Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Плеханова, В. Е. Федоров, О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 2, 177–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:42:26

УДК 517.97

М. В. Плеханова, В. Е. Федоров

**О существовании и единственности решений
задач оптимального управления
линейными распределенными системами,
не разрешенными относительно производной по времени**

Исследованы задачи оптимального управления для линейных распределенных систем, не разрешенных относительно производной по времени, однородная часть которых обладает вырожденной сильно непрерывной разрешающей полугруппой. Для этого сначала получены теоремы о существовании единственного сильного решения задачи Коши. Это позволило сформулировать достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач оптимального управления. В отличие от близких по предмету исследования более ранних работ, удалось существенно ослабить условия для функционала качества по отношению к функции состояния. Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы на примере задачи оптимального управления для линейризованной системы уравнений Навье–Стокса.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: задача оптимального управления, распределенная система, уравнение соболевского типа, вырожденная полугруппа операторов, однозначная разрешимость.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – гильбертовы пространства; $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ – линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$; $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ – линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{X}$ и действующий в $\mathcal{Y}$; $N \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ – линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$. В работе рассматриваются задачи оптимального управления для распределенных систем, не разрешенных относительно производной по времени:

$$J_0(x) + \|u - u_0\|_{H^{p+1}(0,T;\mathcal{U})}^2 \rightarrow \inf, \quad (0.1)$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \quad (0.2)$$

$$N(x(0) - x_0) = 0, \quad (0.3)$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial. \quad (0.4)$$

Рассматриваемое начальное условие (0.3) имеет вид либо условия Коши при $N = I$, либо обобщенного условия Шоултера [1], если $N = P$ – проектор на фазовое пространство однородного уравнения (0.2). Отметим, что последнее

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-96030-р_урал_а) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-4312.2006.1).

условие при рассмотрении систем вида (0.2) в определенном смысле более естественно, чем условие Коши. Действительно, в отличие от задачи Коши, для разрешимости обобщенной задачи Шоуолтера не требуется выполнения дополнительных условий согласования начального значения с функцией в правой части уравнения.

В настоящей работе методами теории вырожденных полугрупп операторов [2]–[4] получены достаточные условия существования сильного решения задач вида (0.2), (0.3) в случае, когда пара (L, M) порождает вырожденную сильно непрерывную полугруппу операторов. При этом сначала получены необходимые и достаточные для разрешимости условия, налагаемые на правую часть уравнения с нильпотентным оператором при производной. Необходимость этих условий вынуждает отказаться от негладких функций управления и выбрать в качестве пространства функций управления пространство $H^{p+1}(0, T; U)$. Ранее при рассмотрении подобных задач в случае конечномерных пространств $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ необходимость выбора достаточно гладких функций управлений была отмечена во многих работах (см., например, [5], [6]). В работе [5], например, вводится разделение управляемых дескрипторных систем, т. е. систем вида (0.2) в конечномерном случае, на собственные, в которых состояние не зависит от производных функции управления ($p = 0$), и несобственные, состояние в которых определяется, в частности, и производными функции управления ($p \in \mathbb{N}$).

Ранее использовались различные подходы при исследовании задач оптимального управления для линейных операторных уравнений, не разрешенных относительно производной. В работах [7]–[9] и в работах авторов настоящей статьи [10], [11] при доказательстве однозначной разрешимости таких задач управления использовались дополнительные ограничения для начального значения x_0 и для функции управления в начальный момент времени. В работе [12] доказана однозначная разрешимость задачи оптимального управления в смысле слабого решения уравнения (0.2), в [13] доказана однозначная разрешимость задачи управления для системы с обобщенным условием Шоуолтера, в работе [14] исследуются только задачи стартового управления.

В настоящей работе, как и в [14], при рассмотрении задач оптимального управления для уравнений вида (0.2) используется общая схема исследования, предложенная в [15]. Это позволяет отказаться от упомянутых дополнительных условий для начального значения и для функции управления. Кроме того, по сравнению с перечисленными более ранними работами, ослаблены условия для функционала качества по отношению к функции состояния. От функционала J_0 в настоящей работе требуется лишь выпуклость, неотрицательность и полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости. Как частные его случаи, рассмотрены функционал, содержащий квадрат нормы этой функции в пространстве Лебега (в отличие от функционалов с квадратом нормы в пространстве Соболева $H^1(0, T; \mathcal{X})$ во всех предыдущих работах), и терминальный функционал, т. е. содержащий квадрат нормы функции состояния в фиксированный момент времени.

Для задач (0.1)–(0.4) получены достаточные условия однозначной разрешимости в случае существования сильно непрерывной разрешающей полугруппы однородного уравнения (0.2). Полученные в работе результаты проиллюстрированы на примере задачи оптимального управления для линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса.

§ 1. Относительно p -радиальные операторы

В данном параграфе приведены необходимые для дальнейшего изложения результаты о существовании и свойствах сильно непрерывной разрешающей полугруппы линейного операторного дифференциального уравнения первого порядка с вырожденным оператором при производной. Их доказательства можно найти в работах [2]–[4].

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ – операторы. Введем также следующие обозначения: $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}: (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$, $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$,

$$\begin{aligned} R_\mu^L(M) &= (\mu L - M)^{-1} L, & L_\mu^L(M) &= L(\mu L - M)^{-1}, \\ R_{(\mu,p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}^L(M), & L_{(\mu,p)}^L(M) &= \prod_{k=0}^p L_{\mu_k}^L(M). \end{aligned}$$

Через $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) обозначим ядро $\ker R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\ker L_{(\mu,p)}^L(M)$), а через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) – замыкание образа $\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ ($\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$). Через M_k (L_k) обозначим сужение оператора M (L) на $\operatorname{dom} M_k = \mathcal{X}^k \cap \operatorname{dom} M$ ($\mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Оператор M называется *сильно (L, p) -радиальным*, $p \in \mathbb{N}_0$, если:

- (i) $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $(a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;
- (ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+$ такое, что для любого $\mu_k \in (a, +\infty)$, $k = \overline{0, p}$, и любого $n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_{(\mu,p)}^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L_{(\mu,p)}^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p (\mu_k - a)^n};$$

- (iii) существует плотный в $\mathcal{Y}$ линейал $\mathring{\mathcal{Y}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M)y\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\operatorname{const}(y)}{(\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)} \quad \forall y \in \mathring{\mathcal{Y}}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in (a, +\infty)$;

- (iv) для всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in (a, +\infty)$

$$\|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\lambda - a) \prod_{k=0}^p (\mu_k - a)}.$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда:

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$;
- (iv) оператор $G = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ нильпотентен степени не больше $p \in \mathbb{N}_0$;
- (v) существует разрешающая сильно непрерывная полугруппа $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}): t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ однородного уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, причем $X^t = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k(p+1)}{t} \times R_{\frac{k(p+1)}{t}}^L(M)\right)^{k(p+1)}$;
- (vi) инфинитезимальным генератором C_0 -непрерывной полугруппы $\{X_1^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1): t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, где X_1^t – сужение оператора X^t на $\mathcal{X}^1$.

