Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Насибов, О точной константе в одном неравенстве Соболева–Ниренберга и ее приложении к уравнению Шрёдингера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 3, 127–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:51:35

УДК 517.946.51.9

Ш. М. Насибов

**О точной константе
в одном неравенстве Соболева–Ниренберга
и ее приложении к уравнению Шрёдингера**

Доказано, что решение задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера с критической и сверхкритической степенями при некоторых начальных данных разрушается через конечное время, для которого даны оценки сверху и снизу. С этой целью доказано одно интерполяционное неравенство типа Ниренберга и неравенство типа Соболева и вычислены значения точных констант в них.

Библиография: 39 наименований.

Ключевые слова: неравенство Ниренберга–Соболева, точная константа, нелинейное уравнение Шрёдингера, разрушение, глобальная разрешимость.

Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос об оценке снизу и сверху времени разрушения решений задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера

$$iu_t = \Delta u + |u|^\rho u \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

где $\rho > 0$, u_0 – заданная в $\mathbb{R}^n$ функция.

Уравнение (1) встречается в различных разделах прикладной физики, нелинейной квантовой механике, теории распространения световых волн в нелинейных средах (см., например, [1], [2]).

В работах [3], [4] доказано, что задача (1), (2) при $0 < \rho < 4/n$ имеет глобальное решение в пространствах $L_\infty(0, T; W_2^1(\mathbb{R}^n)) \cap L_\infty(0, T; W_2^{-1}(\mathbb{R}^n))$ и $C([0, T], W_2^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], W_2^{-1}(\mathbb{R}^n))$ для любого $T > 0$. Значение $\rho = 4/n$ является критическим. В ряде работ (см. [4]–[13] и др.) доказано, что при $\rho \geq 4/n$ решение задачи (1), (2) в подходящих функциональных пространствах разрушается через конечное время $t_{\max}$ при некоторых начальных данных. В настоящей работе устанавливаются оценки сверху и снизу для $t_{\max}$ (теорема 2, теорема 3). Для вывода оценки снизу для $t_{\max}$ доказано одно мультипликативное неравенство типа Ниренберга для функций $v(x)$ из класса $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ и вычислено значение наилучшей константы в нем (теорема 1).

Отметим, что изучению различных свойств решений задачи (1), (2) посвящено довольно много статей (имеется хороший, хотя не полный, список литературы в [8]). В случае $\rho = 4/n$ свойствам решений при их коллапсе посвящены работы М. Тсутсуми, Ф. Мерле, М. И. Вайнштейна, Я. Тсутсуми, В. А. Страуса, П. Л. Лионса и других (см. список литературы в работе [8]).

Разрешимость смешанной задачи для уравнения, близкого к (1), исследована Ж. Л. Лионсом [14], М. В. Владимировым [15] и другими авторами.

§ 1. Обозначения. Некоторые предварительные леммы

Введем следующие обозначения: $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $W_2^2(\mathbb{R}^n)$ – пространства Соболева; $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n) = (W_2^1(\mathbb{R}^n))^*$ – сопряженное пространство к пространству $W_2^1(\mathbb{R}^n)$; $L_w(\mathbb{R}^n) = \{v(x) \mid rv \in L_2(\mathbb{R}^n), r = |x|\}$; $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ – нормы соответственно в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1), (2) в подходящем функциональном пространстве. Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= A(t) = \|\nabla u(\cdot, t)\|^2, & B &= B(t) = \|u(\cdot, t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}, \\ E(t) &= A(t) - \frac{2B(t)}{\rho+2}, & E_0 &= E(0) = \|\nabla u_0\|^2 - \frac{2}{\rho+2} \|u_0\|_{\rho+2}^{\rho+2}, \\ \varphi(t) &= \|ru(\cdot, t)\|^2, & \varphi_0 &= \varphi(0) = \|ru_0\|^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть $\rho \in [1, \infty)$ при $n = 2$, $\rho \in [1, 4)$ при $n = 3$, $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)$. Тогда задача (1), (2) имеет локальное решение в классе функций

$$C([0, t_0], W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_0], L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим, используя аналогичные рассуждения из работ [9], [10], [16] и опираясь на результаты, полученные в работе [17] (см. также [18], [19]).

Рассмотрим вопрос о продолжении локального решения за точку t_0 . Пусть

$$u(x, t) \in C([0, t_{\max}], W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}], L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n))$$

– максимальное решение задачи (1), (2) в том смысле, что локальное решение может быть продолжено из $[0, t_0]$ в $[0, t_{\max}]$, $t_{\max} > t_0$, где $[0, t_{\max}]$ – максимальный интервал существования решения задачи (1), (2) из указанного класса. Ясно, что $t_{\max}$ либо конечно, либо бесконечно.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть

$$u(x, t) \in C([0, t_{\max}], W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}], L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n))$$

– максимальное решение задачи (1), (2). Тогда задача (1), (2) при любом $t \in [0, t_{\max})$ имеет следующие инварианты:

$$\|u(\cdot, t)\| = \|u_0\|, \quad (3)$$

$$E(t) = E_0, \quad (4)$$

и следующие соотношения:

$$-A(t) + B(t) = \operatorname{Re} \left[i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx \right], \quad (5)$$

$$\varphi(t) \leq 4E_0 t^2 + 4\mu_0 t + \varphi_0, \quad \rho \geq \frac{4}{n}, \quad (6)$$

где

$$\mu_0 = \frac{1}{4} \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = \operatorname{Im} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r} r u_0 dx \right], \quad (7)$$

черта над $u_0(x)$, $u(x, t)$ обозначает комплексное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства соотношений (3), (5) умножим уравнение (1) на $\bar{u}$. Далее интегрируем по x , применяя первую формулу Грина, затем берем мнимую часть от обеих частей полученного равенства и в результате получаем (3); при выделении реальной части получаем (5). Для доказательства инварианта (4) умножим уравнение (1) на $\bar{u}_t$. Далее интегрируем по x , применяя первую формулу Грина, затем выделяем реальную часть от обеих частей полученного равенства, в результате получаем (4). Доказательство соотношений (6), (7) можно найти в [5], [8]–[13].

§ 2. Некоторые интерполяционные неравенства

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $r^2 v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ для любого $v(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда при $n = 2, 3$ справедливы неравенства

$$\|v\|_1 \leq c_0 \|v\|^{1-\theta} \|r^2 v\|^\theta, \quad (8)$$

$$\|v\|_1 \leq c_0 \chi \sqrt{\|v\|^2 + \|r^2 v\|^2}, \quad (9)$$

где $\theta = n/4$, $\chi = \sqrt{\theta^\theta (1-\theta)^{1-\theta}}$, $c_0 = \sqrt{\pi \sigma_n / (4 \sin(\theta\pi))} / \chi$, $\sigma_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$, $\Gamma(n/2)$ – гамма-функция Эйлера. При этом неравенства (8) и (9) эквивалентны: из неравенства (8) следует неравенство (9), из неравенства (9) следует неравенство (8) с теми же константами. Константы c_0 и $c_0 \chi$ являются точными: неравенства (8) и (9) переходят в равенства при $v(r) = v_0(r) = (1 + r^4)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство (8). Перепишем норму $\|v\|_1$ в следующем виде:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\alpha + \beta r^4} |v(x)| \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta r^4}} dx,$$

где α, β – некоторые положительные параметры, которые будут выбраны далее. Отсюда в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца для интегралов при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ имеем

$$\|v\|_1 \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha |v|^2 + \beta |v|^2 r^4) dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta r^4}}}. \quad (10)$$

Интеграл $I = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta r^4}}$ вычисляется непосредственно:

$$I = \frac{\sigma_n}{4\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\theta \frac{\pi}{\sin(\pi\theta)}. \quad (11)$$

Теперь выберем $\alpha = \|r^2 v\|^2 / \|v\|^2$. Тогда из (10) и (11) приходим к следующему неравенству:

$$\|v\|_1 \leq \sqrt{\frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}} \frac{\sqrt{1+\beta}}{\beta^{\theta/2}} \|v\|^{1-\theta} \|r^2 v\|^\theta. \quad (12)$$

Функция $f = f(\beta) = (1+\beta)^{1/2} \beta^{-\theta/2}$, $0 < \beta < \infty$, при $\beta = \beta_0 = \theta/(1-\theta)$ имеет минимум $f(\beta_0) = 1/\sqrt{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}}$. Выбирая $\beta = \beta_0$ в неравенстве (12), получим неравенство (8) с константой c_0 . Покажем, что c_0 в (8) является точной. Перепишем (8) в следующем виде: $R_0(v) \leq c_0$, где $R_0(v) = \|v\|_1 / (\|v\|^{1-\theta} \|r^2 v\|^\theta)$, и вычислим значение функционала $R_0(v)$ при $v = v_0 = (1+r^4)^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|v_0\|_1 &= \sigma_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{1+r^4} dr = \frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}, \\ \|v_0\|^2 &= \sigma_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^4)^2} dr = \frac{(1-\theta)\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}, \\ \|r^2 v_0\|^2 &= \sigma_n \int_0^\infty \frac{r^{n+3}}{(1+r^4)^2} dr = \frac{\theta\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_0(v_0) &= \frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)} \left[\frac{(1-\theta)\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)} \right]^{\frac{\theta-1}{2}} \left[\frac{\theta\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)} \right]^{\frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}} \left(\sqrt{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}} \right)^{-1} = c_0, \quad v_0 = \frac{1}{1+r^4}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство $R(v) \leq c_0$ при $v_0 = (1+r^4)^{-1}$ перешло в равенство, стало быть, константа c_0 в (8) является точной.

