Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Юдина, Сингулярно возмущенное уравнение Бесселя в комплексных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 3, 199–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:48:37

УДК 517.923

А. С. Юдина

Сингулярно возмущенное уравнение Бесселя в комплексных областях

Для фундаментальной системы решений уравнения Бесселя методом регуляризации построены два вида регуляризованных асимптотических решений по комплексному параметру, первый – в замкнутой комплексной плоскости независимой переменной, за исключением особых точек функций спектра исходного оператора. Определены области равномерной и неравномерной асимптотической сходимости рядов в решениях. Проведено исследование полученных формул на действительной положительной оси, при этом доказано, что на интервале $(0, 1)$, входящем в область неравномерной сходимости рядов, получаются известные асимптотические разложения Дебая для функций Бесселя. Второй вид регуляризованных равномерных асимптотических решений построен в окрестности регулярной особой точки из другой области изменения параметра уравнения. С использованием этих результатов получено равномерное асимптотическое решение краевой задачи для неоднородного и однородного уравнений Бесселя.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: уравнение Бесселя, регуляризирующая функция, регуляризованные асимптотические разложения, разложение Дебая, линии Стокса.

Введение

В работе применяется метод регуляризации для асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач [1] в области дифференциальных уравнений с особыми точками.

Рассматривается уравнение Бесселя [2],[3]

$$z^2 w'' + zw' - \nu^2(1 - z^2)w = 0 \quad (0.1)$$

при комплексных z и $\nu \rightarrow \infty$, для которого $z = 0$ – регулярная особая точка (о. т.) и $z = \infty$ иррегулярная о. т. [4].

Уравнение (0.1) заменой $\nu = 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сводится к сингулярно возмущенному уравнению, к которому применяется метод регуляризации.

Настоящая статья является продолжением работ автора в области специальных функций и уравнений с особыми точками (см., например, [5]–[8]). В [7] был использован метод Ф. Ольвера для дифференциальных уравнений специального вида. В [9]–[12] применялась идея метода регуляризации с использованием спектра промежуточного оператора и корней определяющего уравнения, что позволило получить ранее неизвестные асимптотические решения фундаментальных систем, сингулярно зависящие от параметра, и, как частный случай, новые асимптотические разложения функций Бесселя в окрестности регулярной о. т.

В статье применен общий принцип метода регуляризации (без определяющего уравнения) с переходом в пространство большей размерности и использованием спектральных характеристик исходного оператора, что дало возможность получить единым методом два вида регуляризованных асимптотических при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений для фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения Бесселя не только в окрестности регулярной особой точки, а во всей замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}(z)$, за исключением особых точек $z = 0$, $z = -1$, $z = 1$ функций спектра оператора Бесселя.

В полученных формулах регуляризованных ФСР доказана асимптотическая сходимость регулярных рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$ с указанием областей в плоскости ε и с указанием областей равномерной и неравномерной асимптотической сходимости рядов по z .

Исследованы полученные формулы для ФСР на положительной действительной оси. Произведено сравнение полученных результатов с ранее известными асимптотическими разложениями функций Бесселя. На интервале $(0, 1)$ из формул следуют асимптотические разложения Дебая для функций Бесселя [3, с. 187]. С использованием полученных результатов методом регуляризации построено равномерное асимптотическое решение краевой задачи в окрестности регулярной о. т. для неоднородного и однородного уравнений Бесселя.

§ 1. Структура фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного уравнения Бесселя в комплексных областях z и ε

В уравнении (0.1) сделаем замену $\nu = 1/\varepsilon$ и получим

$$L_\varepsilon w \equiv \varepsilon^2 z^2 w'' + \varepsilon^2 z w' - (1 - z^2)w = 0. \quad (1.1)$$

Это сингулярно возмущенное уравнение по параметру ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ по независимой переменной.

1.1. Формализм метода регуляризации. Для построения ФСР уравнения (1.1) определим в замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}(z)$ область стабильности спектра исходного оператора L_ε [1, гл. 2].

Из характеристического уравнения

$$z^2 \lambda^2(z) - (1 - z^2) = 0 \quad (1.2)$$

определим функции спектра

$$\lambda_1(z) = +\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad \lambda_2(z) = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad (1.3)$$

для корня берется та ветвь, которая при $z = 0$ равна единице.

Исследуем функции (1.3). Особая точка $z = 0$ уравнения (1.1) является особой и для функций $\lambda_s(z)$, $s = 1, 2$; точка $z = \infty$ не является особой для $\lambda_s(z)$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \lambda_s(z) = (-1)^{s-1}i$. Пусть $\lambda_s(\infty) = (-1)^{s-1}i$ и $\lambda_s(z)$ – непрерывные функции в $\overline{\mathbb{C}}(z) \setminus \{z = 0\}$. Производная в точке $z = \infty$ не имеет смысла, но принято принимать функции $\lambda_s(z)$ аналитическими при $z = \infty$, так как $\lambda_s(1/z) = (-1)^{s-1}\sqrt{z^2-1} = \tilde{\lambda}_s(z)$ – аналитические функции в точке $z = 0$.

Следовательно:

1) $\lambda_s(z)$, $s = 1, 2$, – аналитические функции в области

$$\overline{G}(z) = \{z: z \in \overline{\mathbb{C}}(z) \setminus \{z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1\}\}; \quad (1.4)$$

2) $\lambda_1(z) \neq \lambda_2(z)$, $\lambda_s(z) \neq 0$ в $\overline{G}(z)$, поэтому будем применять метод регуляризации к уравнению (1.1) в области $\overline{G}(z)$, (1.4), в которой выполняются условия стабильности спектра 1^0 , 2^0 из [1, с. 39].

Для определения каждого решения $w_s(z, \varepsilon)$, $s = 1, 2$, ФСР вводим соответствующую регуляризирующую функцию $\varphi_s(z, \varepsilon)$ через функцию спектра $\lambda_s(z)$, которую наряду с независимой переменной $z \in \overline{G}(z)$ принимаем за новую независимую переменную τ_s :

$$\tau_s = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi \equiv \varphi_s(z, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad z_0 \neq 0, \quad (1.5)$$

первообразная $F_s(z)$ для $\lambda_s(z)$ имеет вид

$$F_s(z) = (-1)^{s-1} [\sqrt{1-z^2} + \ln z - \ln(1 + \sqrt{1-z^2})].$$

Точка z_0 определяет постоянный множитель в решениях $w_s(z, \varepsilon)$.

Далее в настоящем пункте для сокращения записей нижний индекс s мы не используем, имея в виду, что рассматривается случай $s = 1$ или $s = 2$.

Вместо искомого решения $w(z, \varepsilon)$ уравнения (1.1) будем изучать расширенную функцию $\tilde{w}(z, \tau, \varepsilon)$ такую, что ее сужение при $\tau = \varphi(z, \varepsilon)$ совпадает с $w(z, \varepsilon)$: $\tilde{w}(z, \varphi(z, \varepsilon), \varepsilon) \equiv w(z, \varepsilon)$.

Определим из уравнения (1.1) уравнение для функции $\tilde{w}(z, \tau, \varepsilon)$:

$$L_\varepsilon \tilde{w} \equiv \varepsilon^2 L_2 \tilde{w} + \varepsilon L_1 \tilde{w} + L_0 \tilde{w} = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 \tilde{w} &\equiv z^2 \lambda^2(z) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tau^2} - (1 - z^2) \tilde{w}, & L_1 \tilde{w} &\equiv 2z^2 \lambda(z) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z \partial \tau} + z(z \lambda(z))' \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau}, \\ L_2 \tilde{w} &\equiv z^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + z \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.6) определяем в виде ряда:

$$\tilde{w}(z, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(z, \tau). \quad (1.7)$$

Для коэффициентов ряда (1.7) из уравнения (1.6) получаем следующие рекуррентные уравнения:

$$\begin{aligned} L_0 w_0(z, \tau) &= 0, & L_0 w_1(z, \tau) &= -L_1 w_0(z, \tau), \\ L_0 w_k(z, \tau) &= -L_1 w_{k-1}(z, \tau) - L_2 w_{k-2}(z, \tau), & k &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для решения уравнений (1.8) вводим пространство безрезонансных решений

$$Y = \{w_k: w_k(z, \tau) = e^\tau D_k(z), \quad k = 0, 1, \dots\}. \quad (1.9)$$

Определим результаты действия операторов L_j , $j = 0, 1, 2$, из (1.6) на функции $w_k(z, \tau) \in Y$. На элементах пространства Y основной оператор L_0 имеет вид

$$L_0 w_k(z, \tau) \equiv [z^2 \lambda^2(z) - (1 - z^2)] D_k(z) e^\tau \equiv 0 \quad (1.10)$$

для всех $k = 0, 1, \dots$, так как $\lambda(z)$ – корень уравнения (1.2),

$$\begin{aligned} L_1 w_k(z, \tau) &\equiv [2z\lambda(z)D'_k(z) + (z\lambda(z))'D_k(z)]ze^\tau, \\ L_2 w_k(z, \tau) &\equiv [zD''_k(z) + D'_k(z)]ze^\tau. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.11) введем операторы $\tilde{L}_i$, $i = 1, 2$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_1 D_k(z) &\equiv 2z\lambda(z)D'_k(z) + (z\lambda(z))'D_k(z), \\ \tilde{L}_2 D_k(z) &\equiv zD''_k(z) + D'_k(z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.8)–(1.12) получаем для определения функций $D_k(z)$ рекуррентные линейные уравнения первого порядка:

$$\tilde{L}_1 D_0(z) = 0, \quad \tilde{L}_1 D_{k+1}(z) = -\tilde{L}_2 D_k(z), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

Функции $D_k(z)$, определенные из уравнений (1.13) (конкретно это будет сделано в следующем пункте), подставляем в (1.9) и, далее, в ряд (1.7). В результате будем иметь формальное решение уравнения (1.6) в виде

$$\tilde{w}(z, \tau, \varepsilon) = e^\tau \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k(z). \quad (1.14)$$

Проведя сужение решения (1.14) при $\tau = \varphi(z, \varepsilon)$, (1.5), получаем каждое формальное решение ФСР уравнения (1.1) в области $\bar{G}(z)$ в виде

$$w(z, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda(\xi) d\xi \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k(z). \quad (1.15)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Решение $w(z, \varepsilon)$ вида (1.15), в котором сингулярная зависимость от ε выделяется экспоненциальным множителем перед регулярным рядом по асимптотической последовательности $\{\varepsilon^n\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, будем называть *формальным регуляризованным решением*.

