Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пржиялковский, Минимальное кольцо Громова–Виттена, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 203–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:58:30

УДК 512.772

В. В. Пржиялковский

Минимальное кольцо Громова–Виттена

Построена абстрактная теория инвариантов Громова–Виттена рода нуль для квантово минимальных многообразий Фано – минимального естественного (с точки зрения теории квантовых когомологий) класса многообразий. А именно, рассмотрено минимальное кольцо Громова–Виттена, порожденное образующими и соотношениями, восходящими к теории Громова–Виттена для многообразий Фано (неопределенной размерности). Теория Громова–Виттена для любого квантово минимального многообразия есть гомоморфизм этого кольца в $\mathbb{C}$. Доказана абстрактная теорема восстановления, утверждающая, что это кольцо изоморфно свободному коммутативному кольцу, порожденному “двухточечными примарными инвариантами”. Найдены решения дифференциального уравнения типа DN для многообразия Фано размерности N в терминах производящего ряда одноточечных инвариантов Громова–Виттена.

Библиография: 11 наименований.

§ 1. Введение

Рассмотрим гладкое многообразие Фано V размерности N . Подпространство $H_N^*(V, \mathbb{Q}) \subset H^*(V, \mathbb{Q})$, мультипликативно порожденное антиканоническим классом $H \in H^2(V, \mathbb{Q})$, тавтологически замкнуто относительно умножения в кольце когомологий. Теория Громова–Виттена (а точнее, набор трехточечных инвариантов Громова–Виттена рода нуль) позволяет “деформировать” кольцо когомологий, т.е. определить в градуированном пространстве $QH^*(V) = H^*(V, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}[q]$ квантовое умножение, которое совпадает с умножением в $H^*(V, \mathbb{Q})$, если положить $q = 0$. Подпространство $QH_N^*(V) = H_N^*(V) \otimes \mathbb{C}[q]$ не обязательно замкнуто относительно квантового умножения. Если оно замкнуто, то такое многообразие называется *квантово минимальным*. Примерами многообразий минимальных многообразий являются трехмерные многообразия Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ или полные пересечения в проективных пространствах.

Пусть V квантово минимально. Тогда в его квантовом $\mathcal{D}$ -модуле имеется естественный подмодуль, соответствующий подкольцу $QH_N^*(V)$. Связность в этом $\mathcal{D}$ -модуле задается матрицей квантового умножения на антиканонический класс (иными словами, двухточечными примарными инвариантами Громова–Виттена рода нуль). Регуляризовав его, мы получим детерминантальный оператор, или оператор типа DN для V (такие операторы подробно изучены в [1]). Одна из гипотез зеркальной симметрии утверждает, что этот оператор совпадает с оператором Пикара–Фукса для модели Ландау–Гинзбурга,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00395, 06-01-72017-МНТИ), а также Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-1987.2008.1).

двойственной многообразию V (см., например, [2]). Это доказано, в частности, для трехмерного случая (см. [3] и [4]).

В работе мы доказываем следующую теорему. Пусть $\langle \tau_i H^j \rangle_d$ – одноточечный инвариант Громова–Виттена для кривой антиканонической степени d . Рассмотрим регуляризованный I -ряд (производящий ряд одноточечных инвариантов Громова–Виттена)

$$\tilde{I}^V = 1 + \sum_{0 \leq j < N, d > 0} \langle \tau_{d+j-2} H^{N-j} \rangle_d q^d h^j / H^N (h+1) \cdots (h+d) \in \mathbb{C}[[q]][h]/h^N.$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\tilde{I}^V = \sum_{0 \leq k < N} \tilde{I}^k h^k$, где $\tilde{I}^i$ – ряд по q для каждого i . Тогда N функций

$$\tilde{I}^0, \quad \tilde{I}^0 \log(q) + \tilde{I}^1, \quad \tilde{I}^0 \log(q)^2 / 2! + \tilde{I}^1 \log(q) + \tilde{I}^2, \quad \dots$$

образуют базис ядра оператора типа DN для V .

Идея выражения решений уравнений типа DN через инварианты Громова–Виттена восходит к работам Э. Виттена, Р. Дижкграафа и Б. А. Дубровина. Доказательство теоремы 1.1 базируется на соотношениях между инвариантами Громова–Виттена рода нуль. Таким образом, утверждение теоремы должно быть верно для всех наборов чисел, для которых выполнены эти соотношения. Поэтому естественной идеей является обобщение инвариантов Громова–Виттена квантово минимальных многообразий и их детерминантальных операторов до абстрактных теорий, для которых выполнены аналогичные соотношения. Эти обобщения не зависят уже ни от каких многообразий, а зависят только от “размерности” N . Однако с помощью двойственности Пуанкаре можно обобщить инварианты и дальше, сделав их не зависимыми от размерности. Такая универсальная теория и рассмотрена в настоящей статье. Численные геометрические инварианты многообразия в этой теории становятся универсальными многочленами, едиными для всех квантово минимальных многообразий Фано во всех размерностях.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \mathbb{C}[a_{ij}]$, $0 \leq i, j \leq N$, $\mathcal{D} = \mathbb{C}[q, \frac{d}{dq}]$ и $D = q \frac{d}{dq}$. Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a_{00}(Dq) & a_{01}(Dq)^2 & \dots & a_{0,N-1}(Dq)^N & a_{0N}(Dq)^{N+1} \\ 1 & a_{11}(Dq) & \dots & a_{1,N-1}(Dq)^{N-1} & a_{1N}(Dq)^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{NN}(Dq) \end{pmatrix},$$

элементы которой лежат в $A_N \otimes \mathcal{D}$. Определим оператор¹ $L_N \in A_N \otimes \mathcal{D}$ равенством

$$\det_{\text{right}}(D - M) = DL_N$$

(алгебра $A_N \otimes \mathcal{D}$ некоммутативна, и определитель берется путем разложения по правому столбцу).

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим операторы L_N , $N \in \mathbb{N}$, как (некоммутативные) многочлены от q и D . Легко проверить, что степень таких операторов по q и D

¹Операторы, соответствующие симметричным относительно побочной диагонали матрицам (т. е. матрицам, для которых $a_{ij} = a_{N-j, N-i}$), называются *операторами типа DN* .

не зависит от его представления как многочлена. Оператор L_2 (соответственно, L_3) как многочлен имеет степень 2 (соответственно, 3) по D и степень 3 (соответственно, 4) по q . Выпишем в терминах переменных a_{ij} аналитические решения уравнений $L_2\Phi = 0$ и $L_3\Phi = 0$ соответственно:

$$\begin{aligned}
 & 1 + a_{00}q + \left(\frac{1}{2}a_{01} + a_{00}^2\right)q^2 + \left(\frac{7}{6}a_{01}a_{00} + a_{00}^3 + \frac{1}{3}a_{01}a_{11} + \frac{2}{9}a_{02}\right)q^3 \\
 & + \left(\frac{23}{12}a_{01}a_{00}^2 + \frac{1}{4}a_{01}a_{11}^2 + \frac{3}{8}a_{01}^2 + \frac{1}{8}a_{22}a_{02} + \frac{5}{6}a_{11}a_{00}a_{01} + \frac{3}{16}a_{01}a_{12} \right. \\
 & \left. + \frac{43}{72}a_{02}a_{00} + a_{00}^4 + \frac{1}{6}a_{02}a_{11}\right)q^4 + O(q^5), \\
 & 1 + a_{00}q + \left(\frac{1}{2}a_{01} + a_{00}^2\right)q^2 + \left(\frac{7}{6}a_{01}a_{00} + a_{00}^3 + \frac{1}{3}a_{01}a_{11} + \frac{2}{9}a_{02}\right)q^3 \\
 & + \left(\frac{23}{12}a_{01}a_{00}^2 + \frac{1}{4}a_{01}a_{11}^2 + \frac{3}{8}a_{01}^2 + \frac{1}{8}a_{22}a_{02} + \frac{5}{6}a_{11}a_{00}a_{01} + \frac{3}{16}a_{01}a_{12} \right. \\
 & \left. + \frac{43}{72}a_{02}a_{00} + a_{00}^4 + \frac{1}{6}a_{02}a_{11} + \frac{3}{32}a_{03}\right)q^4 + O(q^5).
 \end{aligned}$$

Первые несколько коэффициентов этих решений совпадают. Более того, эти решения “одинаковы”, если переменные a_{ij} , которые “не входят в оператор L_2 ”, положить равными нулю. Иначе говоря, если положить $a_{i3} = 0$ в решении уравнения $L_3\Phi = 0$, то мы получим решение уравнения $L_2\Phi = 0$.