Далее покажем, что из неравенства (8) следует неравенство (9). Перепишем правую часть (8) в следующем виде:

$$\|v\|_1 \leq c_0 \sqrt{\frac{\|v\|^{2(1-\theta)}}{(1-\theta)^{1-\theta}}} \frac{\|r^2 v\|^{2\theta}}{\theta^\theta} \sqrt{\theta^\theta(1-\theta)^{1-\theta}},$$

и применим к произведению под первым корнем элементарное неравенство Гёльдера–Юнга

$$ab \leq (1-\theta)a^{\frac{1}{1-\theta}} + \theta b^{\frac{1}{\theta}},$$

где $a = [\|v\|^2/(1-\theta)]^{1-\theta}$, $b = [\|r^2 v\|^2/\theta]^\theta$, в результате получим неравенство (9) с константой $c_0\chi$.

Теперь покажем, что из неравенства (9) вытекает неравенство (8). Применим (9) к функции $\eta(x) = v(\lambda x)$, где λ – некоторый положительный параметр,

который будет выбран ниже. Вычислим соответственно нормы $\|\eta\|_1$, $\|\eta\|$, $\|r^2\eta\|$. Имеем

$$\|\eta\|_1 = \frac{\|v\|_1}{\lambda^n}, \quad \|\eta\| = \frac{\|v\|}{\lambda^{n/2}}, \quad \|r^2\eta\| = \frac{\|r^2v\|}{\lambda^{2+n/2}}.$$

Подставляя их в (9), получим следующее неравенство:

$$\|v\| \leq c_0\chi\sqrt{\lambda^n\|v\|^2 + \lambda^{n-4}\|r^2v\|^2}. \quad (13)$$

Функция $f(\lambda) = \lambda^n\|v\|^2 + \lambda^{n-4}\|r^2v\|^2$, $0 < \lambda < \infty$, при $\lambda = \lambda_0 = [\|v\|^2(1-\theta)/\theta]^{1/4}$ имеет минимум, равный $f(\lambda_0) = [\|v\|^\theta\|r^2v\|^{1-\theta}/\chi]^2$, значит, если в (13) положить $\lambda = \lambda_0$, то получим неравенство (8). Тем самым мы показали, что из (9) следует неравенство (8).

Остается убедиться в том, что в неравенстве (9) константа $c_0\chi$ является точной; с этой целью перепишем (9) в виде $R_1(v) \leq c_0\chi$, где $R_1(v) = \|v\|_1/\sqrt{\|v\|^2 + \|r^2v\|^2}$. Вычислим значение функционала $R_1(v)$ при $v = v_0 = (1+r^4)^{-1}$:

$$R_1(v_0) = \frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)} \left(\sqrt{\frac{(1-\theta)\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)} + \frac{\theta\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{\pi\sigma_n}{4\sin(\theta\pi)}}, \quad v_0 = \frac{1}{1+r^4}.$$

Итак, неравенство $R_1(v) \leq c_0\chi$ при $v = v_0 = (1+r^4)^{-1}$ переходит в равенство, значит, константа $c_0\chi$ в (9) является наилучшей. Предложение доказано.

Используя предложение 1, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ – произвольная функция такая, что $\Delta v(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда при $n = 2, 3$ справедливы интерполяционное неравенство Ниренберга

$$\|v\|_\infty \leq c_\infty \|v\|^{1-\theta} \|\Delta v\|^\theta \quad (14)$$

и неравенство Соболева

$$\|v\|_\infty \leq \chi c_\infty \sqrt{\|v\|^2 + \|\Delta v\|^2}, \quad (15)$$

где $c_\infty = c_0/(2\pi)^{n/2}$. При этом неравенства (14) и (15) эквивалентны между собой с теми же константами. Константы c_∞ и χc_∞ являются точными соответственно в неравенствах (14) и (15), т.е. они переходят в равенства в случае $n = 2$ при $v = v_0 = -\text{kei}(r)$, где $-\text{kei}(r)$ – функция Томсона: $-\text{kei}(r) = \int_0^\infty \frac{\xi J_0(r\xi)}{1+\xi^4} d\xi$, J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и в случае $n = 3$ при $v = v_0 = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему для функций из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, применяя известный метод аппроксимации, получим ее для функций $v(x)$ из класса $W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\hat{v}(\xi)$ – фурье-образ функции $v(x)$, т.е.

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} v(x) dx.$$

Тогда

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{v}(\xi) d\xi,$$

отсюда имеем

$$|v(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\hat{v}\|_1. \quad (16)$$

В силу неравенств (8) и (9) из соотношения (16) следуют неравенства

$$|v(x)| \leq \frac{c_0}{(2\pi)^{n/2}} \|\hat{v}\|^{1-\theta} \|\xi|^2 \hat{v}\|^\theta, \quad (17)$$

$$|v(x)| \leq \frac{c_0 \chi}{(2\pi)^{n/2}} \sqrt{\|\hat{v}\|^2 + \|\xi|^2 \hat{v}\|^2}. \quad (18)$$

Согласно равенству Планшереля имеем

$$\|\hat{v}\| = \|v\|, \quad \|\xi|^2 \hat{v}\| = \|\Delta v\|. \quad (19)$$

В таком случае из (17), (18) в силу (19) вытекают неравенство (14) с константой c_∞ и неравенство (15) с константой χc_∞ , что доказывает их справедливость. Доказательство того, что из неравенства (14) вытекает (15), проводится так же, как доказательство того, что из неравенства (8) следует (9). Чтобы доказать, что из (15) следует (14), применим неравенство (15) к функции $\eta = v(\lambda x)$, для чего сначала вычислим нормы $\|\eta\|_\infty = \|v\|_\infty$, $\|\eta\|^2 = \|v\|^2/\lambda^n$, $\|\Delta \eta\|^2 = \lambda^{4-n} \|\Delta v\|^2$, а затем подставим их в (15), в результате получим следующее неравенство:

$$\|v\|_\infty \leq \chi c_\infty \sqrt{\lambda^{-n} \|v\|^2 + \lambda^{4-n} \|\Delta v\|^2}. \quad (20)$$

Функция $f(\lambda) = \lambda^{-n} \|v\|^2 + \lambda^{4-n} \|\Delta v\|^2$, $0 < \lambda < \infty$, при $\lambda = \lambda_0 = [\frac{\|\Delta v\|^{2\theta}}{\|v\|^{2(1-\theta)}}]^{1/4}$ имеет минимум, равный $f(\lambda_0) = \|v\|^{2(1-\theta)} \|\Delta v\|^{2\theta} \chi^{-2}$, следовательно, полагая $\lambda = \lambda_0$ в (20), получим неравенство (14). Этим доказывается, что из неравенства (15) следует (14).

