Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Доси, Некоммутативные голоморфные функции от элементов алгебры Ли и задача об абсолютном базисе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 77–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:17:53

УДК 512.556+517.553

А. А. Доси

Некоммутативные голоморфные функции от элементов алгебры Ли и задача об абсолютном базисе

Изучается задача об абсолютном базисе в алгебрах голоморфных функций от некоммутирующих переменных, порождающих конечномерную нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Постановка этой задачи мотивирована программой Дж. Тэйлора о построении некоммутативного голоморфного функционального исчисления в контексте алгебр Ли.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: голоморфные функции от элементов алгебры Ли, оболочка Аренса–Майкла, локализация.

§ 1. Введение

Основными компонентами некоммутативного голоморфного функционального исчисления (см. [1]–[3]) являются:

- 1) основная алгебра “полиномов” $\mathcal{B}$;
- 2) банахов левый $\mathcal{B}$ -модуль X ;
- 3) семейство топологических алгебр $\mathcal{A}_\kappa$ “функций” с гомоморфизмами $\iota_\kappa: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_\kappa$.

Задача построения некоммутативного голоморфного функционального исчисления состоит в нахождении таких алгебр $\mathcal{A}_\kappa$, чтобы банахово пространство X было левым $\mathcal{A}_\kappa$ -модулем, для которого новая структура $\mathcal{B}$ -модуля, полученная переносом с помощью гомоморфизма ι_κ , сводилась бы к исходной. Задача о функциональном исчислении от элементов набора $T = (T_1, \dots, T_n)$ из n попарно коммутирующих операторов на банаховом пространстве X (см. [4], [5]) переформулируется в этих терминах следующим образом: в качестве основной алгебры $\mathcal{B} = P_n$ берется алгебра всех полиномов от n коммутирующих переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$, пространство X снабжается естественной структурой $\mathcal{B}$ -модуля по формуле $(p(z), x) \mapsto p(T)x$, а в качестве $\mathcal{A}_\kappa$ берутся алгебры $\mathcal{O}(D)$ голоморфных функций на областях $D \subseteq \mathbb{C}^n$. Если основная алгебра $\mathcal{B}$ отлична от P_n , то возникает вопрос: как определить класс алгебр $\mathcal{A}_\kappa$ “функций от некоммутирующих переменных”, который играл бы для $\mathcal{B}$ ту же роль, что и алгебры $\mathcal{O}(D)$ для P_n ? Чтобы описать эту роль алгебр $\mathcal{A}_\kappa$ по отношению к основной алгебре $\mathcal{B}$, в работе [1] был в гомологических терминах определен класс гомоморфизмов топологических алгебр $\iota: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, называемых *локализациями* (см. также [6], [7]). Грубо говоря, гомоморфизм $\iota: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ является локализацией, если функторы гомологий Хохшильда устойчивы при переходе от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$ посредством ι . Основным примером локализации для алгебры полиномов $\mathcal{B} = P_n$ служит каноническое вложение $P_n \rightarrow \mathcal{O}(D)$, где D – область голоморфности.

Некоторые некоммутативные версии алгебр голоморфных функций на полидисках (т. е. претендентов на роль алгебр $\mathcal{A}_\kappa$) рассматривались в [8], [9]. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – ее универсальная обертывающая алгебра, а $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$, $n = \dim(\mathfrak{g})$. Алгебра $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ всех голоморфных функций (на D) от элементов алгебры $\mathfrak{g}$ определяется как пополнение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ по некоторой системе полунорм. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна, то $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ сводится к полупростой алгебре $\mathcal{O}(D)$ всех обычных голоморфных функций на D . В случае $D = \mathbb{C}^n$ алгебра $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ обозначается через $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ и называется алгеброй всех целых функций от элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ – некоммутативная нильпотентная алгебра Ли, то алгебра $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ имеет нетривиальный радикал Джекобсона $\text{Rad } \mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ (это замкнутый идеал, порожденный идеалом Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) и факторалгебра $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)/\text{Rad } \mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ сводится к алгебре $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}(D_*) (= \mathcal{O}(D_*))$ обычных голоморфных функций на суженном полидиске $D_* = D_1 \times \cdots \times D_m$, $m = \dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ [9]. Возникает вопрос: будет ли вложение $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ локализацией? В случае положительного ответа мы получаем семейство некоммутативных алгебр $\mathcal{A}_\kappa$ для построения “нильпотентного функционального исчисления” в подходе Тэйлора. Как показано в [10], [11], эта задача о локализации имеет прямое отношение к свойству деления в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$, которое, в свою очередь, связано с существованием абсолютного базиса в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$. А именно, пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, подчиненный нижнему центральному ряду этой алгебры. Будем называть e *треугольным базисом*. В работе [9] показано, что для каждого $f \in \mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ существует единственный набор a_J комплексных чисел такой, что f можно записать в виде формального степенного ряда: $f = \sum_J a_J e^J$ (тейлоровское разложение), где $e^J = e_1^{j_1} \cdots e_n^{j_n}$ – упорядоченный моном по базису e в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Сходимость этого ряда понимается в специальном смысле, называемом (*слабой*) *однородной сходимостью* (см. п. 2.1), и в этом смысле можно сказать, что множество $\{e^J\}$ всех упорядоченных мономов является (*слабым*) *однородным базисом* в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$. Таким образом, мы получаем некоммутативный аналог классического (тейлоровского) разложения обычных голоморфных функций нескольких комплексных переменных.

Основной задачей, изучаемой в настоящей работе, является задача об абсолютном базисе в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$: будет ли множество $\{e^J\}$ всех упорядоченных мономов в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ абсолютным (или безусловным) базисом в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$, т. е. верно ли, что разложение любого $f \in \mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$ в степенной ряд $\sum_J a_J e^J$ сходится абсолютно в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$, как это было в коммутативном случае? Решение дается в терминах понятия роста (см. ниже определение 3.1) треугольного базиса e для случая, когда $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D) = \mathcal{O}_\mathfrak{g}$ – алгебра всех целых функций от элементов алгебры $\mathfrak{g}$. А именно, если треугольный базис e имеет нормальный рост, то $\{e^J\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ является абсолютным базисом в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ (см. § 4). Этот результат позволяет нам дать полное описание топологии $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ явно заданным семейством норм (см. п. 4.3). Наконец, мы покажем, что $\{e^J\}$ – абсолютный базис в $\mathcal{O}_\mathfrak{g}(D)$, но локально, для ограниченного полидиска D . Некоторые из результатов статьи были анонсированы в [10].

Наконец, я поблагодарю Ю. В. Туровского и А. Ю. Пирковского за ценные замечания и предложения. Автор также благодарен рецензенту за предложенные комментарии.

§ 2. Предварительные сведения

Все рассматриваемые векторные пространства являются комплексными. Тожественный оператор на векторном пространстве X обозначается через 1_X . Если X – нормированное пространство, то его норма обозначается через $\|\cdot\|_X$, а двойственное пространство – через X^* . Если X – конечномерное векторное пространство с базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$, то через l_e обозначается ℓ_1 -норма на X относительно e , т.е. $l_e(\sum a_i e_i) = \sum |a_i|$, $a_i \in \mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{R}_+^n$ – n -я декартова степень множества $\mathbb{R}_+$ всех положительных вещественных чисел, и пусть $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Для $s, t \in \mathbb{R}_+^n$ записываем $s \leq t$, если $s_i \leq t_i$ для всех i , $1 \leq i \leq n$, где $s_i = s(i)$, $t_i = t(i)$. Ясно, что отношение $\leq$ превращает $\mathbb{R}_+^n$ в частично упорядоченное множество. Направленное подмножество $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ называется *неограниченно возрастающим*, если для любого числа $k \in \mathbb{N}$ найдется элемент $s^{(k)} \in S$ такой, что $\min(s^{(k)}) \geq k$. Будем для краткости заменять обозначения $\max\{a, b\}$ и $\min\{a, b\}$ на $a \vee b$ и $a \wedge b$ для $a, b \in \mathbb{R}$, если это не ведет к путанице. При $s \in \mathbb{R}_+^n$ обозначим ℓ_1 -норму на X относительно базиса $s^{-1}e = (s_1^{-1}e_1, \dots, s_n^{-1}e_n)$ через $l_{e,s}$. Векторное пространство всех непрерывных линейных операторов $X \rightarrow Y$ между локально выпуклыми пространствами X и Y обозначается через $\mathcal{L}(X, Y)$. При $X = Y$ мы записываем $\mathcal{L}(X)$ вместо $\mathcal{L}(X, X)$. Радикал Джекобсона ассоциативной алгебры A обозначается через $\text{Rad } A$. Алгебра всех $(n \times n)$ -матриц над алгеброй A обозначается через $\mathcal{M}_n(A)$. Операторы левого и правого умножения на A обозначаются через L_a и R_a , так что $L_a(x) = ax$ и $R_a(x) = xa$ для всех $a, x \in A$. Единица алгебры A обозначается через 1_A .

Пусть F – конечномерная алгебра Ли. Ее *нижним центральным рядом* называется последовательность идеалов $F^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, где $F^{(1)} = F$ и $F^{(k)} = [F, F^{(k-1)}]$ при $k \geq 2$. Алгебра Ли F называется *нильпотентной*, если $F^{(k)} = \{0\}$ для некоторого k . Если $F^{(k+1)} = \{0\}$, но $F^{(k)} \neq \{0\}$, то k называется *степенью nilпотентности* алгебры F . Нильпотентная алгебра Ли F называется *алгеброй Гейзенберга*, если $\dim([F, F]) = 1$. В этом случае F имеет степень nilпотентности 2. Простым примером алгебры Гейзенберга является алгебра Ли с базисом e_1, e_2, e_3 таким, что $[e_1, e_2] = e_3$ и $[e_i, e_3] = 0$ для всех i .

Пространство всех характеров Ли алгебры Ли F обозначается через $\Delta(F)$. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли F обозначается через $\mathcal{U}(F)$ и рассматривается как локально выпуклая алгебра с тончайшей локально выпуклой топологией. *Пополнением обертывающей алгебры $\mathcal{U}(F)$* называется такая локально выпуклая алгебра A , которая содержит $\mathcal{U}(F)$ в качестве плотной подалгебры. Такое пополнение A называется *окаймленным*, если канонический характер $\varepsilon_F: \mathcal{U}(F) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varepsilon_F(F) = \{0\}$, непрерывен в топологии, индуцированной с A . Тем самым, ε_F допускает продолжение до непрерывного характера $\varepsilon_F: A \rightarrow \mathbb{C}$. В этом случае удобно заменять обозначение $\varepsilon_F(f)$ на $f(0)$ для $f \in A$.