Единица полугруппы $X^0 = P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}$ является проектором вдоль подпространства $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, а $Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1}$ – проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Полугруппа из утверждения (v) теоремы 1.1 удовлетворяет при $t \geq 0$ оценке $\|X^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq Ke^{at}$ с константами K, a из определения 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из утверждения (vi) теоремы 1.1 в силу теоремы Хилле–Иосиды следует, что для оператора S выполняются условия

$$\exists a \in \mathbb{R}: (a, +\infty) \subset \rho(S),$$

$$\exists K \in \mathbb{R}_+: \quad \forall \mu \in (a, +\infty), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|(\mu I - S)^{-n}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)} \leq \frac{K}{(\mu - a)^n}.$$

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ называется *цепочкой M -присоединенных векторов*, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Порядковый номер вектора в цепочке (начиная с нулевого) будем называть его *высотой*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. При условии сильной (L, p) -радиальности оператора M подпространство $\mathcal{X}^0$ совпадает с линейной оболочкой множества M -присоединенных векторов оператора L высоты не больше p , при этом M -присоединенные векторы большей высоты отсутствуют.

§ 2. Критерий разрешимости сингулярного уравнения

Исследование уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t)$$

проводится методом его редукции к системе двух уравнений: регулярного уравнения на подпространстве $\mathcal{X}^1$ и сингулярного – на подпространстве $\mathcal{X}^0$ с нильпотентным оператором при производной. В данном параграфе получены необходимые и достаточные условия, налагаемые на функцию y для разрешимости сингулярного уравнения, которые приводят к выбору пространства $H^{p+1}(0, T; \mathcal{U})$, а не, скажем, $L_2(0, T; \mathcal{U})$ в качестве пространства для функций управления в задачах оптимального управления вида (0.1)–(0.4).

На пространстве $\mathcal{X}^0$ рассмотрим уравнение

$$GDx(t) = x(t) + f(t), \tag{2.1}$$

где $G \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ – нильпотентный оператор степени p , $D = \frac{d}{dt}$ – формальный оператор дифференцирования, $f: (0, T) \rightarrow \mathcal{X}^0$ – заданная функция.

Введем обозначения для пространств Соболева:

$$W_q^k(\mathcal{X}) = W_q^k(0, T; \mathcal{X}), \quad H^k(\mathcal{X}) = W_2^k(\mathcal{X})$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq q < \infty$. При этом $L_q(\mathcal{X}) = W_q^0(\mathcal{X})$, $L_2(\mathcal{X}) = H^0(\mathcal{X})$.

Функцию $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ назовем *сильным решением* уравнения (2.1), если она почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяет этому уравнению.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f \in L_q(\mathcal{X}^0)$. Тогда сильное решение $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ уравнения (2.1) существует в том и только в том случае, когда выполнены все условия

$$\begin{aligned} G^p f &\in W_q^1(\mathcal{X}^0), \quad (G^{p-1} + DG^p)f \in W_q^1(\mathcal{X}^0), \quad \dots \\ \dots, \quad &(G^{p-k+1} + D(G^{p-k+2} + \dots + D(G^{p-1} + DG^p) \dots))f \in W_q^1(\mathcal{X}^0), \quad \dots \\ \dots, \quad &(I + D(G + D(G^2 + D(G^3 + \dots + D(G^{p-1} + DG^p) \dots))))f \in W_q^1(\mathcal{X}^0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При этом сильное решение единственно и имеет вид

$$x(t) = -(I + D(G + D(G^2 + D(G^3 + \dots + D(G^{p-1} + DG^p) \dots))))f(t). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует решение $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ уравнения (2.1). Домножим обе части уравнения (2.1) на G^p ; тогда в силу нильпотентности оператора G получим $-G^p x = G^p f \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$. Дифференцируя обе части равенства, получим $DG^p(x + f) = 0$. Учитывая, что $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$, последнее равенство перепишем как $G^p Dx = -DG^p f$. Поддействовав на уравнение (2.1) оператором G^{p-1} , с учетом последнего равенства получим $-DG^{p-1}f = G^{p-1}(x + f)$. Тогда

$$G^{p-1}x = -G^{p-1}f - DG^{p-1}f,$$

причем обе части этого равенства являются элементами пространства $W_q^1(\mathcal{X}^0)$. Рассуждая таким же образом, на k -м шаге получим формулу (2.2), а на $(p+1)$ -м шаге придем к выводу о необходимости всех условий теоремы для существования сильного решения $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ и получим вид решения (2.3). Отсюда также следует единственность. Действительно, если $f(t) = 0$ почти всюду на интервале $(0, T)$, то из (2.3) следует, что и $x(t) = 0$ почти всюду на $(0, T)$.

Достаточность условий теоремы проверяется непосредственной подстановкой функции (2.3) в уравнение (2.1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае, когда $f \in W_q^{p+1}(\mathcal{X}^0)$, решение уравнения (2.1) примет вид $x(t) = -\sum_{k=0}^p G^k D^k f(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $G = M_0^{-1}L_0$. Тогда существуют функции $f \in L_q(\mathcal{X}^0)$, для которых уравнение (2.1) не имеет решения в пространстве $W_q^1(\mathcal{X}^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) = g(t)\varphi_p$, где φ_p – M -присоединенный вектор высоты p оператора L , $g \in L_q(0, T; \mathbb{C}) \setminus W_q^1(0, T; \mathbb{C})$. Из определения M -присоединенных векторов и замечания 1.3 следует, что $G\varphi_p = \varphi_{p-1}$, где φ_{p-1} – предыдущий вектор в некоторой цепочке M -присоединенных векторов оператора L . Отсюда, домножая $p - 1$ раз на оператор G последнее равенство, по цепочке получим $G^p\varphi_p = \varphi_0$, где φ_0 – собственный вектор оператора L . Таким образом, $G^p f(t) = g(t)\varphi_0 \notin W_q^1(\mathcal{X}^0)$ в силу выбора функции $g(t)$. Первое из необходимых условий существования решения $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ из теоремы 2.1 не выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $f(t) = g(t)\varphi_k$, где φ_k – M -присоединенный вектор высоты k , $0 \leq k \leq p$, $g \in L_q(0, T; \mathbb{C}) \setminus W_q^1(0, T; \mathbb{C})$, то не выполняется k -е необходимое условие (2.2) существования решения $x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$, хотя при этом выполняются все предыдущие условия.