Оказывается, это верно и в общем случае. Рассмотрим два натуральных числа $N_1 < N_2$. Пусть Φ_1 и Φ_2 – аналитические решения уравнений $L_{N_1}\Phi = 0$ и $L_{N_2}\Phi = 0$, нормированные условием $\Phi_i(0) = 1$. Положим $a_{ij} = 0$ в ряде Φ_2 для $N_1 < i, j \leq N_2$ и обозначим полученный ряд через Φ'_2 . Тогда $\Phi_1 = \Phi'_2$. Кроме того, несложно показать (см. ниже лемму 2.3 и предложение 3.4), что для любого n если $N_1 \gg n$, то

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{q^n}.$$

Аналогичное утверждение верно и для логарифмических решений уравнений $L_N\Phi = 0$.

Таким образом, решения таких уравнений получаются друг из друга “ограничением”, а начальные отрезки разложений решений разных уравнений совпадают. Это позволяет определить “универсальный ряд”, “ограничениями” которого на A_N являются решения уравнений $L_N\Phi = 0$. Этот ряд является “производящим рядом для одноточечных абстрактных инвариантов Громова–Виттена” в следующем смысле.

Ниже мы определим *минимальное кольцо Громова–Виттена* GW как коммутативную алгебру с образующими и соотношениями, используемыми в теории Громова–Виттена. Такое определение схоже с определением формальных фробениусовых многообразий, принадлежащим Б. А. Дубровину, и аксиоматическим подходом к теории инвариантов Громова–Виттена, принадлежащим М. Л. Концевичу и Ю. И. Манину. Отличие состоит в том, что мы не фиксируем размерность и рассматриваем “абстрактные инварианты Громова–Виттена для многообразия Фано неопределенной размерности”. Это достигается с помощью того, что мы рассматриваем “инварианты, в которых один класс заменен на двойственный по Пуанкаре”, и переформулируем аксиомы Концевича–Манина в терминах таких “инвариантов”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Рассмотрим формальные символы вида

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle,$$

где $n \geq 1$, $i_1, \dots, i_{n-1}, r, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (последний член имеет нижний индекс). Для простоты мы будем записывать H^i , H_j вместо $\tau_0 H^i$, $\tau_0 H_j$. Определим *степень* такого символа как число $\sum d_s + \sum i_s - r + (3 - n)$. Пусть F – множество символов неотрицательной степени. *Минимальным кольцом Громова–Виттена* называется градуированное кольцо

$$\text{GW} = \mathbb{C}[F]/\text{Rel},$$

где Rel – идеал, порожденный следующими соотношениями.

GW1 (аксиома S_n -транзитивности; ср. с [2, п. 2.2.1]). Рассмотрим произвольную перестановку $\sigma \in S_{n-1}$. Пусть $j_k = i_{\sigma(k)}$ и $f_k = d_{\sigma(k)}$. Тогда

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = \langle \tau_{f_1} H^{j_1}, \dots, \tau_{f_{n-1}} H^{j_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle.$$

GW2 (нормализация; ср. с [5, предложение 1.4.1]). Пусть $r = \sum d_s + \sum i_s + (3 - n)$. Тогда

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = \frac{(d_1 + \dots + d_n)!}{d_1! \dots d_n!} \cdot M,$$

где $M = 1$, если $\sum d_j = n - 3$, и $M = 0$ в противном случае.

GW3 (аксиома фундаментального класса или уравнение струны; ср. с [6, гл. VI, предложение 5.1]). Выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & \langle H^0, \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{i-1}} H^{i_{j-1}}, \tau_{d_{i-1}} H_{i_j}, \tau_{d_{i+1}} H^{i_{j+1}}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle, \end{aligned}$$

за исключением случая $\langle H^0, H^i, H_i \rangle$, который определяется соотношением GW2.

GW4 (аксиома дивизора; ср. с [6, гл. VI, предложение 5.4]). Выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & \langle H^1, \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle = d \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle \\ &+ \sum_{s=1}^{n-1} \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{s-1}} H^{i_{s-1}}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle + \langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H_{r-1} \rangle, \end{aligned}$$

где $d > 0$ – степень левой части равенства.

GW5 (топологическая рекурсия; ср. с [7, формула (6)]). Для любых чисел $c_1, \dots, c_n, i_1, \dots, i_n$ и множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим последовательность

$\tau_{cs_1} H^{i_{s_1}}, \dots, \tau_{cs_k} H^{i_{s_k}}$ (где $s_1, \dots, s_k$ – различные элементы S) через $\coprod_S$. Тогда для любого $n \geq 0$

$$\begin{aligned} & \left\langle \coprod_{\{1, \dots, n\}}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \right\rangle \\ &= \sum \left\langle \tau_{d_1-1} H^{j_1}, \coprod_{S_1}, H_a \right\rangle \left\langle H^a, \coprod_{S_2}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \right\rangle, \\ & \left\langle \coprod_{\{1, \dots, n\}}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, \tau_{d_3} H_r \right\rangle \\ &= \sum \left\langle \coprod_{S_1}, \tau_{d_1} H^{j_1}, \tau_{d_2} H^{j_2}, H_a \right\rangle \left\langle H^a, \coprod_{S_2}, \tau_{d_3-1} H_r \right\rangle, \end{aligned}$$

где суммы берутся по всем разбиениям $S_1 \sqcup S_2 = \{1, \dots, n\}$ и всем $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таким, что степени символов, входящих в выражение, неотрицательны (заметим, что сумма конечна).

Оказывается, кольцо GW имеет удобный мультипликативный базис. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{C}[a_{ij}]$, $0 \leq i \leq j$, $j > 0$, и отображение $r: A \rightarrow \text{GW}$, задающееся через $a_{ij} \mapsto \langle H^1, H^j, H_i \rangle$.

ТЕОРЕМА 1.4 (абстрактная теорема восстановления). *Отображение r является изоморфизмом.*

Эта теорема является абстрактной версией первой теоремы восстановления М. Л. Концевича и Ю. И. Манина (см. [2, теорема 3.1]).

Пусть $a_{00} = 0$ (“геометрический случай”, в общем случае см. замечание 4.4). С помощью отображения r можно рассматривать коэффициенты уравнений $L_N \Phi = 0$ и их решений как элементы кольца GW.

Рассмотрим ряд

$$\tilde{I} = 1 + \sum_{j \geq 0, i > j-2} \langle \tau_i H_j \rangle q^{i-j+2} h^j (h+1) \cdots (h+i-j+2) \in A \otimes \mathbb{C}[[q]][[h]].$$

В терминах образующих a_{ij} его можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{I} = 1 + & (a_{11}h + (a_{22} - a_{11})h^2)q + \left(\frac{a_{01}}{2} + \left(\frac{a_{01}}{4} + \frac{a_{11}^2}{2} + \frac{a_{12}}{4} \right)h \right. \\ & \left. + \left(-\frac{a_{01}}{8} + \frac{a_{23}}{8} + \frac{a_{11}a_{22}}{2} - \frac{a_{11}^2}{4} + \frac{a_{22}^2}{4} \right)h^2 \right)q^2 + O(q^3, h^3). \end{aligned}$$

Этот универсальный производящий ряд одноточечных инвариантов Громова–Виттена определяет решения уравнений $L_N \Phi = 0$ для всех N . А именно, прямым следствием теоремы 1.4 и теоремы 1.1 является следующая теорема. Для любой $\mathbb{C}$ -алгебры R пусть $r_N: A \otimes R \rightarrow A_N \otimes R$ – отображение, задающееся через $a_{ij} \mapsto a_{ij}$, если $0 \leq i, j \leq N$, и через $a_{ij} \mapsto 0$ в противном случае. Определим $\tilde{I}^s \in A \otimes \mathbb{C}[[q]]$ равенством $\tilde{I} = \sum \tilde{I}^s h^s$ и S_i равенствами $S_0 = \tilde{I}^0$, $S_1 = \tilde{I}^0 \log(q) + \tilde{I}^1$, $S_2 = \tilde{I}^0 \log(q)^2/2! + \tilde{I}^1 \log(q) + \tilde{I}^2$ и т. д.