ЛЕММА 2.1. Пусть F – алгебра Ли, $u, v \in F$ и $T_v = \text{ad}(v) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(F))$ – оператор присоединенного представления. Тогда

$$[u, v^n] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \binom{n-4}{k-3} \right) v^{n-k} T_v^k(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку эта формула очевидно верна при $n = 1$, можно воспользоваться индукцией по n . Из предположения индукции выводим, что

$$\begin{aligned}
 [u, v^n] &= -v^{n-1}T_v(u) + [u, v^{n-1}]v \\
 &= -v^{n-1}T_v(u) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-5}{k-3} \right) v^{n-k-1} T_v^k(u) v \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-5}{k-3} \right) v^{n-k} T_v^k(u) \\
 &\quad + \sum_{k=2}^n (-1)^k \left(\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-5}{k-4} \right) v^{n-k} T_v^k(u) - v^{n-1} T_v(u) \\
 &= -n v^{n-1} T_v(u) + \sum_{k=2}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \left(\binom{n-5}{k-3} + \binom{n-5}{k-4} \right) \right) v^{n-k} T_v^k(u) \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \binom{n-4}{k-3} \right) v^{n-k} T_v^k(u),
 \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемая формула. Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – нильпотентная конечномерная алгебра Ли, и пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис в $\mathfrak{g}$, подчиненный нижнему центральному ряду алгебры $\mathfrak{g}$. Это означает, что операторы присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ изображаются в базисе e строго нижнетреугольными матрицами. В частности, для структурных констант C_{ij}^k алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе e имеем $C_{ij}^k = 0$ при $k \leq \max\{i, j\}$. Мы называем e *треугольным базисом* алгебры $\mathfrak{g}$. Если алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_c$ градуирована натуральными числами $1, \dots, c$, то любой базис, подчиненный этому разложению (и называемый *градуированным базисом*), треуголен. Ясно, что канонический базис алгебры Гейзенберга треуголен. Заметим, что если $e = (e_1, \dots, e_n)$ – треугольный базис в $\mathfrak{g}$, то при некотором m набор $e_r = (e_{m+1}, \dots, e_n)$ является базисом в $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Назовем набор e_r *радикальной частью* базиса e , а набор $e_s = (e_1, \dots, e_m)$ – *полупростой частью* базиса e . Введем также обозначения $J_s = (j_1, \dots, j_m)$, $J_r = (j_{m+1}, \dots, j_n)$ и $|J| = j_1 + \dots + j_n$ для любого набора $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

2.1. Однородный базис в пополнении $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли, а $e = (e_1, \dots, e_n)$ – ее треугольный базис. Введем понятие нильпотентной степени для (неупорядоченных) мономов $e_{i_1} \dots e_{i_s}$ в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ относительно базиса e , полагая $\deg(e_i) = \max\{k : e_i \in \mathfrak{g}^{(k)}\}$ для всех элементов e_i базиса e и $\deg(v) = \deg(e_{i_1}) + \dots + \deg(e_{i_s})$ для всех $v = e_{i_1} \dots e_{i_s}$. Степень $\deg(e^J)$ упорядоченного монома e^J будем также обозначать через $\langle J \rangle$. Обозначим через $\mathcal{U}_k(e)$ подпространство в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, порожденное всеми упорядоченными мономами e^J степени k , а через $\mathcal{U}^k(e)$ – подпространство, порожденное всеми мономами $e_{i_1} \dots e_{i_s}$ степени не меньше k . Поскольку множество $\mathfrak{m}_e = \{e^J\}$, $e^J = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}$, $J \in \mathbb{Z}_+^n$, всех упорядоченных мономов есть алгебраический базис в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, мы получаем, что $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_0(e) \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_{k-1}(e) \oplus \mathcal{U}^k(e)$ при каждом k . Заметим, что каждое подпространство $\mathcal{U}_i(e)$ конечномерно и имеет базис $\{e^J : \langle J \rangle = i\}$, тогда как $\mathcal{U}^k(e) = \bigoplus_{i \geq k} \mathcal{U}_i(e)$ (см. [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть A – пополнение $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Множество $\mathfrak{m}_e$ всех упорядоченных мономов от элементов треугольного базиса e назовем *слабо однородным базисом* в A , если при каждом k имеем $A = \mathcal{U}_0(e) \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{k-1}(e) \oplus \overline{\mathcal{U}^k(e)}$, где $\overline{\mathcal{U}^k(e)}$ – замыкание $\mathcal{U}^k(e)$ в A .

Таким образом, каждому $f \in A$ отвечает единственный набор комплексных чисел $\{a_J\}$ таких, что $f - \sum_{s=0}^{k-1} f_s \in \mathcal{U}^k(e)$, где $f_s = \sum_{\langle J \rangle=s} a_J e^J$. Тем самым, имеется формальное разложение $f = \sum_J a_J e^J$. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ безусловно сходится к f в A , то скажем, что ряд $\sum_J a_J e^J$ *однородно сходится* к f . Если это имеет место для всех $f \in A$, то подмножество $\mathfrak{m}_e$ называется *однородным базисом* в A . Аналогично, назовем $\mathfrak{m}_e$ *абсолютным* или *безусловным базисом* в A , если для каждого элемента $f \in A$ порожденный им ряд $\sum_J a_J e^J$ сходится к f абсолютно или безусловно в A .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть A – пополнение универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, снабженное *слабо однородным* базисом $\mathfrak{m}_e$. По определению 2.1 каждый элемент $f \in A$ имеет единственное формальное разложение: $f = \sum_J a_J e^J$, так что определены координатные линейные функционалы $\alpha_J: A \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_J(f) = a_J$. Пользуясь разложением из определения 2.1, мы получаем, что все функционалы α_J непрерывны. Замкнутое подпространство $A_0 = \bigcap_J \ker(\alpha_J)$ пространства A состоит из всех элементов $f \in A$ с тривиальным формальным разложением. Ясно, что $A_0 = \{0\}$ в том случае, когда $\{e^J\}$ является *однородным базисом* в A .

Некоторые пополнения $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с однородными базисами рассматривались в [9]. Простым примером пополнения $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с абсолютным базисом служит пространство $A = \mathcal{O}(D)$ голоморфных функций n комплексных переменных. Для него $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^n$ есть коммутативная алгебра Ли и каждый элемент $f \in \mathcal{O}(D)$ имеет классическое тейлоровское разложение: $f = \sum_J a_J z^J$, где $a_J = (J!)^{-1}(\partial^{|J|} f)(0)$. Здесь $\partial^{|J|} = \partial_{z_1}^{j_1} \cdots \partial_{z_n}^{j_n}$, ∂_{z_k} – обычный оператор дифференцирования по комплексной переменной z_k , а $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

2.2. Оболочки Аренса–Майкла. Пусть A – полная локально выпуклая алгебра. Если топология в A задается семейством мультипликативных полунорм, то A называется *алгеброй Аренса–Майкла* [12, п. 1.2.4]. Пусть теперь A – локально выпуклая алгебра, умножение в которой раздельно непрерывно. *Оболочкой Аренса–Майкла* [12, п. 5.2.21] алгебры A называется пара $(\tilde{A}, \omega)$, где $\tilde{A}$ – алгебра Аренса–Майкла, а $\omega: A \rightarrow \tilde{A}$ – непрерывный гомоморфизм алгебр, обладающий свойством “проективной универсальности”: для любой алгебры Аренса–Майкла B и любого непрерывного гомоморфизма алгебр $\pi: A \rightarrow B$ существует единственный непрерывный гомоморфизм алгебр $\tilde{\pi}: \tilde{A} \rightarrow B$ такой, что $\tilde{\pi} \cdot \omega = \pi$. Поскольку всякая алгебра Аренса–Майкла является обратным пределом банаховых алгебр [12, п. 5.2.10], достаточно проверять свойство проективной универсальности только для банаховых алгебр B .

Пусть F – конечномерная алгебра Ли. Тогда оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{U}(F)$ (снабженная тончайшей локально выпуклой топологией) обозначается через $\mathcal{O}_F$, а входящий в ее определение гомоморфизм – через $\omega_F: \mathcal{U}(F) \rightarrow \mathcal{O}_F$.

ЛЕММА 2.2. Пусть F – конечномерная алгебра Ли. Тогда $\ker(\omega_F) = \{0\}$ и $\mathcal{O}_F$ является окаймленным пополнением алгебры $\mathcal{U}(F)$. Кроме того, пространство всех непрерывных характеров алгебры $\mathcal{O}_F$ отождествляется с $\Delta(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \mathcal{U}(F)$ – ненулевой элемент. Тогда существует представление $\pi: \mathcal{U}(F) \rightarrow A$, $\pi(p) \neq 0$, где A – конечномерная банахова алгебра [13, п. 2.5.7]. Отсюда вытекает, что $\pi = \tilde{\pi} \cdot \omega_F$ для некоторого непрерывного гомоморфизма алгебр $\tilde{\pi}: \mathcal{O}_F \rightarrow A$, следовательно, $\tilde{\pi}(\omega_F(p)) = \pi(p) \neq 0$. Тем самым, $\omega_F(p) \neq 0$. Поскольку в качестве p можно было выбрать произвольный элемент $\mathcal{U}(F)$, мы заключаем, что $\ker(\omega_F) = \{0\}$. Таким образом, $\mathcal{U}(F)$ отождествляется с некоторой подалгеброй в $\mathcal{O}_F$. Пусть $\mathcal{B}$ – замыкание $\mathcal{U}(F)$ в $\mathcal{O}_F$. Тогда $\mathcal{B}$ является алгеброй Аренса–Майкла. Из единственности оболочки Аренса–Майкла получаем, что $\mathcal{B} = \mathcal{O}_F$. Остальные утверждения очевидны. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть $\lambda \in \Delta(F)$, и пусть $F - \lambda = \{u - \lambda(u) : u \in F\}$ – подалгебра Ли в $\mathcal{U}(F)$. Зададим линейное отображение $\psi: \mathcal{U}(F) \rightarrow \mathcal{O}_{F-\lambda}$ формулой $\psi(u) = (u - \lambda(u)) + \lambda(u)1_{\mathcal{O}_{F-\lambda}}$, $u \in F$. Тогда ψ является гомоморфизмом алгебр и продолжается до изоморфизма топологических алгебр $\hat{\psi}: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_{F-\lambda}$, обратным к которому является продолжение гомоморфизма $\psi': \mathcal{U}(F - \lambda) \rightarrow \mathcal{O}_F$, $\psi'(u - \lambda(u)) = u - \lambda(u)1_{\mathcal{O}_F}$, $u \in F$. По лемме 2.2 алгебра $\mathcal{O}_{F-\lambda}$ есть функциональное пополнение $\mathcal{U}(F - \lambda)$. Далее, если $\varepsilon_{F-\lambda}: \mathcal{O}_{F-\lambda} \rightarrow \mathbb{C}$ – тривиальный характер, то $\varepsilon_{F-\lambda} \cdot \hat{\psi} = \lambda$. Действительно,

$$\varepsilon_{F-\lambda}(\hat{\psi}(u)) = \varepsilon_{F-\lambda}((u - \lambda(u)) + \lambda(u)1_{\mathcal{O}_{F-\lambda}}) = \lambda(u)$$

для всех $u \in F$. Таким образом, $\mathcal{O}_F$ есть окаймленное пополнение $\mathcal{U}(F - \lambda)$ с точностью до топологического изоморфизма.

Если F – коммутативная алгебра Ли, то $\mathcal{O}_F$ сводится к алгебре всех целых функций от n комплексных переменных, где $n = \dim(F)$ (см. [12, 5.2.25]), а $\varepsilon_F(f)$ есть не что иное, как значение функции f в начале координат: $\varepsilon_F(f) = f(0)$.

§ 3. Банахова обертывающая алгебра $\mathcal{A}(p)$

Пусть F – конечномерная алгебра Ли, а p – норма на F . Следующее свойство проективной универсальности [8], [9] однозначно определяет банахову алгебру $\mathcal{A}(p)$ и гомоморфизм алгебр $\varphi_F: \mathcal{U}(F) \rightarrow \mathcal{A}(p)$ с плотным образом, причем $\|\varphi_F|F\| \leq 1$.

ЛЕММА 3.1. Для любой алгебры Ли $\mathcal{B}$ и гомоморфизма алгебр Ли $\alpha: F \rightarrow \mathcal{B}$, $\|\alpha\| \leq 1$, существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{\alpha}: \mathcal{A}(p) \rightarrow \mathcal{B}$, $\|\tilde{\alpha}\| \leq 1$, такой, что $\tilde{\alpha} \cdot \varphi_F = \alpha$.

