Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Арутюнян, Функция собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:37:51

УДК 517.9

Т. Н. Арутюнян

Функция собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля

Функция $\mu^-(\gamma)$ определена так, что ее значение в любой точке $\gamma \in (-\infty, \pi)$, $\gamma = \beta - \pi n$, $\beta \in [0, \pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, совпадает с собственным значением $\mu_n(\alpha, \beta)$ задачи Штурма–Лиувилля $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$, $y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0$ (при некотором $\alpha \in (0, \pi]$). Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая функция обладала указанным свойством при действительном $q \in L^1[0, \pi]$.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, функция собственных значений, обратная задача.

§ 1. Введение и формулировка результатов

Обозначим через $L(q, \alpha, \beta)$ краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \quad x \in (0, \pi), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi], \quad (1.2)$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi), \quad (1.3)$$

где $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ (т.е. q – действительнoзначная измеримая суммируемая по Лебегу на $[0, \pi]$ функция). Через $L(q, \alpha, \beta)$ обозначим самосопряженный оператор, порожденный задачей (1.1)–(1.3) (см. [1], [2]). Известно [1], [2], что спектр оператора $L(q, \alpha, \beta)$ дискретен и состоит из простых собственных значений (с.з.), которые мы будем обозначать $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, отмечая зависимость μ_n от q , α и β .

Зависимость с.з. от q достаточно глубоко изучена в серии работ [3]–[6] при $q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$. Зависимость с.з. от параметров α и β обычно изучалась (см. [1], [2] и [7]) в следующем смысле: краевые условия разделялись на три случая:

- 1) $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ (в дальнейшем это условие часто записываем в виде $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$),
- 2) $\sin \alpha = 0$, $\sin \beta \neq 0$ или $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta = 0$,
- 3) $\sin \alpha = \sin \beta = 0$,

и результаты, в частности асимптотика с.з., формулировались отдельно для трех случаев (наиболее подробная таблица имеется в [8]), а именно

$$\mu_n(q, \alpha, \beta) = n^2 + \frac{2}{\pi}(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt + r_n(q, \alpha, \beta), \quad (1.4)$$

если $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$,

$$\mu_n(q, \pi, \beta) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt + r_n(q, \beta), \quad (1.5)$$

если $\sin \beta \neq 0$,

$$\mu_n(q, \alpha, 0) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt + r_n(q, \alpha), \quad (1.5')$$

если $\sin \alpha \neq 0$,

$$\mu_n(q, \pi, 0) = (n + 1)^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt + r_n(q), \quad (1.6)$$

где $r_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, но эта оценка остатка неравномерна по $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и из формулы (1.4) невозможно получить остальные предельным переходом по $\alpha \rightarrow \pi$ или $\beta \rightarrow 0$.

Между тем, как будет показано ниже, зависимость с.з. от параметров α и β аналитическая, и более детальное изучение зависимости с.з. от этих параметров приводит нас к понятию “функции собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля”, которое, в свою очередь, позволяет по-новому рассмотреть некоторые задачи спектральной теории, в частности асимптотику с.з. и обратные задачи.

Таким образом, имея начальной целью по возможности детально изучить зависимость собственных значений от α и β , рассмотрим сначала задачу $L(q, \pi, 0)$, с.з. $\mu_n(q, \pi, 0)$ которой пронумеруем по возрастанию, т.е.

$$\mu_0(q, \pi, 0) < \mu_1(q, \pi, 0) < \dots \quad (1.7)$$

Потом заметим, что (согласно перемежаемости с.з. задач $L(q, \pi, 0)$ и $L(q, \pi, \beta)$ при $\beta \in (0, \pi)$; см. ниже § 2) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \mu_0(q, \pi, \beta) &< \mu_0(q, \pi, 0) < \mu_1(q, \pi, \beta) < \dots \\ \dots &< \mu_n(q, \pi, \beta) < \mu_n(q, \pi, 0) < \mu_{n+1}(q, \pi, \beta) < \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

для любого $\beta \in (0, \pi)$. Далее, если считать β фиксированным и использовать перемежаемость с.з. задач $L(q, \pi, \beta)$ и $L(q, \alpha, \beta)$ (см. § 2) при $\alpha \in (0, \pi)$, то получим

$$\begin{aligned} \mu_0(q, \alpha, \beta) &< \mu_0(q, \pi, \beta) < \mu_1(q, \alpha, \beta) < \dots \\ \dots &< \mu_{n-1}(q, \pi, \beta) < \mu_n(q, \alpha, \beta) < \mu_n(q, \pi, \beta) < \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Неравенства (1.7)–(1.9) дают корректную (непротиворечивую) нумерацию с.з. задач $L(q, \alpha, \beta)$ при всех $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi)$. Далее иногда мы не выписываем некоторые аргументы (например, $\mu_n(q, \alpha, \beta) = \mu_n(\alpha, \beta)$), чтобы отметить те главные аргументы, по которым ведется исследование.

Заметим, что любое $\gamma \in (0, \infty)$ можно представить в виде $\gamma = \alpha + \pi n$, где $\alpha \in (0, \pi]$, а $n = 0, 1, 2, \dots$, и любое $\delta \in (-\infty, \pi)$ можно представить в виде $\delta = \beta - \pi m$, где $\beta \in [0, \pi)$, а $m = 0, 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функцию $\mu(\gamma, \delta)$ от двух переменных, определенную на множестве $(0, \infty) \times (-\infty, \pi)$ по формуле

$$\mu(\alpha + \pi n, \beta - \pi m) = \mu_{n+m}(q, \alpha, \beta), \quad \alpha \in (0, \pi], \quad \beta \in [0, \pi), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

будем называть *функцией собственных значений* (ФСЗ) *семейства операторов* $\{L(q, \alpha, \beta), \alpha \in (0, \pi], \beta \in [0, \pi]\}$. В частности, при фиксированном $\beta \in [0, \pi]$ функцию одной переменной $\mu^+(\gamma)$, определенную на $(0, \infty)$ по формуле

$$\mu^+(\gamma) = \mu(\gamma, \beta) = \mu(\alpha + \pi n, \beta) = \mu_n(q, \alpha, \beta), \quad \alpha \in (0, \pi], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

будем называть *ФСЗ семейства* $\{L(q, \alpha, \beta), \alpha \in (0, \pi]\}$, а при фиксированном $\alpha \in (0, \pi]$ функцию одной переменной $\mu^-(\gamma)$, определенную на $(-\infty, \pi)$ по формуле

$$\mu^-(\gamma) = \mu(\alpha, \beta - \pi t) = \mu_m(q, \alpha, \beta), \quad \beta \in [0, \pi], \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

будем называть *ФСЗ семейства* $\{L(q, \alpha, \beta), \beta \in (0, \pi]\}$.

В этой работе мы будем изучать в основном функцию собственных значений $\mu^-(\cdot)$. Функция $\mu^+(\cdot)$, а точнее $\mu(\gamma, \frac{\pi}{2})$, при $q \in L_{\mathbb{R}}^2[0, \pi]$ была частично изучена в предыдущей работе автора [9].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть α – некоторое фиксированное число из $(0, \pi]$. Функция собственных значений $\mu^-(\gamma)$ семейства операторов $\{L(q, \alpha, \beta), \beta \in (0, \pi]\}$ обладает следующими свойствами:

а) она строго убывает на $(-\infty, \pi)$, ее область значений есть вся действительная ось $(-\infty, \infty)$; в частности, существует единственная точка $\gamma_0 \in (-\infty, \pi)$ такая, что $\mu^-(\gamma_0) = 0$;

б) для каждой точки $\gamma \in (-\infty, \pi)$ существует комплексная окрестность V_γ , в которой определена однозначная аналитическая функция $\tilde{\mu}(\cdot)$, совпадающая с $\mu^-(\cdot)$ при действительных значениях аргумента;

с) при $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi]$

$$\mu^-(\beta - \pi n) = \mu(\alpha, \beta - \pi n) = \mu_n(q, \alpha, \beta) = [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2 + [q] + r_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} [q] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx, \\ \delta_n(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi} \left[\arccos \frac{\cos \alpha}{\sqrt{[n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} \right. \\ &\quad \left. - \arccos \frac{\cos \beta}{\sqrt{[n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

а $r_n = r_n(q, \alpha, \beta) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по всем $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и всем q из ограниченных подмножеств $L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$ (иногда будем записывать $q \in \text{BL}_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$); если $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то для $\mu_n \geq 0$ ($n \geq n_0$) имеем

$$\sqrt{\mu_n(q, \alpha, \beta)} = \sqrt{\mu^-(\beta - \pi n)} = n + \frac{c}{\pi n} + l_n; \quad (1.15)$$