ТЕОРЕМА 1.5. *Множество $\{r_N(S_0), \dots, r_N(S_{N-1})\}$ является базисом в пространстве решений дифференциального уравнения $L_N \Phi = 0$.*

Теорема 1.1 является частным случаем теоремы 4.2. Однако доказательства этих результатов практически идентичны. Поэтому в первой части работы (§ 2, 3) мы докажем (без применения абстрактной теории инвариантов Громова–Виттена) теорему 1.1, имеющую непосредственное применение к изучению геометрии многообразий Фано, а потом, во второй части работы (§ 4), мы докажем теорему 1.4. С ее помощью мы формально выведем из теоремы 1.1 теорему 4.2.

В § 2 мы рассматриваем квантово минимальное многообразие Фано V размерности N . Двухточечные инварианты Громова–Виттена определяют квантовую связность и соответствующий ей дифференциальный оператор. Элементы ядра этого квантового дифференциального оператора определяются I -рядом многообразия V (т. е. производящим рядом одноточечных инвариантов Громова–Виттена для V). В § 3 изучается регуляризация квантового дифференциального оператора, которая определяет оператор типа DN . Метод Фробениуса позволяет найти конкретные выражения для решений уравнения типа DN , построенного по V , в терминах его I -ряда. Доказательства в § 2, 3 используют аксиому фундаментального класса, аксиому дивизора и соотношения топологической рекурсии для V . В § 4 мы доказываем абстрактную теорему восстановления и абстрактные версии теорем из § 2, 3, используя те же аргументы в абстрактном случае. В § 5 мы находим конкретные рекурсивные соотношения для всех решений дифференциальных операторов.

§ 2. Квантовые операторы

2.1. Некоммутативные определители. Пусть R – ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра (не обязательно коммутативная). Мы будем рассматривать матрицы с элементами из R . Элементы матрицы M размера $N + 1$ мы будем нумеровать индексами от 0 до N . Подматрица размера $i \times i$, расположенная в левом верхнем углу M , называется i -й *ведущей подматрицей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [1, определение 1.3]. Матрица M с элементами из R называется *почти треугольной*, если $M_{ij} = 0$ для $i + 1 > j$ и $M_{i+1,i} = -1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [1, определение 1.2]. Рассмотрим матрицу M с элементами из R . *Правым определителем* матрицы M называется определитель, полученный с помощью разложения матрицы M по правому столбцу:

$$\det_{\text{right}}(M) = \sum_{i=0}^N M_{iN} C_{iN},$$

где C_{iN} – алгебраические дополнения, взятые как правые определители.

Для любой $((N + 1) \times (N + 1))$ -матрицы $M = (M_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ определим M^T как матрицу с элементами $M_{ij}^T = M_{N-j, N-i}$ (т. е. M^T – “матрица M , транспонированная относительно побочной диагонали”).

ЛЕММА 2.3 [1, п. 1.4]. Пусть M – почти треугольная $((N + 1) \times (N + 1))$ -матрица. Положим

$$P_0 = 1, \quad P_{i+1} = \sum_{j=0}^i M_{ji} P_j.$$

Тогда P_i – правый определитель i -й ведущей подматрицы матрицы M . В частности, $P_{N+1} = \det_{\text{right}}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по размеру подматриц. Для $i = 1$ утверждение тривиально. Обозначим $(i + 1)$ -ю ведущую подматрицу матрицы M через M_{i+1} . Заметим, что правый определитель матрицы M_{i+1}^j , полученной удалением последнего столбца и j -й строки из M_{i+1} , задается формулой

$$\det_{\text{right}} M_{i+1}^j = (-1)^{i-j} P_j.$$

Таким образом,

$$\det_{\text{right}} M_{i+1} = \sum_{j=0}^i (-1)^{j+i} M_{ji} \det_{\text{right}} M_{i+1}^j = \sum_{j=0}^i M_{ji} P_j = P_{i+1}.$$

ЛЕММА 2.4 (ср. с [1, предложение 1.7]). Пусть M – почти треугольная матрица и $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_N)^T$. Пусть $M\xi = 0$. Тогда

$$\det_{\text{right}}(M^\tau) \xi_N = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем следующую систему уравнений относительно координат $\{\xi_i\}$:

$$\begin{aligned} M_{00}\xi_0 + \dots + M_{0N}\xi_N &= 0, \\ -\xi_0 + M_{11}\xi_1 + \dots + M_{1N}\xi_N &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\xi_{i-1} + M_{ii}\xi_i + \dots + M_{iN}\xi_N &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\xi_{N-1} + M_{NN}\xi_N &= 0. \end{aligned}$$

Пусть P_i получены с помощью леммы 2.3, примененной к M^τ . Решая систему шаг за шагом (в обратном направлении), имеем $P_i \xi_N = \xi_{N-i}$. Таким образом,

$$\det_{\text{right}}(M^\tau) \xi_N = \left(\sum_{i=0}^N M_{iN}^\tau P_i \right) \xi_N = \sum_{i=0}^N M_{0i} \xi_i = 0.$$

Лемма доказана.

2.2. Квантовые операторы. Рассмотрим гладкое многообразие Фано V размерности N с $\text{Pic}(V) \cong \mathbb{Z}$. Обозначим $H = -K_V$ и $H^*(V) = H^*(V, \mathbb{Q})$. (Естественное отображение $\text{Pic}(V) \rightarrow H^2(V, \mathbb{Z})$ – изоморфизм для гладких многообразий Фано, поэтому мы используем одно и то же обозначение для элемента кольца $\text{Pic}(V) \otimes \mathbb{Q}$ и его класса в $H^2(V)$.) Пусть $H_H^*(V) \subset H^*(V)$ – дивизориальное подпространство, т. е. подпространство, порожденное степенями класса H .

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(V)$ и d – антиканоническая степень эффективной алгебраической кривой $\beta \in H_2(V)$. Соответствующий инвариант Громова–Виттена (рода нуль) с потомками степеней $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (см. [6, гл. VI, п. 2.1]) мы будем обозначать через $\langle \tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_n} \gamma_n \rangle_d$.

Подпространство $H_H^*(V) \subset H^*(V)$ по определению замкнуто относительно умножения, т. е. для любых классов $\gamma_1, \gamma_2 \in H_H^*(V)$ произведение $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ лежит

в $H_H^*(V)$. Мультипликативная структура кольца когомологий может быть деформирована. А именно, можно рассмотреть *кольцо квантовых когомологий* $QH^*(V) = H^*(V) \otimes \mathbb{C}[q]$ (см. [6, определение 0.0.2]) с квантовым умножением $\star: QH^*(V) \times QH^*(V) \rightarrow QH^*(V)$, т. е. билинейным отображением, задающимся через

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \sum_{\gamma, d} q^d \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma^\vee \rangle_d \gamma$$

для любых классов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma \in H^*(V)$, где $\gamma^\vee$ – класс, двойственный по Пуанкаре классу γ (мы отождествляем элементы $\gamma \in H^*(V)$ и $\gamma \otimes 1 \in QH^*(V)$). Свободным (по q) членом элемента $\gamma_1 \star \gamma_2$ является $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. Подпространство $QH_H^*(V) = H_H^*(V) \otimes \mathbb{C}[q]$ в общем случае уже не замкнуто относительно $\star$.

Примерами многообразий V с незамкнутыми подпространствами $QH_H^*(V)$ являются грассманианы $G(k, n)$, $k, n - k > 1$, размерности более 4 (например, $G(2, 5)$), а также их гиперплоские сечения размерности не менее 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Многообразие V называется *квантово минимальным*, если $QH_H^*(V)$ квантово замкнуто, т. е. если для любых классов $\gamma_1, \gamma_2 \in H_H^*(V)$, $\mu \in H_H^*(V)^\perp$ инвариант Громова–Виттена вида $\langle \gamma_1, \gamma_2, \mu \rangle_d$ равен нулю².

