Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Салимов, Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 5, 141–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:54:47

УДК 517.5

Р. Р. Салимов

Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений

Установлено, что Q -гомеоморфизмы по Мартио в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, абсолютно непрерывны на линиях, кроме того, принадлежат классу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$ и дифференцируемы почти всюду при $Q \in L_{\text{loc}}^1$.

Библиография: 17 наименований.

§ 1. Введение

Геометрический подход к исследованию современных классов отображений использует модули семейства кривых и емкости конденсаторов.

Напомним, что борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ и записывается $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geq 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_G \rho^n(x) \, dm,$$

где m – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Профессор О. Мартио предложил следующую концепцию (см., например, [1]–[3]). Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q: G \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f: G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *Q -гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_G Q(x) \rho^n(x) \, dm$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вайсяля, (см., например, [4, пп. 13.1 и 34.6]). Целью теории Q -гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и отображения f .

Проблема локального и граничного поведения Q -гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in \text{ВМО}$ (ограниченного среднего колебания) в работах [1]–[3], а в случае $Q \in \text{ФМО}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях – в работах [5]–[8]. В настоящей статье устанавливается свойство абсолютной непрерывности на линиях (ACL) для Q -гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при локально интегрируемой Q . Также показана принадлежность таких Q -гомеоморфизмов

соболевскому классу $W_{\text{loc}}^{1,1}$ и их дифференцируемость п. в. В этой связи необходимо также упомянуть, что аналогичные вопросы исследовались ранее для отображений с ограниченным искажением, которые были в свое время ближайшим обобщением квазиконформных отображений (см. [9] и [10]).

Следуя работе [10], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*; E называем *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ – кольцо, т. е. если B – область, дополнение которой $\mathbb{R}^n \setminus B$ состоит в точности из двух компонент; E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области G , если $A \subset G$. Очевидно, что если $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в G , то (fA, fC) также является конденсатором в fG . Далее $fE = (fA, fC)$.

Пусть $E = (A, C)$ – конденсатор; $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что:

- 1) $u \in C_0(A)$, где C_0 – класс непрерывных функций, финитных в A ;
- 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$;
- 3) u принадлежит классу ACL и

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right)^{1/2}.$$

Величина

$$\text{cap } E = \text{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm$$

называется *ёмкостью* конденсатора E . Известно, что

$$(\text{cap } E)^{n-1} \geq b_n \frac{d(C)^n}{m(A)},$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C , $m(A)$ – мера Лебега множества A , b_n – положительная константа, зависящая только от размерности n (см. [10, лемма 5.9]), и

$$\text{cap } E = M(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)),$$

где для множеств S_1, S_2 и S_3 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, через $\Delta(S_1, S_2; S_3)$ обозначено семейство всех непрерывных кривых, соединяющих S_1 и S_2 в S_3 (см. [11]–[13]).

§ 2. Дифференцируемость Q -гомеоморфизмов почти всюду

ТЕОРЕМА 1. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L_{\text{loc}}^1$. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду в G .

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в G , $\Phi(B) = m(fB)$. По теореме о дифференцируемости неотрицательных субаддитивных функций множества (см., например, [14, п. III.2.4]) существует конечный предел для п. в. $x \in G$:

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(B(x, \varepsilon))}{\Omega_n \varepsilon^n},$$

где $B(x, \varepsilon)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in D$ и радиусом $\varepsilon > 0$, Ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Величина $\varphi(x)$ называется *объёмной производной* отображения f в точке x .

При $x, y \in G$ полагаем

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Таким образом, по теореме Радемахера–Степанова (см., например, [15, с. 311]) доказательство теоремы сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда п. в. выполняется

$$L(x, f) \leq \gamma_n \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x), \quad (1)$$

где константа γ_n зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_\varepsilon(x) = \{y: \varepsilon < |x - y| < 2\varepsilon\}$, $x \in G$, – сферическое кольцо с произвольным $\varepsilon > 0$ таким, что $B(x, 2\varepsilon) \subset G$. Тогда $(fB(x, 2\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)})$ – кольцевой конденсатор в G' и согласно [11] (см. также [12] и [13]) имеем

$$\text{cap}(fB(x, 2\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)}) = M(\Delta(\partial fB(x, 2\varepsilon), \partial fB(x, \varepsilon); fR_\varepsilon(x))),$$

