Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Неделко, Решения задачи типа “реакция–диффузия” с внутренними переходными слоями в случае нелинейности квадратичного типа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 157–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:07:03

УДК 517.956

И. В. Неделько

Решения задачи типа “реакция–диффузия” с внутренними переходными слоями в случае нелинейности квадратичного типа

Показано, при каких условиях в сингулярно возмущенной параболической задаче типа “реакция–диффузия” с нелинейностью квадратичного типа формируются решения с внутренними переходными слоями. Доказано существование аналогичных стационарных решений.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: контрастные структуры, внутренний переходный слой.

§ 1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2(\Delta u - u_t) = f(u, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (1)$$

$$u(x, t, \varepsilon) = g(x), \quad (x, t) \in \partial D \times (0, +\infty), \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей ∂D .

Пусть выполнены следующие условия.

(A1) Существуют функции $\bar{u}(x)$ и $\hat{u}(x)$ из $C(\overline{D})$ такие, что $\bar{u}(x) < \hat{u}(x)$, $x \in \overline{D}$, и в области $\Pi = \{(u, x) : \bar{u}(x) \leq u \leq \hat{u}(x), x \in \overline{D}\}$ функция $f(u, x, 0)$ обращается в нуль только на поверхностях $u = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, причем

$$\bar{u}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \hat{u}(x), \quad x \in \overline{D},$$

$f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция в области $\Pi_1 \times [0, \varepsilon_0]$, где Π_1 – некоторая открытая область, содержащая Π , а $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

(A2) Существует кривая $\Gamma \subset \overline{D}$, возможно, имеющая общие точки с границей ∂D области D и разделяющая область D на две подобласти $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ такие, что

$$f_u(\varphi_1(x), x, 0) > 0, \quad x \in D^{(+)}, \quad f_u(\varphi_2(x), x, 0) > 0, \quad x \in D^{(-)},$$

$$f_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0, \quad x \in D^{(+)}, \quad f_u(\varphi_1(x), x, 0) < 0, \quad x \in D^{(-)}.$$

(A3) Функция $g(x)$ из граничного условия (2) достаточно гладкая и удовлетворяет неравенствам

$$\varphi_1(x) \leq g(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in \partial D. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00465) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых – докторов наук” (грант МД-235.2007.1).

В настоящей работе показано, что при выполнении условий (A1)–(A3) и определенных условий, налагаемых на начальные функции (см. ниже условия (A4), (A5)), и некотором вспомогательном требовании (см. ниже (A6)) в задаче (1)–(3) в итоге формируется решение с внутренним слоем в окрестности кривой Γ (из условия (A2)), внутри которого происходит резкий переход решения из окрестности $\varphi_1(x)$ (см. (A1)) в окрестность $\varphi_2(x)$. Доказано также существование стационарного решения задачи (1), (2) с аналогичным внутренним слоем.

Отметим, что ранее вопросы существования и формирования решений с внутренними переходными слоями в случае двумерной пространственной области были рассмотрены в работах [1]–[5]. Важную роль в [1]–[5] играет предположение, что уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет относительно u три корня (т. е. функция f относительно u является нелинейностью кубического типа), на которых f_u имеет определенные знаки всюду в $\bar{D}$. Принципиальным отличием случая, рассматриваемого в настоящей работе, является то, что функция f относительно u представляет собой нелинейность квадратичного типа (см. (A1)). В частности, это приводит к совершенно другому, по сравнению с [1]–[5], условию, определяющему кривую переходного слоя решения, т. е. кривую Γ (см. (A2)).

Введем требования, предъявляемые к начальным функциям:

(A4) $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x) \in C_B^2(\bar{D}) \equiv \{v(x): v(x) \in C^2(\bar{D}); v|_{\partial D} = g(x)\}$ и $\varphi_1(x) \leq u_0(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in \bar{D}$;

(A5) $\exists x^{(-)} \in D^{(+)} \text{ и } \exists x^{(+)} \in D^{(-)}$ такие, что $u_0(x^{(-)}) < \varphi_2(x^{(-)})$, $u_0(x^{(+)}) > \varphi_1(x^{(+)})$.

Перед тем как сформулировать основные результаты данной работы, введем следующее вспомогательное требование.

(A6) Пусть $\exists \varepsilon' \in (0, \varepsilon_0]$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$

$$\varepsilon^2 \varphi_{1xx} - f(\varphi_1(x), x, \varepsilon) \geq 0, \quad \varepsilon^2 \varphi_{2xx} - f(\varphi_2(x), x, \varepsilon) \leq 0, \quad x \in \bar{D}.$$

Отметим, что условие (A6) всегда выполнено, если функции φ_1 и φ_2 (см. условие (A1)) являются постоянными. Такой случай соответствует, например, важному классу квадратичных нелинейностей вида $f = a(x)u(u-1)$ (где $a(x)$ – достаточно гладкая функция, меняющая знак в D), встречающихся в моделях популяционной генетики [6], [7].

Первый основной результат настоящей работы (теорема 1, см. § 4) утверждает, что при выполнении условий (A1)–(A6) и достаточно малых ε существует единственное решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) и для любого $t \in [0, +\infty)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t + \varepsilon |\ln \varepsilon|, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in D^{(+)}, \\ \varphi_2(x), & x \in D^{(-)}. \end{cases} \quad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что при $t \geq \varepsilon |\ln \varepsilon|$ решение задачи (1)–(3) представляет собой решение с внутренним переходным слоем в окрестности кривой Γ из условия (A2). Более того, благодаря доказанной равномерности предельного перехода в (5) (см. теорему 1) можно утверждать, что при $t \geq \varepsilon |\ln \varepsilon|$ решение асимптотически (качественно) неотлично от стационарного, т. е. его предельные свойства при $\varepsilon \rightarrow 0$ перестают зависеть от t .

Отметим, что хотя в условии (A4) предполагается, что $u_0 \equiv u_0(x)$, полученный результат легко распространяется на функции, зависящие от ε (см. замечание 1, приведенное в § 4). В § 4 содержится также замечание 2, касающееся расширений теоремы 1.

Второй основной результат настоящей работы (теорема 2; см. § 5) утверждает, что при выполнении условий (A1)–(A3), (A6) и достаточно малых ε существует и стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности кривой Γ из условия (A2).

§ 2. Лемма существования. Основные результаты для окрестности начального момента времени

2.1. Существование решения. Сформулируем лемму о существовании решения задачи (1)–(3).

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (A1), (A3), (A4), (A6). Тогда при достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}(\bar{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0, +\infty))$, причем

$$\varphi_1(x) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, +\infty).$$

Утверждение леммы 1 следует из [8]–[10] и того факта, что в силу (A3), (A4) и (A6) функции $\varphi_2(x)$ и $\varphi_1(x)$ при достаточно малых ε являются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1)–(3).

2.2. Поведение решения в окрестности начального момента времени. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A4), (A6), и пусть существует круг K_0 такой, что

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &\in D^{(+)} & (\bar{K}_0 &\in D^{(-)}), \\ u_0(x) &< \varphi_2(x), \quad x \in \bar{K}_0 & (u_0(x) > \varphi_1(x), \quad x \in \bar{K}_0). \end{aligned}$$

Тогда для любого $\zeta > 0$ существует $T_* = T_*(\zeta) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_*$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \bar{K}_0 \times [\varepsilon^2 T_*, \varepsilon^2 T] \quad (6)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \zeta, \quad (x, t) \in \bar{K}_0 \times [\varepsilon^2 T_*, \varepsilon^2 T]). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение, относящееся к (6). Утверждение, относящееся к неравенству (7), доказывается аналогично.