Другими словами, многообразие является квантово минимальным тогда и только тогда, когда $QH_H^*(V)$ является подкольцом кольца $QH^*(V)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что многообразие V квантово минимально.

Рассмотрим кольцо $B = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ и базис $\{H^i\}$, $i = 0, \dots, N$, в $H_H^*(V)$, где H^0 – единица кольца и $H = H^1$. Пусть H_i – класс, двойственный по Пуанкаре к H^i , и HQ – (тривиальное) векторное расслоение над $\text{Спец}(B)$ со слоем $H_H^*(V)$. Положим $h^i = H^i \otimes 1 \in H_H^*(V) \otimes B$. Пусть $h = h^1$, $k_V = K_V \otimes 1 = -h$ и $S = H^0(HQ)$. Поскольку $S \cong H_H^*(V) \otimes B$, то квантовое умножение можно рассматривать как отображение $\star: S \times S \rightarrow S$.

Пусть $D = q \frac{d}{dq} \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[q, q^{-1}, \frac{d}{dq}]$. Рассмотрим (плоскую) связность ∇ на HQ , определенную на сечениях h^i через

$$\left(\nabla(h^i), q \frac{d}{dq} \right) = k_V \star h^i$$

(спаривание является естественным спариванием между дифференциальными формами и векторными полями). Эта связность задает на S структуру $\mathcal{D}$ -модуля с помощью $D(h^i) = (\nabla(h^i), D)$. Очевидно,

$$D\left(\sum_{i=0}^N f_i(q) h^i\right) = \sum_{i=0}^N q \frac{\partial f_i(q)}{\partial q} h^i - h \star \left(\sum_{i=0}^N f_i(q) h^i\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. $\mathbb{C}$ -линейный оператор $D: S \rightarrow S$ называется *квантовым оператором*.

²Многообразие Фано называется *минимальным*, если его когомологии устроены самым простым образом (т. е. изоморфны $\mathbb{Z}$ в каждой четной размерности и равны нулю в нечетной). Квантово минимальное многообразие имеет самую простую “квантовую антиканоническую часть”, сходную с кольцом квантовых когомологий минимального многообразия. Поэтому такие многообразия являются естественным аналогом классических минимальных многообразий.

Определим оператор $D_B: S \rightarrow S$ равенством

$$D_B \left(\sum_{i=0}^N f_i(q) h^i \right) = \sum_{i=0}^N q \frac{\partial f_i(q)}{\partial q} h^i.$$

Пусть $h \star h^j = \sum_j \alpha_{ij} h^i$, $\alpha_{ij} \in B$. Определим матрицу M равенствами³ $M_{ij} = -\alpha_{ij} \in \mathcal{D}$ для $i \neq j$ и $M_{ii} = D - \alpha_{ii} \in \mathcal{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Дифференциальный оператор $L_V^Q = \det_{\text{right}}(M) \in \mathcal{D}$ называется *квантовым дифференциальным оператором* для V .

В дальнейшем мы будем изучать решения уравнений, соответствующих этим дифференциальным операторам. Решениями являются “формальные ряды с логарифмами”, которые не лежат в S . Поэтому необходимо сделать замену базы. Положим $T = \mathbb{C}[[q]][t]/t^{N+1}$, $B^{\text{form}} = B \otimes_{\mathbb{C}[q]} T$ и $S^{\text{form}} = S \otimes_{\mathbb{C}[q]} T$. Пусть $\mathcal{D}$ действует на T через $Dt = 1$. Таким образом, неформальный смысл t – это $\log(q)$. В дальнейшем мы будем рассматривать D , D_B , $h\star$ и другие как $\mathbb{C}$ -операторы $S^{\text{form}} \rightarrow S^{\text{form}}$ и L_V^Q как $\mathbb{C}$ -оператор $B^{\text{form}} \rightarrow B^{\text{form}}$.

2.3. Соотношения. Для простоты в дальнейшем мы будем использовать инварианты Громова–Виттена, соответствующие кривым отрицательной степени или с отрицательными степенями относительно потомков (которые формально не определены), предполагая их равными нулю.

ТЕОРЕМА 2.8 (топологическая рекурсия; см., например, [6, гл. VI, следствие 6.2.1]). Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in H^*(V)$, $a_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_2, a_3, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\langle \tau_{a_1} \gamma_1, \tau_{a_2} \gamma_2, \tau_{a_3} \gamma_3 \rangle_d = \sum_{d_1+d_2=d, a=0, \dots, N} \langle \tau_{a_1-1} \gamma_1, H^a \rangle_{d_1} \langle H_a, \tau_{a_2} \gamma_2, \tau_{a_3} \gamma_3 \rangle_{d_2}.$$

ТЕОРЕМА 2.9 (аксиома дивизора; см., например, [6, гл. VI, предложение 5.4]). Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(V)$, $\gamma_0 = rH \in H^2(V, \mathbb{Q})$ – обильный дивизор и $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \langle \gamma_0, \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_m} \gamma_m \rangle_d \\ &= rd \langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_m} \gamma_m \rangle_d + \sum_{s=1}^m \langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_s-1} \gamma_0 \cdot \gamma_s, \dots, \tau_{a_m} \gamma_m \rangle_d. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.10 (аксиома фундаментального класса; см., например, [6, гл. VI, предложение 5.1]). Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in H^*(V)$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда

$$\langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_k} \gamma_k, H^0 \rangle_d = \sum_{i=1}^k \langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_{i-1}} \gamma_{i-1}, \tau_{a_i-1} \gamma_i, \tau_{a_{i+1}} \gamma_{i+1}, \dots, \tau_{a_k} \gamma_k \rangle_d.$$

³Отождествим любую матрицу A , имеющую элементы из $\mathcal{D}$, с оператором $S \rightarrow S$, задающимся через $A(\sum f_i h^i) = \sum_i (\sum_j A_{ij} f_j) h^i$. Тогда M является матрицей оператора $D = D_B - h\star$.

2.4. Фундаментальное решение. Положим

$$e^{Ht} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H^r t^r}{r!} \in H_H^*(V) \otimes B^{\text{form}}$$

(сумма конечна). Положим $\langle \tau_{d_1} t^{\alpha_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_s} t^{\alpha_s} \gamma_s \rangle_d = t^{\sum \alpha_i} \cdot \langle \tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_s} \gamma_s \rangle_d$. Рассмотрим матрицу Φ с элементами

$$\begin{aligned} \Phi_a^b = \sum_{d \geq 0} q^d & \left(\langle \tau_{d+a-b-1} H^b, H_a \rangle_d + \langle \tau_{d+a-b} t H^{b+1}, H_a \rangle_d \right. \\ & \left. + \left\langle \tau_{d+a-b+1} \frac{t^2}{2!} H^{b+2}, H_a \right\rangle_d + \dots \right) = \sum_{d \geq 0} q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^b, H_a \rangle_d, \end{aligned}$$

где $0 \leq a, b \leq N$; здесь и далее через $\bullet$ обозначено число

$$N + d - 3 - S,$$

где S – разность суммы коразмерностей когомологических классов, входящих в инвариант, и числа этих классов.

Обозначим $\langle \tau_{d+a-2} H^1, H_a \rangle_d + \langle \tau_{d+a-3} H^2, H_a \rangle_d$ через $\langle \tau_{\bullet} (H^1 + H^2), H_a \rangle_d$ и т. д. Кроме того, так как двухточечные инварианты Громова–Виттена для кривых степени нуль не определены, мы полагаем

$$\langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^b, H_a \rangle_0 = \langle H^0, \tau_{\bullet} e^{Ht} H^b, H_a \rangle_0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11 [7, предложение 2]. Пусть $\phi^i = \sum_{a=0}^N \Phi_a^i h^a \in S^{\text{form}}$ – сечения, соответствующие столбцам Φ . Тогда:

- 1) сечения ϕ^i плоские, т. е. $D\phi^i = 0$;
- 2) если $D\phi = 0$, то $\phi = \sum_{i=0}^N \alpha_i \phi^i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Другими словами, неформальный смысл матрицы Φ – это “матрица фундаментальных решений уравнения, задающегося квантовым оператором, в стандартном базисе”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Р. Пандхарипанде). 1) Необходимо показать, что

$$D_B \phi^i = h \star \phi^i.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} D_B \left(\sum_a \Phi_a^i h^a \right) &= \sum_a \sum_{d \geq 0} (dq^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^i, H_a \rangle_d + q^d \langle \tau_{\bullet} H e^{Ht} H^i, H_a \rangle_d) h^a \\ &= \sum_a \sum_{d \geq 0} q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^i, H, H_a \rangle_d h^a \end{aligned}$$

по аксиоме дивизора (теореме 2.9). Правую часть уравнения преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} h \star \left(\sum_a \Phi_a^i h^a \right) &= \sum_s \sum_{d_1, d_2 \geq 0} \sum_a q^{d_1} \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^i, H_a \rangle_{d_1} q^{d_2} \langle H^a, H, H_s \rangle_{d_2} h^s \\ &= \sum_s \sum_d q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H^i, H, H_s \rangle_d h^s \end{aligned}$$

по топологической рекурсии (теореме 2.8). Таким образом, сечения ϕ^i удовлетворяют нашему уравнению.