Эквивалентность неравенств (14) и (15) установлена. Остается показать, что константы c_∞ и χc_∞ в них являются не улучшаемыми. Покажем точность константы χc_∞ в (15). С этой целью перепишем неравенство (15) в виде $R_1(v) \leq \chi c_\infty$, где $R_1(v) = \frac{\|v\|_\infty}{\sqrt{\|v\|^2 + \|\Delta v\|^2}}$. Вычислим значение функционала $R_1(v)$ в случае $n = 3$ при $v = v_0 = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{2z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Имеем $\|v_0\|_\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Далее в силу (19) заключаем, что

$$\|v_0\|^2 + \|\Delta v_0\|^2 = \|\hat{v}_0\|^2 + \|\xi|^2 \hat{v}_0\|^2.$$

Фурье-образ функции $v_0(r) = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{2z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$, при $n = 3$ есть функция $\hat{v}_0(\xi) = (1 + |\xi|^4)^{-1}$. Вычислим интеграл

$$\|\hat{v}_0\|^2 + \|\xi|^2 \hat{v}_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\xi}{1 + |\xi|^4} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{1 + \omega^4} = \sqrt{2} \pi^2.$$

Стало быть, $R_1(v_0) = (\frac{1}{2})^{5/4} \pi^{1/2}$. Вычислим значение константы $c_\infty \chi = \sqrt{\frac{\pi \sigma_n}{4 \sin(\theta \pi)}} (2\pi)^{-n/2}$ при $n = 3$, оно также равно числу $(\frac{1}{2})^{5/4} \pi^{1/2}$. Таким образом, мы показали, что неравенство (15) переходит в равенство в случае $n = 3$ при $v = v_0(r) = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{2z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Теперь установим это при $n = 2$ для функции $v = v_0(r) = -\text{kei}(r)$. Вычислим значение функционала $R_1(v)$ в случае $n = 2$ при $v = v_0(r) = -\text{kei}(r)$. Из соотношений

$$|v_0(r)| \leq \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{1 + \xi^4} = \frac{\pi}{4}, \quad |v_0(0)| \leq \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{1 + \xi^4} = \frac{\pi}{4}$$

следует, что $\|v_0\|_\infty = \pi/4$. Вычислим $\|v_0\|^2 + \|\Delta v_0\|^2 = \|\hat{v}_0\|^2 + \||\xi|^2 \hat{v}_0\|^2$. Фурье-образ $\hat{v}_0(|\xi|)$ функции $v_0(r) = -\text{kei}(r)$ при $n = 2$ есть функция $\hat{v}_0(\xi) = (1 + |\xi|^4)^{-1}$. Значит,

$$\|\hat{v}_0\|^2 + \||\xi|^2 \hat{v}_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi}{1 + |\xi|^4} = 2\pi \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{1 + \omega^4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Значит, значение функционала $R_1(v)$ при $v = v_0 = -\text{kei}(r)$ в случае $n = 2$ равно $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Значение константы $c_\infty \chi = \sqrt{\frac{\sigma_n \pi}{4 \sin(\theta \pi)}} (2\pi)^{-n/2}$ при $n = 2$ также равно $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Итак, мы показали, что неравенство (15) в случае $n = 2$ при $v = v_0(r) = -\text{kei}(r)$ переходит в равенство, тем самым установили, что константа $c_\infty \chi$ в (15) и при $n = 2$ является точной. Точность константы $c_\infty \chi$ в (15) как при $n = 2$, так и при $n = 3$ доказана. Из эквивалентности неравенств (14) и (15) следует точность константы в (14) при $n = 2, 3$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что при $n = 3$ фурье-образ функции $v_0(r) = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{2z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$, а при $n = 2$ функции $v_0(r) = -\text{kei}(r)$, $r = \sqrt{\sum_{i=1}^2 x_i^2}$, есть функция $\hat{v}_0(\xi) = (1 + |\xi|^4)^{-1}$, $|\xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}$. Известно (см., например, [20, с. 359]), что если функция $v(r)$ абсолютна интегрируема и для нее справедлива формула обращения преобразования Фурье, то ее преобразование Фурье есть

$$\hat{v}(|\xi|) = \frac{1}{|\xi|^v} \int_0^\infty J_v(|\xi|r) r^{n/2} v(r) dr,$$

где J_v – функция Бесселя порядка $v = (n - 2)/2$, и справедлива формула обращения

$$v(|r|) = \frac{1}{r^v} \int_0^\infty J_v(r\omega) \omega^{n/2} \hat{v}(\omega) d\omega.$$

Эти формулы называются *прямыми* и *обратными преобразованиями Ханкеля порядка n* . Пусть $n = 3$, $v(r) = v_0(r) = \sqrt{\pi} \exp(-z) \frac{\sin z}{2z}$, $z = \frac{r}{\sqrt{2}}$, и требуется найти $\hat{v}_0(|\xi|)$. Поскольку $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ (см., например, [20, с. 346]), то

для $\hat{v}_0(|\xi|)$ имеем

$$\begin{aligned}\hat{v}_0(|\xi|) &= \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \int_0^\infty J_{1/2}(|\xi|r) r^{3/2} v_0(r) dr = \frac{1}{\sqrt{|\xi|}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \times \frac{\sin \frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{r|\xi|}} \sin(|\xi|r) dr = \frac{\sqrt{2}}{|\xi|} \int_0^\infty e^{-\omega} \sin \omega \sin(\sqrt{2}|\xi|\omega) d\omega \\ &= \frac{\sqrt{2}}{|\xi|} \frac{|\xi|}{\sqrt{2}(1+|\xi|^4)} = \frac{1}{1+|\xi|^4}.\end{aligned}$$

Пусть $n = 2$, $v(r) = v_0(r) = -\text{kei}(r)$, требуется найти $\hat{v}_0(|\xi|)$. Имеем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}\hat{v}_0(|\xi|) &= \int_0^\infty J_0(|\xi|r) r v_0(r) dr = \int_0^\infty J_0(|\xi|r) r \left(\int_0^\infty \frac{J_0(tr)t}{1+t^4} dt \right) dr \\ &= \int_0^\infty J_0(|\xi|r) r \left(r^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\omega)\omega}{r^4 + \omega^4} d\omega \right) dr = \int_0^\infty J_0(\omega) \text{ker}(|\xi|\omega) d\omega,\end{aligned}$$

где

$$\text{ker}(|\xi|\omega) = \int_0^\infty \frac{J_0(|\xi|r)r^3}{r^4 + \omega^4} dr$$

(см. [21, с. 692]), $\text{ker}(x)$ – функция Томсона. Поскольку справедливо функциональное соотношение (см. [21, с. 999])

$$\text{ker}(x) = \frac{K_0(x\sqrt{i}) + K_0(x\sqrt{-i})}{2},$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя нулевого порядка), то для $\hat{v}_0(|\xi|)$ имеем следующее представление:

$$\hat{v}_0(|\xi|) = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \omega J_0(\omega) K_0(|\xi|\sqrt{i}\omega) d\omega + \int_0^\infty \omega J_0(\omega) K_0(|\xi|\sqrt{-i}\omega) d\omega \right],$$

в котором учтем (см. [21, с. 686]), что

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \omega J_0(\omega) K_0(|\xi|\sqrt{i}\omega) d\omega &= \frac{1}{1+i|\xi|^2}, \\ \int_0^\infty \omega J_0(\omega) K_0(|\xi|\sqrt{-i}\omega) d\omega &= \frac{1}{1-i|\xi|^2}.\end{aligned}$$

В результате для $\hat{v}_0(|\xi|)$ получаем

$$\hat{v}_0(|\xi|) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-i|\xi|^2} + \frac{1}{1+i|\xi|^2} \right) = \frac{1}{1+|\xi|^4},$$

что и требовалось показать. Теорема полностью доказана.

§ 3. Об оценке сверху для $t_{\max}$: критический случай

В настоящем параграфе покажем, что при $\rho = 4/n$ для определенных начальных данных u_0 решение задачи (1), (2) разрушается через конечное время $t_{\max}$, для которого приведем оценку сверху. С этой целью определим следующие множества неустойчивости:

$$M_1 = \{v \mid v \in W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n), J(v) < 0\}, \quad (21)$$

$$M_2 = \{v \mid v \in W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n), J(v) = 0, Q(v) < 0\}, \quad (22)$$

$$M_3 = \{v \mid v \in W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n), J(v) > 0, Q(v) < 0, Q^2(v) \geq J(v)\varphi_0(v)\}, \quad (23)$$

где $J(v) = \|\nabla v\|^2 - \frac{2}{\rho+2}\|v\|_{\rho+2}^{\rho+2}$, $\rho = \frac{4}{n}$, $n = 2, 3$, $Q(v) = \text{Im} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} r v \, dx \right]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть M_1, M_2, M_3 – множества функций из пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)$, определенные соответственно соотношениями (21), (22), (23). Далее предположим, что $u_0 \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Тогда решение задачи (1), (2) из класса $C([0, T], W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n))$ разрушается через конечное время $T = t_{\max}$, для которого справедлива оценка сверху $t_{\max} \leq t^*$, где t^* определяется по следующей формуле:

$$t^* = \begin{cases} -\frac{1}{2E_0}(\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 - E_0\varphi_0}) & \text{при } u_0 \in M_1 \cup M_3, \\ -\frac{\varphi_0}{4\mu_0} & \text{при } u_0 \in M_2. \end{cases} \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_0 \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Тогда непосредственное вычисление показывает, что квадратный трехчлен $4E_0t^2 + 4\mu_0t + \varphi_0$ равен нулю в точке $t = t^*$, определенной соответственно формулой (24). Далее, в силу интерполяционного неравенства $\|v\| \leq \text{const} \|\nabla v\|^{1/2} \|rv\|^{1/2}$, справедливого при любом $v \in W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)$, для решения $u(x, t)$ с учетом (3) заключаем, что справедлива оценка снизу $\|\nabla u(t)\| \geq \text{const} / \sqrt{\varphi(t)}$, которая показывает, что $\|\nabla u(\cdot, t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_-^*$. Следовательно, локальное решение не может быть продолжено до бесконечности, т.е. $t_{\max}$ конечно и оценивается сверху числом t^* , которое определяется формулой (24) и зависит от начальной функции u_0 . Утверждение доказано.