§ 3. Сильное решение задачи Коши

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства и заданы операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, при этом оператор M сильно (L, p) -радиален. Зададим операторы

$$A_0: y \rightarrow - \sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1} (I - Q) y^{(k)}(t), \quad A_1: y \rightarrow \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда:

- (i) $A_0 \in \mathcal{L}(W_q^{p+1}(\mathcal{Y}); W_q^1(\mathcal{X}))$;
- (ii) $A_1 \in \mathcal{L}(W_q^1(\mathcal{Y}); W_q^1(\mathcal{X}))$;
- (iii) при любом $x_0 \in \text{dom } M_1 + \mathcal{X}^0$ функция $X^t x_0$ принадлежит $C^1([0, T]; \mathcal{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем

$$\begin{aligned} \|A_0 y\|_{W_q^1(\mathcal{X})} &\leq \sum_{k=0}^p \|G^k M_0^{-1} (I - Q)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})} (\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathcal{Y})} + \|y^{(k+1)}\|_{L_q(\mathcal{Y})}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{p+1} C_k \|y^{(k)}\|_{L_q(\mathcal{Y})} \leq \max_{k=0, p+1} C_k \cdot \|y\|_{W_q^{p+1}(\mathcal{Y})}. \end{aligned}$$

(ii) Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\|_{L_q(\mathcal{X})} &\leq \left(\int_0^T \left(\int_0^t \|X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s)\|_{\mathcal{X}} ds \right)^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_0^T t^{q-1} \int_0^t \|X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s)\|_{\mathcal{X}}^q ds dt \right)^{1/q} \\ &\leq T q^{-1/q} K e^{|a|T} \|L_1^{-1} Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})} \|y\|_{L_q(\mathcal{Y})} = C_1 \|y\|_{L_q(\mathcal{Y})}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что для $y \in W_q^1(\mathcal{Y})$

$$\left(\int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right)' = \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s) ds + X^t L_1^{-1} Q y(0).$$

При $\Delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \left(\int_0^{t+\Delta} X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Q y(s) ds - \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right) \\ = \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q \frac{y(s+\Delta) - y(s)}{\Delta} ds + \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Q y(s) ds. \end{aligned}$$

Поскольку $y \in W_q^1(\mathcal{Y})$, то почти всюду на $(0, T)$ функция y дифференцируема в классическом смысле. Поэтому при почти всех $s \in (0, T)$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\left\| \frac{y(s+\Delta) - y(s)}{\Delta} \right\|_{\mathcal{Y}} < \|y'(s)\|_{\mathcal{Y}} + \varepsilon$$

для достаточно малых $|\Delta|$. Так как $y' \in L_q(\mathcal{Y}) \subset L_1(\mathcal{Y})$, в силу теоремы Лебега существует предел

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q \frac{y(s+\Delta) - y(s)}{\Delta} ds = \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s) ds,$$

а поскольку в силу вложения пространств $W_q^1(\mathcal{Y}) \hookrightarrow C([0, T]; \mathcal{Y})$ функция y непрерывна, то

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Q y(s) ds = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} X^{t+\Delta-\theta} L_1^{-1} Q y(\theta) = X^t L_1^{-1} Q y(0).$$

Здесь $\theta \in (0, \Delta)$ по теореме о среднем.

Доопределим $y(s)$ при $s \in (-\varepsilon, 0)$, $\varepsilon > 0$, так, чтобы $y \in W_q^1(-\varepsilon, T; \mathcal{Y})$. Тогда для $\Delta \in (-\varepsilon, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta} \left(\int_0^{t+\Delta} X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Q y(s) ds - \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right) \\ &= \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q \frac{y(s+\Delta) - y(s)}{\Delta} ds - \frac{1}{\Delta} \int_0^{-\Delta} X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s+\Delta) ds. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0-$ в последнем выражении, получим требуемое:

$$\int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s) ds + X^t L_1^{-1} Q y(0).$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s) ds + X^t L_1^{-1} Q y(0) \right\|_{L_q(\mathcal{X})} \\ & \leq \left(\int_0^T \|X^t L_1^{-1} Q y(0)\|_{\mathcal{X}}^q dt \right)^{1/q} + \left(\int_0^T \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s) ds \right\|_{\mathcal{X}}^q dt \right)^{1/q} \\ & \leq K e^{|a|T} T^{1/q} \|L_1^{-1} Q y(0)\|_{\mathcal{X}} + \left(\int_0^T t^{q-1} \int_0^T \|X^{t-s} L_1^{-1} Q y'(s)\|_{\mathcal{X}}^q ds dt \right)^{1/q} \\ & \leq K e^{|a|T} T^{1/q} \|L_1^{-1} Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})} \|y(0)\|_{\mathcal{Y}} + T q^{-1/q} K e^{|a|T} \|L_1^{-1} Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})} \|y'\|_{L_q(\mathcal{Y})}. \end{aligned}$$

Из полученного и в силу вложения $W_q^1(\mathcal{X}) \hookrightarrow C([0, T]; \mathcal{X})$ следует

$$\|A_1 y\|_{W_q^1(\mathcal{X})} \leq C_1 \|y\|_{L_q(\mathcal{Y})} + C_2 \|y'\|_{L_q(\mathcal{Y})} + C_3 \|y\|_{C([0, T]; \mathcal{Y})} \leq C \|y\|_{W_q^1(\mathcal{Y})}.$$

(iii) При условии сильной (L, p) -радиальности оператора M для любого x_0 из множества $\text{dom } M_1 = \text{dom } M \cap \mathcal{X}^1$ имеем $X_1^t x_0 \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$ в силу теоремы 1.1, (vi). Поскольку для любого $x_0 \in \mathcal{X}$ верно $X^t x_0 = X_1^t P x_0$, утверждение доказано.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t). \tag{3.2}$$

Сильным решением задачи (3.1), (3.2) называется функция $x \in W_q^1(\mathcal{X})$, удовлетворяющая условию (3.1) и почти всюду на $(0, T)$ – уравнению (3.2).

ЛЕММА 3.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, где $\mathcal{V}$ – банахово пространство. Тогда при любых $f \in L_q(\mathcal{V})$ и $v_0 \in \mathcal{V}$ существует единственное сильное решение задачи

$$\dot{v}(t) = Av(t) + f(t), \quad v(0) = v_0. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что оператор $B: v(t) \rightarrow \int_0^t Av(s) ds$ является сжимающим в пространстве $L_q(0, T_1; \mathcal{V})$ при $T_1 < \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})}^{-1}$. Если существуют два решения $v_1(t), v_2(t)$ задачи (3.3), то их разность $v(t) = v_1(t) - v_2(t)$ является решением задачи $\dot{v}(t) = Av(t), v(0) = 0$. Следовательно, функция $v(t)$ является единственной неподвижной точкой оператора B , и поэтому $v(t) = 0$ почти всюду на интервале $(0, T_1)$. Рассмотрев оператор B в пространстве $L_q(T_1, 2T_1; \mathcal{V})$, получим $v(t) = 0$ почти всюду на $(T_1, 2T_1)$. За конечное число шагов мы исчерпаем интервал $(0, T)$.