Обозначим через x_0 и R_0 соответственно центр и радиус круга K_0 и выберем числа $\delta > 0$ и $R_1 > 0$ такими, чтобы

$$\begin{aligned} R_0 &< R_1, \\ u_0(x) &< \varphi_2(x) - \delta, \quad |x - x_0| \leq R_1. \end{aligned}$$

Обозначим через K_1 круг с центром в x_0 и радиусом R_1 . Будем предполагать, что

$$\bar{K}_1 \subset D^{(+)}.$$

Введем функцию

$$\widehat{w}_0(x) = \varphi_2(x) - \frac{\delta}{2} \xi(|x - x_0|),$$

где срезающая функция $\xi(t)$ принадлежит $C^\infty([0, +\infty))$, $\xi(t) \equiv 1$, $0 \leq t \leq R_0$; $0 \leq \xi(t) \leq 1$, $R_0 \leq t \leq R_1$; $\xi(t) \equiv 0$, $t \geq R_1$.

Функция $\widehat{w}_0(x)$ построена таким образом, что выполнены следующие неравенства:

$$\varphi_1(x) < \widehat{w}_0(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (8)$$

$$\widehat{w}_0(x) < \varphi_2(x) - \frac{\delta}{4}, \quad x \in \overline{K}_0, \quad (9)$$

$$\widehat{w}_0(x) \geq u_0(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (10)$$

$$\widehat{w}_0(x) = \varphi_2(x), \quad x \in \partial D. \quad (11)$$

В силу неравенства (8) и условия (A6) функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при достаточно малых ε являются соответственно нижним и верхним решениями задачи

$$\varepsilon^2(\widehat{w}_{xx} - \widehat{w}_t) = f(\widehat{w}, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (12)$$

$$\widehat{w}(x, t, \varepsilon) = \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \partial D \times (0, +\infty), \quad (13)$$

$$\widehat{w}(x, 0, \varepsilon) = \widehat{w}_0(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (14)$$

следовательно [8]–[10], существует единственное решение

$$\widehat{w}(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}(\overline{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{D} \times (0, +\infty))$$

задачи (12)–(14), и $\varphi_1(x) \leq \widehat{w}(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x)$, $(x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty)$.

В силу (12)–(14) с учетом (10) и (4) из условия (A3) имеем, что функция $\widehat{w}(x, t, \varepsilon)$ является верхним решением задачи (1)–(3), а значит,

$$u(x, t, \varepsilon) \leq \widehat{w}(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty). \quad (15)$$

Определим функцию $\widetilde{u}(x, \tau)$ как решение задачи

$$-\widetilde{u}_\tau = f(\widetilde{u}, x, 0), \quad \tau > 0, \quad (16)$$

$$\widetilde{u}(x, 0) = \widehat{w}_0(x), \quad (17)$$

где $x \in \overline{D}$ играет роль параметра. Из неравенства (8) и условия (A1) следует, что решение задачи (16), (17) существует, единственно и

$$\varphi_1(x) \leq \widetilde{u}(x, \tau) \leq \varphi_2(x), \quad (x, \tau) \in \overline{D} \times [0, +\infty).$$

Положим

$$\widetilde{w}(x, t, \varepsilon) = \widetilde{u}(x, t/\varepsilon^2). \quad (18)$$

При любом фиксированном $T > 0$ функция $\widetilde{w}(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varepsilon^2(\widetilde{w}_{xx} - \widetilde{w}_t) = f(\widetilde{w}, x, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, \varepsilon^2 T], \quad (19)$$

$$\widetilde{w}(x, t, \varepsilon) = \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \partial D \times (0, \varepsilon^2 T], \quad (20)$$

$$\widetilde{w}(x, 0, \varepsilon) = \widehat{w}_0(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (21)$$

Покажем, что для любого $T > 0$, фиксированного при $\varepsilon \rightarrow 0$, существует $c = c(T) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение задачи (12)–(14) удовлетворяет неравенству

$$|\hat{w}(x, t, \varepsilon) - \tilde{w}(x, t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^2 T]. \quad (22)$$

Пусть $T > 0$ фиксировано. Рассмотрим функцию

$$w(x, t, \varepsilon) = (\hat{w}(x, t, \varepsilon) - \tilde{w}(x, t, \varepsilon))e^{-\frac{kt}{\varepsilon^2}}, \quad (23)$$

где $k > 0$ выбрано так, что

$$d(x, t, \varepsilon) \equiv \int_0^1 f_u(\tilde{w} + s(\hat{w} - \tilde{w}), x, \varepsilon) ds + k > 1$$

при $(x, t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^2 T]$. Из соотношений (12)–(14) и (17)–(21) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(w_{xx} - w_t) - d(x, t, \varepsilon)w &= O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, \varepsilon^2 T], \\ w|_{\partial D} &= 0, \quad t \in (0, \varepsilon^2 T], \quad w(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in \bar{D}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при достаточно малых ε

$$|w(x, t, \varepsilon)| \leq c_0\varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^2 T],$$

где $c_0 > 0$ – некоторое число, а потому при достаточно малых ε

$$|\hat{w}(x, t, \varepsilon) - \tilde{w}(x, t, \varepsilon)| \leq |w(x, t, \varepsilon)|e^{kT} \leq c\varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, \varepsilon^2 T],$$

т. е. выполнено (22).

Докажем теперь, что для любого $\zeta > 0$ существует $T_* = T_*(\zeta) > 0$ такое, что

$$\tilde{u}(x, \tau) \leq \varphi_1(x) + \frac{1}{2}\zeta, \quad (x, \tau) \in \bar{K}_0 \times [T_*, +\infty). \quad (24)$$

Отсюда при любом $T \geq T_*$, фиксированном при $\varepsilon \rightarrow 0$, в силу соотношений (18), (22), (15) для достаточно малых ε следует (6).

Введем величину

$$h = \min \left\{ \zeta; \frac{\delta}{4}; \frac{1}{2} \min_{x \in \bar{D}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) \right\}$$

и функции

$$\begin{aligned} v_1(x, \tau) &= \varphi_2(x) - h + \frac{\tau}{T_*} \left(\varphi_1(x) + \frac{3}{2}h - \varphi_2(x) \right), \quad (x, \tau) \in \bar{K}_0 \times [0, T_*], \\ v_2(x, \tau) &= \varphi_1(x) + \frac{h}{2}, \quad (x, \tau) \in \bar{K}_0 \times [T_*, +\infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_* &= \frac{2 \max_{x \in \bar{D}} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + 3h}{m}, \\ m &= \min_{(u, x) \in \Pi^{(+)}} f(u, x, 0) > 0, \end{aligned}$$

$$\Pi^{(+)} = \left\{ (u, x): \varphi_1(x) + \frac{h}{2} \leq u \leq \varphi_2(x) - h, \quad x \in \bar{K}_0 \right\}.$$

При таком выборе T_* получаем

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau} + f(v_i, x, 0) \geq \frac{m}{2} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