Алгебра $\mathcal{A}(p)$ называется (см. [9]) банаховой обертывающей алгеброй банаховой алгебры Ли F , снабженной нормой p .

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с нормой p . Тогда банахова обертывающая алгебра $\mathcal{A}(p)$ есть пополнение $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ по норме (см. [8], [9]). Следовательно, $\mathcal{A}(p)$ является окаймленным пополнением $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ согласно лемме 3.1.

Пусть $p = l_e$ есть ℓ_1 -норма (см. §2) на нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ относительно треугольного базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ алгебры $\mathfrak{g}$. Семейство всех (неупорядоченных) мономов $v = e_{i_1} \cdots e_{i_s} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ от элементов базиса e порождает $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ как векторное пространство, т.е. каждый элемент $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ представляется линейной комбинацией этих мономов: $u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$. Для $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ положим (см. [9])

$$\|u\| = \inf\{|a_1| + \cdots + |a_k| : u = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k\}, \quad (3.1)$$

где точная нижняя грань берется по всем указанным представлениям элемента u . Поскольку $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, в (3.1) достаточно рассматривать только представления u в виде линейной комбинации мономов, нильпотентные степени которых (см. п. 2.1) ограничены сверху некоторой константой, зависящей от u и n . Поэтому равенство $\|u\| = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $u = 0$. Далее, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ является нормированной алгеброй относительно нормы $\|\cdot\|$. Если $\mathfrak{A}$ – ее пополнение по норме и $\varphi: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{A}$ – каноническое вложение, то из (3.1) вытекает, что пара $(\mathfrak{A}, \varphi)$ обладает свойством проективной универсальности из леммы 3.1. Поэтому $\mathfrak{A} = \mathcal{A}(l_e)$ с точностью до изометрического изоморфизма.

Следующий результат был доказан в [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, а l_e – ℓ_1 -норма на $\mathfrak{g}$ относительно треугольного базиса e алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда множество $\mathfrak{m}_e \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ всех упорядоченных мономов является слабо однородным базисом в $\mathcal{A}(l_e)$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ градуирована, а e – градуированный базис в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{m}_e$ является однородным базисом в $\mathcal{A}(l_e)$.

3.1. Норма координатного линейного функционала на $\mathcal{A}(l_e)$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – треугольный базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{g}^{(c+1)} = \{0\}$. Тогда при некотором m набор $e_{m+1}, \dots, e_n$ является базисом в $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Кроме того, найдутся числа $d_1, \dots, d_c$ такие, что наборы $\mathfrak{e}_s = (e_{d_{s-1}+1}, \dots, e_{d_s})$ имеют одинаковую нильпотентную степень s , причем $d_0 = 0$, $d_1 = m$, $d_c = n$. Фактически $\mathfrak{e}_s$ есть базис некоторого подпространства, дополняющего $\mathfrak{g}^{(s+1)}$ до $\mathfrak{g}^{(s)}$. Положим также $c^* = \max\{s : \text{ad}^s(e_j)(e_i) \neq 0, i < j\}$. Ясно, что $c^* \leq c$. Пусть $e_1, \dots, e_m$ – образующие Ли в $\mathfrak{g}$ нильпотентной степени 1 (тем самым, все e_i не принадлежат $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Для каждого s выберем максимальное линейно независимое подмножество всех лиевых слов $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots [e_{i_{s-1}}, e_{i_s}] \dots]]$ длины s и нильпотентной степени s и обозначим его через $\mathfrak{e}_s = (e_{d_{s-1}+1}, \dots, e_{d_s})$. Тогда $e = \mathfrak{e}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{e}_c$ есть треугольный базис в $\mathfrak{g}$, называемый базисом, ассоциированным с образующими Ли $e_1, \dots, e_m$. Для каждого набора $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и числа k , $1 \leq k \leq c$, положим $I_k = (i_{d_{k-1}+1}, \dots, i_{d_k})$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом e , а $\alpha_I \in \mathcal{A}(l_e)^*$ – координатные линейные функционалы относительно слабо однородного базиса $\{e^J\}$ в $\mathcal{A}(l_e)$. Тогда

$$\|\alpha_I\|_{\mathcal{A}(l_e)^*} \leq \kappa^{c^2|I|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|I_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa|)!}{|I_\tau|!},$$

где $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varkappa = 1 \vee (c(n - d_1)C)$, $C = \sup\{|C_{ij}^k| : i, j, k\}$, а $\{C_{ij}^k\}$ – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ относительно базиса e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть θ_I – величина, стоящая в правой части неравенства, e^I – базисный моном и $l = \deg(e^I)$. С учетом (3.1) достаточно доказать, что $|\alpha_I(v)| \leq \theta_I$ для всех (неупорядоченных) мономов v от элементов базиса e . Фиксируем $1 \leq i, j \leq d_{c-1}$ и положим $T_i = \text{ad}(e_i)$, $T_j = \text{ad}(e_j) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Пусть $\mathcal{S}_{ij}$ – множество всех (неупорядоченных) мономов в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ от элементов подмножества $\{e_i, e_j, T_i^\varepsilon T_j^a(e_i) : a \geq 1, \varepsilon = 0, 1\}$ подалгебры Ли в $\mathfrak{g}$, порожденной элементами e_i, e_j . Для $v, w \in \mathcal{S}_{ij}$ запишем $v > w$, если моном v имеет множитель $T_j^{a_1}(e_i) \dots T_j^{a_k}(e_i)$ такой, что $k > s$ для каждого множителя $T_j^{b_1}(e_i) \dots T_j^{b_s}(e_i)$ монома w . Ясно, что отношение $>$ можно продолжить до структуры линейного упорядочения на множестве $\mathcal{S}_{ij}$. Пользуясь леммой 2.1 и тем, что $\mathfrak{g}^{(c+1)} = \{0\}$, получаем равенство

$$T_i(e_j^p) = \sum_{s=1}^p (-1)^s \left(\binom{p}{s} - \binom{p-4}{s-3} \right) e_j^{p-s} T_j^s(e_i) = \sum_{s=1}^c (-1)^s \pi_s^{(p)} e_j^{p-s} T_j^s(e_i), \quad (3.2)$$

где $\pi_s^{(p)} = \binom{p}{s} - \binom{p-4}{s-3}$ при $s \leq p \leq c$ и $\pi_s^{(p)} = 0$ при $s < c$. Фиксируем моном $e_j^p e_i^q$ и натуральное число k , $k \leq p \wedge q$. Покажем, что $e_j^p e_i^q$ можно записать в виде конечной линейной комбинации мономов из $\mathcal{S}_{ij}$ с выбранными “верхними” мономами, а именно

$$e_j^p e_i^q = \sum_{s_1, \dots, s_k=1}^c \lambda_{s_1 \dots s_k} v_{s_1 \dots s_k} + \sum_{v_t^{(k)} \in \mathcal{S}_{ij}} \lambda_t^{(k)} v_t^{(k)},$$

причем $v_{s_1 \dots s_k} > \sup\{v_t^{(k)} : \lambda_t^{(k)} \neq 0\}$ и $|\lambda_{s_1 \dots s_k}| \geq \sup\{|\lambda_t^{(k)}|\}$ для всех $s_1, \dots, s_k$, где

$$\begin{aligned} v_{s_1 \dots s_k} &= e_j^{p - \sum_{m=1}^k s_m} T_j^{s_k}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k}, \\ \lambda_{s_1 \dots s_k} &= (-1)^{k + \sum_{m=1}^k s_m} \prod_{b=1}^k \pi_{s_b}^{(p - \sum_{m=1}^{b-1} s_m)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся индукцией по k . При $k = 1$ требуемое равенство вытекает из соотношения (3.2). Действительно,

$$e_j^p e_i^q = -T_i(e_j^p) e_i^{q-1} + e_i e_j^p e_i^{q-1} = \sum_{s=1}^c (-1)^{s+1} \pi_s^{(p)} e_j^{p-s} T_j^s(e_i) e_i^{q-1} + e_i e_j^p e_i^{q-1}$$

и $e_j^{p-s} T_j^s(e_i) e_i^{q-1} > e_i e_j^p e_i^{q-1}$ для всех s по предположению. Заметим, что $\lambda_{s_1} = (-1)^{s_1+1} \pi_{s_1}^{(p)}$.

Теперь допустим, что утверждение доказано для $k - 1$. Тогда

$$e_j^p e_i^q = \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}=1}^c \lambda_{s_1 \dots s_{k-1}} v_{s_1 \dots s_{k-1}} + \sum_{v_t^{(k-1)} \in \mathcal{S}_{ij}} \lambda_t^{(k-1)} v_t^{(k-1)}.$$

Рассмотрим моном $v_{s_1 \dots s_{k-1}} = e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k+1}$. Пользуясь соотношением (3.2), имеем

$$\begin{aligned}
 v_{s_1 \dots s_{k-1}} &= e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} e_i T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad - e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_i(T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i)) e_i^{q-k} \\
 &= -T_i(e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m}) T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad + e_i e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{k-1} e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_i T_j^{s_m}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &= \sum_{s_k=1}^c (-1)^{s_k+1} \pi_{s_k}^{(p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m)} e_j^{p-\sum_{m=1}^k s_m} T_j^{s_k}(e_i) T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{k-1} e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_i T_j^{s_m}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad + e_i e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k}.
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
 e_j^p e_i^q &= \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}=1}^c \sum_{s_k=1}^c (-1)^{s_k+1} \lambda_{s_1 \dots s_{k-1}} \pi_{s_k}^{(p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m)} v_{s_1 \dots s_k} \\
 &\quad - \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}=1}^c \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{s_1 \dots s_{k-1}} e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_i T_j^{s_m}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad + \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}=1}^c \lambda_{s_1 \dots s_{k-1}} e_i e_j^{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m} T_j^{s_{k-1}}(e_i) \dots T_j^{s_1}(e_i) e_i^{q-k} \\
 &\quad + \sum_{v_t^{(k-1)} \in \mathcal{S}_{ij}} \lambda_t^{(k-1)} v_t^{(k-1)} \\
 &= \sum_{s_1, \dots, s_k=1}^c \lambda_{s_1 \dots s_k} v_{s_1 \dots s_k} + \sum_{v_t^{(k)} \in \mathcal{S}_{ij}} \lambda_t^{(k)} v_t^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Этим доказано требуемое утверждение о разложении.

Скажем, что верхние мономы в последнем разложении $e_j^p e_i^q$ являются результатом элементарного преобразования, подчиненного $e_j^p e_i^q$.

