Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кузьмин, Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. III, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 6, 29–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:12:32

УДК 519.4

Л. В. Кузьмин

Некоторые замечания о ℓ -адическом регуляторе. III

Пусть K – конечное расширение поля рациональных ℓ -адических чисел $\mathbb{Q}_\ell$ и K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Для промежуточного поля K_n расширения K_∞/K пусть $U(K_n)$ – группа единиц поля K_n и $U(K_n)^\perp = \{x \in K_n \mid \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(x \log u) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } u \in U(K_n)\}$, где $\log: U(K_n) \rightarrow K_n$ – ℓ -адический логарифм. Дается приближенное описание группы $U(K_n)^\perp$. Доказательства основаны на использовании рядов Лорана с целыми коэффициентами и бесконечной главной частью.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Пусть K – поле алгебраических чисел, ℓ – фиксированное простое число и $U(K)$ – группа единиц поля K . Тогда существует диагональное вложение $i: U(K) \hookrightarrow \prod_{v|\ell} U(K_v)$, где K_v – пополнение K относительно точки v , $U(K_v)$ – группа единиц K_v и v пробегает все точки поля K , лежащие над ℓ . Знаменитая гипотеза Леопольдта утверждает, что i индуцирует вложение

$$i_1: U(K)[\ell] \hookrightarrow \mathcal{A}(K) := \prod_{v|\ell} U(K_v), \quad (0.1)$$

где $U(K)[\ell]$ – про- ℓ -пополнение группы $U(K)$ и $U(K_v)$ – единицы поля K_v .

В [2] была высказана следующая гипотеза, являющаяся усилением гипотезы Леопольдта.

ГИПОТЕЗА О ℓ -АДИЧЕСКОМ РЕГУЛЯТОРЕ. Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ – фундаментальная система единиц поля K . Пусть $\log: \mathcal{A}(K) \rightarrow \prod_{v|\ell} K_v$ – отображение, совпадающее на каждой компоненте с ℓ -адическим логарифмом. Тогда ℓ -адический регулятор, определяемый формулой

$$R_\ell(K) = \det(\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon_i \cdot \log \varepsilon_j)), \quad 1 \leq i, j \leq t, \quad (0.2)$$

отличен от нуля для любого поля K . Здесь $\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}}$ обозначает след из алгебры $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell = \prod_{v|\ell} K_v$ в $\mathbb{Q}_\ell$.

Таким образом, наша гипотеза утверждает, что i_1 – вложение и, кроме того, скалярное произведение

$$\mathcal{A}(K) \times \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell, \quad (x, y) \rightarrow \mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(\log x \cdot \log y), \quad x, y \in \mathcal{A}(K), \quad (0.3)$$

остается невырожденным при ограничении на $\mathrm{Im} \, i_1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 97-01-00516).

Наряду с $R_\ell(K)$ удобно определить относительный ℓ -адический регулятор. Если задано конечное расширение полей алгебраических чисел K/k и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ – некоторый базис группы относительных единиц $U(K/k)$, то относительный ℓ -адический регулятор определяется формулой

$$R_\ell(K/k) = \det(\mathrm{Sp}_{K/\mathbb{Q}_\ell}(\log \varepsilon_i \cdot \log \varepsilon_j)), \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

СЛАБАЯ ГИПОТЕЗА О ℓ -АДИЧЕСКОМ РЕГУЛЯТОРЕ. Пусть K – поле алгебраических чисел и K_∞ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Тогда существует индекс n_0 , зависящий только от расширения K_∞/K и такой, что $R_\ell(K_n/K_{n_0}) \neq 0$ для всех $n > n_0$.

В [2], [3] было дано доказательство этих гипотез для некоторых частных случаев.

Очевидно, что последняя гипотеза предполагает одновременное рассмотрение произведений (0.3) для всех промежуточных полей K_n расширения K_∞/K . Удобная для этого конструкция была предложена в [3], хотя некоторые идеи, относящиеся к этой конструкции, восходят еще к работе Ивасава [1].