Заметим, что

$$v_2(x, T_*) = v_1(x, T_*), \quad x \in \overline{K}_0. \quad (26)$$

Рассмотрим $w_1(x, \tau) = v_1(x, \tau) - \tilde{u}(x, \tau)$ и $w_2(x, \tau) = v_2(x, \tau) - \tilde{u}(x, \tau)$. Покажем, что

$$w_1(x, \tau) > 0, \quad (x, \tau) \in \overline{K}_0 \times [0, T_*], \quad (27)$$

$$w_2(x, \tau) > 0, \quad (x, \tau) \in \overline{K}_0 \times [T_*, +\infty). \quad (28)$$

Действительно, в силу (16), (25) имеем

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + f(w_1, x, 0) &= \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + f(v_1, x, 0) - f(\tilde{u}, x, 0) \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + f_u^* \cdot w_1, \quad (x, \tau) \in \overline{K}_0 \times (0, T_*]. \end{aligned} \quad (29)$$

Кроме того, учитывая (9) и выбор h , получаем

$$w_1(0, x) = v_1(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = \varphi_2(x) - h - \hat{w}_0(x) > 0, \quad x \in \overline{K}_0. \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) следует (27). Отсюда, учитывая (26), имеем

$$w_2(x, T_*) = w_1(x, T_*) > 0. \quad (31)$$

Аналогично (29) для $w_2(x, \tau)$ получаем

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + f_u^{**} \cdot w_2 > 0, \quad (x, \tau) \in \overline{K}_0 \times [T_*, +\infty). \quad (32)$$

Из (31) и (32) следует (28), и, значит, выполнено

$$\tilde{u}(x, \tau) < v_2(x, \tau) = \varphi_1(x) + \frac{h}{2} \leq \varphi_1(x) + \frac{\zeta}{2}, \quad (x, \tau) \in \overline{K}_0 \times [T_*, +\infty),$$

т. е. справедливо неравенство (24). Лемма доказана.

§ 3. Поведение решения на бесконечном промежутке времени

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (A1)–(A4), (A6) и существует такой открытый круг K с центром в некоторой точке $x^{(-)}$ ($x^{(+)}$), что

$$\begin{aligned} \overline{K} &\subset D^{(+)} & (\overline{K} &\subset D^{(-)}), \\ u_0(x^{(-)}) &< \varphi_2(x^{(-)}) & (u_0(x^{(+)}) &> \varphi_1(x^{(+)})). \end{aligned}$$

Тогда для любого $\zeta > 0$ существует такое $T = T(\zeta) > 0$, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \overline{K} \times [\varepsilon T, +\infty) \quad (33)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \zeta, \quad (x, t) \in \overline{K} \times [\varepsilon T, +\infty)). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы, относящееся к неравенству (33). Утверждение, относящееся к неравенству (34), доказывается аналогично. Далее через R обозначаем радиус круга K .

Пусть K_0 – круг с некоторым радиусом a и центром в точке $x^{(-)}$ такой, что

$$\overline{K}_0 \subset K, \quad u_0(x) < \varphi_2(x), \quad x \in \overline{K}_0.$$

Существование K_0 следует из неравенства $u_0(x^{(-)}) < \varphi_2(x^{(-)})$ и непрерывности $u_0(x)$.

Введем полярную систему координат (ϱ, ϑ) с центром в точке $x^{(-)}$. Пусть число $b \in (0, a)$ таково, что для круга K_1 с радиусом $R+b$ и центром в точке $x^{(-)}$ выполнено условие

$$\overline{K}_1 \subset D^{(+)}. \quad (35)$$

Введем число $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} I(x) \equiv \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)+\delta} f(u, x, 0) du &> 0, \quad x \in \overline{K}_1, \\ \varphi_2(x) + \delta &< \widehat{u}(x), \quad x \in \overline{K}_1, \end{aligned} \quad (36)$$

что возможно в силу условий (A1) и (A2).

Для удобства введем обозначение $\psi(x) \equiv \varphi_2(x) + \delta$. Введем семейство окружностей Γ_γ , $\gamma \in [0, 1]$, задав его в координатах (ϱ, ϑ) в виде

$$\varrho = a + \gamma(R + b - a) \equiv R_\gamma.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_\gamma \in \overline{K}_1 \setminus \overline{K}_0, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (37)$$

окружность Γ_0 является границей круга K_0 , а окружность Γ_1 – границей круга K_1 .

Через K_γ обозначим круг, ограниченный Γ_γ .

Введем обозначения: $f(u, \varrho, \vartheta, \varepsilon) \equiv f(u, x(\varrho, \vartheta), \varepsilon)$, $\varphi_1(\varrho, \vartheta) \equiv \varphi_1(x(\varrho, \vartheta))$, $\psi(\varrho, \vartheta) \equiv \psi(x(\varrho, \vartheta))$.

Определим функцию

$$\beta(x, \gamma, \mu) = \varphi_1(x) + \mu + Q_0(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma) + \mu Q_1(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma), \quad x \in \overline{K}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1],$$

где $\mu > 0$ – число, которое уточним ниже,

$$\tau_\gamma = \frac{R_\gamma - \varrho}{\varepsilon}.$$

Функция $Q_0(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma)$ является решением следующей задачи (γ играет роль параметра, $\gamma \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau_\gamma^2} Q_0 &= f(\varphi_1(R_\gamma, \vartheta) + Q_0, R_\gamma, \vartheta, 0), \quad \tau_\gamma > 0, \\ Q_0(0, \vartheta, \gamma) &= \psi(R_\gamma, \vartheta) - \varphi_1(R_\gamma, \vartheta), \quad Q_0(+\infty, \vartheta, \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (36), (37) имеет место неравенство $I(x) > 0$ при $x \in \Gamma_\gamma$, $\gamma \in [0, 1]$, то (см. [11]) функция Q_0 определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией от τ_γ при $\tau_\gamma \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ_γ сверху и снизу, причем эти оценки равномерны

по $\gamma \in [0, 1]$ и $\vartheta \in [0, 2\pi]$, т. е. существуют постоянные $c_i > 0$ и $\varkappa_i > 0$, $i = 1, 2$, не зависящие от τ_γ , γ и ϑ и такие, что

$$|Q_0(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma)| \leq c_1 \exp(-\varkappa_1 \tau_\gamma), \quad \tau_\gamma \geq 0, \quad (38)$$

$$|Q_0(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma)| \geq c_2 \exp(-\varkappa_2 \tau_\gamma), \quad \tau_\gamma \geq 0. \quad (39)$$

Функцию $Q_1(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma)$ определим как решение задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_\gamma^2} Q_1 = f_u(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma) Q_1 + f_1(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma), \quad \tau_\gamma > 0,$$

$$Q_1(0, \vartheta, \gamma) = 0, \quad Q_1(+\infty, \vartheta, \gamma) = 0,$$

где $f_u(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma) = f_u(\varphi_1(R_\gamma, \vartheta) + Q_0, R_\gamma, \vartheta, 0)$,

$$f_1(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma) = (f_u(\tau_\gamma, \vartheta, \gamma) - f_u(\varphi_1(R_\gamma, \vartheta), R_\gamma, \vartheta, 0)).$$

Функция Q_1 допускает явное представление [11] и имеет равномерную по $\gamma \in [0, 1]$ и $\vartheta \in [0, 2\pi]$ экспоненциальную оценку типа (38).