2) Свободным членом матрицы Φ (относительно t и q) является единичная матрица. Таким образом, столбцы матрицы Φ линейно независимы. Дифференциальный оператор порядка $N + 1$ имеет не более чем $(N + 1)$ -мерное пространство решений, так что оно порождено $N + 1$ функциями ϕ^i .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Рассмотрим матрицу M (см. определение 2.7). Предложение 2.11 утверждает, что $M\Phi^i = 0$ для вектор-столбцов $\Phi^i = (\Phi_0^i, \dots, \Phi_N^i)^T$, соответствующих сечениям ϕ^i .

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Определим Ψ как матрицу с элементами

$$\Psi_i^j = \sum_{d \geq 0} q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H_i, H^{N-j} \rangle_d, \quad 0 \leq i, j \leq N.$$

Пусть $\Psi_i = (\Psi_i^0, \dots, \Psi_i^N)^T$ – ее вектор-столбцы. Тогда выполнено равенство $M^T \Psi_i = 0$ для $0 \leq i \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие доказывается аналогично предложению 2.11.

2.5. Решения. Рассмотрим произвольный ряд

$$I = \sum_{i=0}^N I^i(q) h^i \in \mathbb{C}[[q]][h]/h^{N+1}, \quad I^0(q), \dots, I^N(q) \in \mathbb{C}[[q]].$$

Пусть $I_r = \sum_{i=0}^r (I^{r-i}(q) \frac{t^i}{i!}) \in T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Ряд I называется *обобщенным решением* уравнения $PI = 0$ (или просто оператора $P \in \mathcal{D}$), если $PI_r = 0$ для всех $r \leq N$.

Другими словами, имея оператор $P = P(q, D)$, рассмотрим оператор $P_H = P(q, D_B)$, заменив D на D_B . Тогда ряд I является обобщенным решением оператора P , если и только если $P_H(e^{ht} \cdot I) = 0$.

Напомним, что I -ряд для многообразия V задается формулой

$$I^V = 1 + \sum_{i,j,d > 0} \langle \tau_i H_j \rangle_d h^j q^d \in S^{\text{form}}.$$

ТЕОРЕМА 2.15. Выполнены следующие утверждения:

- 1) ряд I^V является обобщенным решением уравнения $L_V^Q I = 0$;
- 2) если $L_V^Q I = 0$, то $I = \sum a_i I_i^V$ для некоторых $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Мы имеем

$$\begin{aligned} L_V^Q I_i^V &= L_V^Q \left(\frac{t^i}{i!} + \sum_{d > 0} q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H_i \rangle_d \right) = L_V^Q \left(\sum_{d \geq 0} q^d \langle \tau_{\bullet} e^{Ht} H_i, H^0 \rangle_d \right) \\ &= \det_{\text{right}}(M) \Psi_i^N = \det_{\text{right}}(M^{\tau\tau}) \Psi_i^N = 0 \end{aligned}$$

по лемме 2.4 и следствию 2.13.

2) Решения I_s^V линейно независимы (по предложению 2.11), т. е. они являются базисом $(N + 1)$ -мерного пространства решений дифференциального уравнения порядка $N + 1$, соответствующего оператору L_V^Q .

§ 3. Операторы типа DN

3.1. Регуляризация. Рассмотрим квантовый дифференциальный оператор

$$L_V^Q = P_{V,0}(D) + qP_{V,1}(D) + \cdots + q^n P_{V,n}(D) \in \mathcal{D}$$

гладкого многообразия Фано размерности N (обычно $n = N + 1$). Его особенности в общем случае нерегулярны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [8, п. 1.9]. Оператор

$$\tilde{L}_V = P_{V,0}(D) + qP_{V,1}(D)(D + 1) + \cdots + q^n P_{V,n}(D)(D + 1) \cdots (D + n)$$

называется *регуляризацией* оператора L_V^Q .

Особенности всех известных операторов $\tilde{L}_V$ регулярны⁴. Очевидно, $\tilde{L}_V$ делится на D слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 [8, определение 2.10]. Оператор L_V , определяемый равенством $DL_V = \tilde{L}_V$, называется (*геометрическим*) *оператором типа DN* .

Решения уравнений, соответствующих геометрическим операторам типа DN , гипотетически являются G -рядами⁵.

Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор

$$P = P_0(D) + qP_1(D) + \cdots + q^n P_n(D) \in \mathbb{C}\left[q, q \frac{d}{dq}\right].$$

Как и раньше, определим его регуляризацию через

$$\tilde{P} = P_0(D) + qP_1(D)(D + 1) + \cdots + q^n P_n(D)(D + 1) \cdots (D + n).$$

3.2. Метод Фробениуса. Мы опишем “алгебраическую” интерпретацию метода Фробениуса решения дифференциальных уравнений. Стандартную версию см. в [9, гл. IV, § 8].

Пусть $R = \mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^{N+1}$, $N + 1 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P_\varepsilon = P_0(D + \varepsilon) + qP_1(D + \varepsilon) + \cdots + q^n P_n(D + \varepsilon) \in \mathcal{D} \otimes R.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Рассмотрим последовательность $\{\bar{c}_i\}$, $i \geq 0$, $\bar{c}_i \in R$. Она называется *ньютоновым решением* оператора P_ε , если для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\bar{c}_m P_n(m + \varepsilon) + \bar{c}_{m+1} P_{n-1}(m + 1 + \varepsilon) + \cdots + \bar{c}_{m+n} P_0(m + n + \varepsilon) = 0$$

(мы полагаем $\bar{c}_i$ для отрицательных i равными нулю).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Последовательность $\{\bar{c}_i\}$ является ньютоновым решением оператора P_ε тогда и только тогда, когда ряд

$$I = \bar{c}_0 + q\bar{c}_1 + \cdots \in \mathbb{C}[[q]] \otimes R$$

является обобщенным решением оператора P .

⁴Они также регулярны, если матрица квантового умножения на антиканонический класс диагонализуема (см. [1, замечание 3.6]).

⁵То есть для каждого решения вида $I = \sum a_i q^i$, $a_n \in \mathbb{Q}$, выполнено следующее. Пусть $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, $(p_n, q_n) = 1$, $q_n \geq 1$. Тогда I имеет положительные радиусы сходимости в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{Q}}_p$ для всех простых p и существует константа $C < \infty$ такая, что $\text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n) < C^n$ для всех n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $T = \mathbb{C}[[q]][t]/t^{N+1}$. Рассмотрим T как $\mathbb{C}$ -векторное пространство. Рассмотрим линейное пространство (над $\mathbb{C}$)

$$C = \{(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots), \bar{a}_i \in R\}$$

с базисом $\{b_{ij} = (0, \dots, 0, \varepsilon^{N-j}, 0, \dots), i \geq 0, 0 \leq j \leq N\}$ (где ε^{N-j} стоит на i -м месте) и изоморфизм $l: C \rightarrow T$, задающийся через $b_{ij} \mapsto q^i t^j / j!$. Легко проверить, что формулы $q \cdot b_{ij} = b_{i+1,j}$ и $D \cdot b_{ij} = (i + \varepsilon) b_{ij}$ определяют действие кольца $\mathcal{D}$ на C . Очевидно, $l(q \cdot b_{ij}) = q \cdot l(b_{ij})$ и $l(D \cdot b_{ij}) = D \cdot l(b_{ij})$, т. е. действия кольца $\mathcal{D}$ на C и на T коммутируют. Таким образом, $P(\{\bar{c}_i\}) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(I_N) = 0$ (мы следуем обозначениям, введенным в определении 2.14 при $h = \varepsilon$). Аналогично, если $P(\{\bar{c}_i\}) = 0$, то $P(I_r) = 0$ для $0 \leq r \leq N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Ньютоново решение оператора P_ε существует в R тогда и только тогда, когда $\text{mult}_0 P_0 \geq N + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Мы рассмотрели случай $P_0(0) = 0$. Случаи других корней многочлена P_0 сводятся к этому случаю с помощью сдвига координаты.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть $I = \sum_{i,j} a_{ij} q^i \varepsilon^j \in \mathbb{C}[[q]] \otimes R$ – обобщенное решение оператора P . Тогда ряд

$$\tilde{I} = \sum_{i,j} a_{ij} q^i \varepsilon^j (\varepsilon + 1) \cdots (\varepsilon + i)$$

является обобщенным решением оператора $\tilde{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из формулы для $\tilde{P}$ и предложения 3.4.