1.2. Формальная регуляризованная ФСР уравнения (1.1) в области $\bar{G}(z)$. В формуле (1.15) для ФСР введем индекс s :

$$w_s(z, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k^{(s)}(z), \quad s = 1, 2, \quad (1.16)$$

где $D_k^{(s)}(z)$ определяются из соотношений (1.12), (1.13).

Запишем рекуррентную систему (1.13) для $\lambda_1(z)$, $s = 1$, в развернутом виде, обозначив $D_k^{(1)}(z) = D_k(z)$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1-z^2} D'_0(z) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} D_0(z) &= 0, \\ 2\sqrt{1-z^2} D'_{k+1}(z) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} D_{k+1}(z) &= -(zD'_k(z))'. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из системы (1.17) нетрудно сделать вывод, что $D_k^{(2)}(z) = (-1)^k D_k^{(1)}(z)$, так как $\lambda_2(z) = -\lambda_1(z)$.

Система (1.17) имеет особые точки $z = \pm 1$, совпадающие с о.т. функций спектра. Особые точки уравнения (1.1) не оказывают влияния на регулярные ряды в (1.16), коэффициенты ряда $D_k^{(s)}(z)$ будут определяться из (1.17) в области

$$G^*(z) = \{z: z \in \overline{\mathbb{C}}(z) \setminus \{z = \pm 1\}\}, \quad G^*(z) \supset \overline{G}(z). \quad (1.18)$$

Соотношение (1.18) отражает существенный факт при применении метода регуляризации к уравнению Бесселя: регулярные ряды по ε в формуле (1.16) определены в более широкой области, чем область стабильности спектра.

Из первого уравнения (1.17) находим

$$D_0(z) = \frac{C}{\sqrt[4]{1-z^2}},$$

где C – произвольная постоянная. Для построения ФСР принимаем $C = 1$ и запишем

$$D_0(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-z^2}}. \quad (1.19)$$

Следующие уравнения в (1.17) решаем методом вариации произвольной постоянной, принимая

$$D_{k+1}(z) = D_0(z)C_{k+1}(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.20)$$

Для определения функций $C_{k+1}(z)$ получаем уравнения

$$C'_{k+1}(z) = -\frac{(zD'_k(z))'}{2\sqrt[4]{1-z^2}}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (1.21)$$

В уравнениях (1.21) от переменной z перейдем к переменной t по формуле

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad t(0) = +1. \quad (1.22)$$

Функция $t(z)$ является аналитической в области $G^*(z)$ и переводит точки $z = -1$ и $z = 1$ в $t = \infty$, точка $z = \infty$ переходит в $t = 0$, а точка $z = 0$ – в $t = 1$, область $G^*(z)$, (1.18), переходит в область $T(t)$.

При переходе к переменной t система (1.21) перейдет в систему, не имеющую особых точек в области T , и при ее решении выявится структура функций $D_k(z)$. Будет справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Формальная регуляризованная ФСР, (1.16), уравнения (1.1) в области $\overline{G}(z)$, (1.4), имеет вид*

$$w_s(z, \varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi\right\} \sqrt{t} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(s)}(t), \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \quad (1.23)$$

Коэффициенты ряда $u_k^{(1)}(t) = u_k(t)$ в (1.23) при $s = 1$ определяются в области

$$T = \{t: t \in \mathbb{C}, t(0) = +1\} \quad (1.24)$$

по рекуррентной формуле

$$u_0(t) = 1, \quad u_{k+1}(t) = \frac{1}{2} t^2 (1 - t^2) u'_k(t) \Big|_{t_0}^t + \frac{1}{8} \int_{t_0}^t (1 - 5\zeta^2) u_k(\zeta) d\zeta \quad (1.25)$$

при любом фиксированном $t_0 \in T$ и являются многочленами по t степени $3k$, $u_k^{(2)}(t) = (-1)^k u_k^{(1)}(t) = (-1)^k u_k(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к переменной t в функциях $D_k(z)$, $k = 0, 1, \dots$, (1.19), (1.20):

$$D_0(z) = \tilde{D}_0(t) = \sqrt{t}, \quad D_{k+1}(z) = \tilde{D}_{k+1}(t) = \sqrt{t} \tilde{C}_{k+1}(t), \quad (1.26)$$

где обозначим

$$\tilde{C}_{k+1}(t) = u_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad u_0(t) = 1. \quad (1.27)$$

Тогда из (1.26) имеем

$$D_0(z) = \sqrt{t}, \quad D_{k+1}(z) = \sqrt{t} u_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.28)$$

Подставим (1.28) в ряд (1.16), и формула (1.16) для ФСР примет вид (1.23).

Из (1.28), (1.17) будут следовать соотношения $u_k^{(2)}(t) = (-1)^k u_k^{(1)}(t)$, так как $D_k^{(2)}(z) = (-1)^k D_k^{(1)}(z)$.

Перейдем к доказательству формулы (1.25). Уравнения (1.21) при переходе к переменной t в силу (1.27) примут вид

$$u'_{k+1}(t) = -\frac{1}{2} \sqrt{t} [(t^3 - t) \tilde{D}'_k(t)]', \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.29)$$

Из (1.26), (1.27) справедливо соотношение $\sqrt{t} \tilde{D}'_k(t) = \frac{1}{2} u_k(t) + t u'_k(t)$, учитывая его в соотношении (1.29):

$$u'_{k+1}(t) = -\frac{1}{2} \sqrt{t} \left[\frac{1}{2} (t^{5/2} - t^{1/2}) u_k(t) + (t^{7/2} - t^{3/2}) u'_k(t) \right]', \quad (1.30)$$

в результате получим для определения функций $u_{k+1}(t)$, $k = 0, 1, \dots$, рекуррентные уравнения первого порядка, определенные в области T . Для однозначного решения каждого уравнения (1.30) задаем задачи Коши при любом фиксированном $t_0 \in T$ с условиями $u_{k+1}(t_0) = 0$, из (1.30) получаем функции $u_{k+1}(t)$, определяемые по рекуррентной формуле

$$u_0(t) = 1, \quad u_{k+1}(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sqrt{\zeta} \left[\frac{1}{2} (\zeta^{5/2} - \zeta^{1/2}) u_k(\zeta) + (\zeta^{7/2} - \zeta^{3/2}) u'_k(\zeta) \right]' d\zeta. \quad (1.31)$$

Интегрируем в (1.31) и получаем формулу (1.25), из которой следует, что функции $u_k(t)$ суть многочлены по t степени $3k$. Теорема доказана.

В настоящей работе рассмотрим два возможных случая в формуле (1.25):

- 1) случай $t_0 = 0$, соответствующий особой точке $z = \infty$ уравнения (1.1);
- 2) случай $t_0 = 1$, соответствующий особой точке $z = 0$.

Для каждого случая проведено доказательство асимптотической сходимости рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если в формуле (1.23) для $w_s(z, \varepsilon)$, $s = 1$ или $s = 2$, доказана асимптотическая сходимость регулярных рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$, то формулу (1.23) будем называть *регуляризованным асимптотическим решением*.

1.3. Регуляризованная асимптотическая ФСР уравнения (1.1) в области $\overline{G}(z)$. Будем определять решения $w_s(z, \varepsilon)$ по формуле (1.23), принимая $t_0 = 0$ для определения коэффициентов рядов в формуле (1.25), которая при $s = 1$, $u_k^{(1)}(t) = u_k(t)$ будет иметь вид

$$u_0(t) = 1, \quad u_{k+1}(t) = \frac{1}{2}t^2(1-t^2)u'_k(t) + \frac{1}{8} \int_0^t (1-5\zeta^2)u_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.32)$$

Из (1.32) следует, что в этом случае многочлены $u_k(t)$ имеют $k+1$ членов от t^k до t^{3k} , четных при четном k и нечетных при нечетном k , $u_k^{(2)}(t) = (-1)^k u_k^{(1)}(t)$.

Обозначим

$$u_k(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,k+2j} t^{k+2j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

Первые $u_k(t)$, $k = 1, 2$, имеют вид

$$u_1(t) = \frac{1}{24}(3t - 5t^3), \quad u_2(t) = \frac{1}{1152}(81t^2 - 462t^4 + 385t^6)$$

(при $k = 1, 2, 3, 4$ см. [3, с. 187]).

Для доказательства асимптотической сходимости рядов в (1.23) при $t_0 = 0$ запишем формулу (1.23) для ФСР в виде

$$w_s(z, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi \right\} \sqrt{t} (1 + R_1^{(s)}(t, \varepsilon)), \quad s = 1, 2, \quad (1.34)$$

где

$$R_1^{(s)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(s)}(t), \quad u_k^{(2)}(t) = (-1)^k u_k^{(1)}(t). \quad (1.35)$$

Ряды в (1.35) являются формальными рядами по асимптотической последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функций $R_1^{(s)}(t, \varepsilon)$, определенных из формулы (1.34).

ЛЕММА 1.1. 1) В ряде из (1.35) для коэффициентов $u_k^{(s)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, определяемых по формуле (1.32), справедливы следующие неравенства:

$$|u_k^{(s)}(t)| \leq \begin{cases} 4^k(k-1)! & \text{при } |t| \leq 1, \\ (4|t|^3)^k(k-1)! & \text{при } |t| > 1. \end{cases} \quad (1.36)$$

2) Ряды в (1.35) являются асимптотическими разложениями функций $R_1^{(s)}(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2$, при $\varepsilon = Re^{i\varphi}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, по лучам¹ в области $G_1(\varepsilon) = \{\varepsilon: 0 < |\varepsilon| < 1/4\}$, равномерными по t при $|t| \leq 1$ и неравномерными по t при $|t| > 1$ в области $G_2(\varepsilon, t) = \{\varepsilon: 0 < |\varepsilon| < 1/(4|t|^3)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (1.35) следует, что для доказательства формулы (1.36) достаточно рассмотреть случай $s = 1$, $u_k^{(1)}(t) = u_k(t)$.