здесь $c = \text{ctg } \beta - \text{ctg } \alpha + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx$, а $l_n = l_n(\alpha, \beta, q)$ такие, что функции

$$l(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} l_n \sin(nx), \quad \omega(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \omega_n n \cos(nx), \quad (1.16)$$

где $\omega_n = l_n(q, \alpha, \beta) - l_n(q, \alpha, \beta_1)$, $\beta, \beta_1 \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, имеют ограниченную вариацию на $[0, \pi]$, т. е.

$$l, \omega \in \text{BV}[0, \pi]; \quad (1.17)$$

d) при $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^-(\gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\beta-\pi n} &= \frac{\partial \mu(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\beta-\pi n} \\ &= \frac{\sin(\gamma_0 - \delta)}{\sin(\gamma_0 - \beta)} \frac{\mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_n(\alpha, \delta)} \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)}{\sin(\delta - \beta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta)} \frac{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi)$; если $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то формула (1.18) упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^-(\gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\beta-\pi n} &= \frac{\partial \mu(\alpha, \beta)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\beta-\pi n} \\ &= \frac{\sin \delta}{\sin \beta} \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)}{\sin(\delta - \beta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi - \varepsilon]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В § 4 будет показано, что формулы (1.18) и (1.19) тесно связаны с “представлением нормировочных постоянных через два спектра”, которое в случае $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ было изучено в [10].

Теорема 1.1 описывает свойства ФСЗ $\mu^-(\cdot)$. Согласно следующей теореме эти свойства не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы некоторая функция, обладающая этими свойствами, была ФСЗ $\mu^-(\cdot)$ некоторого семейства операторов $\{L(q, \alpha, \beta), \beta \in [0, \pi)\}$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть некоторая функция $\mu(\cdot)$, определенная на $(-\infty, \pi)$, обладает свойствами а), б) из теоремы 1.1 и следующими свойствами:

с₂) существуют $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ и постоянная A такие, что

$$\mu(\beta - \pi n) = [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2 + A + r_n, \quad \beta \in [0, \pi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

где $r_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\beta \in [0, \pi]$; в частности, если $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то существует n_0 такое, что для $n \geq n_0$

$$\sqrt{\mu(\beta - \pi n)} = n + \frac{c}{n} + l_n, \quad c = \text{const}; \quad (1.21)$$

здесь функция $l(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} l_n \sin(nx)$ есть функция ограниченной вариации на $[0, \pi]$ равномерно по $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, т. е.

$$l \in \text{BV}[0, \pi]; \quad (1.22)$$

если $\beta_1 \neq \beta$, $\beta_1 \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, и $\sqrt{\mu(\beta_1 - \pi n)} = n + \frac{c_1}{n} + l_n^{(1)}$, то функция $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (l_n - l_n^{(1)}) n \cos(nx)$ также имеет ограниченную вариацию, т. е.

$$\omega \in \text{BV}[0, \pi]; \quad (1.23)$$

d_2) при $\beta \in [0, \pi)$ имеет место формула (1.18) для любого $\delta \in (\beta, \pi)$, где под $\mu_n(\alpha, \beta)$ понимаем значение $\mu(\beta - \pi n)$; если $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то имеет место формула (1.19) для любого $\delta \in (\beta, \pi - \varepsilon]$.

Тогда существует единственная функция $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ (единственная в смысле L^1) такая, что $\mu(\cdot)$ есть ФСЗ семейства $\{L(q, \alpha, \beta), \beta \in [0, \pi)\}$, т. е. для любого $\beta \in [0, \pi)$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем $\mu(\beta - \pi n) = \mu_n(q, \alpha, \beta)$, где $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ – собственные значения задачи $L(q, \alpha, \beta)$, пронумерованные согласно (1.7)–(1.9).

Из формулировки теоремы 1.2 видно, что мы исключаем из рассмотрения случай $\alpha = \pi$. Это связано с тем, что при доказательстве теоремы 1.2 мы опираемся на результат В. В. Жикова [7, теорема 3], где случаи $\sin \alpha = 0$ или $\sin \beta = 0$ не рассмотрены. Этот случай может быть рассмотрен отдельно, но здесь мы делать этого не будем.

Структура работы такова: в § 2 мы вводим необходимые обозначения и доказываем свойства а) и б) теоремы 1.1; в § 3 изучены ФСЗ семейства с нулевым потенциалом, в частности свойства функций $\delta_n(\alpha, \beta)$. Эти свойства являются основой для доказательства свойства с); в § 4 приведено доказательство свойства d) теоремы 1.1. Обратная задача, т. е. теорема 1.2, рассматривается в § 5.

§ 2. Доказательство монотонности и аналитичности ФСЗ

Далее через $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$, $y_3(x, \lambda)$, $y_4(x, \lambda)$ будем обозначать те решения уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$, которые удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda) &= 1, & y_2(0, \lambda) &= 0, & y_3(\pi, \lambda) &= 1, & y_4(\pi, \lambda) &= 0, \\ y'_1(0, \lambda) &= 0, & y'_2(0, \lambda) &= 1, & y'_3(\pi, \lambda) &= 0, & y'_4(\pi, \lambda) &= 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Через $\varphi(x, \mu, \alpha)$, $\psi(x, \mu, \beta)$ обозначим решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(0, \mu, \alpha) &= \sin \alpha, & \varphi'(0, \mu, \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \psi(\pi, \mu, \beta) &= \sin \beta, & \psi'(\pi, \mu, \beta) &= -\cos \beta. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda^2, \alpha) &= y_1(x, \lambda) \sin \alpha - y_2(x, \lambda) \cos \alpha, \\ \psi(x, \lambda^2, \alpha) &= y_3(x, \lambda) \sin \beta - y_4(x, \lambda) \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$ функции $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\varphi'_x(x, \mu, \alpha)$ являются целыми от μ (а также λ) и α , а $\psi(x, \mu, \beta)$ и $\psi'_x(x, \mu, \beta)$ – от μ и β (см., например, [11] или [12]). Собственные значения $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ задачи $L(q, \alpha, \beta)$ совпадают с нулями (относительно μ) целой функции

$$\Psi(\mu) = \Psi(\mu, \alpha, \beta) = \Psi_\alpha(\mu) = \psi(0, \mu, \beta) \cos \alpha + \psi'(0, \mu, \beta) \sin \alpha$$

или с нулями целой функции

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu, \alpha, \beta) = \Phi_\beta(\mu) = \varphi(\pi, \mu, \alpha) \cos \beta + \varphi'(\pi, \mu, \alpha) \sin \beta \quad (2.3)$$

(из формулы Лиувилля–Остроградского для вронскиана решений φ и ψ следует, что $\Psi(\mu) = -\Phi(\mu)$), которые называют *характеристическими функциями*

задачи $L(q, \alpha, \beta)$ (и которые являются целыми функциями трех комплексных переменных μ, α, β). Разные обозначения для одной и той же функции (например, в (2.3)) нужны в дальнейшем для ясности или краткости изложения.

Рассмотрим мероморфные по μ функции

$$\begin{aligned} m_{\alpha, \varepsilon}(\mu) &= \frac{\Psi(\mu, \alpha, \beta)}{\Psi(\mu, \varepsilon, \beta)} = \frac{\Psi_{\alpha}(\mu)}{\Psi_{\varepsilon}(\mu)} = \frac{\psi(0, \mu, \beta) \cos \alpha + \psi'(0, \mu, \beta) \sin \alpha}{\psi(0, \mu, \beta) \cos \varepsilon + \psi'(0, \mu, \beta) \sin \varepsilon}, \\ n_{\beta, \delta}(\mu) &= \frac{\Phi(\mu, \alpha, \beta)}{\Phi(\mu, \alpha, \delta)} = \frac{\Phi_{\beta}(\mu)}{\Phi_{\delta}(\mu)} = \frac{\varphi(\pi, \mu, \alpha) \cos \beta + \varphi'(\pi, \mu, \beta) \sin \beta}{\varphi(\pi, \mu, \alpha) \cos \delta + \varphi'(\pi, \mu, \beta) \sin \delta}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{m_{\alpha, \varepsilon}(\mu)\} &= \frac{\sin(\alpha - \varepsilon) \int_0^{\pi} |\psi(x, \mu, \beta)|^2 dx}{|\psi(0, \mu, \beta) \cos \varepsilon + \psi'(0, \mu, \beta) \sin \varepsilon|^2} \operatorname{Im} \mu, \\ \operatorname{Im}\{n_{\beta, \delta}(\mu)\} &= \frac{\sin(\delta - \beta) \int_0^{\pi} |\varphi(x, \mu, \alpha)|^2 dx}{|\varphi(\pi, \mu, \alpha) \cos \delta + \varphi'(\pi, \mu, \alpha) \sin \delta|^2} \operatorname{Im} \mu. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказывается приблизительно так же, как в работе [10] доказывается равенство (2.1.12), и мы не будем приводить подробности.