Пусть V – гладкое квантово минимальное многообразие Фано размерности N и L_V^Q – соответствующий квантовый дифференциальный оператор. Пусть L_V – соответствующий оператор типа DN . Определим многочлены $I^i(h)$ от h равенством $I^V = \sum_{i=0}^{\infty} I^i(h) q^i$. Пусть

$$\tilde{I}^V = \sum_{i=0}^{\infty} I^i(h) (h + 1) \cdots (h + i) q^i.$$

Тогда следствие 3.7 влечет теорему 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. По теореме 2.15 ряд I^V является обобщенным решением оператора L_V^Q . Пусть $\tilde{L}_V$ – регуляризация оператора L_V^Q . Тогда по следствию 3.7 имеем, что $\tilde{I}^V$ является обобщенным решением оператора $\tilde{L}_V$. Соотношения для ньютонова решения оператора $L_{V,\varepsilon}$ пропорциональны соответствующим соотношениям для $\tilde{L}_{V,\varepsilon}$ по модулю ε^N (мы отождествляем параметр ε в методе Фробениуса с h). Таким образом, и ньютоновы решения этих операторов совпадают по модулю ε^N . То, что N функций, выписанных в формулировке теоремы, образуют базис ядра оператора L_V , следует из стандартных соображений о линейной независимости (см. доказательство теоремы 2.15).

ПРИМЕР 3.8. Матрица квантового умножения для $\mathbb{P}^N$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (N+1)^{N+1}q^{N+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий квантовый дифференциальный оператор имеет вид

$$L_{\mathbb{P}^N}^Q = D^{N+1} - (N+1)^{N+1}q^{N+1}.$$

Пусть F – класс, двойственный гиперплоскости в $\mathbb{P}^N$ (т. е. $-K_{\mathbb{P}^N} = (N+1)F$), и $f = F \otimes 1 \in S^{\text{form}}$. Легко проверить, что ряд

$$I^{\mathbb{P}^N} = \sum_{d \geq 0} \frac{q^{(N+1)d}}{(f+1)^{N+1} \dots (f+d)^{N+1}}$$

является обобщенным решением уравнения $L_{\mathbb{P}^N}^Q I = 0$.

Оператор типа DN для $\mathbb{P}^N$ имеет вид

$$L_{\mathbb{P}^N} = D^N - (N+1)^{N+1}q^{N+1}(D+1) \dots (D+N),$$

а его обобщенным решением является ряд

$$\tilde{I}^{\mathbb{P}^N} = \sum_{d \geq 0} \frac{q^{(N+1)d}(h+1) \dots (h+(N+1)d)}{(f+1)^{N+1} \dots (f+d)^{N+1}}.$$

§ 4. Универсальность операторов типа DN и их решений

Все формулы, приведенные выше, являются формальными следствиями формул из теорем 2.8–2.10. Поэтому естественно определить “абстрактную теорию Громова–Виттена”, т. е. рассмотреть инварианты Громова–Виттена как формальные переменные с естественными соотношениями. Кроме того, рассматривая “инварианты”, соответствующие нескольким классам вида H^i и одному двойственному по Пуанкаре классу вида H_r , можно построить универсальную абстрактную теорию Громова–Виттена, не зависящую от размерности N .

Удобный мультипликативный базис для кольца GW дается теоремой 1.4, восходящей к первой теореме восстановления из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Мы следуем обозначениям, введенным в определении 1.3.

Формальным следствием соотношений типа GW5 является следующее соотношение.

GW6. Для любого конечного множества $S \subset \mathbb{N}$ обозначим $H^{i_{s_4}}, \dots, H^{i_{s_k}}$, где s_j – различные элементы S , через $\coprod_S$. Тогда для любого $n \geq 0$

$$\begin{aligned} & \sum \left\langle \coprod_{S_1}, H^{i_1}, H^{i_2}, H_a \right\rangle \left\langle H^a, \coprod_{S_2}, H^{i_3}, H_r \right\rangle \\ &= \sum \left\langle \coprod_{T_1}, H^{i_1}, H^{i_3}, H_b \right\rangle \left\langle H^b, \coprod_{T_2}, H^{i_2}, H_r \right\rangle, \end{aligned}$$

где суммы берутся по всем разбиениям $S_1 \sqcup S_2 = \{4, \dots, n\}$, $T_1 \sqcup T_2 = \{4, \dots, n\}$ и всем a и b таким, что степени символов, входящих в выражение, неотрицательны (заметим, что обе суммы конечны).

В геометрическом случае GW6 называется *квадратичным соотношением* (см. [2, п. 3.2.2]); если множество S пусто, то такое соотношение называется *уравнением ассоциативности*, или *уравнением WDVV*. Несмотря на то, что соотношения такого типа следуют из соотношений типа GW5, для удобства мы будем включать их в образующие идеала соотношений в кольце GW.

Доказательство эпиморфности r является абстрактной версией доказательства из [2]. Для простоты обозначим $r(a_{ij})$ также через a_{ij} . Необходимо доказать, что любой “инвариант” $\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_n} H_r \rangle$ можно выразить через a_{ij} .

Применяя соотношение GW4 к одно- и двухточечным инвариантам (абстрактным символам), можно полагать $n \geq 3$ (см. доказательство предложения 5.2 в [3]). Используя соотношения GW5 (и GW2), можно предполагать, что все числа d_i равны нулю.

Для инварианта $C = \langle H^{i_1+1}, \dots, H^{i_n}, H_r \rangle$, $n \geq 2$, $i_1 > 1$, рассмотрим соотношения GW6 для классов $H, H^{i_1}, \dots, H^{i_n}, H_r$. Легко видеть, что по модулю инвариантов с меньшим количеством членов и соотношений типа GW2 и GW4 инвариант C равен сумме инвариантов для элементов $H^{i_1}, \dots, H^{i_n}, H_r$. Итак, используя соотношения GW1–GW6, любой инвариант можно выразить через трехточечные инварианты с H^1 в качестве первого элемента, т.е. в терминах a_{ij} . Таким образом, r является эпиморфизмом.

Докажем, что r – мономорфизм.

Шаг 1. Пусть GW3_p и GW4_p – соотношения типа GW3 и GW4 для инвариантов без потомков. Тогда идеал Rel порожден соотношениями типа GW1, GW2, GW3_p, GW4_p, GW5, GW6 (соотношения “коммутируют”). Заметим, что соотношения типа GW3_p являются частным случаем соотношений типа GW2.

Шаг 2. Пусть

$$GW' = \mathbb{C}[F'] / (GW4_p, GW5, GW6),$$

где $F' \subset F$ – инварианты положительной степени типа

$$\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle$$

при $i_k \geq i_l$ для $k > l$ и $d_k \geq d_l$, если $i_k = i_l$. (Таким образом, левая часть любого соотношения типа GW2 становится просто обозначением для числа, стоящего в правой части.) Очевидно, $GW' \cong GW$.