Домножим функции Q_i , $i = 1, 2$, на срезающую функцию $\xi((R_\gamma - \varrho)/b)$ такую, что $\xi(t) \in C^\infty([0, +\infty))$ и $\xi(t) \equiv 1$ при $0 \leq t \leq 1/4$, $0 \leq \xi(t) \leq 1$ при $1/4 \leq t \leq 1/2$, $\xi(t) \equiv 0$ при $t \geq 1/2$, и получившиеся в результате этой процедуры функции снова обозначим через Q_i , $i = 1, 2$.

По построению функция $\beta(x, \gamma, \mu)$ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) = -\mu f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad x \in \overline{K}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1],$$

откуда следует, что существует постоянная $c_3 > 0$, не зависящая от ε , μ и γ , такая, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, \varepsilon) < -c_3 \mu, \quad x \in \overline{K}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (40)$$

Используя равномерные экспоненциальные оценки функций Q_i , нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\beta(x, \gamma, \mu) > \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (41)$$

Отметим также очевидное соотношение

$$\beta(x, \gamma, \mu) = \psi(x) + \mu > \varphi_2(x), \quad x \in \Gamma_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (42)$$

и воспользуемся леммой 2, согласно которой существует $T_0 = T_0(\mu/2) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, \varepsilon^2 T_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_0. \quad (43)$$

Кроме того, в силу леммы 1 имеем

$$u(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [\varepsilon^2 T_0, +\infty). \quad (44)$$

Введем функцию

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) = (\beta(x, \gamma(t), \mu) - u(x, t, \varepsilon)) \exp\left(-\frac{A(t - \varepsilon^2 T_0)}{\varepsilon^2}\right),$$

$$x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T],$$

где

$$\gamma(t) = \frac{t - \varepsilon^2 T_0}{\varepsilon T - \varepsilon^2 T_0},$$

а величины A и $T = T(\mu)$ уточним ниже. Очевидно, что $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ при $t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T]$, $\gamma(\varepsilon^2 T_0) = 0$, $\gamma(\varepsilon T) = 1$. Используя (40), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon^2(\Delta w - w_t) - Bw < \left(-c_3\mu - \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \frac{1}{T - \varepsilon T_0}\right) \exp\left(-\frac{A(t - \varepsilon^2 T_0)}{\varepsilon^2}\right),$$

$$x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T],$$

где $B = B(x, t, \varepsilon, \mu) = A + \int_0^1 f_u(u + (\beta - u)s, x, \varepsilon) ds$ и, следовательно, $B > 0$, если взять достаточно большое $A > 0$.

Из вида $\beta(x, \gamma, \mu)$ следует, что $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ имеет оценку

$$\left|\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}\right| \leq \frac{c}{\varepsilon},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ε , γ и μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому если взять $T = T(\mu)$ таким, что при достаточно малых ε

$$T > \varepsilon T_0 + \frac{c}{c_3\mu}$$

(к примеру, можно положить $T = \frac{2c}{c_3\mu}$), то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2(\Delta w - w_t) - Bw < 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T]. \quad (45)$$

Из неравенств (41) и (43) имеем

$$w(x, \varepsilon^2 T_0, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(\varepsilon^2 T_0)}, \quad (46)$$

а из неравенств (42) и (44) получаем

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \Gamma_{\gamma(t)}, \quad t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T]. \quad (47)$$

Из соотношений (45)–(47) следует, что

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(t)}, \quad t \in [\varepsilon^2 T_0, \varepsilon T],$$

в частности при $t = \varepsilon T$ имеем неравенство

$$w(x, \varepsilon T, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{K}_{\gamma(\varepsilon T)} = \overline{K}_1,$$

откуда получаем

$$u(x, \varepsilon T, \varepsilon) < \beta(x, \gamma(\varepsilon T), \mu) = \beta(x, 1, \mu), \quad x \in \overline{K}_1. \quad (48)$$

Из неравенств (42) и (44) следует, что

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, 1, \mu), \quad x \in \Gamma_1, \quad t \in [\varepsilon T, +\infty). \quad (49)$$

Неравенства (48), (49) и неравенство (40), взятое при $\gamma = 1$, показывают, что функция $\beta(x, 1, \mu)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \overline{K}_1 \times [\varepsilon T, +\infty)$, т. е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, 1, \mu), \quad (x, t) \in \overline{K}_1 \times [\varepsilon T, +\infty). \quad (50)$$

Рассматривая выражение для $\beta(x, 1, \mu)$ и учитывая, что функции Q_i , $i = 1, 2$, домножены на срезающую функцию, приходим к выводу, что выполнено равенство

$$\beta(x, 1, \mu) = \varphi_1(x) + \mu, \quad x \in \overline{K}. \quad (51)$$

Возьмем теперь столь малое $\zeta > 0$, чтобы для $\mu = \zeta$ при достаточно малых ε было выполнено неравенство (50). Тогда из (50) и (51) получим неравенство (33):

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \overline{K} \times [\varepsilon T, +\infty).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма обобщает результат леммы 3 на случай, когда берется не круг, а произвольная область, замыкание которой лежит внутри $D^{(+)}$ ($D^{(-)}$).

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия (A1)–(A4), (A6) и $\Omega^{(+)}$ ($\Omega^{(-)}$) – область такая, что

$$\overline{\Omega}^{(+)} \subset D^{(+)} \quad (\overline{\Omega}^{(-)} \subset D^{(-)}).$$

Пусть, далее, существует точка $\overline{x}^{(-)} \in \Omega^{(+)}$ ($\overline{x}^{(+)} \in \Omega^{(-)}$) такая, что

$$u_0(\overline{x}^{(-)}) < \varphi_2(\overline{x}^{(-)}) \quad (u_0(\overline{x}^{(+)}) > \varphi_1(\overline{x}^{(+)})).$$

Тогда для любого $\zeta > 0$ существует $T_1 = T_1(\zeta) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(+)} \times [\varepsilon T_1, +\infty) \quad (52)$$

$$(u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \zeta, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}^{(-)} \times [\varepsilon T_1, +\infty)). \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы, относящееся к неравенству (52). Утверждение, относящееся к неравенству (53), доказывается аналогично.

Пусть число $h > 0$ столь мало, что для области Ω^h , представляющей собой объединение $\Omega^{(+)}$ с h -окрестностью ее границы $\partial\Omega^{(+)}$, выполнено условие

$$\overline{\Omega}^h \subset D^{(+)}. \quad (54)$$

Пусть $\{E_i^{h/4}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где n – некоторое натуральное число, – множество открытых кругов с радиусом $h/4$ и центрами в некоторых точках $x_i \in D^{(+)}$ такое, что

$$\Omega^{(+)} \subset \bigcup_{i=1}^n E_i^{h/4}, \quad (55)$$

и для любого $j \in \overline{1, n}$ выполнено $\overline{E}_j^{h/4} \cap \overline{\Omega}^{(+)} \neq \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{E}_i^{h/4} \subset \Omega^h.$$

Покажем, что для любого $\zeta > 0$ и любого $j \in \overline{1, n}$ найдется $T_{(j)} > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \overline{E}_j^{h/4} \times [\varepsilon T_{(j)}, +\infty). \quad (56)$$

Зафиксируем произвольное $\zeta > 0$ и $j \in \overline{1, n}$. Если $x_j = \overline{x}^{(-)}$, то (56) следует из леммы 3.