Из леммы 2.1 следует, что при $0 < \varepsilon < \alpha \leq \pi$ мероморфная функция $m_{\alpha, \varepsilon}(\mu)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и согласно известной теореме [13, с. 398] имеем

$$m_{\alpha, \varepsilon}(\mu) = c \frac{\mu - \mu_0(\alpha, \beta)}{\mu - \mu_0(\varepsilon, \beta)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_k(\alpha, \beta)}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\mu_k(\varepsilon, \beta)}\right)^{-1},$$

где $c > 0$ и $\mu_k(\varepsilon, \beta) < \mu_k(\alpha, \beta) < \mu_{k+1}(\varepsilon, \beta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В частности, отсюда следует, что каждое с.з. $\mu_k(\alpha, \beta)$ (при фиксированном β) есть строго возрастающая функция по $\alpha \in (0, \pi]$. Кроме того, отсюда следует перемежаемость с.з. $\mu_k(\alpha, \beta)$ и $\mu_k(\varepsilon, \beta)$ при $0 < \varepsilon < \alpha \leq \pi$, в частности $\mu_k(\varepsilon, \beta)$ и $\mu_k(\pi, \beta)$ ($0 < \varepsilon < \pi$), на которую мы ссылались в § 1. Из (1.11) следует, что ФСЗ $\mu^+(\gamma)$ — строго возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $(\pi k, \pi(k+1)]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, следовательно, и на полуоси $(0, \infty)$.

Из леммы 2.1 также следует, что при $0 \leq \beta < \delta < \pi$ мероморфная функция $n_{\beta, \delta}(\mu)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и согласно уже упомянутой теореме [13, с. 398]

$$n_{\beta, \delta}(\mu) = c \frac{\mu - \mu_0(\alpha, \beta)}{\mu - \mu_0(\alpha, \delta)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_k(\alpha, \beta)}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\mu_k(\alpha, \delta)}\right)^{-1}, \quad (2.5)$$

где $c > 0$ и $\mu_k(\alpha, \delta) < \mu_k(\alpha, \beta) < \mu_{k+1}(\alpha, \delta)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Отсюда, в частности, следует, что с.з. $\mu_k(\alpha, \beta)$ (при фиксированном α) есть строго убывающая функция по $\beta \in [0, \pi)$, а из (1.12) следует, что $\mu^-(\cdot)$ строго убывает на полуоси $(-\infty, \pi)$. Кроме того, отсюда вытекает перемежаемость с.з. $\mu_k(\alpha, \beta)$ и $\mu_k(\alpha, \delta)$ при $0 \leq \beta < \delta < \pi$, в частности перемежаемость (на которую в случае $\alpha = \pi$ мы ссылались в § 1)

$$\mu_k(\alpha, \delta) < \mu_k(\alpha, 0) < \mu_{k+1}(\alpha, \delta), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Переходя к вопросу об аналитичности ФСЗ, заметим, что из тождеств

$$-\varphi'' + q(x)\varphi \equiv \mu\varphi, \quad -\dot{\varphi}'' + q(x)\dot{\varphi} \equiv \varphi + \mu\dot{\varphi},$$

которым удовлетворяют функции $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi(x, \mu, \alpha)}{\partial \mu}$ следует тождество

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu, \alpha) dx &= \dot{\varphi}(\pi, \mu, \alpha)\varphi'(\pi, \mu, \alpha) - \dot{\varphi}'(\pi, \mu, \alpha)\varphi(\pi, \mu, \alpha) \\ &\equiv \frac{\dot{\Phi}_{\beta_1}(\mu)\Phi_{\beta_2}(\mu) - \Phi_{\beta_1}(\mu)\dot{\Phi}_{\beta_2}(\mu)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(см. [2, с. 261, формула (3.4.74)]). Из (2.6) следует, что если $\Phi_\beta(\mu_0) = 0$, то $\frac{\partial \Phi_\beta(\mu_0)}{\partial \mu} = \dot{\Phi}_\beta(\mu_0) \neq 0$, т. е. все корни характеристической функции $\Phi_\beta(\mu)$ простые (эти корни есть с.з. $\mu_k(q, \alpha, \beta)$, а следовательно, действительные). Аналогично доказывается, что все корни характеристической функции $\Psi_\alpha(\mu)$ простые.

Воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке (см. [11, с. 166]).

ТЕОРЕМА 2.1 (о неявной функции). Пусть $\gamma \in C^2$, $\mu \in C$, $F(\mu, \gamma): U \rightarrow C$ — аналитическая в некоторой окрестности U точки (μ_0, γ_0) функция, причем

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(\mu_0, \gamma_0) \neq 0.$$

Тогда равенство $F(\mu, \gamma) = F(\mu_0, \gamma_0)$ определяет единственным образом функцию $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\gamma): V \rightarrow C$, аналитическую в некоторой окрестности V точки γ_0 и такую, что при $\gamma \in V$ имеем $(\tilde{\mu}(\gamma), \gamma) \in U$, $\tilde{\mu}(\gamma_0) = \mu_0$ и $F(\tilde{\mu}(\gamma), \gamma) = F(\mu_0, \gamma_0)$ при всех $\gamma \in V$.

В качестве $F(\mu, \gamma)$ мы возьмем характеристическую функцию

$$\Phi(\mu) = \Phi(\mu, \gamma_1, \gamma_2) = \varphi(\pi, \mu, \gamma_1) \cos \gamma_2 + \varphi'(\pi, \mu, \gamma_1) \sin \gamma_2,$$

которая является целой функцией трех комплексных переменных μ, γ_1, γ_2 . Пусть γ_1^0 — произвольное положительное число, которое мы представим в виде $\gamma_1^0 = \alpha + \pi n$, где $\alpha \in (0, \pi]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и пусть $\gamma_2^0 = \beta - \pi m \in (-\infty, \pi)$, где $\beta \in [0, \pi)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\mu_0 = \mu(\gamma_1^0, \gamma_2^0) = \mu(\alpha + \pi n, \beta - \pi m) = \mu_{n+m}(\alpha, \beta)$ — значение ФСЗ в точке (γ_1^0, γ_2^0) . Тогда

$$\Phi(\mu_0, \gamma_1^0, \gamma_2^0) = \varphi(\pi, \mu_0, \alpha) \cos \beta + \varphi'(\pi, \mu_0, \alpha) \sin \beta = 0.$$

В силу простоты с.з. задачи $L(q, \alpha, \beta)$ имеем $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}(\mu_0, \gamma_1^0, \gamma_2^0) \neq 0$. Отсюда по теореме 2.1 следует, что существует некоторая комплексная окрестность V точки (γ_1^0, γ_2^0) , на которой определена однозначная аналитическая функция $\tilde{\mu}(\gamma_1, \gamma_2)$ такая, что $\tilde{\mu}(\gamma_1^0, \gamma_2^0) = \mu_0$, $\Phi(\tilde{\mu}(\gamma), \gamma_1, \gamma_2) = \Phi(\mu_0, \gamma_1^0, \gamma_2^0) = 0$ для всех $(\gamma_1, \gamma_2) \in V$. В частности, для действительных пар $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in V$ имеем $\tilde{\mu}(\gamma_1, \gamma_2) = \mu(\gamma_1, \gamma_2)$. Поскольку (γ_1^0, γ_2^0) является произвольной точкой из $(0, \infty) \times (-\infty, \pi)$, доказана аналитичность ФСЗ $\mu(\gamma_1, \gamma_2)$ на всем множестве $(0, \infty) \times (-\infty, \pi)$. В частности, отсюда следует вещественная аналитичность функции $\mu^-(\cdot)$ на интервале $(-\infty, \pi)$.

Докажем также, что область значений ФСЗ μ^+ и μ^- есть вся действительная ось. Для этого достаточно доказать, что для любого $\mu_0 \in \mathbb{R}$ существует $\beta_0 \in [0, \pi)$ такое, что

$$\Phi_{\beta_0}(\mu_0) = \varphi(\pi, \mu_0, \alpha) \cos \beta_0 + \varphi'(\pi, \mu_0, \alpha) \sin \beta_0 = 0$$

(аналогично, достаточно доказать, что существует $\alpha_0 \in (0, \pi]$ такое, что $\Psi_{\alpha_0}(\mu_0) = \psi(0, \mu_0, \beta) \cos \alpha_0 + \psi'(0, \mu_0, \beta) \sin \alpha_0 = 0$). В самом деле, если $\varphi(\pi, \mu_0, \alpha) = 0$, то возьмем $\beta_0 = 0$, а если $\varphi(\pi, \mu_0, \alpha) \neq 0$, то возьмем $\operatorname{ctg} \beta_0 = -\frac{\varphi'(\pi, \mu_0, \alpha)}{\varphi(\pi, \mu_0, \alpha)}$ (точнее, возьмем $\beta_0 = \operatorname{arccotg}(-\frac{\varphi'(\pi, \mu_0, \alpha)}{\varphi(\pi, \mu_0, \alpha)})$). Случай с μ^+ доказывается аналогично.