а ввиду гомеоморфности f получаем

$$\Delta(\partial fB(x, 2\varepsilon), \partial fB(x, \varepsilon); fR_\varepsilon(x)) = f(\Delta(\partial B(x, 2\varepsilon), \partial B(x, \varepsilon); R_\varepsilon(x))).$$

Таким образом, так как f является Q -гомеоморфизмом, то

$$\text{cap}(fB(x, 2\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)}) \leq \int_G Q(x) \rho^n(x) dm$$

для любой допустимой функции ρ семейства $\Delta(\partial B(x, 2\varepsilon), \partial B(x, \varepsilon); R_\varepsilon(x))$. Функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & x \in R_\varepsilon(x), \\ 0, & x \in G \setminus R_\varepsilon(x), \end{cases}$$

является допустимой; таким образом, имеем

$$\text{cap}(fB(x, 2\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)}) \leq \frac{2^n \Omega_n}{m(B(x, 2\varepsilon))} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm. \quad (2)$$

С другой стороны, в силу [10, лемма 5.9] получаем

$$\text{cap}(fB(x, 2\varepsilon), \overline{fB(x, \varepsilon)}) \geq \left(C_n \frac{d^n(fB(x, \varepsilon))}{m(fB(x, 2\varepsilon))} \right)^{1/(n-1)}, \quad (3)$$

где C_n – константа, зависящая только от размерности n пространства, $d(A)$ – диаметр, а $m(A)$ – мера Лебега множества A в $\mathbb{R}^n$.

Комбинируя (2) и (3), получаем

$$\frac{d(fB(x, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_n \left(\frac{m(fB(x, 2\varepsilon))}{m(B(x, 2\varepsilon))} \right)^{1/n} \left(\frac{1}{m(B(x, 2\varepsilon))} \int_{B(x, 2\varepsilon)} Q(y) dm \right)^{(n-1)/n},$$

следовательно, п. в.

$$L(x, f) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(fB(x, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq \gamma_n \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда f имеет локально суммируемые частные производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактного множества $V \subset G$ имеем

$$\int_V L(x, f) dm \leq \gamma_n \int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x) dm$$

и, применяя неравенство Гёльдера (см., например, [16, (17.3)]) при $p = n$ и $q = n/(n-1)$, получаем

$$\int_V \varphi^{1/n}(x) Q^{(n-1)/n}(x) dm \leq \left(\int_V \varphi(x) dm \right)^{1/n} \left(\int_V Q(x) dm \right)^{(n-1)/n}.$$

Окончательно, ввиду того, что $Q \in L^1_{\text{loc}}$, по теореме Лебега приходим к заключению, что

$$\int_V L(x, f) dm \leq \gamma_n m(fV)^{1/n} \left(\int_V Q(x) dm \right)^{(n-1)/n} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда п. в.

$$K_O(x, f) \leq C_n Q^{n-1}(x),$$

где постоянная C_n зависит только от n .

Здесь через $K_O(x, f)$, как обычно, обозначается внешняя дилатация отображения f в точках дифференцируемости x , т. е.

$$K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{|f'(x)|^n}{|J(x, f)|}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

§ 3. Абсолютная непрерывность на линиях

Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n: a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ – открытый n -мерный интервал. Говорят, что отображение $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL (или абсолютно непрерывно на линиях), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I , параллельных координатным осям.

Если D – область в $\mathbb{R}^n$, то говорят, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала $I, \bar{I} \subset D$. Если D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, то гомеоморфизм $f: D \rightarrow D'$ принадлежит классу ACL, когда сужение $f|_{D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}}$ принадлежит классу ACL.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L^1_{\text{loc}}$. Тогда $f \in \text{ACL}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – n -мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными осям координат, и $\bar{I} \subset G$. Тогда $I = I_0 \times J$, где I_0 – $(n-1)$ -мерный интервал в $\mathbb{R}^{n-1}$, J – одномерный интервал, $J = (a, b)$. Далее отождествляем $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ с $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для почти всех сегментов $J_z = \{z\} \times J$, $z \in I_0$, отображение $f|_{J_z}$ абсолютно непрерывно.