Пусть теперь v – моном в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ от элементов базиса e , и пусть $\deg(v) \leq l$ (в противном случае $\alpha_I(v) = 0$). Моном v разлагается единственным образом по упорядоченным мономам e^J . Это разложение получается действием последовательности элементарных преобразований, подчиненных v . Заметим, что каждое элементарное преобразование, подчиненное моному $e_j^p e_i^q$, не уменьшает его нильпотентную степень. А именно, учитывая, что

$$T_j^{s_m}(e_i) = \sum_{b(s_m) > b(s_m-1) > \dots > b(1) > j} \Gamma_{ij}^{b(s_m)} e_{b(s_m)}$$

при $\deg(e_{b(s_m)}) \geq \deg(e_i) + s_m \deg(e_j)$, $s_m \leq c^*$ и $\Gamma_{ij}^{b(s_m)} = C_{ji}^{b(1)} C_{jb(1)}^{b(2)} \cdots C_{jb(s_m-1)}^{b(s_m)}$, мы получаем

$$e_j^p e_i^q = \sum_{s_1, \dots, s_k=1}^c \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{b(s_1)} \cdots \Gamma_{ij}^{b(s_k)} \lambda_{s_1 \dots s_k} e_j^{p-\sum_{m=1}^k s_m} e_{b(s_k)} \cdots e_{b(s_1)} e_i^{q-k} + \sum_{v_t^{(k)} \in S_{ij}} \lambda_t^{(k)} v_t^{(k)}, \quad (3.3)$$

$$|\lambda_{s_1 \dots s_k}| = \pi_{s_1}^{(p)} \pi_{s_2}^{(p-s_1)} \cdots \pi_{s_k}^{(p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m)} \leq \binom{p}{s_1} \binom{p-s_1}{s_2} \cdots \binom{p-\sum_{m=1}^{k-1} s_m}{s_k} \leq p! \left(\left(p - \sum_{m=1}^k s_m \right)! \right)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{b(s_1)} \cdots \Gamma_{ij}^{b(s_k)} \lambda_{s_1 \dots s_k} \right| \leq ((n-d_1)C)^\beta p! ((p-\beta)!)^{-1},$$

где $\beta = \sum_{m=1}^k s_m$.

Пусть теперь $e_j^{p_j^{(\tau)}} e_i^{p_i^{(\sigma)}}$, $d_{\sigma-1} < i \leq d_\sigma$, $d_{\tau-1} < j \leq d_\tau$, $\sigma \leq \tau$, — это все мономы, участвующие в последовательных элементарных преобразованиях, подчиненных v , с помощью которых получается базисный моном e^I . Тогда коэффициенты всех мономов, полученных этими элементарными преобразованиями, по модулю больше, чем

$$(c(n-d_1)C)^{\sum_{i,j} \beta_{ij}^{(\sigma,\tau)}} \prod_{\sigma \leq \tau, i,j} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_{ij}^{(\sigma,\tau)})!)^{-1}, \quad \beta_{ij}^{(\sigma,\tau)} = \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma,\tau)}} s_m^{(\sigma,\tau)}.$$

Упростим последнее произведение в коэффициенте при базисном мономе e^I . При фиксированных τ и σ , $\sigma \leq \tau$, обозначим через $\Lambda_{\sigma,\tau}$ множество всех индексов j таких, что моном $e_j^{p_j^{(\tau)}} e_i^{p_i^{(\sigma)}}$ появляется в процедуре элементарных преобразований для некоторого i , $d_{\sigma-1} < i \leq d_\sigma$. Множество всех таких индексов i для данного j обозначается через $M_{j\sigma}$. Заметим, что (см. (3.3))

$$\prod_{\sigma \leq \tau} \prod_{i,j} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_{ij}^{(\sigma,\tau)})!)^{-1} = \prod_{\sigma \leq \tau} \prod_{j \in \Lambda_{\sigma,\tau}} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_j^{(\tau)})!)^{-1},$$

где $\beta_j^{(\tau)} = \sum_{i \in M_{j\sigma}} \beta_{ij}^{(\sigma,\tau)}$, $M_j = \bigcup_{\sigma \leq \tau} M_{j\sigma}$. Далее,

$$\prod_{\sigma \leq \tau} \prod_{j \in \Lambda_{\sigma,\tau}} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_j^{(\tau)})!)^{-1} \leq \frac{P_\tau!}{(P_\tau - \beta_\tau)!},$$

где $P_\tau = \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}} p_j^{(\tau)}$, $\beta_\tau = \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}} \beta_j^{(\tau)}$. Из равенства (3.3) вытекает, что $P_\tau - \beta_\tau \leq |I_\tau|$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \beta_\tau &= \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} s_m^{(\sigma, \tau)} \\ &\leq \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) - \deg(e_i)}{\deg(e_j)} \\ &= \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) - \sigma}{\tau} \\ &\leq \sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) - 1}{\tau}. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) - 1}{\tau} \leq \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa| \quad (3.4)$$

для всех τ , $1 \leq \tau \leq c-1$. Применим индукцию по $\tau = c - k$, $1 \leq k \leq c-1$.

При $\tau = c-1$, пользуясь (3.3), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \leq c-1} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, c-1}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, c-1)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, c-1)})}) - 1}{c-1} \\ &= \sum_{j \in \Lambda_{1, c-1}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(1, c-1)}} c^* \wedge 1 \leq |I_c|. \end{aligned}$$

Пусть $\tau < c-1$. Тогда

$$\sum_{\sigma \leq \tau} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}, i \in M_{j\sigma}} \sum_{m=1}^{k_{ij}^{(\sigma, \tau)}} c^* \wedge \frac{\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) - 1}{\tau} \leq \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) N_\kappa^{(\tau)},$$

где $N_\kappa^{(\tau)}$ — число всех $e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}$, $\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) = \kappa$. Если $N_\kappa^{(\tau)} \leq |I_\kappa|$ для всех κ , $\kappa > \tau$, то доказательство очевидно. Пусть $N_\lambda^{(\tau)} > |I_\lambda|$ при некотором $\lambda \geq \tau+1$ и $N_\kappa^{(\tau)} \leq |I_\kappa|$ для всех κ , $\tau+1 \leq \kappa < \lambda$. Это означает, что некоторые элементы $e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}$, $\deg(e_{b(s_m^{(\sigma, \tau)})}) = \lambda$, должны возникать при других элементарных преобразованиях. Иначе мы не могли бы получить базисный моном e^I . По

предположению индукции получаем

$$\begin{aligned} N_\lambda^{(\tau)} &= \sum_{\sigma \leq \lambda} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \lambda}^*} p_j^{(\lambda)} = \sum_{\sigma \leq \lambda} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \lambda}^*} (p_j^{(\lambda)} - \beta_j^{(\lambda)}) + \sum_{\sigma \leq \lambda} \sum_{j \in \Lambda_{\sigma, \lambda}^*} \beta_j^{(\lambda)} \\ &\leq |I_\lambda| + \sum_{\alpha=\lambda+1}^c c^* \wedge (\alpha - \lambda) N_\alpha^{(\lambda)}, \end{aligned}$$

где $\Lambda_{\sigma, \lambda}^*$ – соответствующее подмножество $\Lambda_{\sigma, \lambda}$, а $N_\alpha^{(\lambda)}$ – число некоторых элементов базиса e , имеющих нильпотентную степень α . Отсюда следует, что

$$\sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) N_\kappa^{(\tau)} \leq \sum_{\kappa=\tau+1}^\lambda c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa| + \sum_{\kappa=\lambda+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) (N_\kappa^{(\lambda)} + N_\kappa^{(\tau)}).$$

Используя такое же рассуждение для $N_\kappa^{(\lambda)} + N_\kappa^{(\tau)}$, $\kappa > \lambda$, получим

$$\sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) N_\kappa^{(\tau)} \leq \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa|.$$

Тем самым неравенство (3.4) доказано.

Теперь, пользуясь (3.4), мы выводим, что

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \leq \tau, i, j} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_{ij}^{(\sigma, \tau)})!)^{-1} &= \prod_{\tau=1}^{c-1} \prod_{\sigma \leq \tau} \prod_{j \in \Lambda_{\sigma, \tau}} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_j^{(\tau)})!)^{-1} \\ &\leq \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(P_\tau - \beta_\tau + \beta_\tau)!}{(P_\tau - \beta_\tau)!} \leq \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|I_\tau| + \beta_\tau)!}{|I_\tau|!} \\ &\leq \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|I_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa|)!}{|I_\tau|!}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства применим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{i, j} \beta_{ij}^{(\sigma, \tau)} &= \sum_{\tau=1}^{c-1} \beta_\tau \leq \sum_{\tau=1}^{c-1} \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |I_\kappa| \\ &\leq \sum_{\tau=2}^c \left(\sum_{m=1}^{\tau-1} c^* \wedge m \right) |I_\tau| \leq \sum_{\tau=2}^c \left(\sum_{m=1}^{c-1} c^* \wedge m \right) |I_\tau| \leq c^2 \sum_{\tau=2}^c |I_\tau| \leq c^2 |I|. \end{aligned}$$

Тогда

$$(c(n - d_1)C)^{\sum_{i, j} \beta_{ij}^{(\sigma, \tau)}} \prod_{\tau, \sigma \leq \tau, i, j} p_j^{(\tau)}! ((p_j^{(\tau)} - \beta_{ij}^{(\sigma, \tau)})!)^{-1} \leq \theta_I,$$

откуда получаем $|\alpha_I(v)| \leq \theta_I$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценку из леммы 3.2 можно упростить в случае наличия в $\mathfrak{g}$ специального треугольного базиса e . Например, допустим, что $[[e_i, e_j], e_j] = 0$ для всех i, j , $i < j$. Тогда $c^* = 1$ и

$$\|\alpha_I\|_{\mathcal{A}(l_e)^*} \leq \varkappa^{c^2 |I|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|I_\tau| + \dots + |I_c|)!}{|I_\tau|!}.$$

Такие базисы называются *базисами Кляйнке–Широкова* (см. ниже п. 3.2). Они имеют ряд преимуществ, обсуждаемых в следующем пункте.

3.2. Рост треугольного базиса. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, c – ее степень нильпотентности, $e = (e_1, \dots, e_n) = \mathfrak{e}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{e}_c$ – ее треугольный базис, $\mathfrak{e}_s = (e_{d_{s-1}+1}, \dots, e_{d_s}) \in \mathfrak{g}^{(s)} \setminus \mathfrak{g}^{(s+1)}$, $c^* = \max\{s: \text{ad}^s(e_j)(e_i) \neq 0, i < j\}$, и пусть $\mathcal{A}$ – банахова алгебра, обертывающая $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{g}$ вложена в банахову алгебру $\mathcal{A}$ таким образом, что ассоциативная подалгебра в $\mathcal{A}$, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$, плотна в $\mathcal{A}$. Согласно [14], [15] алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна по модулю ее радикала Джекобсона. Поэтому $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \text{Rad } \mathcal{A}$ и все e_i , $i > d_1$, квазинильпотентны в $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$ конус всех полиномов от d_1 коммутирующих переменных $x = (x_1, \dots, x_{d_1})$ с положительными коэффициентами и с нулевым свободным членом. Для любой банаховой алгебры, обертывающей $\mathfrak{g}$, будем через $\|e_i\|_{\mathcal{A}}$ обозначать набор $(\|e_1\|_{\mathcal{A}}, \dots, \|e_{d_1}\|_{\mathcal{A}})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\omega = \{\omega_k^{(i)} \in \mathbb{R}_+ : d_1 < i \leq n, k \in \mathbb{N}\}$ – такая последовательность, что $\lim_k \omega_k^{(i)} = 0$ для всех i . Скажем, что треугольный базис e алгебры $\mathfrak{g}$ имеет рост ω , если существуют полиномы $\gamma_i(x) \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$ такие, что $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}}^{1/k} \leq \gamma_i(\|e_1\|_{\mathcal{A}}) \omega_k^{(i)}$ для каждой банаховой алгебры $\mathcal{A}$, обертывающей $\mathfrak{g}$, $i > d_1$. В частности, $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}}^{1/k} = O(\omega_k^{(i)})$, $i > d_1$. Скажем также, что e имеет нормальный рост, если $\omega_k^{(i)} = (1/k)^{\theta_i}$ для всех i , где $\theta_i \geq \sum_{m=1}^{\tau-1} c^* \wedge m$ для всех $e_i \in \mathfrak{e}_\tau$.