Поскольку $\mu^-(\cdot)$ – строго убывающая аналитическая функция (здесь достаточно непрерывности) и ее область значений есть вся действительная ось, то $\lim_{\delta \rightarrow \pi} \mu^-(\delta) = -\infty$. Кроме того, существует единственная точка $\delta_0 \in (-\infty, \pi)$ такая, что $\mu^-(\delta_0) = 0$. Аналогично, имеем $\lim_{\gamma \rightarrow +0} \mu^+(\gamma) = -\infty$, и существует $\gamma_0 \in (0, \infty)$ такое, что $\mu^+(\gamma_0) = 0$. Таким образом, доказаны свойства а) и б) теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Согласно (1.10) каждое с.з. $\mu_n(q, \alpha, \beta)$ является “частью” аналитической поверхности $\mu(\gamma, \delta)$, следовательно, аналитической функцией переменных α и β . Другими словами, можно сказать, что $\mu_n(q, \alpha, \beta) = \mu_n(\alpha, \beta)$ есть аналитическая на $(0, \pi) \times (0, \pi)$ функция, которая через стороны квадрата $[0, \pi] \times [0, \pi]$ аналитически переходит в $\mu_{n+1}(\alpha, \beta)$ или $\mu_{n-1}(\alpha, \beta)$.

Приведем также другое (независимое) доказательство возрастания $\mu^+(\cdot)$ и убывания $\mu^-(\cdot)$, которое будет полезно при доказательстве свойства д) из теоремы 1.1. Для этого заметим, что имеет место тождество

$$[\mu^+(\gamma + \Delta\gamma) - \mu^+(\gamma)] \int_0^\pi \varphi(x, \mu^+(\gamma + \Delta\gamma), \gamma + \Delta\gamma) \varphi(x, \mu^+(\gamma), \gamma) dx = \sin \Delta\gamma,$$

разделив обе части которого на $\Delta\gamma$ и устремив $\Delta\gamma$ к нулю, получаем

$$\frac{\partial \mu^+(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{\int_0^\pi \varphi^2(x, \mu^+(\gamma), \gamma) dx} = \frac{1}{a(\gamma)}, \quad (2.7)$$

где $a(\gamma) = a(\alpha + \pi n) = \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu_n(\alpha, \beta), \alpha) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$, называются *нормировочными постоянными* задачи (оператора) $L(q, \alpha, \beta)$. Поскольку $a(\gamma) > 0$, то $\mu^+(\gamma)$ – возрастающая функция. Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial \mu^-(\delta)}{\partial \delta} = -\frac{1}{\int_0^\pi \psi^2(x, \mu^-(\delta), \delta) dx} = -\frac{1}{b(\delta)}, \quad (2.8)$$

где при $\delta = \beta - \pi n$ имеем

$$b(\beta - \pi n) = \int_0^\pi \psi^2(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta) dx \stackrel{\text{def}}{=} b_n(\alpha, \beta);$$

$b_n(\alpha, \beta)$ – нормировочные постоянные для собственных функций $\psi_n(x) = \psi(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta)$, порожденных решением $\psi(x, \mu, \beta)$.

§ 3. Функция собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом и асимптотика собственных значений

Рассмотрим формулу

$$\mu_n(q, \alpha, \beta) = \mu_n(0, \alpha, \beta) + \int_0^1 \int_0^\pi q(x) h_n^2(x, tq, \alpha, \beta) dx dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $h_n(x, tq, \alpha, \beta)$ – нормированные ($\int_0^\pi h_n^2(x, tq, \alpha, \beta) dx = 1$) собственные функции задачи $L(tq, \alpha, \beta)$, а t – действительный параметр. Формула (3.1) доказана в [6] для случая $\alpha = \pi, \beta = 0$. В общем случае ($\alpha \in (0, \pi], \beta \in [0, \pi)$) доказательство аналогично, и мы не приводим его. Далее мы докажем две леммы.

ЛЕММА 3.1. *Имеем*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_0(0, \alpha, \beta) &= 0, & \lim_{\beta \rightarrow \pi} \mu_0(0, \alpha, \beta) &= -\infty, \\ \mu_n(0, \alpha, \beta) &= [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.2. *Выполнено равенство*

$$\int_0^1 \int_0^\pi q(x) h_n^2(x, tq, \alpha, \beta) dx dt = [q] + r_n(q, \alpha, \beta), \quad (3.3)$$

где $r_n(q, \alpha, \beta) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и $q \in \text{BL}_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$.

Из этих двух лемм и (3.1) будет следовать формула (1.13) теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.1. Здесь удобно спектральный параметр μ записывать в виде $\mu = \lambda^2$. При $q(x) \equiv 0$ решение $\varphi(x, \lambda^2, \alpha)$ (см. (2.2)) имеет вид

$$\varphi(x, \lambda^2, \alpha) = \sin \alpha \cos(\lambda x) - \cos \alpha \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}, \quad (3.4)$$

поэтому характеристическое уравнение $\Phi(\mu, \alpha, \beta) = 0$ (см. (2.3)) задачи $L(0, \alpha, \beta)$ имеет вид

$$\sin(\alpha - \beta) \cos(\lambda \pi) - \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\lambda} + \lambda \sin \alpha \sin \beta \right) \sin(\lambda \pi) = 0. \quad (3.5)$$

При $\alpha = \pi$ и $\beta = 0$ это уравнение принимает вид $\frac{\sin(\lambda \pi)}{\lambda} = 0$, и поэтому с.з. $\mu_n(0, \pi, 0)$ имеют вид $\mu_n(0, \pi, 0) = (n+1)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В частности, наименьшее с.з. есть $\mu_0(0, \pi, 0) = 1$. Поскольку ФСЗ $\mu^-(\gamma) = \mu(\pi, \gamma)$ должна принимать все значения до $-\infty$ и по β она строго убывающая, то $\lim_{\beta \rightarrow \pi} \mu_0(0, \pi, \beta) = -\infty$. Так как $\mu_0(0, \alpha, \beta) < \mu_0(0, \pi, \beta)$ при $0 < \alpha < \pi$, то $\lim_{\beta \rightarrow \pi} \mu_0(0, \alpha, \beta) = -\infty$ для любого $\alpha \in (0, \pi]$. Аналогично (используя уже возрастание по α) докажем, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_0(0, \alpha, \beta) = -\infty$ для любого $\beta \in [0, \pi)$. Остальные с.з. $\mu_n(0, \alpha, \beta)$, т.е. при $n \geq 1$, мы можем доопределить при $\alpha = 0$ и $\beta = \pi$ по формулам

$$\begin{aligned} \mu_n(0, 0, \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu_{n-1}(0, \pi, \beta), & \beta &\in [0, \pi), \\ \mu_n(0, \alpha, \pi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mu_{n-1}(0, \alpha, 0), & \alpha &\in (0, \pi]. \end{aligned}$$

Эти определения корректны, так как согласно доказанной аналитичности (см. также замечание 1.1) с.з. $\mu_n(0, \alpha, \beta)$ можно было доопределить при $\alpha = 0$ и $\beta = \pi$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_n(0, 0, \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_n(0, \alpha, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu(\alpha + \pi n, \beta) \\ &= \mu(\pi + \pi(n-1), \beta) = \mu_{n-1}(0, \pi, \beta), \\ \mu_n(0, \alpha, \pi) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\beta \rightarrow \pi} \mu_n(0, \alpha, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \pi} \mu(0, \alpha, \beta - \pi n) \\ &= \mu(0, \alpha, -\pi(n-1)) = \mu_{n-1}(0, \alpha, 0).\end{aligned}$$

Поэтому $\mu_n(0, \alpha, \beta)$ при $n \geq 2$ могут рассматриваться как функции на $[0, \pi] \times [0, \pi]$. Поскольку для всех $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= \mu_{n-2}(0, \pi, 0) = \mu_{n-1}(0, \pi, \pi) \leq \mu_{n-1}(0, \pi, \beta) = \mu_n(0, 0, \beta) \\ &\leq \mu_n(0, \alpha, \beta) \leq \mu_n(0, \pi, \beta) \leq \mu_n(0, \pi, 0) = (n+1)^2,\end{aligned}$$

то естественно искать $\lambda_n(0, \alpha, \beta) = \sqrt{\mu_n(0, \alpha, \beta)}$ в виде $\lambda_n(0, \alpha, \beta) = n + \delta_n(\alpha, \beta)$, где функция $\delta_n(\alpha, \beta)$ должна удовлетворять неравенствам $-1 \leq \delta_n(\alpha, \beta) \leq 1$ и быть возрастающей по α и убывающей по β .