§ 4. Об оценке снизу для $t_{\max}$: критический случай

Сначала рассмотрим случай $E_0 \leq 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $n = 2, 3$, $\rho = 4/n$, $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ и, кроме того, u_0 – начальная функция такая, что $E_0 \leq 0$. Тогда для максимального решения задачи (1), (2) из класса $C([0, t_{\max}], W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1([0, t_{\max}], L_2(\mathbb{R}^n)))$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ справедлива следующая оценка:

$$\|\Delta u(\cdot, t)\| \leq \Phi\left(\frac{c_1}{2}\right) \left\| \frac{\partial u(\cdot, t)}{\partial t} \right\|, \quad (25)$$

где

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{\omega^2 + 1} - \omega)^2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\rho + 2}{\rho}} c_\infty^{\rho/2} \|u_0\|^{2/n}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (4), (5) следует равенство

$$B(t) = \frac{\rho + 2}{\rho} E_0 + \frac{\rho + 2}{\rho} \operatorname{Re} \left[i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx \right],$$

отсюда, применяя ко второму слагаемому неравенство Коши–Буняковского–Шварца для интегралов и учитывая энергетическое соотношение (3), имеем

$$B(t) \leq \frac{\rho + 2}{\rho} E_0 + \frac{\rho + 2}{\rho} \|u_0\| \left\| \frac{\partial u(\cdot, t)}{\partial t} \right\|. \quad (27)$$

Из уравнения (1) определим $\Delta u = iu_t - |u|^\rho u$, отсюда в силу неравенства треугольника для норм следует

$$\|\Delta u(\cdot, t)\| \leq \|u_t(\cdot, t)\| + \||u|^\rho u\| \leq \|u_t(\cdot, t)\| + \|u(\cdot, t)\|_\infty^{\rho/2} \sqrt{B(t)}. \quad (28)$$

Из (27) при $E_0 \leq 0$ имеем

$$\sqrt{B(t)} \leq \sqrt{\frac{\rho + 2}{\rho} \|u_0\|} \sqrt{\|u_t(\cdot, t)\|}.$$

В силу неравенства (14) с учетом (3) получаем

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty^{\rho/2} \leq c_\infty^{\rho/2} \|u(\cdot, t)\|^{(1-\theta)\rho/2} \|\Delta u(\cdot, t)\|^{\theta\rho/2} = c_\infty^{\rho/2} \|u_0\|^{(1-\theta)\rho/2} \sqrt{\|\Delta u(\cdot, t)\|}.$$

Учитывая эти оценки в (28), получаем следующее соотношение:

$$\|\Delta u(\cdot, t)\| \leq \|u_t(\cdot, t)\| + c_1 \sqrt{\|\Delta u(\cdot, t)\|} \sqrt{\|u_t(\cdot, t)\|}, \quad (29)$$

где $c_1 = \sqrt{(\rho + 2)/\rho} c_\infty^{\rho/2} \|u_0\|^{2/n}$.

Перепишем второе слагаемое правой части в (29) в виде $c_1 \sqrt{\|\Delta u\|} \sqrt{\|u_t\|} = c_1 \sqrt{\varepsilon \|\Delta u\|} \sqrt{\|u_t\|/\varepsilon}$, где ε – некоторый положительный параметр, который будет выбран далее. В силу элементарного неравенства для арифметического и геометрического средних имеем

$$c_1 \sqrt{\|\Delta u\|} \sqrt{\|u_t\|} \leq \frac{c_1}{2} \varepsilon \|\Delta u\| + \frac{c_1}{2\varepsilon} \|u_t\|.$$

Учитывая это неравенство в (29), при $0 < \varepsilon < 1/c_2$, $c_2 = c_1/2$ определим $\|\Delta u\|$. Имеем

$$\|\Delta u(\cdot, t)\| \leq \frac{\varepsilon + c_2}{\varepsilon(1 - \varepsilon c_2)} \|u_t(\cdot, t)\|. \quad (30)$$

Функция $\Phi(\varepsilon) = (\varepsilon + c_2)/[\varepsilon(1 - \varepsilon c_2)]$, $0 < \varepsilon < 1/c_2$, при $\varepsilon = \varepsilon_0 = \sqrt{c_2^2 + 1} - c_2$ имеет минимум, равный $\Phi(\varepsilon_0) = (\sqrt{c_2^2 + 1} - c_2)^{-2}$. Таким образом, выбирая $\varepsilon = \varepsilon_0$ в (30), приходим к неравенству (25) с константой (26). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\rho \in [1, \infty)$ при $n = 2$, $\rho \in [1, 4)$ при $n = 3$, и пусть $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда максимальное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C([0, t_{\max}), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}), L_2(\mathbb{R}^n))$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx = \rho \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \sin[2(\theta_1 - \theta_2)] dx; \quad (31)$$

здесь

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, & \cos \theta_2 &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \right)^2} \right)^{-1}, \\ \sin \theta_1 &= \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, & \sin \theta_2 &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} \right)^2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $\sigma_1(x, t) = \operatorname{Re} u(x, t)$, $\sigma_2(x, t) = \operatorname{Im} u(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя уравнение (1) по t , получим

$$i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (|u|^\rho u).$$

Умножим полученное уравнение на $\bar{u}_t$, а далее, интегрируя его по x и применяя первую формулу Грина, выделим мнимые части от левой и правой сторон полученного равенства. В итоге получаем следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx = 2 \operatorname{Im} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (|u|^\rho u) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx \right]. \quad (32)$$

Теперь непосредственно убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{\partial}{\partial t} (|u|^\rho u) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right] &= \frac{\rho}{2} |u|^{\rho-2} \operatorname{Im} \left[\left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{\rho}{2} |u|^{\rho-2} \left(\delta_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \delta_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right) \\ &\times \left(\delta_2 \frac{\partial \delta_1}{\partial t} - \delta_1 \frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right) = \rho |u|^{\rho-2} (\delta_1^2 + \delta_2^2) \left(\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right)^2 \right) \\ &\times \left[\frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right)^2}} + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \frac{\frac{\partial \delta_2}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right)^2}} \right] \\ &\times \left[\frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right)^2}} - \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \frac{\frac{\partial \delta_2}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_2}{\partial t} \right)^2}} \right] \\ &= \rho |u|^\rho |u_t|^2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \frac{\rho}{2} |u|^\rho |u_t|^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2). \end{aligned}$$

Итак, установили, что справедливо п.в. по $t \in [0, t_{\max})$ соотношение

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\partial}{\partial t} (|u|^\rho u) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{2} |u|^\rho |u_t|^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2).$$

Подставляя его в (32), получим равенство (31), этим завершается доказательство леммы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для максимального решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C([0, t_{\max}), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}), L_2(\mathbb{R}^n))$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ справедливо следующее нелинейное дифференциальное неравенство:

$$\frac{dy}{dt} \leq c_* y^{1+\alpha}, \quad (33)$$

где $y(t) = \|u_t\|^2$, $\alpha = 1/2$,

$$c_* = \rho c_\infty^\rho \|u_0\|^{(4-n)/n} \Phi\left(\frac{c_1}{2}\right). \quad (34)$$

Следовательно, для $y(t)$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ справедлива оценка

$$y(t) \leq \frac{y_0}{(1 - t/T_0)^2}; \quad (35)$$

здесь

$$T_0 = \frac{2}{c_* \sqrt{y_0}}, \quad (36)$$

где

$$y_0 = \|\Delta u_0 + |u_0|^\rho u_0\|^2. \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (31) заключаем, что справедливо дифференциальное неравенство $\frac{dy}{dt} \leq \rho \|u(\cdot, t)\|_\infty^\rho y(t)$, откуда в силу интерполяционного неравенства (14) с учетом инварианта (3) и неравенства (25) с константой (26) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\leq \rho c_\infty^\rho \|u(\cdot, t)\|^{\rho(1-\theta)} \|\Delta u\|^\theta y = \rho c_\infty^\rho \|u_0\|^{\rho(1-\theta)} \|\Delta u\| y \\ &\leq \rho c_\infty^\rho \|u_0\|^{\rho(1-\theta)} \Phi\left(\frac{c_1}{2}\right) y^{1+\alpha} = c_* y^{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

которая доказывает справедливость (33) с постоянной c_* , определенной формулой (34). Разделяя переменные из (33), получим (35)–(37). Утверждение доказано.