Шаг 3. Пусть $A_p = \mathbb{C}[F'_p] / (GW4_p, GW6)$, где $F'_p \subset F'$ – подмножество инвариантов без потомков. Покажем, что естественное отображение $A_p \rightarrow GW'$ является мономорфизмом. Рассмотрим порядок на инвариантах, т.е. функцию w на F'_p , задающуюся через

$$w(\langle \tau_{d_1} H^{i_1}, \dots, \tau_{d_{n-1}} H^{i_{n-1}}, \tau_{d_n} H_r \rangle) = \left(\sum d_j, d_1, i_1, \dots, d_n, r \right).$$

Будем говорить, что $C_1 > C_2$, если $w(C_1) > w(C_2)$ (относительно естественного лексикографического порядка). Определим лексикографический порядок на мономах из F' , т.е. для любых двух мономов $M_1 = \alpha C_1^{a_1} \dots C_n^{a_n}$, $M_2 = \beta C_1^{b_1} \dots C_n^{b_n}$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $C_1 > C_2 > \dots > C_n$) положим $M_1 > M_2$, если $a_1 > b_1$ или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$, и т.д. Обозначим старший член $E \in \mathbb{C}[F']$ относительно этого порядка через $L(E)$ и соотношение типа GW5 с инвариантом C

в левой части (определенное не единственным образом) через $\text{GW5}(C)$. Для примарного (т. е. без потомков) инварианта C положим $\text{GW5}(C) = C$. Рассмотрим элемент $P \neq 0$ в $\mathbb{C}[F'_p]$ такой, что $r(P) \in (\text{GW4}_p, \text{GW5}, \text{GW6}) \subset \mathbb{C}[F']$ для естественного отображения $r: \mathbb{C}[F'_p] \rightarrow \mathbb{C}[F']$. Для простоты обозначим $r(P)$ через P . Пусть $P = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot \prod_{i \in I} C_i^{b_{ij}} \text{GW5}(C_j)$ по модулю $(\text{GW4}_p, \text{GW6})$, где $\beta_j \in \mathbb{C}$. Применяя, если надо, соотношения типа GW4 , можно считать, что инварианты C_i содержат как минимум три “элемента” внутри угловых скобок, т. е. к ним применимо соотношение типа GW5 . Обозначим максимальный старший член для всех слагаемых вида $\prod_{i \in I} C_i^{b_{ij}} \text{GW5}(C_j)$ через L . Пусть $J_0 \subset J$ – подмножество индексов таких, что $L(\prod_{i \in I} C_i^{b_{ij}} \text{GW5}(C_j)) = L$ для $j \in J_0$. Пусть L имеет множитель с потомками. Тогда

$$P = \sum_{j \in J_0} \beta_j \cdot \prod_{i \in I} C_i^{b_{ij}} \text{GW5}(C_j) + S,$$

где S – слагаемые с меньшими старшими членами. Очевидно, $L(\text{GW5}(C)) = C$. Можно проверить, что разность двух соотношений типа $\text{GW5}(C)$ выражается через соотношения типа GW5 с меньшим старшим членом и соотношения типа GW6 . Таким образом, по модулю слагаемых с меньшими старшими членами, выражения типа $\text{GW5}(C_i)$ в сумме в правой части рассматриваемого равенства совпадают для каждого i . Итак,

$$P = \sum_{j \in J_0} \beta_j \cdot \prod_{i \in I} \text{GW5}(C_i)^{b_{ij}} \text{GW5}(C_j) + S_1 = \sum_{j \in J_0} \beta_j \cdot \prod_{i \in I \cup J_0} \text{GW5}(C_i)^{c_i} + S_2,$$

где S_1, S_2 – слагаемые с меньшими старшими членами. Поскольку $L(P) < L$, то $\sum_{j \in J_0} \beta_j = 0$. Мы получили выражение для P с меньшим старшим членом L . Повторяя эту процедуру, можно добиться выражения для P с $L(P) = L$, т. е. без соотношений типа GW5 . Таким образом, $P \in (\text{GW4}_p, \text{GW6})$ и $A_p \cong \text{GW}' \cong \text{GW}$, т. е. любой инвариант единственным образом выражается через примарные.

Шаг 4. Докажем, что примарный инвариант единственным образом выражается через образующие типа a_{ij} . Инварианты вида $\langle H^k, H^1, \dots, H^1, H_r \rangle$ мы будем называть *тривиальными*, так как соотношения вида GW6 для них тривиальны. Пусть $F'_t \subset F'_p$ – подмножество тривиальных инвариантов. Очевидно, $A \cong A_t = \mathbb{C}[F'_t]/(\text{GW4}_p) \cong \mathbb{C}[F'_t]/(\text{GW4}_p, \text{GW6})$. Пусть $F'_t \subset F'_p$ – подмножество инвариантов, не содержащих элементы вида H^1 , и $\text{GW6}'$ – соотношения типа GW6 , в которых инварианты, содержащие H^1 , заменены на инварианты без таких элементов, полученные с помощью GW4_p . Покажем, что $A_t \cong \mathbb{C}[F'_t]/(\text{GW6}') \cong A_p$.

Определим функцию w' на элементах множества F'_t , задающуюся равенством

$$w'(\langle H^{i_1}, \dots, H^{i_{n-1}}, H_r \rangle) = (n, i_1, \dots, i_{n-1}, r).$$

Определим порядок на мономах из F' и старший член $L'(E)$ любого $E \in \mathbb{C}[F'_p]$ так же, как и раньше. Прямые вычисления показывают, что разность двух соотношений типа $\text{GW6}'$ с одинаковыми старшими членами может быть выражена в терминах соотношений типа $\text{GW6}'$ с меньшими старшими членами (“соотношения типа GW6 коммутируют”). Предположим, что $P = P(a_{ij}) \in (\text{GW6}') \subset \mathbb{C}[F'_t]$. Как и раньше, можно найти выражение для P в терминах

соотношений типа $\text{GW6}'$, содержащих только тривиальные инварианты. Поскольку эти соотношения равны нулю, то $P = 0$ и $A \cong A_p \cong \text{GW}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Теория Громова–Виттена квантово минимального многообразия Фано V размерности N – это конкретная функция из $\text{GW}_N = r(i_N(A_N))$ в $\mathbb{C}$, где $i_N: A_N \rightarrow \text{GW}$ задается через $i_N(a_{ij}) = a_{ij}$, если $(i, j) \neq (0, 0)$, и $i_N(a_{00}) = 0$ (определение A_N см. в § 1).

Теорема 1.4 позволяет определить универсальный I -ряд $I \in A \otimes \mathbb{C}[[q]][[h]]$ такой, что для любого N абстрактный I -ряд для размерности N

$$I^N = 1 + \sum_{i,j} \langle \tau_i H_j \rangle q^d h^j \in \text{GW}_N \otimes \mathbb{C}[[q]][[h]]/h^{N+1}$$

является ограничением универсального ряда I , т.е. $I^N = r_N(I \bmod h^{N+1})$. Аналогично, можно определить универсальный “регуляризованный I -ряд” $\tilde{I}$ такой, что для ряда

$$\tilde{I}^N = 1 + \sum_{i,j} \langle \tau_i H_j \rangle q^d h^j (h+1) \cdots (h+d) \in \text{GW}_N \otimes \mathbb{C}[[q]][[h]]/h^{N+1}$$

выполнено $\tilde{I}^N = r_N(\tilde{I} \bmod h^{N+1})$.

Рассмотрим тор $\mathbb{T} = \text{Spec } \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ и тривиальное векторное расслоение HQ^N со слоем $\text{GW}_N \otimes \langle H^0, H^1, \dots, H^N \rangle$ (через H^i обозначены векторы базиса). Пусть $h^i = 1 \otimes H^i$. Положим

$$A^N = \begin{pmatrix} a_{00}q & a_{01}q^2 & \dots & a_{0,N-1}q^N & a_{0N}q^{N+1} \\ 1 & a_{11}q & \dots & a_{1,N-1}q^{N-1} & a_{1N}q^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{Nn}q \end{pmatrix},$$

где $a_{00} = 0$. Определим абстрактную квантовую связность ∇^N через

$$\left(\nabla^N(h^i), q \frac{d}{dq} \right) = A^N h^i$$

(связность коммутирует с a_{ij}). Повторим все предыдущие рассуждения в абстрактном случае. В частности, определим абстрактный квантовый дифференциальный оператор $L_N^Q \in \text{GW}_N \otimes \mathcal{D}$ и оператор $L_N \in \text{GW}_N \otimes \mathcal{D}$ (напомним, что после специализации абстрактных инвариантов Громова–Виттена к геометрическим такой оператор называется геометрическим оператором типа DN). (Легко видеть, что этот оператор совпадает с оператором, определенным во введении.) Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) ряд I^N является обобщенным решением уравнения $L_N^Q I = 0$;
- 2) ряд $\tilde{I}^N \bmod h^N$ является обобщенным решением уравнения $L_N I = 0$, т.е. верна теорема 1.5.