Подставляя значения $\lambda = \lambda_n(0, \alpha, \beta) = n + \delta_n(\alpha, \beta)$ в уравнение (3.5), получаем уравнение (трансцендентное) относительно $\delta_n = \delta_n(\alpha, \beta)$:

$$\sin(\alpha - \beta) \cos(\pi \delta_n) - \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta}{n + \delta_n} + (n + \delta_n) \sin \alpha \sin \beta \right) \sin(\pi \delta_n) = 0.$$

Решая это уравнение как тригонометрическое уравнение вида $a \cos(\pi \delta_n) + b \sin(\pi \delta_n) = 0$ и учитывая условие $-1 \leq \delta_n(\alpha, \beta) \leq 1$, для $\delta_n(\alpha, \beta)$ получаем соотношение (1.14). Лемма доказана.

Несмотря на то, что (1.14) не является представлением для $\delta_n(\alpha, \beta)$, а всего лишь уравнением (трансцендентным), оно достаточно удобно для исследования $\delta_n(\alpha, \beta)$ и асимптотики с.з. Ниже (после доказательства леммы 3.2) мы увидим, что известные формулы (1.4)–(1.6) являются частными случаями формулы (1.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. В качестве нормированной собственной функции $h_n(x, tq, \alpha, \beta)$ рассмотрим $\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|} = \frac{\varphi(x, tq, \mu_n(tq, \alpha, \beta), \alpha)}{\|\varphi_n\|}$. Решение $\varphi(x, tq, \lambda^2, \alpha)$ представляется через фундаментальную систему решений $y_1(x, tq, \lambda)$ и $y_2(x, tq, \lambda)$ (см. (2.1)) уравнения $-y'' + tq(x)y = \lambda^2 y$ в виде (2.2). Для этих решений в [12] получены оценки

$$\begin{aligned}|y_1(x, \lambda, tq) - \cos(\lambda x)| &\leq \frac{|t|\sigma_0(x)}{|\lambda|} \exp \left\{ \left| \operatorname{Im} \lambda x + \frac{t\sigma_0(x)}{|\lambda|} \right| \right\}, \\ \left| y_2(x, \lambda, tq) - \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} \right| &\leq \frac{|t|\sigma_0(x)}{|\lambda|^2} \exp \left\{ \left| \operatorname{Im} \lambda x + \frac{t\sigma_0(x)}{|\lambda|} \right| \right\},\end{aligned}$$

где $\sigma_0(x) = \int_0^x |q(s)| ds$. Поэтому согласно (2.2) мы можем записать

$$\varphi(x, \lambda^2, tq, \alpha) = (\cos(\lambda x) + r_1(x, tq, \lambda)) \sin \alpha - \left(\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + r_2(x, tq, \lambda) \right) \cos \alpha,$$

где при действительных $\mu = \lambda^2 > 0$ ($\text{Im } \mu = \text{Im } \lambda = 0$), $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и всех q из ограниченных подмножеств $L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$ имеем $r_1(x, tq, \lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ и $r_2(x, tq, \lambda) = O(\frac{1}{\lambda^2})$ равномерно относительно $t \in [0, 1]$. Таким образом, для собственной функции $\varphi_n(x, tq, \alpha) = \varphi(x, \mu_n(tq, \alpha, \beta), tq, \alpha)$ в случае $\sin \alpha \neq 0$ мы имеем $\varphi_n^2(x, tq) = \cos^2(\lambda_n x) \sin \alpha + O(\frac{1}{n})$, а в случае $\sin \alpha = 0$ ($\alpha = \pi$) имеем $\varphi_n^2(x, tq, \pi) = \frac{\sin^2(\lambda_n x)}{\lambda_n^2} + O(\frac{1}{n^3})$. Отсюда, если $\sin \alpha \neq 0$ ($\alpha \neq \pi$), получаем

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^\pi \varphi_n^2(x) dx = \sin^2 \alpha \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\lambda_n x)}{2} dx + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sin^2 \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если $\sin \alpha = 0$, то $\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^\pi \sin^2(\lambda_n x) dx + O(\frac{1}{n^3}) = \frac{\pi}{2\lambda_n^2} (1 - O(\frac{1}{n}))$. Таким образом, в обоих случаях

$$h_n^2(x, tq, \alpha, \beta) = \frac{\varphi_n^2(x, tq, \mu_n(tq, \alpha, \beta), \alpha)}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{1 \pm \cos(2\lambda_n x)}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

причем оценка остатка равномерная по $t \in [0, 1]$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, $q \in \text{BL}_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\pi q(x) h_n^2(x, tq, \alpha, \beta) dx dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^\pi q(x) dx \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) \cos(2\lambda_n(tq, \alpha, \beta)x) dx \right) dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= [q] + r_n(q, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

и так как $\lambda_n(tq, \alpha, \beta) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $r_n(q, \alpha, \beta) = o(1)$ (равномерно по $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ и $q \in \text{BL}_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$) согласно лемме Римана–Лебега. Лемма доказана.

Покажем теперь, что формулы (1.4)–(1.6) являются следствиями из (1.13) и (1.14). Из (1.14), очевидно, следует, что $\delta_n(\pi, 0) = 1$. Поэтому (1.6) следует из (3.1), (3.2) и (3.3).

Если мы обозначим $x_{n,\alpha}(\beta) = \frac{\cos \beta}{\sqrt{(n + \delta_n(\alpha, \beta))^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta}}$, то $\delta_n(\pi, \beta) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x_{n,\pi}(\beta)$. Если $\sin \beta \neq 0$ ($\beta \neq 0$), то $x_{n,\pi}(\beta) = O(\frac{1}{n})$ и

$$x_{n,\pi}(\beta) = \frac{\text{ctg } \beta}{\sqrt{(n + \delta_n(\pi, \beta))^2 + \text{ctg}^2 \beta}} = \frac{\text{ctg } \beta}{n} + \text{ctg } \beta \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Используя формулы $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и $\arcsin x = x + O(x^3)$, получим

$$\delta_n(\pi, \beta) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} x_{n,\pi}(\beta) + O(x_{n,\pi}^3(\beta)) = \frac{1}{2} + \frac{\text{ctg } \beta}{\pi(n + \frac{1}{2})} + \text{ctg } \beta \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставляя $\delta_n(\pi, \beta)$ в формулу (1.13) и используя лемму 3.2, получаем соотношение (1.5). Аналогично,

$$\delta_n(\alpha, 0) = \frac{1}{\pi} \arccos x_{n,0}(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin x_{n,0}(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\text{ctg } \alpha}{\pi(n + \frac{1}{2})} + \text{ctg } \alpha \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.6)$$

и также из (1.13) мы получим (1.5'). Если $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, аналогично имеем

$$\delta_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi n}(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \operatorname{ctg} \beta \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.7)$$

и, подставляя (3.7) в (1.13), получаем формулу (1.4). Полезно заметить, что $\{\delta_n(\alpha, \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций, которые аналитичны в области $(0, \pi) \times (0, \pi)$, непрерывны на $[0, \pi] \times [0, \pi]$ и предел $\delta_{\infty}(\alpha, \beta)$ этой последовательности есть разрывная функция:

$$\delta_{\infty}(\alpha, \beta) = \begin{cases} -1, & \alpha = 0, \quad \beta = \pi, \\ -\frac{1}{2}, & \alpha = 0, \quad \beta \in (0, \pi) \text{ и } \beta = \pi, \quad \alpha \in (0, \pi), \\ 0, & (\alpha, \beta) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \quad (\alpha = 0, \beta = 0; \quad \alpha = \pi, \beta = \pi), \\ \frac{1}{2}, & \alpha = \pi, \quad \beta \in (0, \pi) \text{ и } \beta = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \\ 1, & \alpha = \pi, \quad \beta = 0. \end{cases}$$

С этой точки зрения интересно сравнить главную часть $[n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2$ формулы (1.13) и замечание 1 из работы [3, с. 768].

Легко заметить также, что для $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi)$ из соотношения (1.14) следует, что $\delta_n(\alpha, \beta) = \delta_n(\pi - \beta, \pi - \alpha)$. Это равенство согласуется также с равенством $\mu_n(q, \alpha, \beta) = \mu_n(q^*, \pi - \beta, \pi - \alpha)$ (см., например, [3, с. 769, замечание 3]), где $q^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} q(\pi - x)$.