Пусть $x_j \neq \overline{x}^{(-)}$. Соединим точку x_j с точкой $\overline{x}^{(-)}$ непрерывной спрямляемой кривой S , лежащей вместе со своей d -окрестностью (где $d > 0$ – некоторое число) внутри Ω^h . Пусть s – координата точки M на кривой S , равная расстоянию между $\overline{x}^{(-)}$ и M вдоль S . Выберем целое число $m \geq 0$ так, чтобы разность между длиной кривой S и числом $s_m = (m/2)d$ была неотрицательной и не превосходила $d/2$. Пусть V_k , $k = 0, 1, \dots, m$, – круги с радиусом d и центрами в точках M_k кривой S с координатами $s_k = kd/2$. Без ограничения общности можно считать, что $M_m \neq x_j$ (случай $M_m = x_j$ рассматривается аналогично). Через V_{m+1} обозначим круг $E_j^{h/4}$. Отметим, что центром V_0 является $\overline{x}^{(-)}$, для любого $k \in \overline{1, m+1}$ центр круга V_k лежит в круге V_{k-1} и $\overline{V}_k \subset \overline{\Omega}^h$, $k = 0, 1, \dots, m+1$, значит, вследствие (54) имеем

$$\overline{V}_k \subset D^{(+)}, \quad k = 0, 1, \dots, m+1. \quad (57)$$

Поскольку $u_0(\overline{x}^{(-)}) < \varphi_2(\overline{x}^{(-)})$, то в силу (57) для круга V_0 выполнены условия леммы 3. Используя лемму 3 и лемму 1, получаем, что для любого $\mu > 0$ существует $t_0 = t_0(\mu) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad (x, t) \in \overline{V}_0 \times [\varepsilon t_0, +\infty), \quad (58)$$

$$u(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [\varepsilon t_0, +\infty). \quad (59)$$

Введем обозначения: $x^{(-)} = M_1$, $K = V_1$. Поскольку центр $x^{(-)}$ круга K лежит внутри V_0 и выполнено неравенство (58), можно утверждать, что найдется круг K_0 с центром в $x^{(-)}$ такой, что $\overline{K}_0 \subset K$,

$$u(x, \varepsilon t_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_0. \quad (60)$$

Обозначим через R радиус круга K , через a – радиус круга K_0 . Пользуясь (57), введем полярные координаты (ϱ, ϑ) с центром в точке $x^{(-)}$, число b , семейство Γ_γ и функцию $\beta(x, \gamma, \mu)$ точно так же, как в доказательстве леммы 3. Теперь с помощью функции $\beta(x, \gamma, \mu)$, используя неравенства (60) и (59) вместо (43) и (44) (с заменой $\varepsilon^2 T_0$ на εt_0), тем же путем, что и при доказательстве леммы 3, приходим к выводу, что для любого достаточно малого $\zeta > 0$ существует $T = T(\zeta) > 0$ такое, что при достаточно малых ε

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \overline{K} \times [\varepsilon T, +\infty).$$

Отсюда и из (59) следует, что для любого $\mu > 0$ можно указать такое $t_1 = t_1(\mu) > 0$, что при достаточно малых ε справедливы неравенства

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad (x, t) \in \bar{V}_1 \times [\varepsilon t_1, +\infty), \quad (61)$$

$$u(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [\varepsilon t_1, +\infty). \quad (62)$$

Если $m > 0$, то уже на основании (61), (62), пользуясь тем, что центр M_2 круга V_2 лежит в круге V_1 , можно провести аналогичные рассуждения в отношении круга V_2 и таким образом доказать, что для любого $\mu > 0$ существует $t_2 = t_2(\mu) > 0$ такое, что при достаточно малых ε

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad (x, t) \in \bar{V}_2 \times [\varepsilon t_2, +\infty),$$

$$u(x, t, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [\varepsilon t_2, +\infty).$$

Если $m > 1$, то, используя тот же подход, устанавливаем соответствующие неравенства для V_3 . И так далее до V_{m+1} (если $m > 2$). На последнем шаге мы приходим к выводу, что для любого $\mu > 0$ существует $t_{m+1} = t_{m+1}(\mu) > 0$ такое, что при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \mu, \quad (x, t) \in \bar{V}_{m+1} \times [\varepsilon t_{m+1}, +\infty). \quad (63)$$

Поскольку $V_{m+1} = E_j^{h/4}$, то из (63) при $\mu = \zeta$ следует (56) с $T_{(j)} = t_{m+1}(\zeta)$. Итак, доказано, что для любого $\zeta > 0$ и любого $j \in \bar{1}, n$ существует $T_{(j)} > 0$ такое, что при достаточно малых ε для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) выполнено неравенство (56).

Поскольку число кругов $E_i^{h/4}$ конечно, то из доказанного утверждения следует, что для любого $\zeta > 0$ при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \zeta, \quad (x, t) \in \bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i^{h/4} \times [\varepsilon T_1, +\infty), \quad (64)$$

где $T_1(\zeta) = \max_{1 \leq i \leq n} T_{(i)} > 0$. Из соотношений (55) и (64) следует (52). Лемма доказана.

§ 4. Основной результат по формированию решения с внутренним слоем

Сформулируем основной результат настоящей работы по формированию решения с внутренним слоем, вытекающий из леммы 1 и леммы 4.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A1)–(A6). Тогда при достаточно малых ε существует единственное решение

$$u(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}(\bar{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\bar{D} \times (0, +\infty))$$

задачи (1)–(3) и для любого $t \in [0, +\infty)$ справедливо предельное соотношение (5), причем для любых замкнутых множеств $\Omega^{(+)} \subset D^{(+)}$ и $\Omega^{(-)} \subset D^{(-)}$ предельный переход в (5) равномерен по x и t при $(x, t) \in \Omega^{(+)} \times [0, +\infty) \cup \Omega^{(-)} \times [0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть начальная функция u_0 (см. (3)) зависит от ε , т. е. $u_0 = u_0(x, \varepsilon)$. В этом случае утверждение теоремы 1 имеет место, если вместо (A4), (A5) потребовать выполнения следующего условия:

(A5)' существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $u_0(x, \varepsilon) \in C_B^2(\bar{D})$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ (см. (A4)) и существуют $\bar{u}_0(x)$ и $\hat{u}_0(x)$, удовлетворяющие условиям (A4), (A5) и такие, что

$$\bar{u}_0(x) < u_0(x, \varepsilon) < \hat{u}_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Этот результат является следствием теоремы 1 и результатов работ [8]–[10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 остается в силе, если вместо (A2) выполнено следующее требование:

(A2)' существует подобласть D' области D , в которой выполнено условие (A2) с D' вместо D .

При этом $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ – подобласти области D' , поэтому утверждение носит локальный характер.

Для случаев, когда имеется несколько кривых Γ , удовлетворяющих требованию (A2)' для различных подобластей D' , данное утверждение позволяет, в частности, получать результаты, аналогичные теореме 1, по формированию решений с несколькими внутренними переходными слоями.

§ 5. Существование стационарного решения

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия (A1)–(A3), (A6), и пусть D_1 и D_2 – некоторые круги такие, что $\bar{D}_1 \subset D^{(+)}$, $\bar{D}_2 \subset D^{(-)}$. Тогда при достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\bar{D})$ задачи (1), (2), причем для любого $\eta > 0$ существует $\varepsilon' > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$ это решение удовлетворяет неравенствам

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \bar{D}_1, \quad (65)$$

$$u_s(x, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad x \in \bar{D}_2, \quad (66)$$

$$\varphi_1(x) \leq u_s(x, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (67)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_β и C_α – окружности, ограничивающие круги D_β и D_α , с теми же центрами, что D_1 и D_2 соответственно, такие, что

$$\bar{D}_1 \subset D_\beta, \quad \bar{D}_\beta \subset D^{(+)}, \quad \bar{D}_2 \subset D_\alpha, \quad \bar{D}_\alpha \subset D^{(-)}, \quad (68)$$

где $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ – области из условия (A2).