Многочлены $u_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, определяются по рекуррентной формуле (1.32).

¹Далее будем записывать $\varepsilon \rightarrow 0$ (по R).

Рассмотрим случай $k = 0$, $k + 1 = 1$. Из (1.32), (1.33) имеем

$$u_1(t) = \frac{1}{8}t - \frac{5}{24}t^3 = \alpha_{11}t + \alpha_{13}t^3, \quad |\alpha_{11}| + |\alpha_{13}| < 4, \quad (1.37)$$

$$|u_1(t)| \leq \begin{cases} |\alpha_{11}| + |\alpha_{13}| \leq 4 \cdot 0! & \text{при } |t| \leq 1, \\ |t|^3(|\alpha_{11}| + |\alpha_{13}|) \leq |t|^3 \cdot 4 \cdot 0! & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Получили формулу (1.36) при $k = 1$.

Вывод оценки для $|u_2(t)|$ изложим подробно. Имея $u_1(t) = \alpha_{11}t + \alpha_{13}t^3 = \alpha_{11}t^k + \alpha_{13}t^{3k}$ и применяя (1.33), (1.32), при $k = 1$, $k + 1 = 2$, получим

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \alpha_{22}t^2 + \alpha_{24}t^4 + \alpha_{26}t^6 \\ &= \alpha_{11} \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{8(k+1)} \right) t^2 + \left[\alpha_{11} \left(-\frac{1}{2}k - \frac{5}{8(k+3)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{13} \left(\frac{1}{2}3k + \frac{1}{8(k+3)} \right) \right] t^4 + \alpha_{13} \left(-\frac{1}{2}3k - \frac{5}{8 \cdot 3(k+1)} \right) t^6. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Из (1.38) следуют неравенства

$$|u_2(t)| \leq \begin{cases} |\alpha_{22}| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{26}| & \text{при } |t| \leq 1, \\ (|t|^3)^2(|\alpha_{22}| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{26}|) & \text{при } |t| > 1, \end{cases} \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} |\alpha_{22}| &= |\alpha_{11}| \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{8(k+1)} \right), \\ |\alpha_{24}| &\leq |\alpha_{11}| \left(\frac{1}{2}k + \frac{5}{8(k+3)} \right) + |\alpha_{13}| \left(\frac{1}{2}3k + \frac{1}{8(k+3)} \right), \\ |\alpha_{26}| &= |\alpha_{13}| \left(\frac{1}{2}3k + \frac{5}{8 \cdot 3(k+1)} \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

В (1.40) наибольшим множителем при $|\alpha_{1,1+2j}|$, $j = 0, 1$, будет множитель при $|\alpha_{13}|$ в выражении для $|\alpha_{26}|$. Оценим его:

$$\left(\frac{1}{2}3k + \frac{5}{8 \cdot 3(k+1)} \right) < \left(\frac{3k}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(3k+1) \leq 2k, \quad k \geq 1. \quad (1.41)$$

Применяем (1.41) к неравенствам (1.40), последние примут вид

$$|\alpha_{22}| \leq 2k|\alpha_{11}|, \quad |\alpha_{24}| \leq 2k(|\alpha_{11}| + |\alpha_{13}|), \quad |\alpha_{26}| \leq 2k|\alpha_{13}|. \quad (1.42)$$

Учитывая, что в формуле из (1.42) каждое $|\alpha_{1,1+2j}|$, $j = 0, 1$, входит два раза, и применяя неравенства (1.37), получим следующую оценку при $k = 1$:

$$|\alpha_{22}| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{26}| \leq 4k(|\alpha_{11}| + |\alpha_{13}|) \leq 4^2 \cdot 1!. \quad (1.43)$$

Подставляя (1.43) в (1.39), получим (1.36) при $k = 2$:

$$|u_2(t)| \leq \begin{cases} 4^2 \cdot 1! & \text{при } |t| \leq 1, \\ 4^2(|t|^3)^2 \cdot 1! & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим общий случай в формуле (1.32). Предположим, что для функции $u_k(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,k+2j} t^{k+2j}$ справедливо неравенство, аналогичное (1.43) при $k = 2$:

$$\sum_{j=0}^k |\alpha_{k,k+2j}| \leq 4^k (k-1)!. \quad (1.44)$$

Для функции $u_{k+1}(t) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_{k+1,(k+1)+2j} t^{(k+1)+2j}$ будет справедливо следующее:

$$|u_{k+1}(t)| \leq \begin{cases} \sum_{j=0}^k |\alpha_{k+1,(k+1)+2j}| & \text{при } |t| \leq 1, \\ (|t|^3)^{k+1} \sum_{j=0}^k |\alpha_{k+1,(k+1)+2j}| & \text{при } |t| > 1. \end{cases} \quad (1.45)$$

Далее, по формуле (1.32) получим выражение $u_{k+1}(t)$ через коэффициенты функции $u_k(t)$, аналогичные (1.38) для $u_2(t)$.

Учитывая подробное доказательство формулы (1.36) для функции $u_2(t)$, простую структуру многочленов $u_k(t)$ и прозрачность формулы (1.32), далее ограничимся фрагментарным доказательством.

Из формулы (1.32) очевидно, что функция $u_{k+1}(t)$ имеет $2(k+1)$ членов с коэффициентами функции $u_k(t)$ и каждый коэффициент входит два раза, причем наибольший по модулю множитель, зависящий от k , будет при члене с наибольшей степенью $t^{3(k+1)}$. Получим из (1.32) этот коэффициент, он образован из двух слагаемых:

$$-\frac{1}{2} t^4 (\alpha_{k,3k} t^{3k})' + \frac{1}{8} \int_0^t (-5\zeta^2) \alpha_{k,3k} \zeta^{3k} d\zeta = \alpha_{k,3k} \left(-\frac{1}{2} 3k - \frac{5}{8} \frac{1}{3(k+1)} \right) t^{3(k+1)}. \quad (1.46)$$

Сравнивая (1.46) с (1.38), легко видеть, что оценкой по модулю множителя в (1.46) будет оценка (1.41), справедливая для любых k .

Учитывая это, получим оценки для $|\alpha_{k+1,(k+1)+2j}|$, $j = \overline{0, k+1}$, аналогичные (1.42), через модули коэффициентов $u_k(t)$, при $j = 0$ и $j = k+1$ оценки имеют по одному слагаемому, а при остальных j – по два слагаемых. Используя это, при выполнении (1.44) получим

$$\sum_{j=0}^{k+1} |\alpha_{k+1,(k+1)+2j}| \leq 4k \sum_{j=0}^k |\alpha_{k,k+2j}| \leq 4^{k+1} k!. \quad (1.47)$$

Подставляя (1.47) в (1.45), имеем

$$|u_{k+1}(t)| \leq \begin{cases} 4^{k+1} k! & \text{при } |t| \leq 1, \\ (|t|^3)^{k+1} 4^{k+1} k! & \text{при } |t| > 1. \end{cases} \quad (1.48)$$

Неравенства (1.48) эквивалентны неравенствам (1.36). Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $|t| \leq 1$. Из (1.35), (1.36) справедливы неравенства при $s = 1, 2$ для любых $|t| \leq 1$:

$$|R_1^{(s)}(t, \varepsilon)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(s)}(t) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon^k| |u_k^{(s)}(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (4|\varepsilon|)^k (k-1)!. \quad (1.49)$$

Обозначим $4|\varepsilon| = \frac{1}{x}$. При $x > 1$ имеем $|\varepsilon| < \frac{1}{4}$ и запишем (1.49) в виде (заметив, что $|\varepsilon| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$)

$$|R_1^{(s)}(t, \varepsilon)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k} = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(k-1)!}{x^k} + \cdots. \quad (1.50)$$

Далее индекс s выписывать не будем, имея в виду $s = 1, 2$. В (1.50) находится положительный ряд по асимптотической последовательности $\{\frac{1}{x^k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, при $x \rightarrow \infty$, который по свойствам асимптотических рядов представляет не одну функцию, а класс асимптотически равных функций. Поэтому для оценки величины $|R_1(t, \varepsilon)|$ по (1.50) достаточно указать одну функцию $F(x)$, для которой ряд в (1.50) является асимптотическим разложением при $x \rightarrow \infty$, так как O -оценки остаточных членов ряда для всех функций, асимптотически равных $F(x)$, будут одинаковыми.

Такая функция $F(x)$ приведена в работе [14, с. 22]:

$$F(x) = e^{-x} f(x), \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \text{Ei}(x) - \text{Ei}(1),$$

где $\text{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция [3, с. 56]. Доказано в [14, с. 23], что $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение:

$$F(x) \sim \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(k-1)!}{x^k} + \cdots, \quad (1.51)$$

и при $x \rightarrow \infty$ для $k = 1, 2, \dots$ справедлива формула

$$F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(k-1)!}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right). \quad (1.52)$$

Разложение (1.51) совпадает с рядом в (1.50). При $k = 1$ из (1.52) получим

$$F(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.53)$$

Из (1.50)–(1.53) будем иметь неравенство

$$|R_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.54)$$

Из соотношения (1.53) следует

$$F(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}(1 + o(1)) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

а это означает, что

$$F(x) \leq A\left(\frac{1}{x}\right), \quad 1 < a < x < \infty, \quad (1.55)$$

где A, a – постоянные.