Единственное решение задачи (3.3), очевидно, имеет вид

$$v(t) = e^{At}v_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s) ds \in W_q^1(\mathcal{V}),$$

где $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ – аналитическая группа, порожденная оператором A . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда при любых $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y})$ и при

$$x_0 \in \mathcal{M}_y = \left\{ x \in \text{dom } M: (I - P)x = - \sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1} (I - Q)y^{(k)}(0) \right\}$$

существует единственное сильное решение задачи (3.1), (3.2), причем оно имеет вид $x(t) = (A_0 + A_1)y(t) + X^t x_0$ и удовлетворяет условию

$$\|x\|_{W_q^1(\mathcal{X})} \leq C(\|x_0\|_{\mathcal{X}} + \|SPx_0\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{W_q^{p+1}(\mathcal{Y})}). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подействовав на уравнение (3.2) проектором $I - Q$, а затем оператором $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, на пространстве $\mathcal{X}^0$ получим уравнение

$$G\dot{x}(t) = x(t) + M_0^{-1}(I - Q)y(t) \quad (3.5)$$

с начальным условием $x(0) = (I - P)x_0$. Из теоремы 2.1, замечания 2.1 и непрерывности оператора M_0^{-1} следует, что единственное решение этого уравнения имеет вид $x(t) = - \sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1} (I - Q)y^{(k)}(t) = A_0 y(t)$. Очевидно, что оно удовлетворяет начальному условию $x(0) = (I - P)x_0$, если и только если $x_0 \in \mathcal{M}_y$.

Теперь, подействовав на уравнение (3.2) оператором $L_1^{-1}Q$, на пространстве $\mathcal{X}^1$ получим уравнение

$$\dot{x}(t) = Sx(t) + L_1^{-1}Qy(t), \quad (3.6)$$

где $S = L_1^{-1}M_1$, с начальным условием $x(0) = Px_0$. По условию теоремы имеем $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y}) \subset L_1(\mathcal{Y})$, откуда $X^{t-s}L_1^{-1}Qy(s) \in L_1(\mathcal{X})$. Далее, в силу

теоремы 1.1, (vi), учитывая доказанное в лемме 3.1, получаем

$$\begin{aligned} S \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qy(s) ds &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{X_1^\Delta - I}{\Delta} \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qy(s) ds \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta} \left(\int_0^t X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Qy(s) ds - \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qy(s) ds \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qy(s) ds - \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} X^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Qy(s) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Qy(s) ds - L_1^{-1} Qy(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $A_1 y(t) + X_1^t P x_0 = A_1 y(t) + X^t x_0$ является решением уравнения (3.6).

Докажем единственность сильного решения уравнения (3.6), удовлетворяющего начальному условию (3.1). Операторы $J_\lambda = (\lambda - a)(\lambda I - S)^{-1}$ существуют при $\lambda > a$ в силу замечания 1.2. Сильное решение $x_\lambda(t)$ задачи Коши $x_\lambda(0) = x_0$ для уравнения

$$\dot{x}_\lambda(t) = (S J_\lambda) x_\lambda(t) + L_1^{-1} Qy(t)$$

однозначно определяется заданным начальным значением x_0 согласно лемме 3.2, поскольку оператор $S J_\lambda = \lambda(\lambda - a)(\lambda I - S)^{-1} - (\lambda - a)I$ ограничен. Положим $x(t) - x_\lambda(t) = v_\lambda(t)$, где $x(t)$ – решение задачи (3.1), (3.6). Тогда справедливо тождество $\dot{v}_\lambda(t) = (S J_\lambda) v_\lambda(t) + (S - S J_\lambda) x(t)$. Отсюда получим

$$v_\lambda(t) = \int_0^t X_\lambda^{t-s} (S - S J_\lambda) x(s) ds = \int_0^t X_\lambda^{t-s} (I - J_\lambda) S x(s) ds,$$

поскольку $v_\lambda(0) = 0$. Здесь $X_\lambda^{t-s} = e^{(t-s)S J_\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-s)^k (S J_\lambda)^k}{k!}$. При $t \geq 0$ имеем

$$\|X_\lambda^{t-s}\| = \|e^{(\lambda(\lambda-a)(\lambda I - S)^{-1} - (\lambda-a)I)t}\| \leq e^{t(a-\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k \|J_\lambda^k\|}{k!} = K e^{at}$$

согласно замечанию 1.2.

В силу также замечания 1.2 для всех $x \in \mathcal{X}$ имеем $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda(\lambda I - S)^{-1} x = x$. Это означает, что для всех $x \in \mathcal{X}$

$$\|(I - J_\lambda)x\| \leq \|(I - \lambda(\lambda I - S)^{-1})x\| + |a| \|(\lambda I - S)^{-1}x\| \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поэтому если s фиксировано и $\lambda \rightarrow +\infty$, то

$$\|X_\lambda^{t-s} (I - J_\lambda) S x(s)\| \leq K e^{a(t-s)} \|(I - J_\lambda) S x(s)\| \rightarrow 0.$$

Кроме того, существует $C > 0$ такое, что для всех $\lambda \in (a, +\infty)$ выполняется $\|I - J_\lambda\| \leq C$. Таким образом, $\|X_\lambda^{t-s} (I - J_\lambda) S x(s)\| \leq C_1 \|S x(s)\|$ для пары $(\lambda, s) \in (a, +\infty) \times (0, T)$. Поскольку $S x(s) = \dot{x}(s) - L_1^{-1} Qy(s) \in L_q(\mathcal{X}) \subset L_1(\mathcal{X})$, по теореме Лебега отсюда следует, что $v_\lambda(t) \rightarrow 0$, т.е. функция $x(t) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x_\lambda(t)$ определена однозначно.

Согласно тереме 1.1 имеет место равенство $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$. Поэтому решением задачи (3.1), (3.2) является сумма $x(t) = x^0(t) + x^1(t)$, где $x^0(t) = (I - P)x(t)$,

$x^1(t) = Px(t)$. Выше мы получили, что решением уравнения на $\mathcal{X}^0$ является функция $x^0(t) = -\sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1}(I - Q)y^{(k)}(t) = A_0 y(t)$, а на подпространстве $\mathcal{X}^1$ – функция $x^1(t) = A_1 y(t) + X^t x_0$. Таким образом, имеем $x(t) = (A_0 + A_1)y(t) + X^t x_0$.