Для точек $M(x_1, x_2)$ из малой окрестности кривой C_β введем локальные координаты (r_β, θ_β) (см. также [11]), где $|r_\beta|$ – расстояние от точки M до кривой C_β вдоль нормали к C_β , которая проходит через M ; θ_β – координата той точки на C_β , из которой выпущена указанная нормаль; $r_\beta = |r_\beta|$, если $M \in D_\beta$, $r_\beta = -|r_\beta|$, если $M \in D \setminus \bar{D}_\beta$, $r_\beta = 0$, если $M \in C_\beta$.

Пусть $\varphi_i(r_\beta, \theta_\beta) \equiv \varphi_i(x(r_\beta, \theta_\beta))$, $i = 1, 2$, $f(u, r_\beta, \theta_\beta, \varepsilon) \equiv f(u, x(r_\beta, \theta_\beta), \varepsilon)$.

Аналогичным образом введем локальные координаты $(r_\alpha, \theta_\alpha)$ в окрестности кривой C_α и обозначения $\varphi_i(r_\alpha, \theta_\alpha)$, $i = 1, 2$, $f(u, r_\alpha, \theta_\alpha, \varepsilon)$.

Построим функцию

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x) + \varepsilon^{1/2} + Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) + \varepsilon^{1/2} Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta), & x \in \overline{D}_\beta, \\ \tilde{\beta}(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x), & x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_\beta,\end{aligned}\quad (69)$$

где $\tau_\beta = r_\beta/\varepsilon$, причем при определении функций $Q_{0\beta}$ и $Q_{1\beta}$ будем пользоваться результатами работы [11].

Функция $Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ является решением следующей задачи (θ_β играет роль параметра):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta^2} &= f(\varphi_1(0, \theta_\beta) + Q_{0\beta}, 0, \theta_\beta, 0), & \tau_\beta > 0, \\ Q_{0\beta}(0, \theta_\beta) &= \varphi_2(0, \theta_\beta) - \varphi_1(0, \theta_\beta), \\ Q_{0\beta}(+\infty, \theta_\beta) &= 0.\end{aligned}\quad (70)$$

В силу (68) и условий (A1), (A2) выполнено неравенство

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du > 0, \quad x \in C_\beta,$$

поэтому $Q_{0\beta}$ определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией от τ_β при $\tau_\beta \geq 0$ и имеет экспоненциальные оценки по переменной τ_β сверху и снизу, причем эти оценки равномерны по θ_β , т. е. существуют постоянные $c_i > 0$ и $m_i > 0$, $i = 1, 2$, не зависящие от τ_β и θ_β и такие, что

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \leq c_1 \exp(-m_1 \tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0, \quad (71)$$

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq c_2 \exp(-m_2 \tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0. \quad (72)$$

Функцию $Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_{1\beta}}{\partial \tau_\beta^2} &= f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) Q_{1\beta} + f_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta), & \tau_\beta > 0, \\ Q_{1\beta}(0, \theta_\beta) &= -1, & Q_{1\beta}(+\infty, \theta_\beta) = 0,\end{aligned}$$

где $f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) \equiv f_u(\varphi_1(0, \theta_\beta) + Q_{0\beta}, 0, \theta_\beta, 0)$,

$$f_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \equiv f_u(\tau_\beta, \theta_\beta) - f_u(\varphi_1(0, \theta_\beta), 0, \theta_\beta, 0).$$

Функция $Q_{1\beta}$ допускает явное представление [11] и имеет равномерную по θ_β экспоненциальную оценку сверху по переменной τ_β типа (71):

$$|Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)| \leq s \exp(-m \tau_\beta), \quad \tau_\beta \geq 0. \quad (73)$$

Проведем стандартную процедуру домножения функций $Q_{0\beta}$ и $Q_{1\beta}$ на срезающие функции [11]. Теперь функция $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ полностью построена.

Нетрудно доказать, что $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ непрерывна в $\overline{D}$ и является достаточно гладкой в областях $\overline{D}_\beta$ и $D \setminus D_\beta$, причем

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{\beta} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon) < 0, \quad x \in \overline{D}_\beta, \quad (74)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{\beta} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) \leq 0, \quad x \in \overline{D \setminus D_\beta}. \quad (75)$$

Чтобы получить (74) в малой окрестности кривой C_β , следует перейти к локальным координатам (r_β, θ_β) (см. [11]). Отметим, что (75) – следствие (69) и требования (A6).

Покажем, что при достаточно малых ε

$$\left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(-)} \geq \left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(+)}, \quad (76)$$

где $\partial/\partial n_\beta$ – производная по направлению внутренней нормали к C_β , а через $(\cdot)_\beta^{(-)}$ и $(\cdot)_\beta^{(+)}$ обозначены предельные значения на C_β из областей $D \setminus D_\beta$ и D_β соответственно.

Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(-)} - \left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n_\beta} \right)_\beta^{(+)} \right] &= \varepsilon [\varphi_{2r}(0, \theta_\beta) - \varphi_{1r}(0, \theta_\beta)] \\ &- \frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial Q_{1\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) = -\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned} \quad (77)$$

С другой стороны, нетрудно получить [11] для $\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta)$ соотношение

$$\frac{\partial Q_{0\beta}}{\partial \tau_\beta}(0, \theta_\beta) = - \left(2 \int_{\varphi_1(0, \theta_\beta)}^{\varphi_2(0, \theta_\beta)} f(u, 0, \theta_\beta, 0) du \right)^{1/2} < 0. \quad (78)$$

Из (78) и (77) при достаточно малых ε следует (76).

Отметим также очевидное в силу (A3) неравенство

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) \geq g(x), \quad x \in \partial D. \quad (79)$$

Аналогично функции $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ построим функцию

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x) - \varepsilon^{1/2} + Q_{0\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha) - \varepsilon^{1/2} Q_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha), \quad x \in \overline{D}_\alpha, \\ \tilde{\alpha}(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x), \quad x \in \overline{D \setminus D_\alpha}, \end{aligned} \quad (80)$$

где $\tau_\alpha = r_\alpha/\varepsilon$, а функции $Q_{0\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha)$ и $Q_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha)$ определяются соответственно как решения задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_{0\alpha}}{\partial \tau_\alpha^2} &= f(\varphi_2(0, \theta_\alpha) + Q_{0\alpha}, 0, \theta_\alpha, 0), \quad \tau_\alpha > 0, \\ Q_{0\alpha}(0, \theta_\alpha) &= \varphi_1(0, \theta_\alpha) - \varphi_2(0, \theta_\alpha), \quad Q_{0\alpha}(+\infty, \theta_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_{1\alpha}}{\partial \tau_\alpha^2} &= f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) Q_{1\alpha} + f_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha), \quad \tau_\alpha > 0, \\ Q_{1\alpha}(0, \theta_\alpha) &= -1, \quad Q_{1\alpha}(+\infty, \theta_\alpha) = 0, \end{aligned}$$

где $f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) \equiv f_u(\varphi_2(0, \theta_\alpha) + Q_{0\alpha}, 0, \theta_\alpha, 0)$,

$$f_{1\alpha}(\tau_\alpha, \theta_\alpha) \equiv f_u(\tau_\alpha, \theta_\alpha) - f_u(\varphi_2(0, \theta_\alpha), 0, \theta_\alpha, 0).$$

Так же, как и в случае с $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$, нетрудно показать, что $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$ непрерывна в $\overline{D}$, но является, вообще говоря, негладкой на кривой C_α , причем при достаточно малых ε

$$\left(\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial n_\alpha} \right)_\alpha^{(-)} \leq \left(\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial n_\alpha} \right)_\alpha^{(+)}, \quad (82)$$

где $\partial/\partial n_\alpha$ – производная по направлению внутренней нормали к C_α , а через $(\cdot)_\alpha^{(-)}$ и $(\cdot)_\alpha^{(+)}$ обозначены предельные значения на C_α из областей $D \setminus D_\alpha$ и D_α соответственно.