Согласно (1.13) имеем $\mu_n = [n + \delta_n]^2 + O(1)$. Поэтому при $n \geq n_0$ ($\mu_n > 0$) выполнено $\sqrt{\mu_n} = \lambda_n(tq, \alpha, \beta) = n + \delta_n + O(\frac{1}{n})$, причем при $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ из (3.7) имеем, что $\delta_n(\alpha, \beta) = O(\frac{1}{n})$, т.е. $\lambda_n(tq, \alpha, \beta) = n + O(\frac{1}{n})$. Поэтому $\cos(2\lambda_n(tq, \alpha, \beta)x) = \cos(2nx) + O(\frac{1}{n})$ и (1.13) принимает вид

$$\mu_n(q, \alpha, \beta) = [n + \delta_n(\alpha, \beta)]^2 + [q] + r_n, \quad (3.8)$$

где

$$r_n = r_n(q, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \cos(2nx) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) = a_{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.9)$$

Поскольку $\delta_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi n}(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) + O(\frac{1}{n^2})$ при $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то из соотношений (3.8) и (3.9) для $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$ ($n \geq n_0$) получаем выражение

$$\lambda_n(q, \alpha, \beta) = n + \frac{c}{\pi n} + l_n,$$

где $c = \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q(x) dx$, а $l_n = \frac{a_{2n}}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$. Детализируя далее оценку (3.9), для $r_n = r_n(q, \alpha, \beta)$ мы должны по существу повторить рассуждения В. В. Жикова (см. [7], где $F(x) = \int_0^x q(t) dt$) и получить при $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ асимптотику вида (1.15) со свойствами (1.16) и (1.17).

Отметим более подробно, что результат В. В. Жикова [7] можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть две перемежающиеся последовательности вещественных чисел $\{\lambda_n^{(1)}\}$ и $\{\lambda_n^{(2)}\}$ удовлетворяют условиям:

$$\tilde{a}) \lambda_n^{(1)} = n + \frac{c_1}{n} + l_n^{(1)};$$

$$\tilde{b}) \lambda_n^{(2)} = n + \frac{c_2}{n} + l_n^{(2)}, c_1 \neq c_2;$$

$$\tilde{c}) \sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(1)} \sin(nx) = l_1(x) \in BV[0, \pi], \sum_{n=1}^{\infty} l_n^{(2)} \sin(nx) = l_2(x) \in BV[0, \pi];$$

$$\tilde{d}) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n n \cos(nx) = \omega(x) \in BV[0, \pi], \text{ где } \omega_n = l_n^{(1)} - l_n^{(2)}.$$

Тогда существуют функции $q \in L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$ и числа $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ такие, что $(\lambda_n^{(1)})^2 = \mu_n(q, \alpha, \beta_1)$ и $(\lambda_n^{(2)})^2 = \mu_n(q, \alpha, \beta_2)$. Наоборот, если $\lambda_n^{(1)} = \sqrt{\mu_n(q, \alpha, \beta_1)}$ и $\lambda_n^{(2)} = \sqrt{\mu_n(q, \alpha, \beta_2)}$, где $q \in L_{\mathbb{R}}^1[0, \pi]$, $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то последовательности $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$ перемешаются и выполнены условия $\tilde{a})$ – $\tilde{d})$.

§ 4. Представление нормировочных постоянных через два спектра (доказательство свойства d) теоремы 1.1)

Запишем представление (2.5) функции $n_{\beta, \delta}(\mu)$ в виде

$$n_{\beta, \delta}(\mu) = c \frac{\mu - \mu_0(\alpha, \beta)}{\mu - \mu_0(\alpha, \delta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu}. \quad (4.1)$$

Как отмечено в § 2, существует единственная точка $\delta_0 \in (-\infty, \pi)$ такая, что $\mu^-(\delta_0) = 0$. Поскольку δ_0 можно представить в виде $\delta_0 = \beta_0 - \pi n_0$, где $\beta_0 \in [0, \pi)$, а $n_0 = 0, 1, 2, \dots$, то согласно (1.12) имеем $\mu^-(\delta_0) = \mu^-(\beta_0 - \pi n_0) = \mu_{n_0}(\alpha, \beta_0) = 0$. Отсюда, в частности, следует что $\varphi(x, \mu_{n_0}(\alpha, \beta_0), \alpha) = \varphi(x, 0, \alpha)$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению 0, следовательно, она удовлетворяет краевому условию (1.3) при $\beta = \beta_0$, т. е.

$$\varphi(\pi, 0, \alpha) \cos \beta_0 + \varphi'(\pi, 0, \alpha) \sin \beta_0 = 0. \quad (4.2)$$

Взяв $\mu = 0$ в (2.5), получим

$$n_{\beta, \delta}(0) = c \frac{\mu_0(\alpha, \beta)}{\mu_0(\alpha, \delta)}, \quad (4.3)$$

и, взяв $\mu = 0$ в (2.4), получим

$$n_{\beta, \delta}(0) = \frac{\varphi(\pi, 0, \alpha) \cos \beta + \varphi'(\pi, 0, \alpha) \sin \beta}{\varphi(\pi, 0, \alpha) \cos \delta + \varphi'(\pi, 0, \alpha) \sin \delta} = \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)}, \quad (4.4)$$

что следует из (4.2). Из (4.3) и (4.4) получаем значение постоянной c :

$$c = \frac{\mu_0(\alpha, \delta)}{\mu_0(\alpha, \beta)} \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)}. \quad (4.5)$$

Таким образом, представление (4.1) можем записать в виде

$$n_{\beta, \delta}(\mu) = \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu}. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.1. Для любых β и δ таких, что $0 \leq \beta < \delta < \pi$, имеем

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} n_{\beta, \delta}(\mu) = \frac{\sin \beta}{\sin \delta}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение $\varphi(x, \mu, \alpha)$ уравнения (1.1) имеет вид (2.2), поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(\pi, \lambda^2, \alpha) &= y_1(\pi, \lambda) \sin \alpha - y_2'(\pi, \lambda) \cos \alpha, \\ \varphi'(\pi, \lambda^2, \alpha) &= y_1'(\pi, \lambda) \sin \alpha - y_2'(\pi, \lambda) \cos \alpha.\end{aligned}$$

Для решений $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ и их производных известны оценки (см., например, [12]), из которых следует, что (при $|\lambda| \geq 1$)

$$\begin{aligned}y_1(\pi, \lambda) &= \cos(\lambda\pi) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|\pi}}{|\lambda|}\right), & y_1'(\pi, \lambda) &= -\lambda \sin(\lambda\pi) + O(e^{|\operatorname{Im} \lambda|\pi}), \\ y_2(\pi, \lambda) &= \frac{\sin(\lambda\pi)}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|\pi}}{|\lambda|^2}\right), & y_2'(\pi, \lambda) &= \cos(\lambda\pi) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|\pi}}{|\lambda|}\right).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Поэтому при $\mu = \lambda^2$ получаем

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(\mu) &= \varphi(\pi, \mu, \alpha) \cos \beta + \varphi'(\pi, \mu, \alpha) \sin \beta \\ &= (y_1(\pi, \lambda) \sin \alpha - y_2(\pi, \lambda) \cos \alpha) \cos \beta \\ &\quad + (y_1'(\pi, \lambda) \sin \alpha - y_2'(\pi, \lambda) \cos \alpha) \sin \beta \\ &= y_1(\pi, \lambda) \sin \alpha \cos \beta - y_2(\pi, \lambda) \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + y_1'(\pi, \lambda) \sin \alpha \sin \beta - y_2'(\pi, \lambda) \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Если теперь $\mu = \lambda^2 = -t^2 = (it)^2$, т.е. $\lambda = it$ ($t > 0$, $t \rightarrow +\infty$), то (4.9) примет следующий вид (согласно (4.8)):

$$\begin{aligned}\Phi_\beta(-t^2) &= \left(\cos(it\pi) + O\left(\frac{e^{\pi t}}{t}\right)\right) \sin \alpha \cos \beta - \left(\frac{\sin(it\pi)}{it} + O\left(\frac{e^{\pi t}}{t}\right)\right) \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + (-it \sin(i\pi t) + O(e^{\pi t})) \sin \alpha \sin \beta - \left(\cos(i\pi t) + O\left(\frac{e^{\pi t}}{t}\right)\right) \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Учитывая, что $it \sin(i\pi t) = -\frac{t}{2}(e^{\pi t} - e^{-\pi t})$ и $\cos(i\pi t) = \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{2}$, из (4.10) получаем

$$\Phi_\beta(-t^2) = \begin{cases} \frac{te^{\pi t}}{2} \left[\sin \alpha \sin \beta + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], & \text{если } \sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0, \\ \frac{e^{\pi t}}{2} \left[\sin \beta + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], & \text{если } \alpha = \pi, \sin \beta \neq 0, \\ \frac{e^{\pi t}}{2t} \left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right], & \text{если } \alpha = \pi, \beta = 0. \end{cases}\quad (4.11)$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n_{\beta, \delta}(-t^2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_\beta(-t^2)}{\Phi_\delta(-t^2)} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Если $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то для любого $\delta \in (\beta, \pi - \varepsilon]$ имеем

$$c \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta_0)} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \quad (4.12)$$

