b_k| \geq 1,$$

а это противоречит тому, что E является ЛН-множеством. Лемма доказана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k_s=0}^{\infty} A_{n',k_s} \varphi_{k_s}(x_s).$$

Пусть

$$S_{n',n_s}(x_s) \equiv S_n(x_s) = \sum_{k_s=0}^{n_s} A_{n',k_s} \varphi_{k_s}(x_s).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3. Пусть множество $E \subset I$ обладает свойством А относительно системы $\Phi^{(s)}$, а $E' = I \setminus E$ является ЛН-множеством для системы $\Phi^{(s)}$. Если в каждой точке $x_s \in E'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_s) = f(x_s), \quad (6)$$

где функция $f(x_s)$ конечна в каждой точке $x_s \in E'$, то для каждого k_s

$$\overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} |A_{n',k_s}| < \infty. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$B_M = \{x_s : x_s \in E', |S_n(x_s)| \leq M, \text{ когда } n_j \geq M, j \in \overline{S}\}.$$

Ясно, что

$$B_M \subset B_{M+1}, \quad \bigcup_{M=1}^{\infty} B_M = E'.$$

Ввиду того, что множество E обладает свойством А относительно системы $\Phi^{(s)}$, найдется M_0 такое, что B_{M_0} не будет множеством нулей для системы $\Phi^{(s)}$.

Сначала докажем справедливость (7), когда $k_s > M_0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} |S_{n',k_s}(x_s)| &< M_0, & \text{ когда } n_j > M_0, & j \in \overline{S-1}, & x_s \in B_{M_0}, \\ |S_{n',k_s-1}(x_s)| &< M_0, & \text{ когда } n_j > M_0, & j \in \overline{S-1}, & x_s \in B_{M_0}. \end{aligned}$$

Поскольку B_{M_0} не является множеством нулей для системы $\Phi^{(s)}$, найдется $x_s^0 \in B_{M_0}$ такое, что $\varphi_{k_s}(x_s^0) \neq 0$. Далее имеем

$$\overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} |A_{n',k_s}| = \overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} \frac{|S_{n',k_s}(x_s^0) - S_{n',k_s-1}(x_s^0)|}{\varphi_{k_s}(x_s^0)} \leq \frac{2M_0}{\varphi_{k_s}(x_s^0)} < \infty, \quad k_s > M_0. \quad (8)$$

Таким образом получена справедливость неравенства (7), когда $k_s > M_0$.

Теперь если докажем, что в каждой точке $x_s \in E'$

$$\overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} |S_{n',M_0}(x_s)| < \infty, \quad (9)$$

то согласно лемме 2 получим справедливость неравенства (7), когда $0 \leq k_s \leq M_0$. Итак, осталось доказать справедливость неравенства (9).

Возьмем любое $x_s \in E'$. Тогда найдется натуральное число $M(x_s) > M_0$ такое, что $x_s \in B_{M(x_s)}$. Поэтому будем иметь

$$\sup_{\substack{n_j > M_0 \\ j \in \overline{S-1}}} |S_{n',M(x_s)}(x_s)| < M(x_s).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} |S_{n',M_0}(x_s)| &= \left| S_{n',M(x_s)}(x_s) - \sum_{k_s=M_0+1}^{M(x_s)} A_{n',k_s} \varphi_{k_s}(x_s) \right| \\ &\leq |S_{n',M(x_s)}(x_s)| + \left| \sum_{k_s=M_0+1}^{M(x_s)} A_{n',k_s} \varphi_{k_s}(x_s) \right|. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (8) и тот факт, что функции φ_{k_s} конечны в каждой точке, из последних двух соотношений получаем справедливость неравенства (9). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть E является V -множеством и обладает свойством А относительно системы $\Phi^{(s)}$. Если в каждой точке $x_s \in E'$ выполнено равенство (6), где $f(x_s)$ – конечная на E' функция, и $f \in L(I)$, то

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} A_{n',k_s} = \int_I f(x_s) \varphi_{k_s}(x_s) dx_s, \quad k_s = 0, 1, \dots \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Не ограничивая общности, предположим, что

$$\overline{\lim}_{n' \rightarrow \infty} A_{n',0} = a_0 \neq \int_I f(x_s) \varphi_0(x_s) dx_s. \quad (11)$$

Ввиду того, что дополнение V -множества является ЛН-множеством, конечность a_0 следует из леммы 3.