Из (1.53)–(1.55) следует неравенство

$$|R_1(t, \varepsilon)| \leq A\left(\frac{1}{x}\right) = 4A|\varepsilon| = A_1|\varepsilon|, \quad 0 < |\varepsilon| < a_1,$$

что и доказывает соотношение

$$R_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (по } R) \text{ в } G_1(\varepsilon). \quad (1.56)$$

Используя (1.35), запишем асимптотический ряд для $R_2^{(s)}(t, \varepsilon)$, $s = 1, 2$, не выписывая индекс:

$$R_2(t, \varepsilon) = R_1(t, \varepsilon) - \varepsilon u_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t). \quad (1.57)$$

Из (1.57) согласно неравенствам (1.36) аналогично (1.49) получим

$$|R_2(t, \varepsilon)| \leq \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots + \frac{(k-1)!}{x^k} + \dots. \quad (1.58)$$

Из разложения (1.51) следует, что в (1.58) ряд представляет асимптотическое разложение функции $F(x) - 1/x$ при $x \rightarrow \infty$, для которой по (1.52) при $k = 2$ справедлива формула

$$F(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.59)$$

По формуле (1.59) из соотношения (1.58) получаем неравенство

$$|R_2(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Далее, проведя выкладки, аналогичные (1.54)–(1.56), получим

$$R_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (по } R) \text{ в } G_1(\varepsilon). \quad (1.60)$$

Проводя аналогичные доказательства для любого $n = 2, 3, \dots$, при $s = 1, 2$ получим

$$R_n(t, \varepsilon) = R_1(t, \varepsilon) - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^k u_k(t) = O(\varepsilon^n) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (по } R) \text{ в } G_1(\varepsilon). \quad (1.61)$$

Из соотношений (1.56), (1.61) следует, что ряды (1.36) при $s = 1, 2$ являются асимптотическими разложениями функций $R_1^{(s)}(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по R) для $|\varepsilon| < 1/4$ равномерно по t при $|t| \leq 1$.

Пусть теперь $|t| > 1$. Из формулы (1.36) следует, что при $s = 1, 2$ неравенство (1.49) примет вид

$$R_1(t, \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (4|t|^3|\varepsilon|)^k (k-1)!. \quad (1.62)$$

В (1.62) обозначим $4|t|^3|\varepsilon| = 1/x$ и получим формулу (1.50), в которой для любого фиксированного значения t , $|t| > 1$, имеем $x \rightarrow \infty$ при $|\varepsilon| \rightarrow 0$. Далее доказательство аналогично (1.51)–(1.61). В результате при $n = 1, 2, \dots$ получим оценки

$$R_n(t, \varepsilon) = R_1(t, \varepsilon) - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^k u_k(t) = O(\varepsilon^n) \quad (1.63)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по R) в области $|\varepsilon| < 1/(4|t|^3)$, справедливые для любого фиксированного t , $|t| > 1$. Соотношения (1.63) доказывают утверждение 2) при $|t| > 1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. В формуле (1.16) для фундаментальной системы решений уравнения (1.1), записанной в виде

$$w_s(z, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi \right\} D^{(s)}(z, \varepsilon), \quad (1.64)$$

где

$$D^{(s)}(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k^{(s)}(z), \quad D_k^{(2)}(z) = (-1)^k D_k^{(1)}(z), \quad s = 1, 2,$$

ряды являются асимптотическими разложениями функций $D^{(s)}(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по R) в области $|\varepsilon| < 1/4$, равномерными по z в области, определяемой неравенством $|t| \leq 1$, и неравномерными по z для любого фиксированного $z \neq \pm 1$ в области $|t| > 1$ при $|\varepsilon| < 1/(4|t|^3)$, где $t = 1/\sqrt{1-z^2}$.

В плоскости $\overline{\mathbb{C}}(z)$ область равномерной сходимости ряда из (1.64) расположена на лемнискате $\rho = \sqrt{2 \cos(2\varphi)}$ и вне ее, область неравномерной сходимости – внутри лемнискаты при $z \neq \pm 1$ (рис. 1, 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формуле (1.64) при $s = 1, 2$ (индекс не выписываем) согласно (1.28) имеем $D_k(z) = \sqrt{t} u_k(t)$, $u_0(t) = 1$, $k = 0, 1, \dots$, и используем заключения леммы 1.1. В силу (1.34), (1.35), (1.61) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} D(z, \varepsilon) &= \sqrt{t} + \sqrt{t} R_1(t, \varepsilon) = \sqrt{t} + \sqrt{t} O(\varepsilon) = \sqrt{t} (1 + o(1)) = O(1), \\ D(z, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k D_k(z) &= \sqrt{t} R_n(t, \varepsilon) = \sqrt{t} O(\varepsilon^n) = O(\varepsilon^n). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Формулы (1.65) справедливы по лемме 1.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по R) равномерно по t при $|t| \leq 1$ в области $|\varepsilon| < 1/4$ и неравномерно по t при $|t| > 1$ в области $|\varepsilon| < 1/(4|t|^3)$. Отсюда, учитывая формулу $t = 1/\sqrt{1-z^2}$, получаем доказательство теоремы.

Рис. 1. Линия уровня (лемниската) функции $\Phi = |t(z)|$ при $\Phi = 1$ в плоскости $z = x + iy$

В плоскости $\overline{\mathbb{C}}(z)$ линия $|1/\sqrt{1-z^2}| = 1$ в полярных координатах есть лемниската $\rho = \sqrt{2 \cos(2\varphi)}$; для точек z вне лемнискаты $|t| < 1$, внутри нее $|t| > 1$, за исключением точек $z = \pm 1$. Теорема доказана.

На рис. 1 область неравномерной сходимости рядов из (1.64) в области $G^*(z)$ заштрихована. На рис. 2 график рельефа функции $t(z)$ изображен при $z = x$.

 Рис. 2. Функция $\Phi = |t(z)|$ на оси x

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Формулы (1.64) для ФСР уравнения (1.1) в области неравномерной сходимости рядов по x для $\varepsilon = 1/\nu$, $\nu > 0$, при $0 < x < 1$, $x = 1/\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sech} \alpha$, $\alpha > 0$, совпадают с формулами асимптотических разложений Дебая ФСР уравнения (0.1) для функций Бесселя $J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha)$, $Y_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha)$ при $\nu \rightarrow \infty$ в изложении Ф. Олвера [3, с. 187].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем по теореме 1.2 при $D_k(z) = \sqrt{t} u_k(t)$ согласно (1.28) формулу (1.64) при $s = 1$, $z = x$, $z_0 = 1$, $\varepsilon = 1/\nu$ в виде

$$w_1\left(x, \frac{1}{\nu}\right) = \exp\left\{\nu \int_1^x \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi\right\} \sqrt{t} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{\nu^k}\right). \quad (1.66)$$

В соотношении (1.66) произведем замену $x = 1/\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sech} \alpha$, где $0 < \alpha < +\infty$, $0 < \operatorname{sech} \alpha < 1$, $t = 1/\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cth} \alpha = 1/\operatorname{th} \alpha$, интеграл вычислим по формуле (1.5):

$$\int_1^x \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi = \sqrt{1-x^2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{th} \alpha - \alpha < 0, \quad \alpha \neq 0,$$

введем нормирующий множитель $1/\sqrt{2\pi\nu}$ и получим

$$w_1\left(x, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\exp\{\nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha)\}}{\sqrt{2\pi\nu \operatorname{th} \alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(\operatorname{cth} \alpha)}{\nu^k}\right) = J_\nu(\nu x) \quad (1.67)$$

при $\nu \rightarrow \infty$ для $\nu > 4(\operatorname{cth} \alpha)^3$ и для любого фиксированного $x \in (0, 1)$.

Формула (1.67) совпадает с формулой (9.3.7) из [3, с. 187] – формулой асимптотического разложения функции $J_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha)$.

При $s = 2$ в формулу (1.66) введем нормирующий множитель $-\sqrt{2}/\sqrt{\pi\nu}$ и получим

$$w_2\left(x, \frac{1}{\nu}\right) = -\frac{\sqrt{2} \exp\{\nu(\alpha - \operatorname{th} \alpha)\}}{\sqrt{\pi\nu \operatorname{th} \alpha}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(\operatorname{cth} \alpha)}{\nu^k}\right) = Y_\nu(\nu x). \quad (1.68)$$

Формула (1.68) совпадает с формулой (9.3.8) из [3, с. 187] для $Y_\nu(\nu \operatorname{sech} \alpha)$. Формулы (9.3.7), (9.3.8) из [3] справедливы, если α фиксированно, при большом $\nu > 0$, что согласуется с теоремой 1.2 для (1.67), (1.68), так как интервал

$0 < x < 1$ находится в области неравномерной асимптотической сходимости рядов в (1.66) при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$).

В [3, с. 187] коэффициенты рядов $u_k(t)$ определяются по формуле (9.3.10), совпадающей с (1.32), приведены значения $u_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

1.4. Исследование ФСР уравнения (1.1) по формуле (1.64) на действительной оси при $x > 0$ и $\varepsilon > 0$. Запишем уравнение (1.1) и формулу (1.64) для ФСР при $z = x$, $x_0 = 1$ в виде

$$L_\varepsilon u = \varepsilon^2 x^2 u'' + \varepsilon^2 x u' - (1 - x^2)u = 0, \\ u_s(x, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{(-1)^{s-1}}{\varepsilon} \int_1^x \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} d\xi \right\} D^{(s)}(x, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad (1.69)$$

где

$$D^{(s)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k^{(s)}(x), \quad D_k^{(2)}(x) = (-1)^k D_k^{(1)}(x).$$

Из теоремы 1.2 следует, что ряды в (1.69) являются асимптотическими разложениями функций $D^{(s)}(x, \varepsilon)$ на интервале $(0, +\infty)$, за исключением точки $x = 1$, которая, как известно для уравнения Бесселя, является точкой перехода [15, пп. 4.5, 4.8], поскольку при переходе через $x = 1$ меняется тип поведения решения. В методе регуляризации для построения ФСР уравнения Бесселя (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ точка $x = 1$ проявилась как особая точка функций спектра оператора Бесселя $\lambda_s(x)$, $s = 1, 2$.

Будем исследовать ФСР на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, так как $\lambda_s(x)$ на $(0, 1)$ имеет действительные значения, а на $(1, +\infty)$ – мнимые значения.