Кроме того, функция $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$ построена таким образом, что выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha}, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon) > 0, \quad x \in \overline{D}_\alpha, \quad (83)$$

$$\varepsilon^2 \Delta \tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha}, x, \varepsilon) \geq 0, \quad x \in \overline{D} \setminus \overline{D}_\alpha, \quad (84)$$

$$\tilde{\alpha}(x, \varepsilon) \leq g(x), \quad x \in \partial D. \quad (85)$$

Из соотношений (74)–(76), (79), (82)–(85) следует, что при достаточно малых ε в соответствии с терминологией, принятой в [2], [12], функции $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ и $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$ являются соответственно (негладкими) верхним и нижним решениями задачи (1), (2). Докажем, что при достаточно малых ε

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) > \tilde{\alpha}(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (86)$$

Для этого покажем, что при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) > \varphi_1(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (87)$$

В области $\overline{D} \setminus \overline{D}_\beta$ неравенство (87) очевидно (см. (69)).

Рассмотрим область $H_1 = \{M(r_\beta, \theta_\beta) \in D_\beta : 0 \leq r_\beta \leq r_1\}$, где $r_1 = \varkappa \varepsilon |\ln \varepsilon|$, $\varkappa > 0$ – число, которое выберем ниже. Поскольку $Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta)$ имеет оценку (72), то в области H_1 , т. е. при $0 \leq \tau_\beta \leq \varkappa |\ln \varepsilon|$, имеем

$$Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq c_2 \varepsilon^{\varkappa m_2}.$$

Выберем $\varkappa > 0$ столь малым, что $p = \varkappa m_2 < 1/2$. Тогда получим, что при достаточно малых ε в области H_1

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) - \varphi_1(x) = \varepsilon^{1/2} + Q_{0\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) + \varepsilon^{1/2} Q_{1\beta}(\tau_\beta, \theta_\beta) \geq \varepsilon^{1/2} + c_2 \varepsilon^p - \varepsilon^{1/2} c > 0,$$

где $c > 0$ – постоянная из оценки (73).

Для завершения доказательства неравенства (87) остается рассмотреть область $H_2 = D_\beta \setminus H_1$. В этой области $\tau_\beta > \varkappa |\ln \varepsilon|$, поэтому, используя (73) и неотрицательность $Q_{0\beta}$, при достаточно малых ε получаем

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) - \varphi_1(x) \geq \varepsilon^{1/2} - \varepsilon^{1/2} c \varepsilon^{\varkappa m} > 0, \quad x \in H_2,$$

т. е. получаем требуемое неравенство.

Аналогично (87) можно показать, что при достаточно малых ε

$$\tilde{\alpha}(x, \varepsilon) < \varphi_2(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (88)$$

Теперь становится очевидным то, что в области $\overline{D}_\beta$ неравенство (86) – непосредственное следствие (87) и (80), а в области $\overline{D} \setminus \overline{D}_\beta$ – следствие (88) и (69). Итак, (86) доказано.

Поскольку при достаточно малых ε функции $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ и $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$ являются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1), (2) и выполнено неравенство (86), то в силу [8], [12] существует решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2) такое, что

$$\tilde{\alpha}(x, \varepsilon) \leq u_s(x, \varepsilon) \leq \tilde{\beta}(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (89)$$

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$.

Для завершения доказательства леммы остается показать, что при достаточно малых ε выполнены неравенства (65)–(67).

В силу экспоненциальных оценок сверху Q -функций имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, \varepsilon) &= \varphi_1(x) + \varepsilon^{1/2} + O\left(\exp\left(-\frac{m_3}{\varepsilon}\right)\right), & x \in \overline{D}_1, \\ \tilde{\alpha}(x, \varepsilon) &= \varphi_2(x) - \varepsilon^{1/2} + O\left(\exp\left(-\frac{m_4}{\varepsilon}\right)\right), & x \in \overline{D}_2, \end{aligned} \quad (90)$$

где m_3 и m_4 – некоторые положительные постоянные, фиксированные при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (89), (90) при достаточно малых ε следуют (65) и (66).

Поскольку $Q_{0\beta}$ ($Q_{0\alpha}$) – монотонная функция по переменной τ_β (τ_α), удовлетворяющая условию (70) ((81)), можно утверждать, что при достаточно малых ε в $\overline{D}_\beta$ ($\overline{D}_\alpha$) выполнено неравенство $\tilde{\beta}(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta$ (соответственно, $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon) > \varphi_1(x) - \eta$). Отсюда, а также из вида функций $\tilde{\beta}(x, \varepsilon)$ и $\tilde{\alpha}(x, \varepsilon)$ в $\overline{D} \setminus \overline{D}_\beta$ и $\overline{D} \setminus \overline{D}_\alpha$ соответственно следует, что при достаточно малых ε

$$\tilde{\beta}(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad \tilde{\alpha}(x, \varepsilon) > \varphi_1(x) - \eta, \quad x \in \overline{D}.$$

Из последних неравенств и (89) получаем неравенства

$$\varphi_1(x) - \eta < u_s(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad x \in \overline{D}. \quad (91)$$

Отметим, что при этом в силу (69), (80), (89) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\leq u_s(x, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), & x \in \overline{D} \setminus (\overline{D}_\alpha \cup \overline{D}_\beta), \\ \varphi_1(x) &\leq u_s(x, \varepsilon), & x \in \overline{D}_\beta, \\ u_s(x, \varepsilon) &\leq \varphi_2(x), & x \in \overline{D}_\alpha. \end{aligned}$$

Для доказательства (67) осталось показать, что

$$u_s(x, \varepsilon) \leq \varphi_2(x), \quad x \in D_\beta, \quad (92)$$

$$u_s(x, \varepsilon) \geq \varphi_1(x), \quad x \in D_\alpha. \quad (93)$$

Введем обозначения: $K_0 \equiv D_1$, $K \equiv D_\beta$. Кроме того, через $x^{(-)}$ обозначим центр кругов K_0 и K , а через $a > 0$ и $R > 0$ – радиусы кругов K_0 и K соответственно.