и представление (4.1) можно записать в виде

$$n_{\beta, \delta}(\mu) = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu}. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из асимптотики собственных значений (3.8) (в изучаемом случае $\beta, \delta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$) следует, что

$$\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_k(\alpha, \delta) = O(1). \quad (4.14)$$

Рассмотрим бесконечное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} \right). \quad (4.15)$$

Из (4.14) и асимптотики (3.8) следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} \right| = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k(\alpha, \delta) - \mu|} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$$

при $\mu \in (-\infty, -1]$ сходится равномерно, следовательно (см., например, [14, с. 49]), бесконечное произведение (4.15) сходится равномерно по $\mu \in (-\infty, -1]$. Поэтому в нем можно перейти к пределу при $\mu \rightarrow -\infty$. Совершая этот предельный переход, мы получим

$$\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} \right) = 1. \quad (4.16)$$

Таким образом, при условии $0 < \varepsilon \leq \beta < \delta \leq \pi - \varepsilon < \pi$ (и равномерно по всем $\alpha \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$), которое обеспечивает соотношение (4.14), что, в свою очередь, обеспечивает равномерную сходимость бесконечного произведения (4.15), функцию $n_{\beta, \delta}(\mu)$ можно записать в виде

$$n_{\beta, \delta}(\mu) = c \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu}. \quad (4.17)$$

Совершая предельный переход в (4.17) при $\mu \rightarrow -\infty$, из (4.7) и (4.16) получаем соотношения (4.12) и (4.13). Лемма доказана.

Заметим, что доказательство леммы 4.2 повторяет рассуждения, примененные при выводе представления нормировочных постоянных через два спектра в работе [10], где предполагается, что $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$.

Между тем, из асимптотики (1.13) и соотношения (3.6) следует, что при $\sin \beta = 0$ ($\beta = 0$) и $\delta \neq 0$ соотношение (4.14) неверно и, соответственно, неверны представление $n_{\beta, \delta}(\mu)$ в виде (4.17) и вычисление постоянной c при помощи

предельного перехода в (4.16). Применение ФСЗ в данном случае дает возможность определить постоянную c в формуле (4.1) исходя из существования точки $\delta_0 \in (-\infty, \pi)$, в которой $\mu^-(\delta_0) = 0$ (и получить выражение (4.5) для c), и не применять упомянутый предельный переход, который при $\beta = 0$ невозможен.

ЛЕММА 4.3. При $\beta \in [0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_n(\alpha, \beta)} &= \\ &= \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)} \frac{\mu_n(\alpha, \delta)}{\mu_n(\alpha, \beta)} \frac{1}{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi)$. При $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ выражение (4.18) упрощается и принимает вид

$$\left. \frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_n(\alpha, \beta)} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \frac{1}{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)}. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (4.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} n_{\beta, \delta}(\mu) &= \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_n(\alpha, \delta) - \mu} \frac{\mu_n(\alpha, \delta)}{\mu_n(\alpha, \beta)} \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu} \\ &= \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_n(\alpha, \delta) - \mu} \mathfrak{N}(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} = \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)}{(\mu_n(\alpha, \delta) - \mu)^2} \mathfrak{N}(\mu) + \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu}{\mu_n(\alpha, \delta) - \mu} \frac{\partial \mathfrak{N}(\mu)}{\partial \mu}$$

и, в частности,

$$\left. \frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_n(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)} \mathfrak{N}(\mu_n(\alpha, \beta)),$$

т.е. получим выражение (4.18). Аналогично, если исходить из (4.13), то получим (4.19). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. Выполнено равенство

$$\left. \frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_n(\alpha, \beta)} = \frac{\int_0^\pi \psi^2(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta) dx}{\sin(\beta - \delta)}. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выражения (2.4) и определения производной (здесь производную $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ будем обозначать также $\dot{\varphi}$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\beta, \delta}(\mu)}{\partial \mu} &= \lim_{\Delta \mu \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \mu} [n(\mu + \Delta \mu) - n(\mu)] \\ &= \frac{\sin(\delta - \beta) [\dot{\varphi}'(\pi, \mu) \varphi(\pi, \mu) - \varphi'(\pi, \mu) \dot{\varphi}(\pi, \mu)]}{(\varphi(\pi, \mu) \cos \delta + \varphi'(\pi, \mu) \sin \delta)^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Согласно тождеству

$$\frac{d}{dx} [\varphi'(x, \mu_1) \varphi(x, \mu) - \varphi'(x, \mu) \varphi(x, \mu_1)] \equiv (\mu - \mu_1) \varphi(x, \mu) \varphi(x, \mu_1)$$

получаем равенство

$$\dot{\varphi}'(\pi, \mu) \varphi(\pi, \mu) - \dot{\varphi}(\pi, \mu) \varphi'(\pi, \mu) = - \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu) dx,$$

из которого в силу (4.21) получаем

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = - \frac{\sin(\delta - \beta) \int_0^\pi \varphi^2(x, \mu) dx}{(\varphi(\pi, \mu) \cos \delta + \varphi'(\pi, \mu) \sin \delta)^2}. \quad (4.22)$$

Поскольку при $\mu = \mu_n(\alpha, \beta)$ собственные функции $\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n(\alpha, \beta), \alpha)$ и $\psi_n(x) = \psi(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta)$ линейно зависимы, т. е. $\varphi_n(x) = c_n \psi_n(x)$, из соотношения (4.22) получаем равенство (4.20):

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_n(\alpha, \beta)} = \frac{\sin(\delta - \beta) \int_0^\pi \psi^2(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta) dx}{(\psi(\pi, \mu_n, \beta) \cos \delta + \psi'(\pi, \mu, \beta) \sin \delta)^2} = \frac{\int_0^\pi \psi^2(x, \mu_n) dx}{\sin(\beta - \delta)}.$$

Лемма доказана.

Из лемм 4.3 и 4.4 получаем представление нормировочной постоянной $b_n(\alpha, \beta)$ через два спектра.

ЛЕММА 4.5. При всех $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi)$

$$\begin{aligned} b_n(\alpha, \beta) &= \int_0^\pi \psi^2(x, \mu_n(\alpha, \beta), \beta) dx \\ &= \frac{\sin(\beta_0 - \beta)}{\sin(\beta_0 - \delta)} \frac{\mu_n(\alpha, \delta)}{\mu_n(\alpha, \beta)} \frac{\sin(\beta - \delta)}{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^\infty \frac{\mu_k(\alpha, \delta)}{\mu_k(\alpha, \beta)} \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi)$. При $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ формула (4.23) упрощается:

$$b_n(\alpha, \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \frac{\sin(\beta - \delta)}{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^\infty \frac{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \quad (4.24)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi - \varepsilon]$.

Учитывая формулу (2.8), получаем выражение производной ФСЗ $\mu^-(\gamma)$ через два спектра.

ЛЕММА 4.6. При $\alpha \in (0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi)$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu^-(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\beta-\pi n} &= \left. \frac{\partial \mu(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\beta-\pi n} \\ &= - \frac{\sin(\beta_0 - \delta)}{\sin(\beta_0 - \beta)} \frac{\mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_n(\alpha, \delta)} \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)}{\sin(\beta - \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^\infty \frac{\mu_k(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \delta)} \frac{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi)$. Если $\alpha, \beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, то выражение для производной несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu^-(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\beta-\pi n} &= \left. \frac{\partial \mu(\alpha, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\beta-\pi n} \\ &= -\frac{\sin \delta}{\sin \beta} \frac{\mu_n(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \delta)}{\sin(\beta - \delta)} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k(\alpha, \delta) - \mu_n(\alpha, \beta)}{\mu_k(\alpha, \beta) - \mu_n(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

для любого $\delta \in (\beta, \pi - \varepsilon]$.

Таким образом, доказана часть d) теоремы 1.1, т.е. теорема 1.1 доказана полностью.