Докажем оценку для решения $x(t)$. В силу леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{W_q^1(\mathcal{X})} &\leq \|A_0 y\|_{W_q^1(\mathcal{X})} + \|A_1 y\|_{W_q^1(\mathcal{X})} + \|X^t x_0\|_{W_q^1(\mathcal{X})} \\ &\leq C_2 \|y\|_{W_q^{p+1}(\mathcal{X})} + \left(\int_0^T \|X^t x_0\|_{\mathcal{X}}^q dt \right)^{1/q} + \left(\int_0^T \|X_1^t SP x_0\|_{\mathcal{X}}^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq C_2 \|y\|_{W_q^{p+1}(\mathcal{X})} + \left(\int_0^T K^q e^{aqt} dt \right)^{1/q} (\|x_0\|_{\mathcal{X}} + \|SP x_0\|_{\mathcal{X}}), \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В теореме 3.1 некоторые стандартные приемы доказательства существования и единственности классического решения уравнения, разрешенного относительно производной (см., например, [16]), использованы в случае сильного решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Аналогичный теореме 3.1 результат при других условиях для функции y был получен в работе [10].

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, нетрудно показать существование единственного сильного решения уравнения (3.2), удовлетворяющего обобщенному условию Шоултера [1]

$$Px(0) = Px_0. \quad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда для всех $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y})$ и $x_0 \in \text{dom } M_1 + \mathcal{X}^0$ существует единственное сильное решение задачи (3.2), (3.7), причем оно имеет вид $x(t) = (A_0 + A_1)y(t) + X^t x_0$ и удовлетворяет условию

$$\|x\|_{W_q^1(\mathcal{X})} \leq C(\|Px_0\|_{\mathcal{X}} + \|SP x_0\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{W_q^{p+1}(\mathcal{Y})}).$$

§ 4. Однозначная разрешимость задач оптимального управления

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ – гильбертовы пространства, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, при этом оператор M сильно (L, p) -радиален. Для $x_0 \in \text{dom } M$ и $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$ множество функций $u \in H^{p+1}(\mathcal{U})$ таких, что

$$\sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1}(I - Q)Bu^{(k)}(0) = -(I - P)x_0 - \sum_{k=0}^p G^k M_0^{-1}(I - Q)y^{(k)}(0),$$

обозначим через $H_{\partial}(x_0, y)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J_1(x, u) = J_0(x) + \frac{N}{2} \|u - u_0\|_{H^{p+1}(\mathcal{U})}^2 \rightarrow \inf, \quad (4.1)$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \quad (4.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4.3)$$

$$u \in \mathfrak{U}_{\partial}. \quad (4.4)$$

Здесь множество допустимых управлений $\mathfrak{U}_\partial$ – непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства управлений $H^{p+1}(\mathcal{U})$; $u_0 \in H^{p+1}(\mathcal{U})$, $y \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$ – заданные функции; $x_0 \in \text{dom } M$ – заданный вектор; $N > 0$. Предполагается также, что функционал J_0 выпуклый, неотрицательный на некотором линейном нормированном пространстве Y , полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости в Y , причем имеет место непрерывное вложение $\mathcal{Z}_{p+1} \subset Y$. Здесь $\mathcal{Z}_{p+1} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(\mathcal{Y})\}$ – пространство, в котором, исходя из вида уравнения (4.2) и гладкости функций y, u , естественно искать его сильные решения. Зададим в этом пространстве скалярное произведение.

ЛЕММА 4.1. *Пространство $\mathcal{Z}_{p+1}$ гильбертово относительно скалярного произведения $\langle x, z \rangle_{\mathcal{Z}_{p+1}} = \langle x, z \rangle_{H^1(\mathcal{X})} + \langle L\dot{x} - Mx, L\dot{z} - Mz \rangle_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем фундаментальную в $\mathcal{Z}_{p+1}$ последовательность $\{x_n\}$. Тогда при $n, m \rightarrow \infty$ стремится к нулю выражение

$$\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle_{\mathcal{Z}_{p+1}} = \|x_n - x_m\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|L(\dot{x}_n - \dot{x}_m) - M(x_n - x_m)\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}^2.$$

Поэтому существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in H^1(\mathcal{X})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (L\dot{x}_n - Mx_n) = z$ в пространстве $H^{p+1}(\mathcal{Y})$. Таким образом, $L\dot{x}_n \rightarrow L\dot{x}$ при $n \rightarrow \infty$ в $L_2(\mathcal{Y})$ и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$ справедлива сходимости $Mx_n \rightarrow L\dot{x} - z$ в $L_2(\mathcal{Y})$. Поэтому множество значений $t \in (0, T)$, при которых $x_n(t)$ не сходится к $x(t)$ в $\mathcal{X}$ или $Mx_n(t)$ не сходится к $L\dot{x}(t) - z(t)$ в $\mathcal{Y}$, имеет меру нуль. Учитывая замкнутость оператора M , получим, что для почти всех $t \in (0, T)$ выполняется $x(t) \in \text{dom } M$ и $Mx = L\dot{x} - z$ в $L_2(\mathcal{Y})$. Отсюда $L\dot{x} - Mx = z \in H^{p+1}(\mathcal{Y})$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение оператор $\gamma_0 : H^1(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$, $\gamma_0 x = x(0)$, который, очевидно, непрерывен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Понятно, что пространство $\mathcal{Z}_{p+1}$ непрерывно вложено в $H^1(\mathcal{X})$, поэтому и отображение $\gamma_0 : \mathcal{Z}_{p+1} \rightarrow \mathcal{X}$ непрерывно.

Множество $\mathfrak{W}$ всех пар $(x, u) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(\mathcal{U})$, удовлетворяющих (4.2)–(4.4), назовем *множеством допустимых пар* задачи (4.1)–(4.4). Из выпуклости множества $\mathfrak{U}_\partial$ и вида условий (4.2), (4.3) следует, что множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ выпукло. Решение задачи (4.1)–(4.4) состоит в нахождении пар $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости J_1 :

$$J_1(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u) \in \mathfrak{W}} J_1(x, u).$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(x_0, y) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(\mathcal{U})$ задачи (4.1)–(4.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что выполняются условия теоремы 1.2.3 из работы [15]. Для этого положим $U = H^{p+1}(\mathcal{U})$, $V = H^1(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$, $l \in \{0, \dots, p+1\}$, $Y_l = \mathcal{Z}_{p+1}$. Тогда линейный оператор $\mathfrak{L} : Y_l \times U \rightarrow V$, действующий по правилу $\mathfrak{L}(x, u) = (L\dot{x} - Mx - Bu, \gamma_0 x)$, непрерывен. Действительно, с учетом замечания 4.1 имеем

$$\begin{aligned} \|L\dot{x} - Mx - Bu\|_{H^l(\mathcal{Y})}^2 + \|\gamma_0 x\|_{\mathcal{X}}^2 &\leq 2\|L\dot{x} - Mx\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}^2 + 2\|Bu\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})}^2 + C_1\|x\|_{\mathcal{Z}_{p+1}}^2 \\ &\leq C(\|x\|_{\mathcal{Z}_{p+1}}^2 + \|u\|_{H^{p+1}(\mathcal{U})}^2) = C\|(x, u)\|_{\mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(\mathcal{U})}^2. \end{aligned}$$