Через $n'(0, p)$ обозначим один из векторов, удовлетворяющих следующему неравенству:

$$A_{n'(0,p),0} \geq \sup_{\substack{m_j \geq p \\ j \in S-1}} A_{m',0} - \frac{1}{p+1}.$$

Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n'(0,p),0} = a_0.$$

Пусть $n'(1, p)$ – подпоследовательность последовательности векторов $n'(0, p)$ такая, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n'(1,p),1} = a_1.$$

Ясно, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n'(1,p),0} = a_0.$$

Продолжая аналогичным образом, получим, что для каждого натурального q будет существовать подпоследовательность $n'(q, p)$ такая, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n'(q,p),\nu} = a_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, q.$$

Теперь, взяв диагональную подпоследовательность, для каждого k_s будем иметь

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A_{n'(p,p),k_s} = a_{k_s}.$$

Отсюда и из (6) в силу леммы 1 получим

$$\begin{aligned} f(x_s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k_s=0}^{n_s} A_{n'(p,p),k_s} \varphi_{k_s}(x_s) \right) \\ &= \lim_{n_s \rightarrow \infty} \sum_{k_s=0}^{n_s} a_{k_s} \varphi_{k_s}(x_s), \quad x_s \in E'. \end{aligned}$$

Из этого равенства ввиду того, что E является V -множеством для системы $\Phi^{(s)}$, будем иметь

$$a_{k_s} = \int_I f(x_s) \varphi_{k_s}(x_s) dx_s, \quad k = 0, 1, \dots,$$

что противоречит равенству (11). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть соблюдены условия леммы 4. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_s) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \left(\lim_{n' \rightarrow \infty} S_n(x_s) \right) = f(x_s), \quad x_s \in E'. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (10) следует, что для любого n_s

$$\exists \lim_{n' \rightarrow \infty} S_n(x_s), \quad x_s \in E'.$$

Отсюда и из (6) в силу леммы 1 получаем справедливость (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в лемме 4 множество E является U -множеством и $f(x_s) = 0$, $x_s = E'$, то

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} A_{n', k_s} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_s) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \left(\lim_{n' \rightarrow \infty} S_n(x_s) \right) = 0, \quad x_s \in E'.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [6], [7]. Скажем, что множество E является A^0V -множеством (A^0U -множеством) для системы $\{\varphi_{k_j}^{(j)}(x_j)\}$, если оно является V -множеством (U -множеством) этой системы. Пусть определены $A^{s-2}V^{s-1}$ -множества ($A^{s-2}U^{s-1}$ -множества) для системы

$$\left\{ \prod_{j=1}^{s-1} \varphi_{k_j}^{(j)}(x_j) \right\}.$$

Скажем, что $E \subset I^s$ является $A^{s-1}V^s$ -множеством ($A^{s-1}U^s$ -множеством) для системы Φ , если существует множество $E_j \subset I^{s-1}$, $j \in \overline{S-1}$, являющееся $A^{s-2}V^{s-1}$ -множеством ($A^{s-2}U^{s-1}$ -множеством) для системы

$$\left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \varphi_{k_i}^{(i)}(x_i) \right\},$$

такое, что для каждого $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_s) \in E'_j$ множество

$$\{x_j \in I : (x_1, \dots, x_s) \in E\}$$

является V -множеством (U -множеством) и обладает свойством А относительно системы $\{\varphi_{k_j}^{(j)}(x_j)\}$.

Заметим, что если $E^{(j)}$, $j \in \overline{S}$, являются V -множествами (U -множествами) для систем $\Phi^{(j)}$ и все они, кроме одного, обладают свойством А, то множество

$$E = \bigcup_{j=1}^s E^{(j)} \times I^{s-1}$$

будет $A^{s-1}V^s$ -множеством ($A^{s-1}U^s$ -множеством).

ТЕОРЕМА. Всякое $A^{s-1}V^s$ -множество ($A^{s-1}U^s$ -множество) является V -множеством (U -множеством) для системы Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E является $A^{s-1}V^s$ -множеством ($A^{s-1}U^s$ -множеством) и ряд (1) сходится к $f(x)$, где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, перечисленным в определении 1, по параллелепипедам в каждой точке из E' .