Отметим, что в силу (65), (91) для любого $\mu > 0$ при достаточно малых ε

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{K}_0, \quad (94)$$

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in \overline{D}. \quad (95)$$

Далее, точно так же, как при доказательстве леммы 3, введем число $b \in (0, a)$, круг K_1 , функцию $\beta(x, \gamma, \mu)$ и функцию $\omega(x, t, \mu, \varepsilon)$, в которой в качестве $u(x, t, \varepsilon)$ возьмем $u_s(x, \varepsilon)$, и (используя (94), (95) вместо (43), (44) соответственно) докажем, что для любого $\mu > 0$ при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$u_s(x, \varepsilon) < \beta(x, 1, \mu) = \varphi_1(x) + \mu, \quad x \in \overline{K} \equiv \overline{D}_\beta.$$

Из последнего соотношения при достаточно малом μ следует (92). Неравенство (93) доказывается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия (A1)–(A3), (A6). Тогда для любого $\eta > 0$ и для любой области Ω_1 (соответственно, Ω_2) такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset D^{(+)}$ ($\overline{\Omega}_2 \subset D^{(-)}$), при достаточно малых ε для решения $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) из леммы 5 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\leq u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, & x \in \overline{\Omega}_1 \\ (\varphi_2(x) - \eta < u_s(x, \varepsilon) &\leq \varphi_2(x), & x \in \overline{\Omega}_2). \end{aligned} \quad (96)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение, относящееся к (96). Второе утверждение (стоящее в скобках) доказывается аналогично.

Зафиксируем область Ω_1 такую, что $\overline{\Omega}_1 \subset D^{(+)}$. Справедливость неравенства $u_s(x, \varepsilon) \geq \varphi_1(x)$ при $x \in \overline{\Omega}_1$ следует из леммы 5. Зафиксируем произвольное $\eta > 0$ и докажем, что при достаточно малых ε

$$u_s(x, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \overline{\Omega}_1. \quad (97)$$

Пусть область Σ такова, что

$$\overline{\Omega}_1 \subset \Sigma, \quad (98)$$

$$\overline{D}_1 \subset \Sigma, \quad \overline{\Sigma} \subset D^{(+)}, \quad (99)$$

где D_1 – круг из леммы 5.

Обозначим через $x^{(-)}$ и a соответственно центр и радиус круга D_1 . Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) - \delta, \quad x \in \overline{D}_1. \quad (100)$$

Введем функцию

$$u_0^{(+)}(x) = \varphi_2(x) - \frac{\delta}{2} \xi(|x - x^{(-)}|),$$

где $\xi(t) \in C^\infty([0, +\infty))$ – срезающая функция, $\xi(t) \equiv 1$ при $0 \leq t \leq a/6$; $0 \leq \xi(t) \leq 1$ при $a/6 \leq t \leq a/4$; $\xi(t) \equiv 0$ при $t \geq a/4$.

Функция $u_0^{(+)}(x)$ построена таким образом, что

$$\varphi_1(x) < u_0^{(+)}(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (101)$$

$$\varphi_2(x) - \frac{\delta}{2} = u_0^{(+)}(x) < \varphi_2(x) - \frac{\delta}{4}, \quad |x - x^{(-)}| \leq \frac{a}{6}, \quad (102)$$

$$u_0^{(+)}(x) = \varphi_2(x), \quad x \in \partial D, \quad (103)$$

и при достаточно малых ε в силу леммы 5 и неравенства (100) имеем

$$u_s(x, \varepsilon) \leq u_0^{(+)}(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (104)$$

В силу (101)–(103) и (99) для задачи (1)–(3) с $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0^{(+)}(x)$ и $g(x) \equiv \varphi_2(x)$ выполнены условия леммы 1 и леммы 4 с $\Omega^{(+)} = \Sigma$, $\bar{x}^{(-)} = x^{(-)}$, а значит, при достаточно малых ε существует единственное решение $u^{(+)}(x, t, \varepsilon)$ указанной задачи, причем

$$u^{(+)}(x, \varepsilon |\ln \varepsilon|, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in \overline{\Sigma}. \quad (105)$$

С другой стороны, в силу (104) и (4) функция $u^{(+)}(x, t, \varepsilon)$ является верхним решением для задачи (1)–(3) с $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_s(x, \varepsilon)$, а значит (см., например, [10]), для решения $u_s(x, \varepsilon)$ указанной задачи справедливо неравенство

$$u_s(x, \varepsilon) \leq u^{(+)}(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty). \quad (106)$$

Из соотношений (106), (105) и (98) следует (97). Лемма доказана.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы по существованию стационарного решения с внутренним слоем, вытекающий из леммы 6.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A3), (A6). Тогда при достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), удовлетворяющее соотношению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in D^{(+)}, \\ \varphi_2(x), & x \in D^{(-)}, \end{cases} \quad (107)$$

причем предельный переход в (107) равномерен на замкнутых множествах из $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$.

Список литературы

1. П. Файф, У. М. Гринли, “Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром”, *УМН*, **29:4** (1974), 103–130; англ. пер.: P. C. Fife, W. M. Greenlee, “Interior transition layers for elliptic boundary value problems with a small parameter”, *Russian Math. Surveys*, **29:4** (1974), 103–131.
2. Н. Н. Нефедов, “Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями”, *Дифференц. уравнения*, **31:7** (1995), 1142–1149; англ. пер.: N. N. Nefedov, “The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems with internal layers”, *Differential Equations*, **31:7** (1995), 1077–1085.

3. И. В. Неделко, “Существование решений с внутренними слоями, выходящими на границу”, *Матем. заметки*, **77**:1 (2005), 80–92; англ. пер.: I. V. Nedel’ko, “Existence of solutions with interior transition layers touching the boundary”, *Math. Notes*, **77**:1–2 (2005), 72–83.
4. В. Ф. Бутузов, И. В. Неделко, “О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями в двумерном случае”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 3–42; англ. пер.: V. F. Butuzov, I. V. Nedel’ko, “On the global domain of influence of stable solutions with interior layers in the two-dimensional case”, *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 1–40.
5. И. В. Неделко, “Формирование решений с внутренними слоями, выходящими на границу области”, *Дифференц. уравнения*, **42**:1 (2006), 101–113; англ. пер.: I. V. Nedel’ko, “Onset of solutions with internal layers approaching the domain boundary”, *Differ. Equ.*, **42**:1 (2006), 112–125.
6. W. H. Fleming, “A selection-migration model in population genetics”, *J. Math. Biol.*, **2**:3 (1975), 219–233.
7. P. C. Fife, L. A. Peletier, “Clines induced by variable selection and migration”, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. B, Biol. Sci.*, **214**:1194 (1981), 99–123.
8. D. H. Sattinger, “Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems”, *Indiana Univ. Math. J.*, **21**:11 (1972), 979–1000.
9. H. Amann, “Existence and stability of solutions for semi-linear parabolic systems, and applications to some diffusion reaction equations”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **81**:1–2 (1978), 35–47.
10. H. Amann, “Periodic solutions of semilinear parabolic equations”, *Nonlinear analysis (collections of papers in honor of Eric H. Rothe)*, Academic Press, New York, 1978, 1–29.
11. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:3 (1998), 799–851.
12. В. Ф. Бутузов, И. В. Неделко, “Асимптотическая устойчивость решений сингулярно возмущенных задач с пограничными и внутренними слоями”, *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 198–208; англ. пер.: V. F. Butuzov, I. V. Nedel’ko, “Asymptotic stability of solutions of singularly perturbed boundary value problems with boundary and internal layers”, *Differ. Equ.*, **36**:2 (2007), 224–235.

И. В. НЕДЕЛЬКО (I. V. NEDEL’KO)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17.05.2007