Как известно, пространство $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, где $l \geq 0$ целое, $p \geq 1$ любое, есть пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} |D^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ D^\alpha v &= \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Пусть $\hat{v}(\xi)$ – фурье-образ функции $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда, как известно (см., например, [22, с. 347]), приведенная выше норма эквивалента норме

$$\|v\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |\xi|^2)^{l/2} \hat{v}(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p}.$$

При $p = 2$, $l = 2$ имеем

$$\|v\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi < 2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^4) |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = 2(\|v\|^2 + \|\Delta v\|^2);$$

здесь неравенство выполнено в силу элементарного неравенства $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, а последнее равенство – в силу равенства Планшереля. Отсюда

$$\|v\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)} < \sqrt{2}(\|v\| + \|\Delta v\|)$$

в силу элементарного неравенства $\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a > 0$, $b > 0$. На основании последнего неравенства из утверждения 2 в силу оценки (30) для $\|\Delta u\|$ с учетом (3) имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть T_0 определено по формуле (36), в которой y_0 задано формулой (37), c_* – формулой (34). Тогда задача (1), (2) имеет на интервале $[0, T_0)$ локальное решение $u(x, t)$ из класса $C([0, T_0), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_0), L_2(\mathbb{R}^n))$.

Теперь рассмотрим случай $E_0 > 0$.

ЛЕММА 5. Пусть $n = 2, 3$, $\rho = 4/n$, $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$ и, кроме того, u_0 – начальная функция такая, что $E_0 > 0$. Тогда для максимального решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C([0, t_{\max}), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}), L_2(\mathbb{R}^n))$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ справедлива оценка

$$\|\Delta u(\cdot, t)\| \leq p_0 + q_0 \|u_t(\cdot, t)\|; \quad (38)$$

здесь $p_0 = \frac{\lambda_1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$, $q_0 = \frac{\varepsilon + \lambda_2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon < 1$, параметр ε будет выбран ниже,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{k_1^2 k_3^2}{2}, & \lambda_2 &= \frac{k_2^2 k_3^2}{2}, & k_1 &= \sqrt{\frac{\rho + 2}{\rho}} E_0, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{\rho + 2}{\rho}} \|u_0\|, & k_3 &= c_\infty^{\rho/2} \|u_0\|^{(4-n)/(2n)}. \end{aligned} \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (28) в силу (27) при $E_0 > 0$ и интерполяционного неравенства (14) с учетом инварианта (3) при $\rho n = 4$ получаем неравенство

$$\|\Delta u\| \leq \|u_t\| + k_1 k_3 \sqrt{\|\Delta u\|} + k_2 k_3 \sqrt{\|\Delta u\|} \sqrt{\|u_t\|}. \quad (40)$$

Перепишем неравенство (40) в следующем виде:

$$\|\Delta u\| \leq \|u_t\| + \frac{k_1 k_3}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon \|\Delta u\|} + \sqrt{\frac{k_2^2 k_3^2 \|u_t\|}{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon \|\Delta u\|},$$

где ε – некоторый положительный параметр, который будет выбран ниже. Далее применим ко второму и третьему слагаемым правой части этого неравенства элементарное неравенство для геометрического и арифметического средних и найдем из него $\|\Delta u\|$ при $0 < \varepsilon < 1$, в результате получим (38), (39). Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда максимальное решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C([0, t_{\max}), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}), L_2(\mathbb{R}^n))$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному неравенству

$$\frac{dy}{dt} \leq \omega_1 y + \omega_2 y^{1+\alpha}, \quad (41)$$

где $y(t) = \|u_t\|^2$, $\alpha = 1/2$,

$$\omega_1 = \rho k_3^2 p_0, \quad \omega_2 = \rho k_3^2 q_0. \quad (42)$$

Следовательно, при любом $t \in [0, t_{\max})$ для $y(t)$ справедлива оценка

$$y(t) \leq \frac{y_0 e^{\omega_1 t}}{\left[1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{y_0} (e^{0.5\omega_1 t} - 1)\right]^2}, \quad (43)$$

где y_0 определяется по формуле (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (31) в силу интерполяционного неравенства (14) с учетом инварианта (3) и оценки (38) для $\|\Delta u\|$ при $\rho n = 4$, $n = 2, 3$ имеем

$$\frac{dy}{dt} \leq \rho c_\infty^\rho \|u\|^{\rho(1-\theta)} \|\Delta u\|^{\theta\rho} y \leq \rho c_\infty^\rho \|u_0\|^{\rho(1-\theta)} (p_0 + q_0 y^{1/2}) y = \omega_1 y + \omega_2 y^{1+\alpha},$$

что и требовалось доказать. Далее, разделяя переменные из (41), получим оценку (43). Утверждение доказано.

Из (43) в силу оценки (38) для $\|\Delta u\|$ с учетом (3) заключаем, что задача (1), (2) при $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$, $E_0 > 0$, $\rho n = 4$, $n = 2, 3$ имеет решение на интервале $[0, T_1)$, где

$$T_1 = \frac{2 \ln \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2 \sqrt{y_0}}\right)}{\omega_1} \quad (44)$$

из класса $C([0, T_1), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_1), L_2(\mathbb{R}^n))$. Учитывая (44) и (42) для T_1 при любом $\varepsilon \in (0, 1)$, получаем выражение

$$T_1 = T_1(\varepsilon) = \frac{2(\varepsilon - \varepsilon^2)}{\rho k_3^2 \lambda_1} \ln \left[1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{y_0} (\varepsilon + \lambda_2)}\right],$$

которое имеет максимальное значение $T_1(\varepsilon_0)$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$, где ε_0 является единственным корнем на отрезке $[0, 0.5]$ следующего трансцендентного уравнения:

$$(1 - 2\varepsilon) \ln \left[1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{y_0} (\varepsilon + \lambda_2)}\right] = \frac{\lambda_1 (\varepsilon - \varepsilon^2)}{\sqrt{y_0} [(\varepsilon + \lambda_2)^2 + \lambda_1 (\varepsilon + \lambda_2)]}. \quad (45)$$

Для $T_1(\varepsilon_0)$ справедлива оценка снизу:

$$T_1(\varepsilon_0) = \frac{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2)}{\rho k_3^2 \lambda_1} \ln \left[1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{y_0}(\varepsilon_0 + \lambda_2)} \right] > \frac{1}{2\rho k_3^2 \lambda_1} \ln \left[1 + \frac{\lambda_1}{\sqrt{y_0}(0.5 + \lambda_2)} \right]. \quad (46)$$

Следовательно, из утверждения 3 в силу оценки (38) для $\|\Delta u\|$ с учетом (3) и неравенства $\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)} \leq \text{const}(\|u\| + \|\Delta u\|)$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 5. Пусть $T_1(\varepsilon_0)$ определено формулой (46), где ε_0 – единственный корень на отрезке $[0, 0.5]$ уравнения (45), $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2, k_3$ вычисляются по формулам (39). Тогда задача (1), (2) имеет на интервале $[0, T_1(\varepsilon_0))$ локальное решение $u(x, t)$ из класса $C([0, T_1(\varepsilon_0)), W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_1(\varepsilon_0)), L_2(\mathbb{R}^n))$.

Таким образом, установлена следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n = 2, 3$, $\rho n = 4$, $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)$. Пусть M_1, M_2, M_3 – множества неустойчивости, определенные соответственно соотношениями (21), (22), (23). Далее предположим, что $u_0 \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Тогда решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C([0, T), W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T), L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n))$ разрушается через конечное время $T = t_{\max}$, для которого справедливы следующие оценки сверху и снизу:

$$t_* \leq t_{\max} \leq t^*.$$

Здесь t^* определяется формулой (24); $t_* = T_0$ при $u_0 \in M_1 \cup M_2$, где T_0 вычисляется по формуле (36), в которой c_* определена формулой (34), y_0 – формулой (37); $t_* = T_1(\varepsilon_0)$ при $u_0 \in M_3$, где $T_1(\varepsilon_0)$ определяется по формуле (46), в которой ε_0 из уравнения (45), $\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2, k_3$ – из (39).

§ 5. Сверхкритический случай

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о разрушении решений задачи (1), (2) в сверхкритическом случае, т. е. при $\rho > 4/n$. Утверждение 1 остается в силе и при сверхкритическом значении параметра ρ . Вопрос об оценке снизу для $t_{\max}$ в этом случае решается в теореме 3, к изложению и доказательству которой переходим.

Пусть $V(\mathbb{R}^n)$ – подпространство пространства $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, состоящее из положительных, радиально-симметричных ($n \geq 2$) и монотонно убывающих функций.

Пусть $\psi_0(r) \in C^2[0, \infty) \cap V(\mathbb{R}^n)$ – решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\psi_0}{dr} - \psi_0 + \psi_0^{\rho+1} &= 0, \\ \frac{d\psi_0}{dr} \Big|_{r=0} &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_0(r) = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

с минимальной нормой $\|\psi_0\|$ (основное состояние задачи (47)).

Проблема единственности основного состояния задачи (47) при $n \geq 2$ полностью (т. е. при всех допустимых значениях ρ) решена в [23] (частично, т. е. при некоторых значениях ρ , – в [24]) и др.