Рассмотрим функцию множеств, определенную над алгеброй борелевских множеств B в I_0 , $\Phi(B) = m(f(B \times J))$. По теореме о дифференцируемости неотрицательных субаддитивных функций множеств (см., например, [14, п. III.2.4]) существует конечный предел

$$\varphi(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \quad (4)$$

для п. в. $z \in I_0$, где через $B(z, r)$ обозначается шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке $z \in I_0$ и радиусом r , Ω_{n-1} – объем единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть Δ_i , $i = 1, 2, \dots$, – некоторая перенумерация совокупности S всех интервалов в J при $\bar{\Delta}_i \subset J$ и с рациональными концами, и пусть

$$\varphi_i(z) := \int_{\Delta_i} Q(z, x_n) dx_n.$$

Тогда по теореме Фубини (см., например, [15, п. III.8.1]) функции $\varphi_i(z)$ п. в. конечны и интегрируемы по $z \in I_0$. Кроме того, п. в. существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} = \varphi_i(z), \quad (5)$$

где

$$\Phi_i(B(z, r)) = \int_{B(z, r)} \varphi_i(\zeta) d\zeta, \quad z \in I_0.$$

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на всех сегментах J_z , $z \in I_0$, на которых пределы (4) и (5) существуют и конечны. Обозначим соответствующее множество z через Z_0 и покажем, что сумма диаметров образов любого конечного набора непересекающихся сегментов в $J_z = \{z\} \times J$, $z \in Z_0$, стремится к нулю вместе с суммарной длиной интервалов. Ввиду непрерывности f вдоль J_z достаточно проверить этот факт для сегментов с рациональными концами в J_z . Итак, пусть $\Delta_i^* = \{z\} \times \bar{\Delta}_i \subset J_z$, $z \in Z_0$, $i = 1, \dots, k$, где $\Delta_i \in S$, $i = 1, \dots, k$, взаимно не пересекаются. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, k$, также попарно не пересекаются.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное рациональное число, которое меньше половины минимального расстояния между $\bar{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, k$, а также меньше их расстояния до концевых точек интервала J . Пусть $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\delta_i = (\alpha_i - \delta, \beta_i + \delta)$,

$i = 1, \dots, k$, и $A_i = A_i(r) = B(z, r) \times \delta_i$, где $B(z, r)$ – открытый шар в $I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с центром в точке z и радиусом $r > 0$. При малых $r > 0$ имеем, что (A_i, Δ_i^*) , $i = 1, \dots, k$, – конденсаторы в I и, следовательно, $(fA_i, f\Delta_i^*)$, $i = 1, \dots, k$, – также конденсаторы в G' .

В соответствии с работой [13] получаем

$$\text{cap}(fA_i, f\Delta_i^*) = M(\Delta(\partial fA_i, f\Delta_i^*; fA_i))$$

и, как легко видеть, по гомеоморфности f имеем

$$\Delta(\partial fA_i, f\Delta_i^*; fA_i) = f(\Delta(\partial A_i, \Delta_i^*; A_i)).$$

Таким образом, поскольку конденсаторы кольцевые, а f – Q -гомеоморфизм, получаем

$$\text{cap}(fA_i, f\Delta_i^*) \leq \int_G Q(x) \rho^n(x) dm$$

при любой допустимой функции ρ для $\Delta(\partial A_i, \Delta_i^*; A_i)$. При $r < \delta$ функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & x \in A_i, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A_i, \end{cases}$$

является допустимой и, таким образом,

$$\text{cap}(fA_i, f\Delta_i^*) \leq \frac{1}{r^n} \int_{A_i} Q(x) dm. \quad (6)$$

С другой стороны, известно (см. [10, лемма 5.9]), что

$$\text{cap}(fA_i, f\Delta_i^*) \geq \left(C_n \frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)}, \quad (7)$$

где d_i – диаметр множества $f\Delta_i^*$, m_i – объем множества fA_i , а C_n – константа, зависящая только от размерности пространства.

Комбинируя (6) и (7), имеем неравенство

$$\left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)} \leq \frac{c_n}{r^n} \int_{A_i} Q(x) dm \quad (8)$$

с новой константой c_n , зависящей только от n , при всех $i = 1, \dots, k$.