ТЕОРЕМА 1.3. *Формулы (1.69) являются регуляризованными асимптотическими разложениями при $\varepsilon \rightarrow +0$ для функций $u_s(x, \varepsilon)$, $s = 1, 2$, неравномерными по $x \in (0, 1)$ при $|\varepsilon| < 1/(4|t|^3)$, где $t = 1/\sqrt{1 - x^2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1.2 следует, что интервал $(0, 1)$ находится в области асимптотической сходимости ряда (1.69) при $\varepsilon \rightarrow +0$, следовательно, $D^{(s)}(x, \varepsilon) = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, а из характера поведения ФСР уравнения Бесселя в окрестности точки $x = 0$ на действительной оси следует, что если одно решение ФСР ограничено, то другое не ограничено. В формуле (1.69) для $u_1(x, \varepsilon)$ экспоненциальный множитель при $x \in (0, 1)$ для $\varepsilon > 0$ ограничен, решение $u_1(x, \varepsilon)$ ограничено, следовательно, для $u_1(x, \varepsilon)$ формула (1.69) является асимптотическим разложением при $\varepsilon \rightarrow +0$. Для функции $u_2(x, \varepsilon)$ экспоненциальный множитель при $\varepsilon > 0$ не ограничен на $(0, 1)$, но так как функция $u_2(x, \varepsilon)$ не ограничена, то формулу (1.69) также принято называть ее асимптотическим разложением при $\varepsilon \rightarrow +0$, как это было проиллюстрировано в следствии 1.1 для функций $Y_\nu(\nu x)$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Формула (1.69) при $x \in (1, +\infty)$ является регуляризованным асимптотическим разложением ФСР при $\varepsilon \rightarrow +0$ на $(1, +\infty)$, неравномерным на интервале $(1, \sqrt{2})$ и равномерным на $[\sqrt{2}, +\infty)$, записанным в комплексном виде, из которого следует запись ФСР в действительном виде:*

$$u_1(x, \varepsilon) = A^{(1)}(x, \varepsilon) \cos \varphi(x, \varepsilon) - B^{(1)}(x, \varepsilon) \sin \varphi(x, \varepsilon), \\ u_2(x, \varepsilon) = -A^{(2)}(x, \varepsilon) \sin \varphi(x, \varepsilon) + B^{(2)}(x, \varepsilon) \cos \varphi(x, \varepsilon), \quad (1.70)$$

где

$$\varphi(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_1^x \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} d\xi, \quad D^{(s)}(x, \varepsilon) = A^{(s)}(x, \varepsilon) + iB^{(s)}(x, \varepsilon), \quad s = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1.2 при $z = x$ и формул (1.28).

§ 2. Регуляризованное равномерное асимптотическое представление ФСР уравнения (1.1) в окрестности регулярной особой точки

По теореме 1.1 формальная регуляризованная ФСР записывается в виде (1.23). Рассмотрим ее при $z \in G = \{z: |z| < 1\}$, принимая $t_0 = 1$ (что соответствует $z = 0$) в формуле (1.25), которая при $s = 1$ имеет вид

$$\hat{u}_0(t) = 1, \quad \hat{u}_{k+1}(t) = \frac{1}{2}t^2(1 - t^2)\hat{u}'_k(t) + \frac{1}{8} \int_1^t (1 - 5\zeta^2)\hat{u}_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

где $\hat{u}_k(t)$ – многочлены по t степени $3k$, $\hat{u}_k(1) = 0$. Первые $\hat{u}_k(t)$, $k = 1, 2$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= \frac{1}{8}t - \frac{5}{24}t^3 + \frac{1}{12}, \\ \hat{u}_2(t) &= \frac{1}{96}t + \frac{9}{128}t^2 - \frac{5}{288}t^3 - \frac{77}{192}t^4 + \frac{385}{1152}t^6 + \frac{1}{288}, \\ \hat{u}_k^{(2)}(t) &= (-1)^k \hat{u}_k(t). \end{aligned}$$

Для доказательства асимптотической сходимости рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$ из (1.23), (2.1) в области $G(z)$ согласно (1.28) запишем $\hat{D}_k(z) = \sqrt{t} \hat{u}_k(t)$, где $\hat{D}_k(z)$ – аналитические функции в $G(z)$, $\hat{D}_0(0) = 1$, $\hat{D}_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Формула (1.23) в области $G(z)$ примет вид

$$\hat{w}_s(z, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \lambda_s(\xi) d\xi \right\} \hat{D}^{(s)}(z, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad (2.2)$$

где

$$\hat{D}^{(s)}(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{D}_k^{(s)}(z), \quad \hat{D}_k^{(2)}(z) = (-1)^k \hat{D}_k^{(1)}(z).$$

ТЕОРЕМА 2.1. В формуле (2.2) для ФСР ряды являются асимптотическими разложениями функций $\hat{D}^{(s)}(z, \varepsilon)$ в области $G(z) = \{z: 0 \leq |z| < 1\}$, равномерными при $0 \leq |z| \leq R_1 < 1$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $s = 1$ в области $\Omega_1(\varepsilon) = \{\varepsilon = Re^{i\varphi}, 0 \leq |\varphi| < \pi - \delta\}$, для $s = 2$ в области $\Omega_2(\varepsilon) = \{\varepsilon = Re^{i\varphi}, \delta < |\varphi| \leq \pi\}$, $0 < R < \infty$, $0 < \delta < \pi/2$. В области $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ эти разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы для двух решений $w_s(z, \varepsilon)$, $s = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим остаток ряда в (2.2) при любом $n = 0, 1, \dots$ (индекс s не выписываем):

$$R_n(z, \varepsilon) = \hat{D}(z, \varepsilon) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \hat{D}_k(z) = \varepsilon^{n+1} V_n(z, \varepsilon), \quad (2.3)$$

$$V_n(z, \varepsilon) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon^k \hat{D}_k(z), \quad V_n(0, \varepsilon) = 0, \quad (2.4)$$

так как $\widehat{D}_k(0) = \hat{u}_k(1) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Определим уравнение для функции $V_n(z, \varepsilon)$, используя расширенную функцию из (1.14):

$$\tilde{w}(z, \tau, \varepsilon) = e^\tau \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widehat{D}_k(z) = e^\tau \widehat{D}(z, \varepsilon). \quad (2.5)$$

Она удовлетворяет уравнению (1.6), из которого при (2.5), (1.2) получим

$$L_\varepsilon \tilde{w}(z, \tau, \varepsilon) = [\varepsilon(z \widehat{D}_{zz}''(z, \varepsilon) + \widehat{D}_z'(z, \varepsilon)) + 2z\lambda(z) \widehat{D}_z'(z, \varepsilon) + (z\lambda(z))' \widehat{D}(z, \varepsilon)] e^\tau = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует уравнение для $\widehat{D}(z, \varepsilon)$ (аргументы далее не выписываем):

$$\tilde{L} \widehat{D} \equiv \varepsilon \tilde{L}_2 \widehat{D} + \tilde{L}_1 \widehat{D} = 0. \quad (2.7)$$

Операторы $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ определены в (1.12). Применим оператор $\tilde{L}$ ко второму равенству в (2.3):

$$\tilde{L} \widehat{D} - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{L} \widehat{D}_k = \varepsilon^{n+1} \tilde{L} V_n. \quad (2.8)$$

По формуле (2.7) из соотношения (2.8) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1} \tilde{L} V_n &= - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \tilde{L} \widehat{D}_k = - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\varepsilon \tilde{L}_2 \widehat{D}_k + \tilde{L}_1 \widehat{D}_k) \\ &= - \tilde{L}_1 \widehat{D}_0 - \sum_{k=1}^n \varepsilon^k (\tilde{L}_2 \widehat{D}_{k-1} + \tilde{L}_1 \widehat{D}_k) - \varepsilon^{n+1} \tilde{L}_2 \widehat{D}_n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из соотношения (1.13) имеем

$$\tilde{L}_1 \widehat{D}_0 = 0, \quad \tilde{L}_2 \widehat{D}_{k-1} + \tilde{L}_1 \widehat{D}_k = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.9) получаем уравнение для функции $V_n(z, \varepsilon)$: $\tilde{L} V_n(z, \varepsilon) = -L_2 \widehat{D}_n(z)$, которое в развернутом виде согласно (2.6), (2.7) будет следующим:

$$\varepsilon z (V_n(z, \varepsilon))_{z^2}'' + (2z\lambda(z) + \varepsilon) (V_n(z, \varepsilon))_z' + (z\lambda(z))' V_n(z, \varepsilon) = -(z \widehat{D}_n''(z) + \widehat{D}_n'(z)). \quad (2.11)$$

Определим решение уравнения (2.11) в виде ряда:

$$V_n(z, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}(\varepsilon) z^m. \quad (2.12)$$

Разложим коэффициенты и правую часть в (2.11) по степеням z :

$$\varepsilon z (V_n)_{z^2}'' + \left(p_0(\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \right) (V_n)_z' + \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \right) V_n(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} z^k, \quad (2.13)$$

$$p_0(\varepsilon) = \begin{cases} 2 + \varepsilon & \text{при } \lambda(z) = \lambda_1(z), \\ -2 + \varepsilon & \text{при } \lambda(z) = \lambda_2(z). \end{cases} \quad (2.14)$$

Из (2.12)–(2.14) получаем рекуррентные формулы для коэффициентов $\alpha_{nm}(\varepsilon)$ функции $V_n(z, \varepsilon)$, (2.12):

$$\begin{aligned} \alpha_{n1}(\varepsilon) &= \frac{b_{n0}}{p_0(\varepsilon)}, \quad \alpha_{n2}(\varepsilon) = \frac{b_{n1} - p_1 \alpha_{n1}}{2(p_0(\varepsilon) + \varepsilon)}, \\ \alpha_{nm}(\varepsilon) &= \frac{b_{n(m-1)} - \sum_{s=1}^{m-1} [sp_{m-s} + q_{m-1-s}] \alpha_{ns}(\varepsilon)}{m[p_0(\varepsilon) + (m-1)\varepsilon]}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Оценим $|\alpha_{nm}|$, предполагая n фиксированным.

Удалим из ε -плоскости угловую область с вершиной в начале координат, симметричную относительно оси и содержащую точку $-p(0)$, с величиной угла 2δ , где $0 < \delta < \pi/2$. В оставшейся части ε -плоскости $\Omega_1(\varepsilon)$ или $\Omega_2(\varepsilon)$ будет справедливо равенство

$$|p_0(\varepsilon) + (m-1)\varepsilon| = |(m-1)\varepsilon - (-p_0(0))| > |p_0(0)| \sin \delta = s, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Для коэффициентов рядов в (2.13) справедливы следующие неравенства, равномерные по z при $|z| \leq R_1 < 1$:

$$|p_k| < \frac{M_1}{R_1^k}, \quad |q_k| < \frac{M_2}{R_1^k}, \quad |b_{nk}| < \frac{M_{n3}}{R_1^k}, \quad (2.17)$$

где M_i – фиксированные постоянные для каждого решения $w_s(z, \varepsilon)$, $s = 1, 2$.