Условие $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(x_0, y) \neq \emptyset$ в силу теоремы 3.1 гарантирует непустоту множества $\mathfrak{W}$. Полунепрерывность функционала J_1 снизу относительно слабой сходимости в пространстве $Y \times U$ следует из полунепрерывности J_0 в Y ; докажем его коэрцитивность на допустимых парах из $Y_1 \times U$, используя оценку (3.4). Действительно, в силу неотрицательности J_0 имеем

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{Z}_{p+1}}^2 + \|u\|_{H^{p+1}(U)}^2 &= \|x\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|Bu + y\|_{H^{p+1}(Y)}^2 + \|u\|_{H^{p+1}(U)}^2 \\ &\leq C_2(\|x_0\|_{\mathcal{X}}^2 + \|SPx_0\|_{\mathcal{X}}^2 + \|y\|_{H^{p+1}(Y)}^2 + \|u\|_{H^{p+1}(U)}^2) \leq C_3 J_1(x, u) + C_4. \end{aligned}$$

Пусть задача (4.1)–(4.4) имеет два решения $(\hat{x}_1, \hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{u}_2)$. Это означает, что $\hat{u}_1 \neq \hat{u}_2$ согласно единственности решения задачи (4.2), (4.3). В силу выпуклости $\mathfrak{W}$ пара $(\frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}, \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2})$ является допустимой. Тогда с учетом строгой выпуклости функционала $\|u - u_0\|_{H^{p+1}(U)}^2$ в $H^{p+1}(U)$ и выпуклости J_0 получим

$$J_1\left(\frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2}, \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(J_1(\hat{x}_1, \hat{u}_1) + J_1(\hat{x}_2, \hat{u}_2)).$$

Это противоречит предположению о том, что на парах $(\hat{x}_1, \hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{u}_2)$ функционал J_1 достигает своего минимума. Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи функционала J_1 :

$$J_2(x, u) = \frac{1}{2}\|x - w\|_{L_2(\mathcal{X})}^2 + \frac{N}{2}\|u - u_0\|_{H^{p+1}(U)}^2 \rightarrow \inf, \quad (4.5)$$

$$J_3(x, u) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{N}{2}\|u - u_0\|_{H^{p+1}(U)}^2 \rightarrow \inf, \quad (4.6)$$

где $w \in L_2(\mathcal{X})$ для (4.5) и $w \in \mathcal{X}$ для (4.6).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(x_0, y) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(U)$ задачи (4.2)–(4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U = H^{p+1}(U)$, $V = H^l(Y) \times \mathcal{X}$, $l \in \{0, 1, \dots, p+1\}$, $Y = L_2(\mathcal{X})$, $Y_1 = \mathcal{Z}_{p+1}$. Понятно, что вложение $Y_1 \subset Y$ непрерывно. Строгая выпуклость и непрерывность функционала $J_0 = \frac{1}{2}\|x - w\|_{L_2(\mathcal{X})}^2$ в пространстве Y очевидны, поэтому J_0 полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости. Для завершения доказательства сошлемся на теорему 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial(x_0, y) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(U)$ задачи (4.2)–(4.4), (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем непрерывность функционала $J_0(x) = \frac{1}{2}\|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}^2$ в пространстве $Y = H^1(\mathcal{X})$. Если $\{x_n\}$ сходится к x в $H^1(\mathcal{X})$, то

$$\begin{aligned} |J_0(x_n) - J_0(x)| &= \frac{1}{2} \left| \|x_n(T) - w\|_{\mathcal{X}} - \|x(T) - w\|_{\mathcal{X}} \right| (\|x_n(T) - w\|_{\mathcal{X}} + \|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}) \\ &\leq C_1 \|x_n(T) - x(T)\|_{\mathcal{X}} \leq C \|x_n - x\|_{H^1(\mathcal{X})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать выпуклость функционала $J_0(x) = \|x(T) - w\|_{\mathcal{X}}^2$ с функцией $w \in \mathcal{X}$ в пространстве $H^1(\mathcal{X})$. Отсюда следует его полунепрерывность снизу в смысле слабой сходимости в $H^1(\mathcal{X})$. Поэтому по теореме 4.1 существует единственное решение.

Применяя ту же схему рассуждений, что и при доказательстве теоремы 4.1, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Существует единственное решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(\mathcal{U})$ задачи (3.7), (4.1), (4.2), (4.4).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В отличие от теоремы 4.1, непустота множества $\mathcal{U}_\partial \subset \mathcal{U} = H^{p+1}(\mathcal{U})$ уже гарантирует выполнение условия нетривиальности в силу теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из теоремы 4.2 следует существование единственного решения $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{p+1} \times H^{p+1}(\mathcal{U})$ задачи (3.7), (4.2), (4.4), (4.5), а также задачи (3.7), (4.2), (4.4), (4.6).

§ 5. Редукция линейризованной системы Навье–Стокса

Рассмотрим начально-краевую задачу для линейризованной системы Навье–Стокса

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (5.2)$$

$$w_t(x, t) = \nu \Delta w(x, t) - q(x, t) + y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot w = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (5.4)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $\nu > 0$, $q = \nabla p$ – градиент давления. Искомые вектор-функциями являются $w(x, t)$ и $q(x, t)$.

Обозначим $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^n$, $\dot{\mathbb{H}}^1 = (\dot{H}^1(\Omega))^n$, $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot w = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Имеем $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi: \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор. Сужение проектора Π на подпространство $\dot{\mathbb{H}}^1 \cap \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}_2$ является непрерывным оператором $\Pi_1: \dot{\mathbb{H}}^1 \cap \mathbb{H}^2 \rightarrow \dot{\mathbb{H}}^1 \cap \mathbb{H}^2$. Поэтому $\dot{\mathbb{H}}^1 \cap \mathbb{H}^2 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\sigma^2 = \ker \Pi_1$, $\mathbb{H}_\pi^2 = \text{im } \Pi_1$.

Очевидно, что формулой $A = \text{diag}\{\Delta, \dots, \Delta\}$ задается линейный непрерывный оператор $A: \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{L}_2$ с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Обозначим $\Sigma = I - \Pi$, $A_\sigma = A|_{\mathbb{H}_\sigma^2}$, $A_\pi = A|_{\mathbb{H}_\pi^2}$.