Появление полиномов $\gamma_i(x)$ из конуса иллюстрируется следующими примерами.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли степени нильпотентности 2, $\mathcal{A}$ – банахова алгебра, обертывающая $\mathfrak{g}$, а e – треугольный базис в $\mathfrak{g}$, ассоциированный с образующими Ли $e_1, \dots, e_{d_1}$ (см. п. 3.1). Фиксируем i , $i > d_1$. Тогда $e_i = [e_s, e_t]$ для некоторых s, t , $1 \leq s < t \leq d_1$. Учитывая, что $\mathfrak{g}^{(3)} = \{0\}$, мы выводим формулу Кляйнеке–Широкова $k! e_i^k = T_s^k(e_t^k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $T_s \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $T_s = L_{e_s} - R_{e_s}$. Тогда

$$\|e_i^k\|_{\mathcal{A}} \leq (k!)^{-1} \|T_s\|_{\mathcal{A}}^k \|e_t\|_{\mathcal{A}}^k \leq (k!)^{-1} (2\|e_s\|_{\mathcal{A}} \|e_t\|_{\mathcal{A}})^k,$$

где $\|T_s\|_{\mathcal{A}}$ – операторная норма T_s . Отсюда $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}}^{1/k} \leq (k!)^{-1/k} \gamma_i(\|e_1\|_{\mathcal{A}})$, где $\gamma_i(x) = 2x_s x_t$ – моном из конуса $\mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Но по формуле Стирлинга имеем $(k!)^{-1/k} \sim k^{-1}$ с точностью до константы. Тем самым, $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}}^{1/k} = O(k^{-1})$. Таким образом, рост базиса e задается последовательностью $\omega = \{\omega_k^{(i)}\}$, $\omega_k^{(i)} = k^{-1}$ для всех i , $i > d_1$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. базис e имеет нормальный рост.

Следующее предложение доставляет более сложный пример.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли степени нильпотентности c , а e – ее треугольный базис, ассоциированный с образующими Ли $e_1, \dots, e_{d_1}$. Положим $\omega_k^{(i)} = (1/k)^{\tau-1}$ при $d_{\tau-1} < i \leq d_\tau$, $2 \leq \tau \leq c$, $k \in \mathbb{N}$. Если $[[e_i, e_j], e_j] = 0$ для всех $i < j$ (в этом случае $c^* = 1$), то $\omega = \{\omega_k^{(i)}\}$ есть рост базиса e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем i , $i > d_1$, и будем считать, что $d_{\tau-1} < i \leq d_\tau$ (тем самым, $\deg(e_i) = \tau$). Покажем сначала, что $e_i = [e_s, e_t]$ для некоторых s ,

$1 \leq s \leq d_1$, и t , $d_{\tau-2} < t \leq d_{\tau-1}$. При $\tau = 2$ это очевидно. Пусть $\tau > 2$. По определению (см. п. 3.1) e_i есть лиево слово длины τ от образующих Ли $e_1, \dots, e_{d_1}$. Тогда $e_i = [e_s, u]$ для некоторого s , $1 \leq s \leq d_1$, и некоторого лиева слова u длины $\tau - 1$. Однако $u = \sum_{d_{\tau-2} < t \leq d_{\tau-1}} a_t e_t + \sum_{t > d_{\tau-1}} a_t e_t$, откуда

$$e_i = \sum_{d_{\tau-2} < t \leq d_{\tau-1}} a_t [e_s, e_t] + \sum_{t > d_{\tau-1}} a_t [e_s, e_t] \in \sum_{\deg([e_s, e_t]) = \tau} a_t [e_s, e_t] + \mathfrak{g}^{(\tau+1)}.$$

Пусть $([e_s, e_{t_1^*}], \dots, [e_s, e_{t_m^*}])$ – свободная часть множества коммутаторов

$$\{[e_s, e_t] : 1 \leq s \leq d_1, d_{\tau-2} < t \leq d_{\tau-1}, \deg([e_s, e_t]) = \tau\}.$$

Последние элементы принадлежат базису e . Кроме того, $e_i - \sum_{k=1}^m b_k [e_s, e_{t_k^*}] \in \mathfrak{g}^{(\tau+1)}$ для некоторого b_k . Поэтому $e_i - \sum_{k=1}^m b_k [e_s, e_{t_k^*}] = \sum_{j > d_\tau} \alpha_j e_j$. Однако e_i также был элементом базиса e , так что $e_i - \sum_{k=1}^m b_k [e_s, e_{t_k^*}] = 0$ и $e_i = [e_s, e_{t_k^*}]$ для некоторого k .

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – банахова алгебра, обертывающая алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Докажем предложение индукцией по τ . Как в примере 3.1, получаем, что $(-1)^k k! e_i^k = T_t^k(e_s^k)$ и $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}} \leq (k!)^{-1} \|e_s\|_{\mathcal{A}}^k \|T_t^k\|_{\mathcal{A}}$, где $T_t \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $T_t = L_{e_t} - R_{e_t}$. В частности, для $\tau = 2$ имеем

$$\|e_i^k\|_{\mathcal{A}} \leq (k!)^{-1} (2\|e_s\|_{\mathcal{A}} \|e_t\|_{\mathcal{A}})^k.$$

Следовательно, $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}}^{1/k} \leq k^{-1} \gamma_i(\|e_1\|_{\mathcal{A}})$, где $\gamma_i(x) = 2x_s x_t$.

При $\tau > 2$ имеем $\deg(e_t) = \tau - 1$ и по предположению индукции получаем $\|e_t^k\|_{\mathcal{A}} \leq \gamma_t(\|e_1\|_{\mathcal{A}})^k (1/k!)^{\tau-2}$ для некоторого $\gamma_t(x) \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_t^k\|_{\mathcal{A}} &= \left\| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} L_{e_t}^{k-m} R_{e_t}^m \right\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \|e_t^{k-m}\|_{\mathcal{A}} \|e_t^m\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \gamma_t(\|e_1\|_{\mathcal{A}})^k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \left(\frac{1}{(k-m)! m!} \right)^{\tau-2} \\ &\leq \gamma_t(\|e_1\|_{\mathcal{A}})^k \left(\frac{1}{k!} \right)^{\tau-2} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m}^{\tau-1} \leq (2^{\tau-1} \gamma_t(\|e_1\|_{\mathcal{A}}))^k \left(\frac{1}{k!} \right)^{\tau-2}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}} \leq \gamma_i(\|e_1\|_{\mathcal{A}})^k (1/k!)^{\tau-1}$, где $\gamma_i(x) = 2^{\tau-1} x_s \gamma_t(x) \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Предложение доказано.

Треугольный базис, возникающий в предложении 3.2, называется *базисом Кляйнеке–Широкова*. Таким образом, рост базиса Кляйнеке–Широкова нормален. Отметим в заключение, что примером базиса Кляйнеке–Широкова является канонический базис алгебры Ли всех строго верхнетреугольных матриц.

§ 4. Голоморфные функции

В этом параграфе изучается “задача об абсолютном базисе” в алгебре всех голоморфных (в частности, целых) функций от элементов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

4.1. Алгебры Фреше $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$. Пусть F – конечномерная алгебра Ли, а $e = (e_1, \dots, e_n)$ – такой ее базис, что $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ является базисом в $[F, F]$ для некоторого m . Пространство $\Delta(F)$ всех характеров Ли отождествляется с пространством $\mathbb{C}^m$ посредством отображения $\Delta(F) \rightarrow \mathbb{C}^m$, $a \mapsto (a(e_1), \dots, a(e_m))$, где $m = \dim(F/F^{(2)})$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ полидиск D_r полирадиуса $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ с центром в начале координат. Алгебра $\mathcal{O}_F(D_r)$ всех голоморфных функций от элементов алгебры Ли F определяется (см. [8], [9]) как хаусдорфово пополнение Фреше универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(F)$ относительно топологии, порожденной семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} : s < r\}$, где $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})}$ – норма на $\mathcal{U}(F)$, наследованная из банаховой обертывающей алгебры $\mathcal{A}(l_{e,s})$ (см. §3) относительно l_1 -нормы $l_{e,s}$ на F . Если $r = \infty$ (т.е. все $r_i = +\infty$), то $\mathcal{O}_F(\mathbb{C}^n)$ называется алгеброй всех целых функций от элементов базиса e . Известно [8], что если $\mathfrak{g}$ – разрешимая алгебра Ли, то пространство всех непрерывных характеров на $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$ отождествляется с суженным полидиском $D_{r_s} \subseteq \mathbb{C}^m = \Delta(\mathfrak{g})$, где $r_s = (r_1, \dots, r_m)$, $m = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(2)})$. Кроме того, если $r_s = t_s$, то $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r) = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_t)$ с точностью до топологического изоморфизма алгебр (см. [9]). Поэтому алгебра $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$ не зависит от радикальной части $r_{m+1}, \dots, r_n$, а полностью определяется полупростой частью r_s . Доказано также, что факторалгебра $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)/\text{Rad } \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$ по радикалу Джекобсона топологически изоморфна алгебре $\mathcal{O}(D_{r_s})$ всех обычных голоморфных функций на полидиске $D_{r_s} \subseteq \Delta(\mathfrak{g})$.

Заметим, что алгебра $\mathcal{O}_F(D_r)$ отождествляется с обратным пределом банаховых обертывающих алгебр. А именно, рассмотрим введенное в §3 семейство $\mathcal{A}(l_{e,s})$, $0 < s < r$, банаховых обертывающих алгебр с каноническими вложениями $\varphi_s : F \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,s})$. Возьмем s, t , $0 < t \leq s < r$, и $x = \sum_i a_i(s_i^{-1}e_i) \in F$. Тогда

$$\|\varphi_t(x)\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \leq \max(s^{-1}t)l_{e,s}(x) \leq l_{e,s}(x),$$

так что $\|\varphi_t\| \leq 1$ в предположении, что алгебра F снабжена l_1 -нормой $l_{e,s}$ относительно базиса $s^{-1}e$. По лемме 3.1 существует гомоморфизм алгебр $u_{ts} : \mathcal{A}(l_{e,s}) \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,t})$ такой, что $u_{ts}\varphi_s = \varphi_t$, $\|u_{ts}\| \leq 1$. В частности, u_{ts} сводится к тождественному отображению на $\mathcal{U}(F)$. Поэтому $\mathfrak{A}_{e,r} = \{\mathcal{A}(l_{e,s}), u_{ts} : 0 < s, t < r\}$ – проективная система банаховых алгебр. Пусть $\varprojlim \mathfrak{A}_{e,r}$ – ее обратный предел, $\chi_s : \varprojlim \mathfrak{A}_{e,r} \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,s})$, $s < r$, – семейство канонических проекций, а $\varphi_r : F \rightarrow \varprojlim \mathfrak{A}_{e,r}$, $\varphi_r(x) = (\varphi_s(x))_{s < r}$, – гомоморфизм алгебр Ли. Тогда $\varprojlim \mathfrak{A}_{e,r}$ есть алгебра Аренса–Майкла, являющаяся пополнением $\mathcal{U}(F)$ по Хаусдорфу относительно семейства мультипликативных полунорм $\{\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} : s < r\}$, т.е. $\varprojlim \mathfrak{A}_{e,r} = \mathcal{O}_F(D_r)$. Для алгебры всех целых функций имеем $\mathcal{O}_F(\mathbb{C}^n) = \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$, где $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ – неограниченно возрастающее подмножество (см. §2), а $\mathfrak{A}_{e,S} = \{\mathcal{A}(l_{e,s}), u_{ts} : s, t \in S\}$ – сопутствующая проективная система.