Учитывая (2.16), (2.17), получим оценки коэффициентов $\alpha_{nm}(\varepsilon)$ в (2.12):

$$|\alpha_{n1}(\varepsilon)| \leq \frac{M_{n3}}{s} < P_n$$

(число P_n будет определено ниже аналогично [4, п. 98]),

$$|\alpha_{n2}(\varepsilon)| \leq \frac{M_{n3}/R_1 + (M_1/R_1)P_n}{2s} < \frac{M_n(P_n^2 - 1)}{R_1(P_n - 1)} < \frac{P_n^2}{R_1}, \quad (2.18)$$

где $M_n = \frac{1}{s} \max\{M_{n3}, M_1\}$. В (2.18) последнее неравенство эквивалентно очевидному неравенству $P_n^2[P_n - (1 + M_n)] + M_n > 0$, если выбрать $P_n > 1 + M_n$. В результате получим

$$|\alpha_{n2}(\varepsilon)| < \frac{P_n^2}{R_1}.$$

Методом математической индукции доказывается, что для любых $\alpha_{nm}(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|\alpha_{nm}(\varepsilon)| < \frac{P_n^m}{R_1^{m-1}}. \quad (2.19)$$

Ряд $R_1 \sum_{k=0}^{\infty} (P_n^k/R_1^k) z^k$ сходится абсолютно в круге $|z| < R_1/P_n$. Следовательно, ряд (2.12) в силу неравенства (2.19) сходится в этом круге и определяет аналитическую функцию $V_{n+1}(z, \varepsilon)$, значит, и во всем круге $|z| < 1$ при всех $\varepsilon \in \Omega_1(\varepsilon)$ или $\varepsilon \in \Omega_2(\varepsilon)$. Неравенство $|V_n(z, \varepsilon)| < C_n$ выполняется равномерно по z при $|z| \leq \tilde{R} < 1$, постоянная C_n не зависит от $\varepsilon \in \Omega_s(\varepsilon)$. Из формулы (2.3) следует асимптотический характер рядов (2.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в Ω_s , $s = 1, 2$, равномерный в области $\tilde{G}(z) = \{z: |z| \leq \tilde{R} < 1\}$. В области $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ утверждения справедливы для решений $w_s(z, \varepsilon)$, $s = 1, 2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. В формуле (2.2) при $z = x$, $z_0 = 1$ для ФСР

$$w_s(x, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{(-1)^{s-1}}{\varepsilon} \int_1^x \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi \right\} \widehat{D}^{(s)}(x, \varepsilon), \quad s = 1, 2, \quad (2.20)$$

где

$$\widehat{D}^{(s)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widehat{D}_k^{(s)}(x), \quad \widehat{D}_k^{(2)}(x) = (-1)^k \widehat{D}_k^{(1)}(x),$$

функции $\widehat{D}_k^{(s)}(x)$ являются аналитическими на $[0, 1)$ при $s = 1$ и удовлетворяют рекуррентным уравнениям системы (1.17):

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1-x^2}\widehat{D}_0'(x) - \frac{x\widehat{D}_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= 0, \\ 2\sqrt{1-x^2}\widehat{D}_{k+1}'(x) - \frac{x\widehat{D}_{k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= -(x\widehat{D}_k''(x) + \widehat{D}_k'(x)), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.21)$$

при условиях $\widehat{D}_0(0) = 1$, $\widehat{D}_k(0) = 0$.

Формулы (2.20) являются регуляризованными асимптотическими разложениями при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерными при $0 \leq x \leq a < 1$ для решения $w_1(x, \varepsilon)$ в области $\operatorname{Re} \varepsilon \geq 0$ и для $w_2(x, \varepsilon)$ при $\operatorname{Re} \varepsilon \leq 0$. На линиях Стокса [15, п. 3.5] $\varepsilon = i\eta$ ($\eta \neq 0$) оба решения $w_s(x, \varepsilon)$, $s = 1, 2$, могут быть записаны в действительной форме по асимптотической последовательности $\{\eta^k\}$, $k = 0, 1, \dots$, при $\eta \rightarrow 0$. Для $\eta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} w_1(x, \eta) &= A^1(x, \eta) \cos \varphi(x, \eta) + B^1(x, \eta) \sin \varphi(x, \eta), \\ w_2(x, \eta) &= -A^1(x, \eta) \sin \varphi(x, \eta) + B^1(x, \eta) \cos \varphi(x, \eta), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\varphi(x, \eta) = \left\{ \frac{1}{\eta} \int_1^x \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} d\xi \right\}, \quad \widehat{D}^1(x, \eta) = A^1(x, \eta) + iB^1(x, \eta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (1.17), теоремы 2.1, ограниченности экспоненциального множителя в указанных областях и свойств решений линейных дифференциальных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Сравним формулу (2.2) с формулой Мейселя. В формуле (2.2) используем соотношения $\widehat{D}_k^{(1)}(z) = \sqrt{t} \hat{u}_k(t)$, определяемые в (2.1). Вычислим интеграл по формуле (1.5), введем нормирующий множитель, сделаем замену $\varepsilon = 1/\nu$. Формула (2.2) при $\nu \rightarrow \infty$ примет вид

$$\widehat{w}_1(z, \varepsilon) = J_\nu(\nu z) = \frac{z^\nu \exp(\nu \sqrt{1-z^2})}{\sqrt{2\pi\nu} (1 + \sqrt{1-z^2})^{\frac{1}{4}\sqrt{1-z^2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_k(t)}{\nu^k}. \quad (2.23)$$

В [2, п. 8.11] приводится разложение Мейселя для $J_\nu(\nu z)$ при $\nu \rightarrow \infty$, в главной части совпадающее с формулой (2.23), но оно не является регуляризованным, так как регулярный ряд по степеням $1/\nu$ стоит в показателе экспоненты.

§ 3. Краевая задача для неоднородного и однородного уравнений Бесселя на отрезке $[0, a]$ при комплексном параметре

3.1. Постановка задачи и сведение ее к сингулярно возмущенной задаче. Для постановки краевой задачи и ее решения используем результаты предыдущих исследований регуляризованных асимптотических разложений ФСР для уравнения (1.1) при $x \in [0, 1]$ и комплексном параметре ε из § 2.

Для уравнения Бесселя

$$x^2 w'' + x w' - \nu^2 (1 - x^2) = h(x) \quad (3.1)$$

с комплексным параметром ν положим, что выполнено условие

$$(*) \quad h(x) - \text{аналитическая функция на } (-1, 1) \text{ или } h(x) \equiv 0.$$

Рассмотрим краевую задачу на $[0, a]$, $0 < a < 1$ с условиями

$$w(x, \nu) = O(1), \quad x \rightarrow 0, \quad w(a, \nu) = w^0, \quad w^0 \in \mathbb{R}^1, \quad w^0 \neq 0. \quad (3.2)$$

Введем обозначение $\nu^2 = 1/\varepsilon^2$ и сведем задачу (3.1), (3.2) к следующей сингулярно возмущенной задаче при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$L_\varepsilon w \equiv \varepsilon^2 x^2 w'' + \varepsilon^2 x w' - (1 - x^2)w = \varepsilon^2 h(x), \quad (3.3)$$

$$w(x, \varepsilon) = O(1), \quad x \rightarrow 0, \quad w(a, \varepsilon) = w^0, \quad w^0 \neq 0. \quad (3.4)$$

Построим регуляризованные, асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерные по x решения краевой задачи (3.3), (3.4) в областях и на линиях Стокса в плоскости $\mathbb{C}(\varepsilon)$. Для решения задачи (3.3), (3.4) применим метод регуляризации [1].

3.2. Построение формальных регуляризованных решений задачи (3.3), (3.4). Вместо искомого решения $w(x, \varepsilon)$ введем расширенную функцию $\hat{w}(x, \tau, \varepsilon)$, за дополнительную переменную τ примем регуляризирующую функцию

$$\tau = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^a \lambda(\xi) d\xi \equiv \varphi(x, \varepsilon), \quad (3.5)$$

где $\lambda(x) = \lambda_1(x)$ – корень характеристического уравнения (1.2). Потребуем, чтобы функция $\hat{w}(x, \tau, \varepsilon)$ имела своим сужением при $\tau = \varphi(x, \varepsilon)$ искомое решение задачи (3.3), (3.4).

Из (3.3)–(3.5) получаем следующую краевую задачу для функции $\hat{w}(x, \tau, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 L_2 \hat{w} + \varepsilon L_1 \hat{w} + L_0 \hat{w} &= \varepsilon^2 h(x), \\ L_0 w &\equiv x^2 \lambda^2(x) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - (1 - x^2)w, \quad L_1 w \equiv 2x^2 \lambda(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} + x(x \lambda(x))' \frac{\partial w}{\partial \tau}, \\ L_2 w &\equiv x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

с условиями

$$\hat{w}(x, \tau, \varepsilon) = O(1), \quad x \rightarrow 0, \quad \hat{w}(a, 0, \varepsilon) = w^0. \quad (3.7)$$

Задача (3.6), (3.7) регулярна по ε . Определим ее решение в виде ряда:

$$\hat{w}(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, \tau). \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.6) получаем уравнения для $v_k(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} L_0 v_0(x, \tau) &= 0, & L_0 v_1(x, \tau) &= -L_1 v_0(x, \tau), \\ L_0 v_2(x, \tau) &= -L_1 v_1(x, \tau) - L_2 v_0(x, \tau) + h(x), \\ L_0 v_k(x, \tau) &= -L_1 v_{k-1}(x, \tau) - L_2 v_{k-2}(x, \tau), & k &= 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

Краевые условия определяются из (3.7), (3.8):

$$\begin{aligned} |v_k(x, \tau)| &< \tilde{C}, & x &\rightarrow 0, & k &= 0, 1, 2, \\ v_k(x, \tau) &\rightarrow 0, & k &= 3, 4, \dots, \\ v_0(a, 0) &= w^0, & v_k(a, 0) &= 0, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Согласно идее метода регуляризации для решения задачи (3.9), (3.10) определим пространство безрезонансных решений U следующим образом:

$$U = \{v_k : v_k(x, \tau) = b_k(x)e^\tau + y_k(x)\}. \quad (3.11)$$

Пространство U двумерное, его базис состоит из элементов $v_1^* = e^\tau = \{1, 0\}$, $v_2^* = 1 = \{0, 1\}$.