Далее нам понадобятся следующие два предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ψ_0 – основное состояние задачи (47) для любого $v(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда для всех допустимых значений ρ справедливо следующее интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга–Соболева:

$$\|v\|_{\rho+2} \leq \eta_0 \|\nabla v\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha}, \quad (48)$$

где $\alpha = \frac{\rho n}{2(\rho+2)}$, $\rho \in (0, \infty)$ при $n = 1, 2$, $\rho \in (0, \frac{4}{n-2})$ при $n \geq 3$ и $\eta_0 = \frac{1}{\chi_0} \left(\frac{1-\alpha}{\|\psi_0\|^2} \right)^{\alpha/n}$, $\chi_0 = \sqrt{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$. Константа η_0 в (48) является точной, т. е. знак равенства в (48) достигается при $v = \psi_0(r)$.

Значение оптимальной константы η_0 в (48) найдено в работах [4], [25], [26], при $n = 1$ она вычисляется точно (см. [4], [27], [28]). Некоторые полезные оценки сверху для η_0 предложены в работах [4], [26] [29].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $v(x)$ – любая функция, определенная в $\mathbb{R}^n$ и такая, что $v(x) \not\equiv \text{const}$ и норма $\|Dv\|_p$, $1 \leq p < n$, существует. Тогда справедливо неравенство Соболева

$$\|v\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \omega_0 \|Dv\|_p, \quad (49)$$

где

$$\omega_0 = \omega_0(n, p) = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left[\frac{n! \Gamma(\frac{n}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{p}) \Gamma(n+1-\frac{n}{p})} \right]^{1/n} \left[\frac{n(p-1)}{n-p} \right]^{(p-1)/p}$$

при $1 < p < n$ и $\omega_0 = n \left[\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/p)} \right]^{\frac{1}{n}}$ при $p = 1$, $n \geq 2$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Более того, константа ω_0 в (49) является точной: неравенство (49) переходит в равенство при $v = v_0(r) = (a + br^{p/(p-1)})^{1-n/p}$, $a > 0$, $b > 0$.

Значение оптимальной константы ω_0 в (49) найдено в работах Т. Абина, Г. Таленти, Е. Х. Либа и других (см. соответствующие ссылки в [27], [30]).

Для удобства изложения примем следующие обозначения:

$$m_1 = \frac{\rho+2}{\rho} E_0, \quad m_2 = \frac{2}{\rho} \|u_0\|, \quad m_3 = \eta_0^{\rho+1} \|u_0\|^{(1-\alpha)(\rho+1)}$$

при $n = 2$ для любого $\rho \in [2, \infty)$ и при $n = 3$ для $\rho \in [\frac{4}{3}, 2)$; при $n = 3$ и $\rho = 2$ положим $m_3 = \omega_0^3$, где $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2/3}$; далее, положим $m_4 = C_\infty^\rho \|u_0\|^{(1-\frac{n}{4})\rho}$, $y_0 = \|\Delta u_0 + |u_0|^\rho u_0\|^2$, $\mu = \frac{\rho n}{4}$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$. Пусть $\rho \in [2, \infty)$ при $n = 2$, $\rho \in [\frac{4}{3}, 2]$ при $n = 3$. Далее, пусть $m_1, m_2, m_3, m_4, y_0, \mu$ – числа, определенные выше. Тогда задача (1), (2) на $[0, T_0]$ имеет локальное решение из

класса $C([0, T_0], W_2^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T_0], L_2(\mathbb{R}^n))$, где T_0 определяется следующим образом:

1) при $\mu = 1$, $E_0 \leq 0$

$$T_0 = \frac{1}{\theta \omega_2 y_0^\theta},$$

где $\theta = 1/2$, $\omega_2 = \rho m_4(1 + m_2 m_3)$;

2) при $\mu = 1$, $E_0 > 0$

$$T_0 = \frac{\ln(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2 y_0^\theta})}{\omega_1 \theta}, \quad (50)$$

где $\theta = 1/2$, $\omega_1 = \rho m_1 m_3 m_4$, $\omega_2 = \rho m_4(1 + m_2 m_3)$;

3) при $\mu > 1$, $E_0 \leq 0$ число T_0 определяется формулой (50), где

$$\omega_1 = 2^{\mu-1} \rho m_4 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^\mu, \quad \omega_2 = 2^{\mu-1} \rho m_4 \left(\frac{1}{\mu} + m_2^\mu m_3\right)^\mu, \quad \theta = \frac{\mu^2}{2};$$

4) при $\mu > 1$, $E_0 > 0$ число T_0 определяется формулой (50), где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2^{\mu-1} \rho m_4 p_0^\mu, & \omega_2 &= 2^{\mu-1} \rho m_4 q_0^\mu, & p_0 &= 1 - \frac{1}{\mu} + 2^{\mu-1} m_1^\mu m_3, \\ q_0 &= \frac{1}{\mu} + 2^{\mu-1} m_2^\mu m_3, & \theta &= \frac{\mu^2}{2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лишь утверждение 4), так как доказательство других случаев проводится аналогично. Итак, пусть $\mu > 1$ и начальная функция u_0 такая, что $E_0 > 0$.

Согласно соотношениям (4), (5) при любом $t \in [0, t_{\max})$ для $A(t)$ имеем равенство

$$A(t) = \frac{\rho + 2}{\rho} E_0 + \frac{2}{\rho} \operatorname{Re} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx \right],$$

из которого следует неравенство

$$A(t) \leq m_1 + m_2 \|u_t\|. \quad (51)$$

Из уравнения (1) для Δu сначала в силу неравенства треугольника для норм, а затем благодаря неравенству (48) с учетом (3) и неравенству (49) при $n = 3$, $p = 2$ получаем оценку

$$\|\Delta u\| \leq \|u_t\| + m_3 A^\mu(t),$$

в которой, учитывая (51), на основании элементарного неравенства $(a + b)^\mu \leq 2^{\mu-1}(a^\mu + b^\mu)$, $\mu > 1$, $a > 0$, $b > 0$, имеем

$$\|\Delta u\| \leq 2^{\mu-1} m_1^\mu m_3 + \|u_t\| + 2^{\mu-1} m_2^\mu m_3 \|u_t\|^\mu.$$

Подставляя в это соотношение оценку $\|u_t\| \leq \frac{1}{\mu} \|u_t\|^\mu + 1 - \frac{1}{\mu}$, $\mu > 1$, окончательно имеем

$$\|\Delta u\| \leq p_0 + q_0 \|u_t\|^\mu, \quad (52)$$

где p_0 , q_0 определены в п. 4) теоремы.

Далее в силу неравенства (14) согласно оценке (52) на основании элементарного неравенства $(a + b)^\mu \leq 2^{\mu-1}(a^\mu + b^\mu)$, $\mu > 1$, $a > 0$, $b > 0$, заключаем, что для $\|u\|_\infty^\rho$ справедлива оценка

$$\|u\|_\infty^\rho \leq 2^{\mu-1} m_4 (p_0^\mu + q_0^\mu \|u_t\|^\mu).$$

Из соотношения (31) в силу этой оценки для $y(t) = \|u_t\|^2$ при любом $t \in [0, t_{\max})$ имеем нелинейное дифференциальное неравенство

$$\frac{dy}{dt} \leq \omega_1 y + \omega_2 y^{1+\theta},$$

где ω_1 , ω_2 , θ определены в п. 4) теоремы, которое приводит нас к утверждению 4). Теорема доказана.

§ 6. Численный эксперимент

В этом параграфе мы будем проводить численный эксперимент. Начальную функцию u_0 выберем в виде гауссова пучка, т. е. $u_0 = ae^{-br^2}$, $r = |x|$, найдем точные значения t_* и t^* в зависимости от параметров a и b в случае, когда $\rho = 2$, $n = 2$ в уравнении (1). Случай $\rho = 2$, $n = 2$ для приложений является наиболее важным и нужным. Поскольку начальная функция u_0 не зависит от угла φ в полярной системе координат, то исходную задачу рассмотрим в следующем виде:

$$\begin{aligned} iu_t &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + |u|^2 u, & 0 < r < \infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0 = ae^{-br^2}, & a > 0, \quad b > 0, \end{aligned}$$

и проведем численный анализ полученных результатов согласно вышеизложенной теории.

Сначала найдем t^* из уравнения $0 = \varphi(t^*) = 4E_0(t^*)^2 + \varphi_0$, предполагая, что E_0 отрицательное. Имеем $t^* = \sqrt{\frac{-\varphi_0}{-4E_0}}$.

Вычислим $\varphi_0 = 2\pi \int_0^\infty r^2 u_0^2 r dr$, $E_0 = A(u_0) - \frac{1}{2}B(u_0)$.