ЛЕММА 4.1. *Пара $(\varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}, \varphi_S)$ является оболочкой Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{U}(F)$, т.е. $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F(\mathbb{C}^n) = \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$ с точностью до топологического изоморфизма для некоторого неограниченно возрастающего подмножества $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$. В частности, $\mathcal{O}_F$ есть алгебра Фреше.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ – банахова алгебра, $\pi: \mathcal{U}(F) \rightarrow \mathcal{A}$ – гомоморфизм алгебр, а k – такое натуральное число, что $k \geq \max\{\|\pi(e_i)\|_{\mathcal{A}}: 1 \leq i \leq n\}$. Поскольку S – неограниченно возрастающее подмножество $\mathbb{R}_+^n$, имеем $\min(s) \geq k$ для некоторого $s \in S$ (см. § 2). Возьмем $x = \sum_i a_i (s_i^{-1} e_i) \in F$. Тогда $\|\pi(x)\|_{\mathcal{A}} \leq l_{e,s}(x)(\min(s))^{-1} k \leq l_{e,s}(x)$. По лемме 3.1 существует единственный ограниченный гомоморфизм алгебр $\pi': \mathcal{A}(l_{e,s}) \rightarrow \mathcal{A}$ такой, что $\pi' \cdot \varphi_s = \pi$. Положим $\tilde{\pi} = \pi' \cdot \chi_s$, так что $\tilde{\pi}: \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S} \rightarrow \mathcal{A}$. Очевидно, $\tilde{\pi} \cdot \varphi_S = \pi$. Поскольку образ отображения φ_S порождает плотную подалгебру в $\varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$, мы заключаем, что гомоморфизм $\tilde{\pi}$ единствен. Таким образом, пара $(\varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}, \varphi_S)$ обладает свойством проективной универсальности (см. п. 2.2). Отсюда вытекает, что $\varprojlim \mathfrak{A}_{e,S} = \mathcal{O}_F$ с точностью до топологического изоморфизма. Наконец, заменяя S на счетное неограниченно возрастающее подмножество $\mathbb{R}_+^n$, мы получаем, что $\mathcal{O}_F$ есть алгебра Фреше и Аренса–Майкла. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом e . Тогда $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$ – окаймленное пополнение $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Действительно, так как $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})}$ – норма на $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (см. § 3) при каждом $s < r$, то $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – плотная подалгебра в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$. Далее, по лемме 3.1 тривиальный характер Ли $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывно продолжается до характера на $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_r)$ есть окаймленное пополнение $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Теперь допустим, что F – конечномерная алгебра Ли с базисом e . Выберем точку $a \in \Delta(F)$ и рассмотрим подалгебру Ли $F - a$ (см. замечание 2.2) в $\mathcal{U}(F)$, содержащую все элементы $u - a(u)$, $u \in F$. Положим $\mathcal{O}_F(D_{a,r}) = \mathcal{O}_{F-a}(D_r)$ для полидиска $D_{a,r} \subseteq \mathbb{C}^n$ полирадиуса r с центром a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть e – треугольный базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $a \in \Delta(\mathfrak{g})$, а $\mathfrak{S}_e(D_{a,r})$ – подпространство в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$, состоящее из всех абсолютно сходящихся степенных рядов $\sum_{j_s} x_{j_s} (e_s - a)^{j_s}$. Тогда множество $\mathfrak{m}_{e-a}$ всех упорядоченных мономов $(e - a)^J$ от элементов базиса $e - a$ является слабо однородным базисом в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$, который становится однородным, если базис e градуирован. Подпространство $\mathfrak{S}_e(D_{a,r})$ замкнуто, имеем

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r}) = \mathfrak{S}_e(D_{a,r}) \oplus \text{Rad } \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$$

и $\mathfrak{S}_e(D_{a,r}) = \mathcal{O}(D_{a,r_s})$ с точностью до топологического изоморфизма. Более того, если Λ – подмножество в $\mathbb{Z}_+^n$, а $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r})$ – подпространство в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$, состоящее из всех формальных степенных рядов $\sum_J x_J (e - a)^J$ таких, что $x_J = 0$ при всех $J \in \Lambda$, то $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r})$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает из предложения 3.1 и определения $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$; см. также [9]. Второе утверждение легко сводится к случаю, когда $a = 0$, а этот случай был доказан в [9]. Наконец, пусть $\{\alpha_{r,J}\}$ – семейство координатных линейных функционалов на $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$ относительно слабо однородного базиса $\{(e - a)^J\}$ в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$ (см. замечание 2.1). Тогда $f = \sum_J \alpha_{r,J}(f)(e - a)^J$ для всех $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$. Поэтому $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r}) = \bigcap_{J \in \Lambda} \ker(\alpha_{r,J})$, т. е. подпространство $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r})$ замкнуто.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$. Если подмножество $\{(e - a)^J\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ является

безусловным базисом в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$, то для каждого подмножества $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}_+^n$ имеем разложение $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r}) = \mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r}) \oplus \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda}(D_{a,r})$ в топологическую прямую сумму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространства $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r})$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda}(D_{a,r})$ замкнуты по предложению 4.1. Ясно, что $\mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r}) \cap \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda}(D_{a,r}) = \{0\}$ (см. замечание 2.1). Теперь возьмем $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$. Тогда f единственным образом разлагается в безусловно сходящийся степенной ряд: $f = \sum_J x_J(e-a)^J$. Следовательно, его подряды $f_1 = \sum_{J \in \Lambda} x_J(e-a)^J$ и $f_2 = \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda} x_J(e-a)^J$ сходятся безусловно в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$, и $f = f_1 + f_2$. Однако $f_2 \in \mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r})$, а $f_1 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda}(D_{a,r})$. Поскольку $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$ – пространство Фреше, отсюда вытекает, что $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r}) = \mathfrak{S}_{\Lambda}(D_{a,r}) \oplus \mathfrak{S}_{\mathbb{Z}_+^n \setminus \Lambda}(D_{a,r})$. Следствие доказано.

4.2. Абсолютный базис в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли степени нильпотентности c , $e = (e_1, \dots, e_n)$ – ее треугольный базис, $c^* = \max\{s: \text{ad}^s(e_j)(e_i) \neq 0, i < j\}$, $\{C_{ij}^k\}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе e , $C = \max\{|C_{ij}^k|: i, j, k\}$, а $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ – неограниченно возрастающее подмножество, состоящее из всех наборов $t = (t_1, \dots, t_n)$ таких, что $t_k \leq t_i t_j$ всякий раз, когда $d_{\sigma-1} < i \leq d_{\sigma}$, $d_{\tau-1} < j \leq d_{\tau}$, $1 \leq \sigma \leq \tau$, $i < j$ и $k > d_{\tau}$. Тогда $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} = \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$ по лемме 4.1.

ЛЕММА 4.2. Пусть e – треугольный базис нормального роста в $\mathfrak{g}$. Тогда для каждого $t \in S$ найдется $s \in S$, $s > t$, такой, что

$$u_{ts} = \sum_J (s^{-1}t)^J \alpha_{s,J} \otimes (t^{-1}e)^J, \quad \sum_J (s^{-1}t)^J \|\alpha_{s,J}\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \|(t^{-1}e)^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} < \infty,$$

где $u_{ts}: \mathcal{A}(l_{e,s}) \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,t})$ – гомоморфизм алгебр из обратной системы $\mathfrak{A}_{e,S}$, а $\alpha_{s,J}$ – координатный линейный функционал на $\mathcal{A}(l_{e,s})$ относительно слабо однородного базиса $\{(s^{-1}e)^J\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f \in \mathcal{A}(l_{e,s})$. Подмножество $\{(s^{-1}e)^J\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ является слабо однородным базисом в $\mathcal{A}(l_{e,s})$ (см. предложение 3.1), поэтому имеем единственное разложение $f = \sum_J \alpha_{s,J}(f)(s^{-1}e)^J$ в формальный степенной ряд. Аналогично, $u_{ts}(f) = \sum_J \alpha_{t,J}(u_{ts}(f))(t^{-1}e)^J$. Поскольку u_{ts} сводится к тождественному отображению на $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, отсюда вытекает, что $\alpha_{t,J}(u_{ts}(f)) = (s^{-1}t)^J \alpha_{s,J}(f)$ (см. определение 2.1). Итак,

$$u_{ts}(f) = \sum_J (s^{-1}t)^J (\alpha_{s,J} \otimes (t^{-1}e)^J)(f).$$

Положим $\Gamma_{ts} = \sum_J s^{-J} \|\alpha_{s,J}\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}$. Докажем, что $\Gamma_{ts} < \infty$. По лемме 3.2 имеем

$$\|\alpha_{s,J}\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \leq \varkappa_s^{c^2|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|J_{\tau}| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_{\kappa}|)!}{|J_{\tau}|!},$$

где $\varkappa_s = 1 \vee (c(n - d_1)C_s)$, $C_s = \max\{|C_{ij}^k(s)|: i, j, k\}$, а $C_{ij}^k(s)$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $s^{-1}e$. Заметим, что

$$[s_i^{-1}e_i, s_j^{-1}e_j] = s_i^{-1}s_j^{-1}[e_i, e_j] = \sum_{k>j} s_k(s_i s_j)^{-1} C_{ij}^k s_k^{-1} e_k$$

для всех $i, j, i < j$. Учитывая, что $s \in S$, имеем $C_s \leq \max\{s_k(s_i s_j)^{-1} |C_{ij}^k| : i < j < k\} \leq C$. В частности, $\varkappa_s \leq \varkappa = 1 \vee (c(n - d_1)C)$. По условию рост базиса e нормален. По определению 3.1 имеем $\|e_i^k\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}^{1/k} \leq \gamma_i(t_s)(1/k)^{\theta_i}$, где $\theta_i \geq \sum_{\iota=1}^{\tau-1} c^* \wedge \iota$ при $e_i \in \mathfrak{e}_\tau$, $\tau > 1$, $t_s = (t_1, \dots, t_{d_1})$, $t_i = \|e_i\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}$ и $\gamma_i(x) \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Однако $c^* \wedge \iota \leq n$ для всех ι . Поэтому $((c^* \wedge \iota)k)^{(c^* \wedge \iota)} \leq n^n k^{(c^* \wedge \iota)}$ и

$$\begin{aligned} \prod_{\iota=1}^{\tau-1} \frac{1}{k^{c^* \wedge \iota}} &\leq n^{(\tau-1)n} \prod_{m=1}^{\tau-1} \frac{1}{((c^* \wedge m)k)^{c^* \wedge m}} \\ &\leq n^{(\tau-1)n} \prod_{m=1}^{\tau-1} \left(\frac{1}{(((c^* \wedge m)k)!)^{1/(c^* \wedge m)k}} \right)^{c^* \wedge m} \\ &= n^{(\tau-1)n} \left(\prod_{m=1}^{\tau-1} \frac{1}{((c^* \wedge m)k)!} \right)^{1/k}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|e_i^k\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}^{1/k} \leq \gamma_i(t_s) k^{-\sum_{m=1}^{\tau-1} c^* \wedge m} \leq \gamma_i(t_s) n^{(\tau-1)n} \left(\prod_{m=1}^{\tau-1} \frac{1}{((c^* \wedge m)k)!} \right)^{1/k}$$

при $d_{\tau-1} < i \leq d_\tau$. Пользуясь этими оценками, получаем

$$\begin{aligned} \|e_r^{J_r}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} &\leq \|e_{d_1+1}^{j_{d_1+1}}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \cdots \|e_n^{j_n}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \\ &\leq \gamma(t_s)^{|J_r|} \prod_{\tau=2}^c \prod_{d_{\tau-1} < i \leq d_\tau} \prod_{\iota=1}^{\tau-1} (((c^* \wedge \iota)j_i)!)^{-1} \\ &= \gamma(t_s)^{|J_r|} \prod_{\tau=2}^c \prod_{\iota=1}^{\tau-1} \frac{1}{(c^* \wedge \iota)J_\tau!} = \gamma(t_s)^{|J_r|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \prod_{\kappa=\tau+1}^c \frac{1}{(c^* \wedge (\kappa - \tau))J_\kappa!}, \end{aligned}$$

где $\gamma(x) = n^{(c-1)n} \sum_{i>d_1} \gamma_i(x) \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_{ts} &\leq \sum_J s^{-J} (\gamma(t_s) \varkappa^{c^2})^{|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|J_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)!}{J_\tau! \prod_{\kappa=\tau+1}^c (c^* \wedge (\kappa - \tau)) J_\kappa!} \\ &\leq \sum_J s^{-J} (\gamma(t_s) \varkappa^{c^2})^{|J|} (n-1)^{\sum_{\tau=1}^{c-1} (|J_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)} \\ &\leq \sum_J (s^{-1} \gamma(t_s) \varkappa^{c^2} (n-1)^{c^*(c-1)})^{|J|} = \sum_{p=1}^{\infty} p (s^{-1} \zeta(t_s))^p < \infty, \end{aligned}$$

как только $\zeta(t_s) = \gamma(t_s) \varkappa^{c^2} (n-1)^{c^*(c-1)} < s$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Алгебра $\mathcal{O}_g$ является ядерной алгеброй Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $t \in S$ по лемме 4.2 найдется $s \in S$, $s > t$, такой, что оператор $u_{ts} : \mathcal{A}(l_{e,s}) \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,t})$ является ядерным. Поскольку $\mathcal{O}_g = \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$ (лемма 4.1), отсюда вытекает, что $\mathcal{O}_g$ есть ядерная алгебра Фреше. Следствие доказано.