Далее, по дискретному неравенству Гёльдера (см., например, [16, (17.3)]) при $p = n/(n-1)$, $q = n$, $x_k = d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k = m_k^{1/n}$ получаем

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \left(\sum_{i=1}^k m_i \right)^{1/n},$$

то есть

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i \right)^n \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{d_i^n}{m_i} \right)^{1/(n-1)} \right)^{n-1} \Phi(B(z, r)),$$

и ввиду (8) имеем

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^n \leq \gamma_n \frac{\Phi(B(z, r))}{\Omega_{n-1} r^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\int_{A_i} Q(x) dm}{\Omega_{n-1} r^{n-1}}\right)^{n-1},$$

где γ_n зависит только от n . Предполагая, что здесь сначала $r \rightarrow 0$, а затем $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^n \leq \gamma_n \varphi(z) \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i(z)\right)^{n-1}. \quad (9)$$

Наконец, в силу (9) абсолютная непрерывность неопределенного интеграла Q над сегментами $J_z, z \in Z_0$, влечет абсолютную непрерывность на том же сегменте отображения f .

Комбинируя теорему 2 и следствие 1, получаем (см., например, [17])

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G и G' – области в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, и пусть $f: G \rightarrow G'$ – Q -гомеоморфизм при $Q \in L_{\text{loc}}^1$. Тогда $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$.

Список литературы

1. О. Мартио, В. Рязанов, У. Сребро, Э. Якубов, “К теории Q -гомеоморфизмов”, *Докл. РАН*, **381**:1 (2001), 20–22; англ. пер.: O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “On the theory of $Q(x)$ -homeomorphisms”, *Dokl. Math.*, **64**:3 (2001), 306–308.
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “ Q -homeomorphisms”, *Complex analysis and dynamical systems. Proceedings of the 3rd international conference* (Karmiel, 2001), *Contemp. Math.*, **364**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 193–203.
3. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “On Q -homeomorphisms”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **30**:1 (2005), 49–69.
4. J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, *Lecture Notes in Math.*, **229**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
5. А. Игнатьев, В. Рязанов, “Конечное среднее колебание в теории отображений”, *Укр. мат. вист.*, **2**:3 (2005), 395–417; англ. пер.: A. A. Ignat'ev, V. I. Ryazanov, “Finite mean oscillation in mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **2**:3 (2005), 403–424.
6. А. Игнатьев, В. Рязанов, “К теории граничного поведения пространственных отображений”, *Укр. мат. вист.*, **3**:2 (2006), 199–211; англ. пер.: A. A. Ignat'ev, V. I. Ryazanov, “On the theory of the boundary behavior of spatial mappings”, *Ukr. Math. Bull.*, **3**:2 (2006), 189–201.
7. V. Ryazanov, R. Salimov, “Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **4**:2 (2007), 199–234.
8. В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, “Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q -гомеоморфизмов”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:6 (2007), 1361–1376; англ. пер.: V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov, “Equicontinuous classes of ring Q -homeomorphisms”, *Siberian Math. J.*, **48**:6 (2007), 1093–1105.
9. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
10. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **448** (1969).
11. F. W. Gehring, *Complex analysis and its applications. Lectures, Internat. Sem.*, vol. II (Trieste, 1975), Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

12. J. Hesse, “A p -extremal length and p -capacity equality”, *Ark. Mat.*, **13**:1 (1975), 131–144.
13. В. А. Шлык, “О равенстве p -емкости и p -модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:6 (1993), 216–221; англ. пер.: V. A. Shlyk, “The equality between p -capacity and p -modulus”, *Siberian Math. J.*, **34**:6 (1993), 1196–1200.
14. Т. Rado, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis. With an introduction to algebraic topology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **LXXV**, Spinger-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
15. S. Saks, *Theory of the integral*, Dover, New York, 1964.
16. Э. Беккенбах, Р. Белман, *Неравенства*, Наука, М., 1965; пер. с англ.: E. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, **30**, Springer-Verlag, New York, 1965.
17. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Из-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

Р. Р. Салимов (R. R. SALIMOV)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины
E-mail: salimov@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило в редакцию
14.06.2007
04.12.2007