В пространстве U при каждом фиксированном x определим скалярное произведение

$$\langle v_i, v_j \rangle = b_i(x)b_j(x) + y_i(x)y_j(x). \quad (3.12)$$

Определим результаты действия операторов L_n , $n = 0, 1, 2$, из (3.6) на функции $v_k(x, \tau) \in U$, $k = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} L_0 v_k &\equiv [x^2 \lambda^2(x) - (1 - x^2)] b_k(x) e^\tau - (1 - x^2) y_k \equiv -(1 - x^2) y_k, \\ L_1 v_k &\equiv x [2x \lambda(x) b'_k + (x \lambda(x))' b_k(x)] e^\tau \equiv x e^\tau \tilde{L}_1 b_k(x), \\ L_2 v_k &\equiv x [x b''_k + b'_k(x)] e^\tau + x^2 y''_k + x y'_k \equiv x e^\tau \tilde{L}_2 b_k(x) + \tilde{L}_3 y_k(x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Операторы $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ определены в формулах (1.12).

Из (3.9), (3.13) получаем следующие рекуррентные уравнения для определения функций $b_k(x)$, $y_k(x)$:

$$\begin{aligned} L_0 v_0(x, \tau) &= 0, & L_0 v_1(x, \tau) &= -x e^\tau \tilde{L}_1 b_0(x), \\ L_0 v_2(x, \tau) &= -x e^\tau [\tilde{L}_1 b_1(x) + \tilde{L}_2 b_0(x)] - \tilde{L}_3 y_0(x) + h(x), \\ L_0 v_k(x, \tau) &= -x e^\tau [\tilde{L}_1 b_{k-1}(x) + \tilde{L}_2 b_{k-2}(x)] - \tilde{L}_3 y_{k-2}(x), & k &= 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Краевые условия определим согласно (3.10), (3.11):

$$|b_k(0)| < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, 3, \dots, \quad |y_2(0)| < \infty, \quad (3.15)$$

$$b_0(a) + y_0(a) = w^0, \quad b_k(a) + y_k(a) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Запишем уравнения (3.14) в виде

$$L_0 v_i(x, \tau) = f_i(x, \tau), \quad f_i(x, \tau) \in U, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Пространство U конечномерно, оператор L_0 нормально разрешим, и по теории метода регуляризации [1, с. 45] следует, что для разрешимости системы (3.17) в U необходимо и достаточно, чтобы $\langle f_i, \ker L_0^* \rangle \equiv 0$ (тождественно

по x). В пространстве U оператор L_0 самосопряженный, базисом ядра в U является элемент $v_1^* = e^\tau = \{1, 0\}$, условия ортогональности принимают вид

$$\langle f_i, v_1^* \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

При условиях (3.18) краевые задачи (3.13)–(3.16) однозначно разрешимы. Поскольку $L_0 v_0 \equiv -(1 - x^2)y_0$, то из первого уравнения (3.14) находим

$$y_0(x) \equiv 0. \quad (3.19)$$

Второе уравнение из (3.14) будет иметь вид

$$L_0 v_1(x, t) = -x[2x\lambda(x)b_0'(x) + (x\lambda(x))'b_0(x)]e^\tau.$$

Правая часть принадлежит пространству U . Применяя к ней условие ортогональности (3.18), для функции $b_0(x)$ получим уравнение

$$\tilde{L}_1 b_0(x) \equiv 2\sqrt{1-x^2}b_0'(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}b_0(x) = 0 \quad (3.20)$$

с начальным условием $b_0(a) = w^0$.

Из (3.20) имеем

$$b_0(x) = \frac{\sqrt[4]{1-a^2}w^0}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad b_0(0) = \sqrt[4]{1-a^2}w^0 = D. \quad (3.21)$$

При этом получаем уравнение $L_0 v_1(x, \tau) = 0$, эквивалентное $-(1-x^2)y_1(x) = 0$, из которого определим

$$y_1(x) \equiv 0. \quad (3.22)$$

Третье уравнение в (3.14) будет следующим:

$$(1-x^2)y_2(x) = x[\tilde{L}_1 b_1 + \tilde{L}_2 b_0(x)]e^\tau - h(x). \quad (3.23)$$

Из условия ортогональности (3.18) получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка для определения функции $b_1(x)$:

$$\tilde{L}_1 b_1(x) = -(xb_0'' + b_0'(x)), \quad b_1(a) = 0. \quad (3.24)$$

Начальное условие получили из (3.16), (3.22).

Общее решение уравнения (3.24) запишем в виде

$$b_1(x) = \frac{C}{\sqrt[4]{1-x^2}} + D_1^{(1)}(x),$$

где $D_1^{(1)}(x)$ – частное решение уравнения (3.24), удовлетворяющее условию $D_1^{(1)}(0) = 0$. Из начального условия определим C , и в результате функция определится формулой

$$b_1(x) = -\sqrt[4]{\frac{1-a^2}{1-x^2}}D_1^{(1)}(a) + D_1^{(1)}(x), \quad |b_1(0)| = |-\sqrt{1-a^2}D_1^{(1)}(a)| < \infty. \quad (3.25)$$

Теперь уравнение (3.23) примет вид $(1 - x^2)y_2(x) = -h(x)$, из него определим функцию

$$y_2(x) = -\frac{h(x)}{1 - x^2}. \quad (3.26)$$

Методом математической индукции доказывается, что таким образом последовательно определяются функции $b_k(x)$ из рекуррентных задач

$$\tilde{L}_1 b_k(x) = -\tilde{L}_2 b_{k-1}(x), \quad b_k(a) = -y_k(a) \quad (3.27)$$

по следующим формулам:

$$b_k(x) = -\sqrt[4]{\frac{1 - a^2}{1 - x^2}} (D_k^{(1)}(a) + y_k(a)) + D_k^{(1)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.28)$$

где функции $D_k^{(1)}(x)$ – частные решения уравнения (3.27) при $D_k^{(1)}(0) = 0$. Функции $y_k(x)$ определяются далее из рекуррентных уравнений

$$(1 - x^2)y_k(x) = \tilde{L}_3 y_{k-2}(x), \quad k = 3, 4, \dots, \quad y_k(0) = 0. \quad (3.29)$$

Все функции $b_k(x)$ и $y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, являются аналитическими при $x \in [0, 1)$ и однозначно определены, откуда следует, что однозначно определяются функции

$$v_k(x, t) = e^t b_k(x) + y_k(x) \quad (3.30)$$

из пространства U .

Подставляем $v_k(x, t)$, (3.30), в ряд (3.8) и получаем решение задачи (3.9), (3.10) в виде регуляризованного ряда с коэффициентами из пространства U :

$$\hat{w}(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (e^{\tau} b_k(x) + y_k(x)).$$

Проведем сужение этого решения на регуляризующую функцию $\tau = \varphi(z, \varepsilon)$, в результате получим формальное регуляризованное решение при $h(x) \not\equiv 0$ краевой задачи (3.3), (3.4):

$$w_I(x, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_x^a \lambda_1(\xi) d\xi\right) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x). \quad (3.31)$$

Решение (3.31) уравнения (3.3) состоит из суммы двух рядов. Первый ряд является решением однородного уравнения. Второй ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x)$, называемый основным, является формальным решением уравнения (3.3) при $h(x) \not\equiv 0$ и совпадает с рядом, который получается непосредственной подстановкой формального ряда по степеням ε в уравнение (3.3).

3.3. Доказательство асимптотической сходимости основного ряда.

Поскольку $y_0(x) \equiv 0$, $y_{2n-1}(x) \equiv 0$, $n = 1, 2, \dots$, то основной ряд будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} y_{2k}(x)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Основной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x)$ в (3.31) является асимптотическим разложением аналитического по x решения $w(x, \varepsilon)$ уравнения (3.3) при $h(x) \not\equiv 0$, равномерным по $x \in [0, a]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области*

$$\Omega = \left\{ \varepsilon: \delta < |\arg \varepsilon| < \pi - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (3.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнении (3.3) сделаем аналитическое продолжение коэффициентов и $h(x)$ в комплексную плоскость z . Рассмотрим уравнение (3.3) и его решение $w(z, \varepsilon)$ в области $\tilde{G} = \{z: |z| < R, a < R < 1\}$.

Пусть $w(z, \varepsilon)$ – точное решение уравнения (3.3), а $w_{2n}(z, \varepsilon)$ – асимптотическое решение порядка $2n$. Остаточный член обозначим

$$R_{2n}(z, \varepsilon) = w(z, \varepsilon) - w_{2n}(z, \varepsilon) = \varepsilon^{2(n+1)} V_n(z, \varepsilon),$$

$$V_n(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} y_{2(n+1+k)}(z), \quad V_n(0, \varepsilon) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Определим уравнение, которому удовлетворяет функция $V_n(z, \varepsilon)$, действуя оператором L_ε , (3.3), на первое равенство в (3.33):

$$L_\varepsilon w - \sum_{k=1}^n \varepsilon^{2k} L_\varepsilon y_{2k}(z) = \varepsilon^{2(n+1)} L_\varepsilon V_n(z, \varepsilon).$$

Поскольку $L_\varepsilon w = \varepsilon^2 h(z)$, то с учетом формул (3.26), (3.29) получим уравнение

$$L_\varepsilon V_n(z, \varepsilon) = -(z^2 y''_{2n}(z) + z y'_{2n}(z)). \quad (3.34)$$

Будем определять решение уравнения (3.34) в виде ряда:

$$V_n(z, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(\varepsilon) z^k. \quad (3.35)$$

Разложим правую часть уравнения (3.34) в ряд по степеням z и запишем уравнение в развернутом виде:

$$\varepsilon^2 z^2 V''_n + \varepsilon^2 z V'_n - (1 - z^2) V_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} z^k, \quad (3.36)$$