Имеем $A(u_0) = \pi a^2$, $B(u_0) = \frac{\pi a^4}{8b}$, $\varphi_0 = \frac{\pi a^2}{8b^2}$, $E_0 = \pi a^2 - \frac{\pi a^4}{16b}$. В результате для t^* имеем

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{2b(a^2 - 8b)}} \quad \text{при } a^2 > 8b. \quad (53)$$

Согласно нашим оценкам величина t_* вычисляется по следующим формулам:

$$t_* = \frac{2}{c_* \sqrt{y_0}}, \quad y_0 = \|\Delta u_0 + u_0^3\|^2, \quad c_* = \rho c_\infty^2 \|u_0\|^{(4-n)/n} \Phi\left(\frac{c_1}{2}\right).$$

Здесь

$$\Phi(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} - \frac{1}{\omega} \right)^2, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\rho+2}{2}} c_\infty^{\rho/2} \|u_0\|^{2/n}.$$

В этих формулах следует положить $\rho = 2$, $n = 2$, $c_\infty = 1/2$. Вычислим y_0 и c_* . Значение y_0 представляется в виде суммы трех слагаемых: $y_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$,

где $\gamma_1 = \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u_0)^2 dx$, $\gamma_2 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta u_0)^3 dx$, $\gamma_3 = \int_{\mathbb{R}^2} u_0^6 dx$. Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= u_0'' + \frac{1}{r} u_0' = 4a(b^2 r^2 - b)e^{-br^2}, \\ \gamma_1 &= 16a^2 b^4 \delta_1 - 32a^2 b^2 \delta_2 + 16a^2 b^2 \delta_3, \quad \delta_1 = 2\pi \int_0^\infty e^{-2br^2} r^5 dr, \\ \delta_2 &= 2\pi \int_0^\infty e^{-2br^2} r^3 dr, \quad \delta_3 = 2\pi \int_0^\infty e^{-2br^2} r dr.\end{aligned}$$

При вычислении δ_1 , δ_2 , δ_3 воспользуемся формулой

$$\int_0^\infty x^{2k+1} e^{-\rho x^2} dx = \frac{k!}{2\rho^{k+1}}, \quad \rho > 0$$

(см. [21, с. 35]). Тогда имеем $\gamma_1 = 4\pi a^2 b$, а γ_2 представляется в следующем виде:

$$\gamma_2 = 16\pi a^4 b^2 m_1 - 16\pi a^4 b m_2, \quad m_1 = \int_0^\infty e^{-4br^2} r^3 dr, \quad m_2 = \int_0^\infty e^{-4br^2} r dr.$$

Аналогично γ_1 , имеем $\gamma_2 = -\frac{3\pi a^4}{2}$ и $\gamma_3 = -\frac{\pi a^6}{6b}$. Окончательно для y_0 имеем следующую формулу:

$$y_0 = \frac{\pi a^2 (24b^2 - 9ba^2 + a^4)}{6b}. \quad (54)$$

Прямое вычисление c_* дает

$$c_* = \frac{2a\sqrt{2\pi b}}{\pi a^2 + 8b - a\sqrt{\pi^2 a^2 + 16\pi b}}.$$

В итоге для t^* получаем формулу

$$t_* = \frac{(\pi a^2 + 8b - a\sqrt{\pi^2 a^2 + 16\pi b})\sqrt{3}}{\pi a^2 \sqrt{24b^2 - 9a^2 b} + a^4}. \quad (55)$$

Отметим, что для вычисления нижней границы $t_{\max}$ можно воспользоваться одним красивым результатом из работы [31]:

$$\|u\|_6 \leq A_D \|\nabla u\|^{1/3} \|u\|_4^{2/3}; \quad (56)$$

здесь $A_D = 1/\pi^{1/6}$, притом константа A_D точная. Из формулы (31) имеем

$$\frac{dy}{dt} \leq 2\|u\|_\infty^2 y, \quad \|u_t\| = y.$$

Далее, из формул (14) при $n = 2$ следует, что

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\Delta u\|^{1/2} \|u\|^{1/2} = \frac{1}{2} \|\Delta u\|^{1/2} \|u_0\|^{1/2}.$$

Из двух последних неравенств получаем

$$\frac{dy}{dt} \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \|\Delta u\| y. \quad (57)$$

Теперь, определяя Δu из уравнения (1), в силу формулы треугольника для норм имеем

$$\|\Delta u\| = \|iu_t - |u|^2 u\| \leq \|u_t\| + \| |u|^3 \|_2 = \|u_t\| + \|u\|_6^3 \leq \|u_t\| + A_D^3 \|\nabla u\| \|u\|_4^2; \quad (58)$$

здесь второе равенство выполнено в силу формулы (56). С другой стороны, согласно формулам (4) и (5) для A и B_4 в случае $E_0 \leq 0$ имеем $A \leq \|u_0\| \|u_t\|$, $B_4 \leq 2\|u_0\| \|u_t\|$. Учитывая эти соотношения в (58), получаем неравенство

$$\|\Delta u\| \leq \|u_t\| + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|u_0\| \|u_t\| = \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{2}\|u_0\|}{\sqrt{\pi}} \|u_t\|,$$

из которого в силу (57) следует

$$\frac{dy}{dt} \leq \frac{\|u_0\|(\sqrt{\pi} + \sqrt{2}\|u_0\|)}{2\sqrt{\pi}} y^{3/2}.$$

Отсюда для оценки снизу $t_{\max}$ выводим вторую формулу:

$$t_{**} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\|u_0\|(\sqrt{\pi} + \sqrt{2}\|u_0\|)} \frac{1}{\sqrt{y_0}},$$

где $\|u_0\| = \frac{\sqrt{\pi}a}{\sqrt{2}\sqrt{b}}$, а y_0 уже вычислена (см. (54)). Для t_{**} окончательно имеем

$$t_{**} = \frac{8b\sqrt{3b}}{\pi a^2(a + \sqrt{b})(\sqrt{24b^2 - 9a^2b} + a^4)}. \quad (59)$$

В табл. 1 и табл. 2 приведены численные результаты.

ТАБЛИЦА 1

b	a	I_0	E_0	t_*	t_{**}	t^*
0.5	2.25	15.9043	-4.2246	0.0149	0.0350	0.9701
0.5	2.50	19.6350	-11.0447	0.0073	0.0189	0.6667
0.5	2.75	23.7584	-21.1598	0.0039	0.0110	0.5298
0.5	3.00	28.2744	-35.3430	0.0022	0.0069	0.4472
0.5	3.25	33.1831	-54.4411	0.0013	0.0045	0.3904
0.5	3.50	38.4846	-79.3745	0.0008	0.0030	0.3482
0.5	3.75	44.1788	-111.1372	0.0006	0.0021	0.3152
0.5	4.00	50.2656	-150.7968	0.0004	0.0015	0.2887
0.5	4.25	56.7452	-199.4947	0.0003	0.0011	0.2667
0.5	4.50	63.6174	-258.4457	0.0002	0.0008	0.2481

ПРИМЕЧАНИЕ 1. При использовании некоторых идей и подходов из [32] в работе [4] доказано, что задача (1), (2) разрешима в целом, в классе функций $C^0([0, T]; W_2^1(\mathbb{R}^n))$, для любого $T > 0$ при $\rho \in (0, \frac{4}{n})$ и для любого $u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$. В случае $\rho \in [\frac{4}{n}, \rho_0)$, где $\rho_0 = +\infty$ при $n = 1, 2$ и $\rho_0 \in \frac{4}{n-2}$ при $n \geq 3$, глобальная разрешимость имеет место для некоторых начальных данных $u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, в этом же случае доказано, что решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из класса $C^0([0, t_{\max}); W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n))$ разрушается через конечное время $t_{\max}$ при некоторых начальных данных $u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)$.

В настоящей работе основным результатом является получение оценки снизу для времени разрушения $t_{\max}$ решения $u(x, t)$ задачи (1), (2) в классе функций $C^0([0, t_{\max}); W_2^2(\mathbb{R}^n) \cap L_w(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, t_{\max}); L_2(\mathbb{R}^n))$.

ТАБЛИЦА 2

b	a	I_0	E_0	t_*	t_{**}	t^*
2.0	4.25	14.1863	-7.3148	0.0055	0.0124	0.3482
2.0	4.50	15.9043	-16.8984	0.0037	0.0088	0.2425
2.0	4.75	17.7206	-29.0728	0.0026	0.0064	0.1952
2.0	5.00	19.6350	-44.1787	0.0018	0.0047	0.1667
2.0	5.25	21.6476	-62.5751	0.0013	0.0036	0.1470
2.0	5.50	23.7584	-84.6391	0.0010	0.0028	0.1325
2.0	5.75	25.9673	-110.7667	0.0007	0.0022	0.1210
2.0	6.00	28.2744	-141.3720	0.0006	0.0017	0.1118
2.0	6.25	30.6797	-176.8876	0.0004	0.0014	0.1041
2.0	6.50	33.1831	-217.7644	0.0003	0.0011	0.0976

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Краткое содержание настоящей статьи в критическом случае отражено в работе [33] автора.