§ 5. Доказательство теоремы 1.2

Пусть некоторая функция $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условиям а), б), с₂), d₂) теоремы 1.2, и пусть $0 < \varepsilon \leq \beta < \beta_1 \leq \pi - \varepsilon$. Рассмотрим последовательности $\mu_n = \mu(\beta - \pi n)$ и $\nu_n = \mu(\beta_1 - \pi n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Согласно свойству а) функция $\mu(\cdot)$ строго убывающая, поэтому последовательности $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ перемежаются:

$$\nu_0 < \mu_0 < \nu_1 < \dots < \mu_n < \nu_{n+1} < \mu_{n+1} < \dots$$

Согласно свойству с₂) (см. (1.21)) они имеют асимптотики вида $\sqrt{\mu_n} = n + \frac{c}{n} + l_n$ и $\sqrt{\nu_n} = n + \frac{c_1}{n} + l_n^{(1)}$, где l_n и $l_n^{(1)}$ удовлетворяют условиям (1.22) и (1.23). Отсюда согласно теореме 3.1 следует, что существуют функция $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ и числа $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}_1 \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ такие, что $\mu_n = \mu(\beta - \pi n) = \mu_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и $\nu_n = \mu(\beta_1 - \pi n) = \mu_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При этом согласно лемме 4.5 величины

$$b_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{\sin \tilde{\beta}}{\sin \tilde{\beta}_1} \frac{\sin(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_1)}{\mu_n - \nu_1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\nu_k - \mu_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

суть нормировочные постоянные задачи $L(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, т.е. $b_n = \int_0^\pi |\psi(x, \mu_n, \tilde{\beta})|^2 dx$, где $y = \psi(x, \mu, \tilde{\beta})$ – решение задачи Коши $-y'' + q(x)y = \mu y$, $y(\pi) = \sin \tilde{\beta}$, $y'(\pi) = -\cos \tilde{\beta}$.

Если вместо β_1 рассмотреть любую другую точку β_2 такую, что $\beta_2 \in (\beta, \pi - \varepsilon]$, то аналогично можно доказать, что существуют функция $q_2 \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ и числа $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}_2$ такие, что $\mu_n = \mu(\beta - \pi n) = \mu_n(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, $\tilde{\nu}_n = \mu(\beta_2 - \pi n) = \mu_n(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Также согласно лемме 4.5 величины

$$b_n(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{\sin \tilde{\beta}}{\sin \tilde{\beta}_2} \frac{\sin(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_2)}{\mu_n - \tilde{\nu}_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\tilde{\nu}_k - \mu_n}$$

суть нормировочные постоянные задачи $L(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Однако по свойству d_2) величины

$$\frac{\sin \beta}{\sin \beta_1} \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{\mu_n - \nu_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\nu_k - \mu_n} = c_1 b_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \beta_2} \frac{\sin(\beta - \beta_2)}{\mu_n - \tilde{\nu}_n} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_n}{\tilde{\nu}_k - \mu_n} = c_2 b_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

где $c_1 = \frac{\sin \beta \sin \tilde{\beta}_1 \sin(\beta - \beta_1)}{\sin \tilde{\beta} \sin \beta_1 \sin(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_1)}$, $c_2 = \frac{\sin \beta \sin \tilde{\beta}_2 \sin(\beta - \beta_2)}{\sin \tilde{\beta} \sin \beta_2 \sin(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_2)}$, равны. Таким образом, у задач $L(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и $L(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ совпадают все собственные значения: $\mu_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \mu_n(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \mu(\beta - \pi n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а нормировочные постоянные отличаются умножением на одну и ту же постоянную:

$$b_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = c b_n(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), \quad c = \frac{c_2}{c_1},$$

т.е. для спектральных функций $\rho(\mu)$ и $\rho_2(\mu)$ задач $L(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и $L(q_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ имеет место равенство $\rho(\mu) = c \rho_2(\mu)$. Согласно теореме единственности В. А. Марченко [8] отсюда следует, что $q(x) = q_2(x)$ почти всюду, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}$ и $c = 1$.

Таким образом, при любом выборе $\beta_k \in (\beta, \pi - \varepsilon]$, $k = 1, 2, \dots$, существуют $q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}_k \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ такие, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mu_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \mu(\beta - \pi n), & \mu_n(q, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_k) &= \mu(\beta_k - \pi n), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

Согласно (1.15), (1.21) и (5.1) имеем

$$\begin{aligned} n + \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha + A}{\pi n} + l_n &= n + \frac{\operatorname{ctg} \tilde{\beta} - \operatorname{ctg} \tilde{\alpha} + \tilde{A}}{\pi n} + \tilde{l}_n, \\ n + \frac{\operatorname{ctg} \beta_k - \operatorname{ctg} \alpha + A}{\pi n} + l_n &= n + \frac{\operatorname{ctg} \tilde{\beta}_k - \operatorname{ctg} \tilde{\alpha} + \tilde{A}}{\pi n} + \tilde{l}_n \end{aligned}$$

для всех $n \geq n_0$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $\operatorname{ctg} \tilde{\beta} - \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \tilde{\beta}_k - \operatorname{ctg} \beta_k$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Из произвольности выбора $\beta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ и $\beta_k \in (\beta, \pi - \varepsilon]$ и того, что $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}_k$ также должны быть из $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ (это следует из теоремы 3.1), нетрудно доказать, что равенство $\operatorname{ctg} \tilde{\beta} - \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \tilde{\beta}_k - \operatorname{ctg} \beta_k$ для любого $k = 1, 2, \dots$ возможно только при $\tilde{\beta} = \beta$ и $\tilde{\beta}_k = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k \in (\beta, \pi - \varepsilon]$, такую, что $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$ и $\beta_k \rightarrow \beta$. Поскольку

$$\mu^-(q, \tilde{\alpha}, \beta_k) = \mu^-(\beta_k - \pi n) = \mu(\beta_k - \pi n), \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. на сходящихся последовательностях $\beta_k - \pi n \rightarrow \beta - \pi n$ при $k \rightarrow \infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) аналитические функции $\mu^-(q, \gamma)$ и $\mu(\gamma)$ совпадают, то они совпадают всюду, где они определены, т.е. на $(-\infty, \pi)$. Отсюда, конечно, следует, что $\delta_n(\alpha, \beta) = \delta_n(\tilde{\alpha}, \beta)$ для всех $\beta \in [0, \pi)$ и $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\delta_n(\alpha, \beta)$ — строго возрастающая по α функция, то равенство $\delta_n(\tilde{\alpha}, \beta) = \delta_n(\alpha, \beta)$ возможно только при $\tilde{\alpha} = \alpha$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, Наука, М., 1988; англ. пер.: B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **59**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
2. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986.
3. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, “The inverse Sturm–Liouville problem. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**:6 (1983), 767–783.
4. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, “The inverse Sturm–Liouville problem. II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**:1 (1984), 1–11.
5. B. E. J. Dahlberg, E. Trubowitz, “The inverse Sturm–Liouville problem. III”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**:2 (1984), 255–267.
6. J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., **130**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
7. В. В. Жиков, “Об обратных задачах Штурма–Лиувилля на конечном отрезке”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:5 (1967), 965–976; англ. пер.: V. V. Žikov, “On inverse Sturm–Liouville problems on a finite segment”, *Math. USSR-Izv.*, **1**:5 (1967), 923–934.
8. В. А. Марченко, “Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I”, *Тр. ММО*, **1**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1952, 327–420; англ. пер.: V. A. Marchenko, “Some questions in the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **101** (1973), 1–104.
9. Т. Н. Арутюнян, Э. Р. Навасардян, “Функция собственных значений семейства операторов Штурма–Лиувилля”, *Изв. НАН АрмССР. Матем.*, **35**:5 (2000), 1–11; англ. пер.: T. N. Arutyunyan, H. R. Navasardyan, “Eigenvalue function of a family of Sturm–Liouville operators”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **35**:5 (2001), 5–15.
10. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, “Определение дифференциального уравнения по двум спектрам”, *УМН*, **19**:2 (1964), 3–63; англ. пер.: B. M. Levitan, M. G. Gasymov, “Determination of a differential equation by two of its spectra”, *Russian Math. Surveys*, **19**:2 (1964), 1–63.
11. Ю. Н. Бибигов, *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1981.
12. Т. Н. Арутюнян, М. С. Овсепян, “О решениях уравнения Штурма–Лиувилля”, *Математика в Высшей школе* (Ереван), **1**:3 (2005), 59–74.
13. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
14. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, ч. I. *Основные операции анализа*, Физматлит, М., 1963; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

Т. Н. АРУТЮНЯН (T. N. HARUTYUNYAN)
 Ереванский государственный университет, Армения
 E-mail: hartigr@yahoo.co.uk

Поступило в редакцию
 25.05.2007
 07.04.2008