ЛЕММА 5.1. *Имеет место действие двух операторов $A_\sigma: \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$ и $A_\pi: \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\Pi A \Sigma \equiv \mathbb{O}$. Пусть $v \in \mathcal{L}$; тогда выполняется $\nabla \cdot Av = \Delta(\nabla \cdot v) = 0$. На пространство $\mathbb{H}_\sigma^2$ это равенство распространяется по непрерывности. Следовательно, $A_\sigma: \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$.

Теперь покажем, что $\Sigma A \Pi \equiv \mathbb{O}$. Возьмем $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $u \in \mathbb{H}_\pi^2$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$. Имеем $\langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle = 0$, так как оператор A самосопряжен, $Av \in \mathbb{H}_\sigma$, как было показано выше, и пространства $\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$ ортогональны друг другу. В силу плотности $\mathbb{H}_\sigma^2$ в $\mathbb{H}_\sigma$ имеем $Au \perp \mathbb{H}_\sigma$, поэтому $A_\pi: \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$. Лемма доказана.

Для функции $z \in \dot{\mathbb{H}}^1 \cap \mathbb{H}^2$ выполняется условие (5.4) тогда и только тогда, когда $z \in \mathbb{H}_\sigma^2$, или, что то же самое, $\Pi_1 z = 0$. Уравнение (5.4) заменим на

соответствующее неоднородное уравнение

$$\Pi_1 w(x, t) = y_q(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T). \quad (5.5)$$

Положим $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q$, $\mathcal{Y} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q^2$, $\mathbb{H}_q = \mathbb{H}_\pi$, $\mathbb{H}_q^2 = \mathbb{H}_\pi^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \nu A_\pi & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $L: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – линейный непрерывный оператор, а линейный замкнутый оператор $M: \text{dom } M \rightarrow \mathcal{Y}$ имеет плотную в $\mathcal{X}$ область определения $\text{dom } M = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Сходная редукция задачи (5.1)–(5.4) к задаче (3.2), (3.7) использовалась в [17].

ТЕОРЕМА 5.1. *Оператор M сильно $(L, 1)$ -радиален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu - \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \nu A_\pi & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Понятно, что спектр $\sigma(A_\sigma)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$. Пусть $\{\varphi_k\}$ – семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{H}_\sigma$ собственных функций оператора A_σ , занумерованных по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности. Тогда $\mu - \nu A_\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \nu \lambda_k) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$. Пусть $\mu \neq \nu \lambda_k$; тогда существует непрерывный оператор

$$A_{\sigma\mu}^{-1} \equiv (\mu - \nu A_\sigma)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \nu \lambda_k} : \mathbb{H}_\sigma \rightarrow \mathbb{H}_\sigma.$$

Если $\mu \neq \nu \lambda_k$, то можно построить L -резольвенту оператора M :

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\mu + \nu A_\pi \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} R_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & R_{(\mu,1)}^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_\mu^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & L_{(\mu,1)}^L(M) &= \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$R_{(\mu,1)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} A_{\sigma\lambda}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,1)}^L(M) f = \begin{pmatrix} \nu A_{\sigma\mu_0}^{-1} A_{\sigma\mu_1}^{-1} A_{\sigma\lambda}^{-1} A f_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $f \in \mathring{\mathcal{F}} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q^2$. Таким образом, для $\mu_0 > \nu\lambda_1$, $\mu_1 > \nu\lambda_1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k \varphi_k}{(\mu_0 - \nu\lambda_k)(\mu_1 - \nu\lambda_k)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|v_k|^2}{(\mu_0 - \nu\lambda_k)^2(\mu_1 - \nu\lambda_k)^2} \\ &\leq \frac{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2}{(\mu_0 - \nu\lambda_1)^2(\mu_1 - \nu\lambda_1)^2}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \max\{\|R_{(\mu,1)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{(\mu,1)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} &\leq \frac{1}{(\mu_0 - \nu\lambda_1)(\mu_1 - \nu\lambda_1)}, \\ \|R_{(\mu,1)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} &\leq \frac{1}{(\mu_0 - \nu\lambda_1)(\mu_1 - \nu\lambda_1)(\lambda - \nu\lambda_1)}, \\ \|M(\lambda L - M)^{-1}L_{(\mu,1)}^L(M)f\|_{\mathcal{Y}} &\leq \frac{\nu\|Af_\sigma\|_{\mathbb{L}_2}}{(\mu_0 - \nu\lambda_1)(\mu_1 - \nu\lambda_1)(\lambda - \nu\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Операторы разрешающей полугруппы $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ однородной системы (5.2), (5.3), (5.5) имеют вид

$$\begin{aligned} X^t &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P = X^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При произвольном фиксированном $t \in (0, T)$ обозначим $\Sigma w(x, t) = w_\sigma(x, t)$, $\Pi w(x, t) = w_\pi(x, t)$, $\Sigma y(x, t) = y_\sigma(x, t)$, $\Pi y(x, t) = y_\pi(x, t)$. Множество допустимых начальных значений для данной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_y &= \left\{ (w_0, q_0) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}_\pi : \Pi w_0(x) = y_q(x, 0), \right. \\ &\quad \left. q_0(x) = y_\pi(x, 0) + \nu A y_q(x, 0) - \frac{\partial y_q(x, 0)}{\partial t} \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.2. При любых $(w_0, q_0) \in \mathcal{M}_y$, $y_\sigma \in L_2(\mathbb{H}_\sigma)$, $y_\pi \in H^1(\mathbb{H}_\pi)$, $y_q \in H^2(\mathbb{H}_q^2)$ существует единственное сильное решение задачи (5.1)–(5.3), (5.5), имеющее вид

$$\begin{aligned} w_\sigma(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle w_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k(t-s)} \langle y_\sigma(\xi, s), \varphi_k(\xi) \rangle \varphi_k(x) ds, \\ w_\pi(x, t) &= y_\pi(x, t), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$q(x, t) = y_\pi(x, t) + \nu A y_q(x, t) - \frac{\partial y_q(x, t)}{\partial t}. \tag{5.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $v \in \text{dom } M$ имеем

$$M(I - P)v = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu A_\pi v_\pi - v_q \\ -v_\pi \end{pmatrix} = (I - Q)f = \begin{pmatrix} 0 \\ f_\pi \\ f_q \end{pmatrix}.$$

Отсюда $v_\pi = -f_q$, $v_q = -f_\pi - \nu A_\pi f_q$, поэтому

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\nu A_\pi \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad GM_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по теореме 3.1 получим равенства (5.6), (5.7). Учитывая вид разрешающей полугруппы и проектора Q , имеем

$$\begin{aligned} w_\sigma(x, t) &= X^t w_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle w_0, \varphi_k \rangle \varphi_k(x) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k(t-s)} \langle y_\sigma(\xi, s), \varphi_k(\xi) \rangle \varphi_k(x) ds. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. По сравнению с абстрактной теоремой 3.1, в теореме 5.2 ослаблены условия, налагаемые на гладкость функции y . Это возможно в силу специфики операторов данной задачи. Заметим, что, как и в монографии [15], в случае $y_\pi \equiv y_q \equiv 0$ от правой части системы Навье–Стокса y_σ дополнительной гладкости не требуется.