Отметим, что следствие 4.2 есть частный случай общего результата, доказанного А. Ю. Пирковским [6, следствие 6.3], о том, что оболочка Аренса–Майкла $\tilde{A}$ любой конечно порожденной ассоциативной алгебры A является ядерной алгеброй Фреше. Поскольку $\mathcal{O}_F$ – оболочка Аренса–Майкла алгебры $\mathcal{U}(F)$, получаем, что $\mathcal{O}_F$ является ядерной алгеброй Фреше для любой конечномерной алгебры Ли F .

Теперь докажем основной результат.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть e – треугольный базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, имеющий нормальный рост. Тогда множество всех упорядоченных мономов $\{e^J\}$ является абсолютным базисом в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Таким образом, если $f = \sum_J a_J e^J$ – формальный степенной ряд в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, то он сходится абсолютно в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $f = \sum_J a_J e^J \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Поскольку $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}} = \varprojlim \mathfrak{A}_{e,S}$ (лемма 4.1), необходимо лишь доказать, что $\sum_J |a_J| \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} < \infty$ для всех $t \in S$. Фиксируем набор $t \in S$. По лемме 4.2 найдется такой набор $s \in S$, что $s > t$ и $\sum_J s^{-J} \|\alpha_{s,J}\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} < \infty$. Если $\chi_s: \mathcal{O}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{A}(l_{e,s})$ – каноническая проекция обратной системы $\mathfrak{A}_{e,S}$, то

$$\begin{aligned} \sum_J |a_J| \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} &= \sum_J s^{-J} |\alpha_{s,J}(\chi_s(f))| \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \\ &\leq \sum_J s^{-J} \|\alpha_{s,J}\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \|\chi_s(f)\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} < \infty, \end{aligned}$$

т. е. $\sum_J |a_J| \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} < \infty$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. То же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 4.1, дает, что множество $\{(e-a)^J\}$ всех упорядоченных мономов в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$ также будет абсолютным базисом, но лишь локально. А именно, выберем достаточно малый полирадиус $r' < r$ так, что $\zeta(r'_s) = \gamma(r'_s) \varkappa^{c^2} (n-1)^{c^* (c-1)-1} < r$ (см. доказательство леммы 4.2). Покажем, что $\gamma(x') = n^{(c-1)n} \sum_{i>d_1} \gamma_i(x') \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow 0$. Тогда для всех $t < r'$ имеем $\zeta(t_s) \leq \zeta(r'_s) < r$. Следовательно, каждый формальный степенной ряд $f = \sum_J x_J (e-a)^J$ в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r})$ сходится абсолютно в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}(D_{a,r'})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с базисом Кляйне–Широкова e . Тогда $\{e^J\} \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – абсолютный базис в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предложение 3.2 и теорему 4.1.

4.3. Семейство норм, задающее топологию пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$, и пусть $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ – неограниченно возрастающее подмножество, введенное в п. 4.2. Возьмем $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. По предложению 4.1 имеем разложение $f = \sum_J a_J e^J$ в формальный степенной ряд. Введем полунормы

$$p_t \left(\sum_J a_J e^J \right) = \sum_J |a_J| w_J t^J \quad \text{на } \mathcal{O}_{\mathfrak{g}},$$

где $t \in S$, $t^J = t_1^{j_1} \dots t_n^{j_n}$, а w_J – веса, заданные формулой

$$w_J = \varkappa^{-c^2|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{J_\tau!}{(|J_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)!}.$$

Докажем две технические леммы.

ЛЕММА 4.3. Пусть $f = \sum_J a_J e^J$ – разложение произвольного элемента $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Тогда $p_t(f) \leq \zeta_{ts} \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})}$, где $t, s \in S$, $t < s$, а ζ_{ts} – положительная константа, зависящая от s и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.2 имеем

$$|a_J s^J| = |\alpha_{s,J}(f)| \leq \varkappa^{c^2|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|J_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)!}{J_\tau!} \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})},$$

где $f = \sum_J a_J s^J (s^{-1}e)^J \in \mathcal{A}(l_{e,s})$, т. е. $|a_J s^J| \leq w_J^{-1} \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})}$. Тогда

$$p_t(f) = \sum_J |a_J| s^J w_J (s^{-1}t)^J \leq \sum_J \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} (s^{-1}t)^J \leq \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})} \zeta_{ts},$$

где $\zeta_{ts} = \sum_{k=1}^{\infty} k(\max(s^{-1}t))^k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Допустим, что рост базиса e нормален, и пусть $t \in S$. Тогда существует набор $s \in S$, $s > t$, такой, что $\|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \leq p_s(f)$ для всех $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Тогда по теореме 4.1 степенной ряд $f = \sum_J a_J e^J$ сходится абсолютно в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} &\leq \sum_J |a_J| \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} = \sum_J |a_J| s^J w_J s^{-J} w_J^{-1} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \\ &\leq p_s(f) \sup_J \{s^{-J} w_J^{-1} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}\}. \end{aligned}$$

По условию базис e имеет нормальный рост. Рассуждая, как в доказательстве леммы 4.2, получаем

$$\begin{aligned} \|e^J\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} &\leq \|e_s^{J_s}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \|e_r^{J_r}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \leq t_s^{J_s} \|e_r^{J_r}\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \\ &\leq \delta(t_s)^{|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \prod_{\kappa=\tau+1}^c \frac{1}{c^* \wedge (\kappa - \tau) J_\kappa!}, \end{aligned}$$

где $\delta(x) = \gamma(x) \sum_{i=1}^{d_1} x_i \in \mathbb{R}_+^0[x_1, \dots, x_{d_1}]$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} &\leq p_s(f) \sup_J \left\{ (s^{-1} \delta(t_s) \varkappa^{c^2})^{|J|} \prod_{\tau=1}^{c-1} \frac{(|J_\tau| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)!}{J_\tau! \prod_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) J_\kappa!} \right\} \\ &\leq p_s(f) \sup_J \{ (s^{-1} \delta(t_s) \varkappa^{c^2} (n-1)^{c^*(c-1)})^{|J|} \}. \end{aligned}$$

Поэтому если $\delta(t_s) \varkappa^{c^2} (n-1)^{c^*(c-1)} \leq s$, то $\|f\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \leq p_s(f)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом e нормального роста. Тогда семейство норм $\{p_t: t \in S\}$ задает исходную топологию пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1 топология пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ задается семейством $\{\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}: t \in S\}$ норм на $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Фиксируем набор $t \in S$. Тогда по лемме 4.4 имеем $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})} \leq p_s$ для некоторого $s \in S$, $s > t$. С другой стороны, с помощью леммы 4.3 мы выводим, что $p_t \leq \zeta_{ts} \|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,s})}$ для всех $t, s \in S$, $t < s$. Следовательно, $\{\|\cdot\|_{\mathcal{A}(l_{e,t})}: t \in S\}$ и $\{p_t: t \in S\}$ – эквивалентные семейства норм на $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Теорема доказана.

4.4. Частные производные. Чтобы получить явные выражения для коэффициентов формального степенного ряда $f = \sum_J a_J e^J \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, мы исследуем в этом пункте вопрос о непрерывности частных производных $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(F))$, $\partial_{e_i}(e_1^{j_1} \cdots e_n^{j_n}) = j_i e_1^{j_1} \cdots e_i^{j_i-1} \cdots e_n^{j_n}$ относительно базиса e . Сначала рассмотрим случай градуированной нильпотентной алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{F}_x$ – конечномерная ($n = \dim(\mathfrak{F}_x)$) градуированная (натуральными числами $1, 2, \dots, c$) нильпотентная алгебра Ли со свободными образующими Ли $x = (x_1, \dots, x_m)$. Иными словами, $\mathfrak{F}_x$ – факторалгебра свободной алгебры Ли, порожденной x , по $(c+1)$ -й степени ее нижнего центрального ряда. Таким образом, $\mathfrak{F}_x = \bigoplus_{i=1}^c \mathfrak{F}_i(x)$, где $\mathfrak{F}_i(x)$ – подпространство в $\mathfrak{F}_x$, порожденное левыми словами длины i от образующих, входящих в x . Кроме того, $\mathfrak{F}_x^{(k)} = \bigoplus_{i \geq k} \mathfrak{F}_i(x)$ и $\mathfrak{F}_x^{(c+1)} = \{0\}$.

Возьмем в $\mathfrak{F}_x$ любой треугольный базис $y = (y_1, \dots, y_n)$ с первыми m элементами $y_i = x_i$, $1 \leq i \leq m$. Заметим, что операторы частного дифференцирования $\partial_{x_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{F}_x))$, $1 \leq i \leq m$ (см. § 2), не зависят от выбора треугольного базиса с первыми m элементами $x_1, \dots, x_m$.