где $|b_{nk}| < M_n/R_1^k$ и M_n – некоторая постоянная, $0 < R_1 < R$. Подставляя ряд (3.35) в уравнение (3.36), получим для коэффициентов $a_{nk}(\varepsilon)$ рекуррентные формулы

$$a_{n1}(\varepsilon) = \frac{b_{n1}}{\varepsilon^2 - 1}, \quad a_{n2}(\varepsilon) = \frac{b_{n2}}{2\varepsilon^2 - 1}, \quad a_{nk}(\varepsilon) = \frac{b_{nk} - a_{n(k-2)}(\varepsilon)}{k^2 \varepsilon^2 - 1}, \quad k \geq 3. \quad (3.37)$$

В области Ω для любого ε справедливы неравенства

$$|k\varepsilon - 1| > \sin \delta = s, \quad |k\varepsilon + 1| > \sin \delta = s. \quad (3.38)$$

Учитывая (3.38), получим следующие оценки для $a_{nk}(\varepsilon)$:

$$|a_{n1}(\varepsilon)| < \frac{M_n}{R_1 s^2} < \frac{P_n}{R_1}$$

(число P_n будет определено ниже),

$$|a_{n2}(\varepsilon)| < \frac{M_n}{R_1^2 s^2} < \frac{P_n}{R_1^2},$$

$$|a_{n3}(\varepsilon)| = \left| \frac{b_{n3} - a_{n1}}{3\varepsilon^2 - 1} \right| < \frac{\frac{M_n}{R_1^3} + \frac{P_n}{R_1}}{s^2} < \frac{K_n(1 + P_n)}{R_1^3} < \frac{K_n(P_n^2 - 1)}{R_1^3(P_n - 1)} < \frac{P_n^2}{R_1^3}, \quad (3.39)$$

где $K_n = \frac{1}{s^2} \max\{M_n, R_1^2\}$, $P_n > 1 + K_n$ (см. (2.18)).

Методом математической индукции доказывается, что

$$|a_{nk}(\varepsilon)| < \frac{P_n^{k-1}}{R_1^k}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

Из соотношений (3.40) следует, что ряд (3.35) сходится при $|z| < R_1/P_n$, и так как уравнение (3.34) не имеет других особых точек в области $\tilde{G}$, кроме $z = 0$, то при аналитическом продолжении сумма ряда не будет иметь особых точек в области $\tilde{G}$, следовательно, ряд сходится при $|z| < R$, сумма ряда $V_n(z, \varepsilon)$ есть функция, аналитическая по z в области $\tilde{G}$ при любых $\varepsilon \in \Omega$. Функция $V_n(z, \varepsilon)$ как сумма степенного ряда (3.35) будет ограничена по модулю: $|V_n(z, \varepsilon)| < B_n$ — равномерно по z при $|z| \leq a < R$, постоянная B_n не зависит от $\varepsilon \in \Omega$. Таким образом, из (3.33) получаем

$$\left| w(z, \varepsilon) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} y_{2k}(z) \right| \leq |\varepsilon|^{2n+2} B_n. \quad (3.41)$$

Поскольку $y_0(z) \equiv 0$, $y_{2k-1}(z) \equiv 0$, $k = 1, 2, \dots$, то из (3.41) следует, что справедливы неравенства

$$\left| w(z, \varepsilon) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k y_k(z) \right| \leq |\varepsilon|^{n+1} C_n, \quad (3.42)$$

равномерные по z при $|z| \leq a$, C_n не зависит от $\varepsilon \in \Omega$. Из (3.42) следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнено условие (*); тогда краевая задача (3.3), (3.4) имеет равномерное по x регуляризованное асимптотическое решение $w_1(x, \varepsilon)$ при $\lambda_1(x)$, выражаемое формулой (3.31) для $h(x) \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области $E_1^\delta = \{\varepsilon: \delta < |\arg \varepsilon| \leq \pi/2\}$ и для $h(x) \equiv 0$ в области $E_1 = \{\varepsilon: \operatorname{Re} \varepsilon \geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим функции $b_n(x)$, (3.21), (3.28), в соотношение (3.31) и получим решение $w_1(x, \varepsilon)$ в виде

$$\begin{aligned} w_1(x, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_x^a \lambda_1(\xi) d\xi\right) & \left(\frac{w^0 \sqrt[4]{1-a^2}}{\sqrt[4]{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[D_k^{(1)}(x) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt[4]{\frac{1-a^2}{1-x^2}} (D_k^{(1)}(a) + y_k(a)) \right] \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \quad D_k^{(1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В формуле (3.43) функции $b_0(x)$, $D_k^{(1)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, как следует из формул (3.20), (3.27), удовлетворяют системе (2.21), следовательно, по теоремам 2.1, 2.2, 3.1, свойствам асимптотических разложений и неравенству в E_1

$$\left| \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_x^a \lambda_1(\xi) d\xi\right) \right| \leq 1$$

будет следовать, что формула (3.31) определяет равномерное по x регуляризованное асимптотическое разложение решения $w_1(x, \varepsilon)$ задачи (3.3), (3.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в указанных областях. Условия (3.4) выполнены.

Все изложенное при решении краевой задачи (3.3), (3.4) в области $E_1^{(\delta)}(\varepsilon)$ при $h(x) \neq 0$ (в E_1 при $h(x) \equiv 0$) можно аналогично провести при $\lambda(x) = \lambda_2(x)$ и получить аналогичный результат для решения $w_{II}(x, \varepsilon)$ в области $E_2^{(\delta)}(\varepsilon) = \{\varepsilon: \pi/2 \leq |\arg \varepsilon| < \pi - \delta\}$ при $h(x) \neq 0$ и в области $E_2(\varepsilon) = \{\varepsilon: \pi/2 \leq |\arg \varepsilon| \leq \pi\}$ для $h(x) \equiv 0$. В итоге получим формулу

$$w_{II}(x, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_x^a \lambda_2(\xi) d\xi\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n b_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x). \quad (3.44)$$

3.4. Решение задачи на линиях Стокса. В комплексной плоскости $\varepsilon = \gamma + i\eta$ на линиях S_k , $k = 1, 2$ ($\varepsilon = (-1)^{k+1}i\eta$, $\eta \neq 0$), будут справедливы формулы (3.31) для $w_I(x, \varepsilon)$ и (3.44) для $w_{II}(x, \varepsilon)$; S_k — линии Стокса в плоскости ε [15, п. 3.5]. Уравнение (3.3) на S_1 будет иметь вид

$$\eta^2 x^2 w'' + \eta^2 x w' + (1 - x^2)w = \eta^2 h(x). \quad (3.45)$$

Решение задачи (3.45), (3.3), (3.4) можно записать в действительной форме:

$$\begin{aligned} w(x, \eta) = & \left(\cos \frac{1}{\eta} \int_x^a \lambda_1(\xi) d\xi \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta^{2n} b_{2n}(x) \\ & + \left(\sin \frac{1}{\eta} \int_x^a \lambda_1(\xi) d\xi \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \eta^{2n-1} b_{2n-1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \eta^{2n} y_{2n}(x). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Если перейти в формулах (3.31), (3.44), (3.46) от ε к ν по формуле $\varepsilon = 1/\nu$, то получим асимптотические решения задачи (3.1), (3.2) при $\nu \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. С. А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, Наука, М., 1981; англ. пер.: S. A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Transl. Math. Monogr., **112**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
2. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge; Macmillan, New York, 1944.
3. М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.
4. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. III, ч. 2, Физматгиз, М., 1958; англ. пер.: V. I. Smirnov, *A course of higher mathematics. Vol. III. Part two. Complex variables. Special functions*, Transl. Math. Monogr., **60**, Pergamon Press, Oxford—Edinburgh—New York; Addison-Wesley, Reading—London, 1964.
5. А. С. Юдина, “Асимптотические разложения цилиндрических функций от двух действительных переменных”, *ЖВМ и МФ*, **1:6** (1961), 1099–1104; англ. пер.: A. S. Yudina, “Asymptotic expansions of cylindrical functions of two real variables”, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, **1:6** (1962), 1277–1283.
6. П. И. Кузнецов, А. С. Юдина, “Некоторые свойства нулей цилиндрических функций от двух действительных переменных”, *ЖВМ и МФ*, **12:3** (1972), 739–746; англ. пер.: P. I. Kuznetsov, A. S. Yudina, “Some properties of the zeros of the cylinder functions of two real variables”, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, **12:3** (1972), 208–218.

7. П. И. Кузнецов, А. С. Юдина, “Некоторые асимптотические разложения неполного интеграла вероятности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **18**:2 (1973), 367–371; англ. пер.: P. I. Kuznetsov, A. S. Yudina, “Some asymptotic expansions for an incomplete probability integral”, *Theory Probab. Appl.*, **18** (1973), 355–359.
8. П. И. Кузнецов, А. С. Юдина, “Асимптотические решения вырожденного гипергеометрического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **23**:3 (1987), 428–434; англ. пер.: P. I. Kuznetsov, A. S. Yudina, “Asymptotic expansions of solutions of a confluent hypergeometric equation”, *Differential Equations*, **23**:3 (1987), 300–305.
9. А. С. Юдина, “О методе регуляризации для уравнений с регулярной особой точкой”, *Тр. МЭИ*, **357** (1978), 119–121.
10. А. С. Юдина, “Асимптотика решения сингулярного уравнения с регулярной особой точкой”, *Тр. МЭИ*, **566** (1982), 82–86.
11. А. С. Юдина, “Регуляризованные асимптотические разложения функций Бесселя”, *Тр. МЭИ*, **573** (1982), 106–111.
12. С. А. Ломов, А. С. Юдина, “Структура фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного уравнения с регулярной особой точкой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 1124–1133; англ. пер.: S. A. Lomov, A. S. Yudina, “The structure of a fundamental system of solutions of a singularly perturbed equation with a regular singular point”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:2 (1983), 415–424.
13. А. С. Юдина, “Асимптотическое решение задачи Коши для неоднородного уравнения Бесселя с мнимым параметром”, *Сб. науч. трудов МЭИ*, **141** (1987), 105–109.
14. Н. Г. де Брейн, *Асимптотические методы в анализе*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1958.
15. А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: A. Erdelyi, *Asymptotic expansions*, Dover, New York, 1956.

А. С. ЮДИНА (A. S. YUDINA)
E-mail: a.s.yudina@mail.ru

Поступило в редакцию
12.06.2007
18.04.2008