Другими словами, положив в ряде $\tilde{I}^N$ (соответственно, в операторе L_N) $a_{ij} = 0$ для $N_0 < i, j \leq N$, мы получим ряд $\tilde{I}^{N_0}$ (соответственно, оператор $D^{N-N_0} L_{N_0}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. То же самое выполнено и для операторов типа DN . Напомним, что оператор типа DN – это оператор L_N с отождествленными a_{ij} и $a_{N-j, N-i}$. Пусть J^N – обобщенное решение такого оператора. Если $n \ll N$ и $N < N_0$, то

$$J^N \equiv J^{N_0} \pmod{q^n, h^N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Определим операторы L_N^Q и L_N как операторы в $\mathbb{C}[a_{ij}]$, $0 \leq i \leq j$ (т.е. с произвольным a_{00}). Тогда универсальность выполнена и для таких операторов. Универсальным рядом для оператора L_N^Q является ряд $e^{a_{00}q}I'$, где I' – ряд, получающийся из I с помощью сдвига $a_{ii} \mapsto a_{ii} - a_{00}$, а универсальным рядом для L_N является регуляризация ряда $e^{a_{00}q}I'$.

§ 5. Приложение

Рассмотрим дифференциальный оператор $P = \sum_{i=0}^N q^i P_i(D) \in \mathcal{D}$. Обозначим его r -ю формальную производную по D через $P^{(r)}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Ряд $I = \sum_{i=0}^N I^i h^i$, где I^i – ряд от q , является обобщенным решением P тогда и только тогда, когда для всех $s \leq N$ выполнено

$$\frac{P^{(s)}(I^0)}{s!} + \frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!} + \dots + P(I^s) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$P(tJ(q)) = tP(J(q)) + P^{(1)}(J(q))$$

для всех $J(q) \in \mathbb{C}[[q]]$ (см. [10, предложение 4.3.1]). Таким образом,

$$P(t^r J) = \sum_{i=0}^r \binom{i}{r} t^i P^{(r-i)}(J).$$

Для любого $s \leq N$ имеем

$$\begin{aligned} P(I_s) &= P\left(\frac{t^s}{s!} I^0 + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} I^1 + \dots + I^s\right) = \sum_{\alpha=0}^s P\left(\frac{t^\alpha}{\alpha!} I^{s-\alpha}\right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^s \sum_{\beta=0}^\alpha \left(\binom{\beta}{\alpha} \frac{t^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\alpha!} \right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^s \sum_{\beta=0}^\alpha \left(\frac{t^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\beta! (\alpha-\beta)!} \right) = \sum_{\alpha=0}^s \sum_{\beta=0}^\alpha R_{\alpha,\beta}, \end{aligned}$$

где

$$R_{\alpha,\beta} = \frac{t^\beta P^{(\alpha-\beta)}(I^{s-\alpha})}{\beta! (\alpha-\beta)!}.$$

Докажем теорему индукцией по s . Предположим, что она верна для всех $s_0 < s$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{P^{(s)}(I^0)}{s!} + \frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!} + \dots + P(I^s) &= \sum_{a=0}^s \frac{t^a}{a!} \left(\frac{P^{(s-a)}(I^0)}{(s-a)!} + \dots + P(I^{s-a}) \right) \\ &= \sum_{a=0}^s \sum_{b=0}^{s-a} \frac{t^a P^{(b)}(I^{s-a-b})}{a! b!} = \sum_{a=0}^s \sum_{b=0}^{s-a} S_{a,b}, \end{aligned}$$

где

$$S_{a,b} = \frac{t^a P^{(b)}(I^{s-a-b})}{a! b!}.$$

Очевидно, $S_{a,b} = R_{a+b,a}$, поэтому

$$\sum_{a=0}^s \sum_{b=0}^{s-a} S_{a,b} = \sum_{a=0}^s \sum_{b=0}^{s-a} R_{a+b,a} = \sum_{\alpha=0}^s \sum_{\beta=\alpha}^s R_{\beta,\alpha} = \sum_{0 \leq \alpha \leq \beta \leq s} R_{\beta,\alpha} = \sum_{a=0}^s \sum_{b=0}^a R_{a,b}.$$

Таким образом,

$$\frac{P^{(s)}(I^0)}{s!} + \frac{P^{(s-1)}(I^1)}{(s-1)!} + \dots + P(I^s) = P(I_s),$$

что доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Для случая $s = 1$ теорема 5.1 доказана в [10, предложение 4.3.2], а для случая $s \leq 2$ – в [11, приложение В].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 (метод Ньютона). Пусть

$$\Phi = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots \in B, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения $P\Phi = 0$ (как формальный ряд) тогда и только тогда, когда для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$a_m P_N(m) + a_{m+1} P_{N-1}(m+1) + \dots + a_{m+N} P_0(m+N) = 0,$$

где $a_i = 0$ при $i < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится с помощью прямой подстановки ряда Φ в уравнение $P\Phi = 0$.

Теорема 5.1 и предложение 5.3 позволяют найти соотношения для решений уравнения $P\Phi = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $I = \sum_{i,j} a_{ij} h^i q^j$. Тогда ряд I является обобщенным решением оператора P , если и только если для всех $s \leq N$ и $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \frac{a_{0m} P_N^{(s)}(m) + a_{0,m+1} P_{N-1}^{(s)}(m+1) + \dots + a_{0,m+N} P_0^{(s)}(m+N)}{s!} \\ & + \frac{a_{1m} P_N^{(s-1)}(m) + a_{1,m+1} P_{N-1}^{(s-1)}(m+1) + \dots + a_{1,m+N} P_0^{(s-1)}(m+N)}{(s-1)!} + \dots \\ & \dots + \frac{a_{sm} P_N(m) + a_{s,m+1} P_{N-1}(m+1) + \dots + a_{s,m+N} P_0(m+N)}{1} = 0. \end{aligned}$$

Автор благодарен В. В. Голышеву за постановку задачи, объяснения и ссылку на метод Фробениуса, В. А. Лунцу и К. А. Шрамову за полезные комментарии и рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

1. V. Golyshev, J. Stienstra, “Fuchsian equations of type DN”, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 323–346.
2. M. Kontsevich, Yu. Manin, “Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **164**:3 (1994), 525–562.

3. В. В. Пржиялковский, “Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 145–158; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Gromov–Witten invariants of Fano threefolds of genera 6 and 8”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 433–446.
4. В. В. Пржиялковский, “Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 107–122; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and in singular toric varieties”, *Sb. Math.*, **198**:9 (2007), 1325–1340.
5. М. Kontsevich, Yu. Manin, “Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity”, *Comm. Math. Phys.*, **196**:2 (1998), 385–398.
6. Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, Факториал-Пресс, М., 2002; пер. с англ.: Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
7. R. Pandharipande, “Rational curves on hypersurfaces (after A. Givental)”, *Séminaire Bourbaki*, vol. 1997/98, Astérisque, **252**, Soc. Mathématique de France, Paris, 1998, 307–340.
8. V. V. Golyshev, “Classification problems and mirror duality”, *Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **338**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 88–121; [arXiv:math.AG/0510287](#).
9. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1955.
10. V. V. Batyrev, D. van Straten, “Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi–Yau complete intersections in toric varieties”, *Comm. Math. Phys.*, **168**:3 (1995), 493–533.
11. E. N. Tjotta, *Rational curves on the space of determinantal nets of conics*, Thesis, 1998; [arXiv:math.AG/9802037](#).

В. В. Пржиялковский (V. V. PRZYJALKOWSKI)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: victorprz@mi.ras.ru, victorprz@gmail.com

Поступило в редакцию
 14.05.2007