ЛЕММА 4.5. Пусть $\mathfrak{F}_x$ – градуированная нильпотентная алгебра Ли со свободными образующими Ли $x = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда все операторы $\partial_{x_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{F}_x))$ допускают непрерывные продолжения до операторов $\partial_{x_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x})$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем i, j , $1 \leq i < j \leq m$. Тогда семейство

$$(x_j, [x_j, x_i], x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_m, [x_p, x_q]: p < q, (p, q) \neq (i, j)) \cup \varsigma$$

является базисом в $\mathfrak{F}_x$, где ς – часть базиса y в $\mathfrak{F}_x^{(3)}$. Каждый оператор $\text{ad } v$, $v \in \mathfrak{F}_x$, присоединенного представления алгебры $\mathfrak{F}_x$ задается в этом базисе строго нижнетреугольной $(n \times n)$ -матрицей $C_v = (a_{ij}^v)_{i,j}$. Если $v = y_k$, то положим $C_k = C_v = (a_{ij}^k)_{i,j}$, $1 \leq k \leq n$. Ясно, что $a_{21}^i = -1$ и $a_{21}^k = 0$ для всех $k \neq i$. Возьмем неограниченно возрастающее подмножество S в $\mathbb{R}_+^n$. Тогда $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x} = \varprojlim \mathcal{A}_{y,S}$ по лемме 4.1, где $\mathcal{A}_{y,S} = \{\mathcal{A}(l_{y,s}), u_{ts}, s, t \in S\}$ – проективная система. Фиксируем набор $t \in S$ и положим $\bar{C}_v = (a_{ij}^v \cdot 1_{\mathcal{A}(l_{y,t})})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}(l_{y,t}))$, $v \in \mathfrak{F}_x$. Зададим представление алгебр Ли $\theta: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{A}(l_{y,t}))$ формулой $\theta(v) = \text{diag}(v) - \bar{C}_v^*$, в которой $\text{diag}(v)$ – диагональная $(n \times n)$ -матрица с диагональными элементами v , а $\bar{C}_v^*$ – матрица, транспонированная к $\bar{C}_v$ (см. [16, § 7]). Заметим, что $\gamma_{12}^i = 1_{\mathcal{A}(l_{y,t})}$ и $\gamma_{12}^k = 0$ для всех $k \neq i$, где $(\gamma_{ij}^k)_{i,j} = \theta(y_k) = \text{diag}(y_k) - \bar{C}_k^*$. Поскольку $\mathcal{M}_n(\mathcal{A}(l_{y,t}))$ – банахова алгебра и $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x}$ – оболочка Аренса–Майкла

алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{F}_x)$, мы видим, что θ имеет непрерывное продолжение до гомоморфизма алгебр $\theta: \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{A}(l_{y,t}))$. Положим $\theta(y^J) = (\gamma_{ij}^{(J)})_{i,j}$, где $y^J = y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}$ – упорядоченный моном в $\mathcal{U}(\mathfrak{F}_x)$ от элементов базиса y . Легко проверяется, что $\gamma_{12}^{(J)} = j_1 y_1^{j_1} \cdots y_i^{j_i-1} \cdots y_n^{j_n}$. Если $P_{12}: \mathcal{M}_n(\mathcal{A}(l_{y,t})) \rightarrow \mathcal{A}(l_{y,t})$ – проекция, $P_{12}(a_{lv})_{l,v} = a_{12}$, то $\partial_{x_i} = P_{12}\theta$, т.е. ∂_{x_i} продолжается до непрерывного оператора $\partial_{x_i}: \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x} \rightarrow \mathcal{A}(l_{y,t})$. Поскольку это верно для всех наборов $t \in S$, мы заключаем, что оператор ∂_{x_i} непрерывен относительно топологии пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x}$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с таким треугольным базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$, что $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ является базисом в $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Тогда операторы $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ допускают непрерывные продолжения до операторов $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ соответственно, $1 \leq i \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{g}^{(c+1)} = \{0\}$, и пусть $\mathfrak{F}_x$ – градуированная (натуральными числами $1, 2, \dots, c$) нильпотентная алгебра Ли со свободными образующими Ли $x = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда существует эпиморфизм алгебр Ли $\tau: \mathfrak{F}_x \rightarrow \mathfrak{g}$ такой, что $\tau(x_i) = e_i$ для всех i , $1 \leq i \leq m$. Можно дополнить x до такого треугольного базиса y алгебры Ли $\mathfrak{F}_x$, что $\tau(y_{i_k}) = e_k$ при некотором i_k , $i_k > m$, $m < k \leq n$, и $y_s \in \ker(\tau)$ для всех $s \neq i_k$, $s > m$ (см. подробно об этом [9]). По лемме 4.5 существуют операторы $\partial_{x_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x})$, $1 \leq i \leq m$, продолжающие операторы частного дифференцирования относительно базиса y .

Далее, благодаря эпиморфизму τ имеем отождествление $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_x}/\mathcal{R}_{\ker(\tau)} = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ (см. [6], [9]), где $\mathcal{R}_{\ker(\tau)}$ – замыкание в $\mathcal{U}(F)$ идеала $\mathcal{J}_{\ker(\tau)}$, порожденного идеалом Ли $\ker(\tau)$. Легко видеть, что $\partial_{x_i}(\mathcal{J}_{\ker(\tau)}) \subseteq \mathcal{J}_{\ker(\tau)}$ для всех i , $1 \leq i \leq m$. Поэтому все операторы ∂_{x_i} , $1 \leq i \leq m$, также оставляют инвариантным идеал $\mathcal{R}_{\ker(\tau)}$, следовательно, корректно определены фактороператоры $\partial_{x_i}^\sim \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_F/\mathcal{R}_{\ker(\tau)})$. Остается заметить, что $\partial_{x_i}^\sim = \partial_{e_i}$ для всех i , $1 \leq i \leq m$. Предложение доказано.

Если e – треугольный базис нормального роста, то предложение 4.2 допускает следующее усиление.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$ нормального роста. Тогда все операторы $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ допускают непрерывное продолжение до операторов $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ соответственно, $1 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4.2 достаточно доказать это утверждение для операторов ∂_{e_i} , $i > m$. Пользуясь теоремой 4.2, заключаем, что топология пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ задается семейством норм $\{p_t: t \in S\}$. Возьмем i так, что $d_{\sigma-1} < i \leq d_\sigma$ для некоторого $\sigma > 1$, и рассмотрим разложение $f = \sum_J a_J e^J$ произвольного элемента $f \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Тогда

$$p_t(\partial_{e_i} f) \leq \sum_J j_i |a_J| \varkappa^{-c^2(|J|-1)} t_1^{j_1} \cdots t_i^{j_i-1} \cdots t_n^{j_n} \\ \times \prod_{\tau=1}^{\sigma-1} \frac{J_\tau!}{(|J_\tau| - c^* + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_\kappa|)!}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{j_{d_{\sigma-1}}! \cdots (j_i - 1)! \cdots j_{d_{\sigma}}!}{(|J_{\sigma}| - 1 + \sum_{\kappa=\sigma+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_{\kappa}|)!} \\
 & \times \prod_{\tau=\sigma+1}^{c-1} \frac{J_{\tau}!}{(|J_{\tau}| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_{\kappa}|)!} \\
 & \leq \varkappa c^2 t_i^{-1} \sum_J |a_J| s^J w_J (s^{-1}t)^J \prod_{\tau=1}^{\sigma} \left(|J_{\tau}| + \sum_{\kappa=\tau+1}^c c^* \wedge (\kappa - \tau) |J_{\kappa}| \right)^c \\
 & \leq \varkappa c^2 t_i^{-1} c^{\sigma c} p_s(f) \sup_J \{|J|^{\sigma c} \delta_{s,t}^{|J|}\} = \varkappa c^2 t_i^{-1} c^{\sigma c} \sup_k \{k^{\sigma c} \delta_{s,t}^k\} p_s(f),
 \end{aligned}$$

где $t, s \in S$, $t < s$, и $\delta_{s,t} = \max(s^{-1}t)$. Таким образом, $p_t(\partial_{e_i} f) \leq M_{s,t,\sigma} p_s(f)$ для некоторой положительной константы $M_{s,t,\sigma}$ и всех $f \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Отсюда вытекает, что ∂_{e_i} — непрерывный оператор на $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ относительно топологии, порожденной семейством норм $\{p_s : s \in S\}$. Поскольку это же семейство норм задает топологию пространства $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, мы заключаем, что $\partial_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли с треугольным базисом e нормального роста, и пусть $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$. Тогда ряд

$$f = \sum_J \frac{(\partial_e^{|J|} f)(0)}{J!} e^J$$

является абсолютно сходящимся разложением элемента f в пространстве $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$, где $\partial_e^{|J|} = \partial_{e_1}^{j_1} \cdots \partial_{e_n}^{j_n}$.

Наличие абсолютного базиса в $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ влечет за собой существование тонкой связи между некоммутативной спектральной теорией и некоммутативной теорией функций [11] (см. также [17]). А именно, если нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет нормальный рост, то вложение $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ является локализацией (см. [10]). Тем самым, для произвольного левого банахова $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -модуля X условие $\mathbb{C}(\lambda) \perp X$ (т. е. $\text{Tor}_k^{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}(\mathbb{C}(\lambda), X) = \{0\}$ для всех k) эквивалентно тому, что λ принадлежит резольвентному множеству относительно спектра Тэйлора $\mathfrak{g}$ -модуля X [3], где $\mathbb{C}(\lambda)$ — одномерный правый $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ -модуль, ассоциированный с характером λ .

Список литературы

1. J. L. Taylor, “A general framework for a multi-operator functional calculus”, *Advances in Math.*, **9**:2 (1972), 183–252.
2. А. А. Досиев, “Когомологии пучков алгебр Фреше и спектральная теория”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:3 (2005), 76–80; англ. пер.: A. A. Dosiev, “Cohomology of sheaves of Frechet algebras and spectral theory”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:3 (2005), 225–228.
3. A. Dosiev, “Cartan–Słodkowski spectra, splitting elements and noncommutative spectral mapping theorems”, *J. Funct. Anal.*, **230**:2 (2006), 446–493.
4. J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **10**, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.
5. А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986; англ. пер.: A. Ya. Khelemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

6. A. Yu. Pirkovskii, “Stably flat completions of universal enveloping algebras”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **441** (2006), 5–56; [arXiv:math/0311492v2](#).
7. R. Meyer, *Embeddings of derived categories of bornological modules*, [arXiv:math/0410596v1](#).
8. А. А. Досиев, “Голоморфные функции от базиса нильпотентной алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **34:4** (2000), 82–84; англ. пер.: A. A. Dosiev, “Holomorphic functions of a basis of a nilpotent Lie algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **34:4** (2000), 302–304.
9. А. А. Досиев, “Алгебры степенных рядов от элементов алгебры Ли и спектры Слодковского”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, **290**, ПОМИ, СПб., 2002, 72–121; англ. пер.: A. A. Dosiev, “Algebras of power series of elements of a Lie algebra and the Slodkowski spectra”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **124:2** (2004), 4886–4908.
10. А. А. Досиев, “Гомологические размерности алгебры целых функций от элементов нильпотентной алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **37:1** (2003), 73–77; англ. пер.: A. A. Dosiev, “Homological dimensions of the algebra formed by entire functions of elements of a nilpotent Lie algebra”, *Funct. Anal. Appl.*, **37:1** (2003), 61–64.
11. A. A. Dosiev, “Local left invertibility for operator tuples and noncommutative localizations”, *J. K-Theory*, **4:1** (2009), 163–191.
12. А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомология*, Наука, М., 1989.
13. Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris–Brussels–Montreal, 1974.
14. Ю. В. Туровский, “О коммутативности по модулю радикала Джекобсона ассоциативной оболочки алгебры Ли”, *Спектральная теория операторов и ее приложения*, **8**, Баку, 1987, 199–211.
15. Ю. В. Туровский, “Спектральные свойства элементов нормированных алгебр и инвариантные подпространства”, *Функц. анализ и его прил.*, **18:2** (1984), 77–78; англ. пер.: Yu. V. Turovskii, “Spectral properties of elements of normed algebras and invariant subspaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **18:2** (1984), 152–154.
16. A. A. Dosiev, “Spectra of infinite parametrized Banach complexes”, *J. Operator Theory*, **48:3** (2002), 585–614.
17. A. A. Dosi, “Formally-radical functions in elements of a nilpotent Lie algebra and noncommutative localizations”, *Algebra Colloq.* (to appear).

А. А. Доси (A. A. DOSI (DOSIEV))
 Middle East Technical University Northern Cyprus Campus,
 Turkey
 E-mail: dosiev@yahoo.com

Поступило в редакцию
 10.05.2007

Перевод с англ. А. В. Домрина