В заключение приведем следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Асимптотическому анализу вблизи коллапса при $n = 2$, $\rho = 2$ посвящено много работ (см. монографию [34] и представленные в ней ссылки), в частности работа [35].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как следует из [36], если $t_{\max}$ конечно, то $\|u(\cdot, t)\|_{W_2^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_{\max}^-$, следовательно, $t_{\max}$ – время коллапса. В настоящей работе доказывается, что задача (1), (2) при условиях леммы 1 имеет локальное решение на $[0, t_*)$ из некоторого пространства (см. следствия 1 и 2 в критическом случае). Неравенство $t_{\max} < t_*$ не имеет места, так как на полуинтервале $[0, t_*)$ решение существует. С другой стороны, должно выполняться неравенство $t_{\max} \leq t^*$, так как при $t = t^*$ задача (1), (2) не имеет решения. Поэтому

должно быть $t_* \leq t_{\max} \leq t^*$, следовательно, $t_* < t^*$ (см. табл. 1 и табл. 2, $n = 2$, $\rho = 2$, радиально-симметричный случай).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В сверхкритическом случае доказывается, что задача (1), (2) имеет локальное решение на $[0, T_0)$ (см. теорему 3). Очевидно, что и в этом случае время коллапса $t_{\max}$ удовлетворяет соотношению $T_0 \leq t_{\max} \leq t^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В сверхкритическом случае в работах [4], [7], [37]–[39] выделяется множество начальных данных, при которых происходит коллапс, и найдены более строгие оценки порога коллапса, чем t^* (см., [34, теорема 5.2]). Очевидно, что и в этом случае T_0 остается прежним.

Автор выражает глубокую благодарность академику В. С. Владимирову за постоянное внимание к работе, а также рецензенту за интересные и полезные замечания.

Список литературы

1. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134; англ. пер.: V. E. Zakharov, A. B. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”, *Soviet Physics JETP*, **34**:1 (1972), 62–69.
2. В. И. Луговой, А. М. Прохоров, “Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде”, *УФН*, **111**:10 (1973), 203–247.
3. Ш. М. Насибов, “Об одном нелинейном уравнении типа Шрёдингера”, *Дифференц. уравнения*, **16**:4 (1980), 660–670; англ. пер.: Sh. M. Nasibov, “Nonlinear Schrödinger-type equation”, *Differential Equations*, **16**:4 (1980), 412–420.
4. Ш. М. Насибов, “Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шрёдингера”, *Докл. АН СССР*, **307**:3 (1989), 538–542; англ. пер.: Sh. M. Nasibov, “On optimal constants in some Sobolev inequalities and their application to a nonlinear Schrödinger equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **40**:1 (1990), 110–115.
5. О. И. Кудряшов, “Об особенностях решений нелинейных уравнений типа Гинзбурга–Ландау”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:4 (1975), 866–868; англ. пер.: O. I. Kudryashov, “Singular solutions of nonlinear equations of Ginsburg–Landau type”, *Siberian Math. J.*, **16**:4 (1975), 665–667.
6. А. Б. Шабат, “О задаче Коши для уравнения Гинзбурга–Ландау”, *Динамика сплошной среды*, вып. 1, Новосибирск, 1969, 180–194.
7. Ш. М. Насибов, “Об устойчивости, разрушении, затухании и самоканализации решений одного нелинейного уравнения Шрёдингера”, *Докл. АН СССР*, **285**:4 (1985), 807–811; англ. пер.: Sh. M. Nasibov, “On stability, collapse, decay, and self-trapping of solutions of a nonlinear Schrödinger equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **32**:3 (1985), 784–788.
8. H. Nawa, “Asymptotic and limiting profiles of blowup solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:2 (1999), 193–270.
9. Th. Cazenave, “Equations de Schrödinger non linéaires en dimension deux”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **84**:3–4 (1979), 327–346.
10. Th. Cazenave, F. B. Weissler, “The structure of solutions to the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **117**:3–4 (1991), 251–273.

11. R. T. Classey, “On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations”, *J. Math. Phys.*, **18**:9 (1977), 1794–1797.
12. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, “Усредненное описание волновых пучков в линейных средах и в нелинейных средах (метод моментов)”, *Изв. вузов. Радиофизика*, **14**:9 (1971), 1353–1363.
13. В. Е. Захаров, “Коллапс ленгмюровских волн”, *ЖЭТФ*, **62**:5 (1972), 1745–1759.
14. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
15. М. В. Владимиров, “Разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения Шрёдингера”, *Матем. сб.*, **130** (172):4(8) (1986), 520–536; англ. пер.: M. V. Vladimirov, “Solvability of a mixed problem for the nonlinear Schrödinger equation”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 525–540.
16. J.-B. Baillon, Th. Cazenave, M. Figueira, “Equation de Schrödinger non linéaire”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **284**:15 (1977), 869–872.
17. I. Segal, “Non-linear semi-groups”, *Ann. of Math.* (2), **78**:2 (1963), 339–364.
18. J. Ginibre, G. Velo, “On a class of nonlinear Schrödinger equations. I, II”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 1–71.
19. Т. Kato, “On nonlinear Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **46**:1 (1978), 113–129.
20. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 4-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Dekker, New York, 1971.
21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 5-е изд., Наука, М., 1971; англ. пер. 4-го изд.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York–London–Toronto, ON, 1980.
22. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
23. M. K. Kwong, “Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **105**:3 (1989), 243–266.
24. K. McLeod, J. Serrin, “Uniqueness of solutions of semilinear Poisson equations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **78**:11 (1981), 6592–6595.
25. M. I. Weinstein, “Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates”, *Comm. Math. Phys.*, **87**:4 (1983), 567–576.
26. H. A. Levine, “An estimate for the best constant in a Sobolev inequality involving three integral norms”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **124**:1 (1980), 181–197.
27. E. H. Lieb, “Sharp constants in the Hardy–Littlewood–Sobolev and related inequalities”, *Ann. of Math.* (2), **118**:2 (1983), 349–374.
28. B. v. Sz. Nagy, “Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung”, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **10** (1941), 64–74.
29. E. J. M. Velting, “Lower bounds for the infimum of the spectrum of the Schrödinger operator in $\mathbb{R}^N$ and the Sobolev inequalities”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**:4 (2002), article 63.
30. G. Talenti, “Best constant in Sobolev inequality”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **110**:1 (1976), 353–372.
31. M. Del Pino, J. Dolbeault, “Best constants for Gagliardo–Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **81**:9 (2002), 847–875.

32. Ю. А. Дубинский, “Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка”, *УМН*, **23**:1 (1968), 45–90; англ. пер.: Yu. A. Dubinskii, “Quasilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order”, *Russian Math. Surveys*, **23**:1 (1968), 45–91.
33. Ш. М. Насибов, “О точной константе в одном неравенстве Соболева–Ниренберга и ее приложении к оценке снизу времени разрушения нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера с критической степенью”, *Докл. РАН*, **382**:6 (2002), 750–753; англ. пер.: Sh. M. Nasibov, “An exact constant in one Sobolev–Nirenberg inequality and its application to estimation from below of the blowup time for the nonlinear Schrödinger equation with a critical degree”, *Dokl. Math.*, **65**:1 (2002), 135–138.
34. C. Sulem, P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, Appl. Math. Sci., **139**, Springer-Verlag, New York, 1999.
35. Г. М. Фрайман, “Асимптотическая устойчивость многообразия автомодельных решений при самофокусировке”, *ЖЭТФ*, **88**:2 (1985), 390–400; англ. пер.: G. M. Fraïman, “Asymptotic stability of manifold of self-similar solutions in self-focusing”, *Soviet Phys. JETP*, **61**:2 (1985), 228–233.
36. H. Brezis, T. Gallouet, “Nonlinear Schrödinger evolution equations”, *Nonlinear Anal.*, **4**:4 (1980), 677–681.
37. S. K. Turitsyn, “Nonstable solitons and sharp criteria for wave collapse”, *Phys. Rev. E* (3), **47**:1 (1993), R13–R16.
38. E. A. Kuznetsov, J. J. Rasmussen, K. Rypdal, S. K. Turitsyn, “Sharper criteria for the wave collapse”, *Phys. D*, **87**:1–4 (1995), 273–284.
39. P. M. Lushnikov, “Dynamic criterion for collapse”, *JETP Lett.*, **62** (1995), 461–467.

Ш. М. НАСИБОВ (Sh. M. NASIBOV)
Институт прикладной математики Бакинского
государственного университета
E-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

Поступило в редакцию
01.06.2007
29.02.2008