Не ограничивая общность рассуждений, допустим, что $E_s \subset I^{s-1}$ является $A^{s-2}V^{s-1}$ -множеством ($A^{s-2}U^{s-1}$ -множеством) для системы

$$\left\{ \prod_{i=1}^{s-1} \varphi_{k_i}^{(i)}(x_i) \right\}$$

таким, что для каждого $x' \in E'_s = I^{s-1} \setminus E_s$ множество

$$E(x') = \{x_s \in I : (x', x_s) \in E\}$$

является V -множеством (U -множеством) и обладает свойством A относительно системы $\{\varphi_{k_s}^{(s)}(x_s)\}$.

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \Phi_k(x) = \sum_{k_s=0}^{n_s} \left(\sum_{k'=0}^{n'} a_k \Phi_{k'}(x') \right) \varphi_{k_s}(x_s);$$

тогда для любого $x \in E'$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0 \right).$$

Ввиду того, что для каждого фиксированного $x' \in E'_s$ и любого $x_s \in E'(x') = I \setminus E(x')$ имеет место $(x', x_s) \in E'$, в силу леммы 4 и замечания 1 для любых $k_s = 0, 1, 2, \dots$ и $x' \in E'_s$ будем иметь

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k'=0}^{n'} a_k \Phi_{k'}(x') = \int_I f(x) \varphi_{k_s}(x_s) dx_s \quad (13)$$

$$\left(\lim_{n' \rightarrow \infty} \sum_{k'=0}^{n'} a_k \Phi_{k'}(x') = 0 \right). \quad (13')$$

Таким образом, выполнены условия теоремы, когда размерность уменьшилась на единицу.

Рассуждая подобным образом для любого $k \in \mathbb{Z}_0^s$, получим

$$a_k = \int_{I^s} f(x) \Phi_k(x) dx \quad (a_k = 0).$$

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет распространить результаты, полученные в одномерном случае, на многомерный случай. В проверке нуждается только свойство A .

Заметим, например, что для систем тригонометрической, Уолша, Радемахера, Лежандра всякое множество, дополнение которого содержит несчетное множество, обладает свойством A . Используя следствие 1 и замечание 1, из теоремы будем иметь

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E является $A^{s-1}V^s$ -множеством ($A^{s-1}U^s$ -множеством) и ряд (1) сходится по параллелепипедам к конечной на E' функции $f(x)$ ($f(x) = 0$), $f \in L(I^s)$, являющейся для любых фиксированных $j \in$

$B \subset \overline{S} = \{1, \dots, s\}$ интегрируемой на $I^{|B'|}$ по переменным x_j , $j \in B' = \overline{S} \setminus B$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \left(\lim_{n_{s-1} \rightarrow \infty} \dots \left(\lim_{n_1 \rightarrow \infty} S_n(x) \right) \dots \right)$$

на множестве E' .

Список литературы

1. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
2. J. M. Ash, G. V. Welland, "Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163** (1972), 401–436.
3. А. А. Талалян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", *Матем. сб.*, **132**:1 (1987), 104–130; англ. пер.: A. A. Talalyan, "On the uniqueness of multiple trigonometric series", *Math. USSR-Sb.*, **60**:1 (1988), 107–131.
4. Ш. Т. Тегунашвили, "О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму", *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176; англ. пер.: Sh. T. Tetunashvili, "On some multiple function series and solution of the uniqueness problem for Pringsheim convergence of multiple trigonometric series", *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 517–534.
5. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", *Матем. сб.*, **184**:11 (1993), 91–130; англ. пер.: G. G. Gevorkyan, "On uniqueness of multiple trigonometric series", *Sb. Math.*, **80**:2 (1995), 335–365.
6. Л. Д. Гоголадзе, "О восстановлении коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов", *Reports of enlarged session of the seminar of I. N. Vekua Institute of Applied Mathematics* (Тбилиси, 1992), **7**, № 2, Tbilisi University Press, Tbilisi, 1992, 20–22.
7. L. D. Gogoladze, "On the restoration of the coefficients of convergent multiple functional series", *Abstracts Int. conference harmonic analysis and approximations*, Yerevan, 1998, 22–23.
8. Л. Д. Гоголадзе, "Об ограниченности сходящихся средних кратных функциональных рядов", *Матем. заметки*, **34**:6 (1983), 845–855; англ. пер.: L. D. Gogoladze, "Boundedness of convergent mean multiple functional series", *Math. Notes*, **34**:5–6 (1983), 917–923.
9. В. Г. Челидзе, *Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов*, Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1977.

Л. Д. ГОГОЛАДЗЕ
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили
E-mail: lgogoladze1@hotmail.com

Поступило в редакцию
14.06.2007