§ 6. Задача оптимального управления для линеаризованной системы Навье–Стокса

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} J_2(w, q, u, u_q) &= \frac{1}{2} \|w - v_0\|_{L_2(\mathbb{L}_2)}^2 + \frac{1}{2} \|q - r_0\|_{L_2(\mathbb{L}_2)}^2 \\ &\quad + \frac{N}{2} \|u - u_0\|_{H^2(\mathbb{L}_2)}^2 + \frac{N}{2} \|u_q - u_1\|_{H^2(\mathbb{H}_q^2)}^2 \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$w_t(x, t) = \nu \Delta w(x, t) - q(x, t) + u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$\Pi_1 w = u_q(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (6.3)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.4)$$

$$w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (6.5)$$

$$(u, u_q) \in \mathfrak{U}_\partial, \quad (6.6)$$

где $v_0 \in L_2(\mathbb{L}_2)$, $r_0 \in L_2(\mathbb{H}_q)$, $u_0 \in H^2(\mathbb{L}_2)$, $u_1 \in H^2(\mathbb{H}_q^2)$, константы N , ν больше нуля, $w_0 \in \mathbb{L}_2$, $q_0 \in \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{U}_\partial$ – непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства $H^2(\mathbb{L}_2) \times H^2(\mathbb{H}_q^2)$.

Чтобы редуцировать задачу (6.1)–(6.6) к задаче (4.2)–(4.5), положим $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q^2$, $y \equiv 0$, $B = I \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. Зададим также пространство

$$\mathcal{Z}_2 = \{(z, k) \in H^1(\mathbb{L}_2) \times H^1(\mathbb{H}_q) : z_t - \nu \Delta z + k \in H^2(\mathbb{L}_2), \Pi_1 z \in H^2(\mathbb{H}_q^2)\}.$$

Множество $H_\partial(x_0, y) = H_\partial((w_0, q_0), 0)$ в данном случае определяется как множество функций $(u, u_q) \in H^2(\mathbb{L}_2) \times H^2(\mathbb{H}_q^2)$ таких, что

$$Pw_0(x) = u_q(x, 0), \quad q_0(x) = u_\pi(x, 0) + \nu Au_q(x, 0) - \frac{\partial u_q(x, 0)}{\partial t}.$$

Согласно следствию 4.1 справедлива

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathfrak{U}_\partial \cap H_\partial((w_0, q_0), 0) \neq \emptyset$. Тогда существует единственное решение $(\hat{w}, \hat{q}, \hat{u}, \hat{u}_q) \in \mathcal{Z}_2 \times H^2(\mathbb{L}_2) \times H^2(\mathbb{H}_q^2)$ задачи (6.1)–(6.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из теоремы 5.2 и замечания 5.2 видно, что специфика системы Навье–Стокса позволяет исследовать задачу (6.1)–(6.6) в пространстве управлений меньшей гладкости $L_2(\mathbb{H}_\sigma) \times H^1(\mathbb{H}_\pi) \times H^2(\mathbb{H}_q^2)$.

Список литературы

1. R. E. Showalter, “Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type”, *SIAM J. Math. Anal.*, **6**:1 (1975), 25–42.
2. Г. А. Свиридюк, В. Е. Федоров, “О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:3 (1998), 604–616; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, “On the identities of analytic semigroups of operators with kernels”, *Siberian Math. J.*, **39**:3 (1998), 522–533.
3. В. Е. Федоров, “Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов”, *Алгебра и анализ*, **12**:3 (2000), 173–200; англ. пер.: V. E. Fedorov, “Degenerate strongly continuous semigroups of operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:3 (2001), 471–489.
4. G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
5. P. C. Müller, “Linear control design of linear descriptor systems”, *14th Triennial World Congress* (Beijing), 1999, 31–36.
6. В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Наука, Новосибирск, 2003.
7. Г. А. Свиридюк, А. А. Ефремов, “Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами”, *Дифференц. уравнения*, **31**:11 (1995), 1912–1919; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, A. A. Efremov, “Optimal control of Sobolev-type linear equations with relatively p -sectorial operators”, *Differential Equations*, **31**:11 (1995), 1882–1890.
8. Г. А. Свиридюк, А. А. Ефремов, “Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева”, *Изв. вузов. Матем.*, 1996, № 12, 75–83; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, A. A. Efremov, “Optimal control problem for a class of linear equations of Sobolev type”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **40**:12 (1996), 60–71.
9. Г. А. Свиридюк, А. А. Ефремов, “Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений”, *Докл. РАН*, **364**:3 (1999), 323–325; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, A. A. Efremov, “Optimal control of a class of linear degenerate equations”, *Dokl. Math.*, **59**:1 (1999), 157–159.
10. В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, “Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа”, *Дифференц. уравнения*, **40**:11 (2004), 1548–1556; англ. пер.: V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, “Optimal control of Sobolev type linear equations”, *Differ. Equ.*, **40**:11 (2004), 1627–1637.
11. В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, “Исследование одной задачи оптимального управления”, *Вестн. Челяб. гос. пед. ун-та. Сер. 4. Естеств. науки*, 2005, № 6, 23–31.

12. В. Е. Федоров, М. В. Плеханова, “Слабые решения и проблема квадратического регулятора для вырожденного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве”, *Вычислительные технологии*, **9:2** (2004), 92–102.
13. М. В. Плеханова, В. Е. Федоров, “Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2004, № 5, 40–44.
14. М. В. Плеханова, В. Е. Федоров, “Задачи стартового управления для линейных уравнений соболевского типа”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем., физ., хим.*, 2005, № 6, 43–49.
15. А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999; англ. пер.: A. V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
16. С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: S. Mizohata, *The theory of partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, London, 1973.
17. Г. А. Свиридюк, Г. А. Кузнецов, “Об относительно сильной p -секториальности линейных операторов”, *Докл. РАН*, **365:6** (1999), 736–738; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, G. A. Kuznetsov, “Relatively strongly p -sectorial linear operators”, *Dokl. Math.*, **59:2** (1999), 298–300.

М. В. ПЛЕХАНОВА (M. V. PLEKHANOVA)
Челябинский государственный педагогический
университет, математический факультет

Поступило в редакцию
10.05.2007
20.05.2008

В. Е. ФЕДОРОВ (V. E. FEDOROV)
Челябинский государственный университет,
математический факультет
E-mail: kar@csu.ru