Пусть K – конечное круговое расширение $\mathbb{Q}_\ell$ и $K_\infty = \bigcup K_n$ – круговое $\mathbb{Z}_\ell$ -расширение поля K . Пусть $U(K_\infty) = \varprojlim U(K_n)/\mu(K_n)$, где $\mu(K_n)$ – группа всех корней из единицы в K_n . В [3] было дано определение модуля Галуа $V(K_\infty)$ такого, что $U(K_\infty) \subset V(K_\infty)$ и $V(K_\infty)/U(K_\infty) \cong \varprojlim \mu(K_n)$ (не канонически). Кроме того, было доказано существование на $V(K_\infty)$ невырожденного внутреннего произведения

$$V(K_\infty) \times V(K_\infty) \longrightarrow \Lambda \cong \mathbb{Z}_\ell[[X]], \quad (0.4)$$

т.е. произведения, индуцирующего изоморфизм $V(K_\infty) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(V(K_\infty), \Lambda)$, где $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$ – пополненная групповая алгебра группы Галуа $\Gamma = G(K_\infty/K)$.

В случае, когда K – поле алгебраических чисел, имеющее абелевы пополнения относительно всех точек $v|\ell$, (4) приводит к полулокальному внутреннему произведению

$$\prod_{v|\ell} V(K_{\infty,v}) \times \prod_{v|\ell} V(K_{\infty,v}) \longrightarrow \Lambda, \quad (0.5)$$

которое имеет много полезных приложений [4]–[6].

В [7] было получено новое более простое доказательство основного локального результата, позволяющего строить произведения (0.4) и (0.5). Именно, пусть $k_n = H(\zeta_n)$, где H – конечное неразветвленное расширение $\mathbb{Q}_\ell$ и ζ_n – первообразный корень из единицы степени ℓ^m , $m = n + 1$ при $\ell \neq 2$ и $m = n + 2$ при $\ell = 2$. Пусть $V(k_n)$ – мультипликативная группа, порожденная $U(k_n)$ и элементом $\ell^m \sqrt[m]{u_n}$, где $u_n \in U(k_n)$ и $k_n(\ell^m \sqrt[m]{u_n})/k_n$ – неразветвленное расширение степени ℓ^m . Положим

$$\Phi_n = \ell^{-m-1} \left[\delta \mathrm{Sp}_{k_n/H} + \ell \mathrm{Sp}_{k_n/k_1} + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_n^{(i)} \right] \in \mathbb{Q}_\ell[G(k_n/H)],$$

где $\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \mathrm{Sp}_{k_n/k_{n-i}} - \mathrm{Sp}_{k_n/k_{n-i-1}}$ и $\delta = -1$ при $\ell \neq 2$, $\delta = 0$ при $\ell = 2$. В [7] была доказана

ТЕОРЕМА А. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\text{Ker Sp}_{k_n/k_0}(V(k_n)^\perp) = (\gamma - 1)\Phi_n(\log V(k_n)),$$

где γ – некоторая образующая группы $G(k_n/k_0)$ и

$$V(k_n)^\perp = \{x \in k_n \mid \text{Sp}_{k_n/\mathbb{Q}_\ell}(x \log y) \in \mathbb{Z}_\ell \text{ для всех } y \in V(k_n)\}.$$

Наиболее трудную часть этой теоремы составляет

ТЕОРЕМА В. В обозначениях теоремы А выполняется включение

$$(\gamma - 1)\Phi_n(\log U(k_n)) \subseteq U(k_n)^\perp.$$

В настоящей работе мы начинаем изучение рассмотренных выше вопросов без предположения, что рассматриваемые локальные поля являются абелевыми.

Итак, пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, поля k_n определены, как выше, и $K_n = K \cdot k_n$. В этом случае снова определены модули Галуа $V(K_n)$ и $V(K_\infty) = \varprojlim V(K_n)$, однако легко можно показать, что внутреннего произведения (4) в общем случае не существует. Что касается теоремы А, то заметим, что поля K_n начинают регулярно вести себя только для достаточно больших n , поэтому правильная формулировка теоремы А для произвольного локального поля K требует замены множителя $(\gamma - 1)$ на $(\gamma_p - 1)$, где γ_p – образующая группы $G(K_n/K_p)$ и индекс p зависит только от расширения K_∞/K . К сожалению, это обобщение неверно в общем случае, а также и теорема В перестает быть верной для неабелева локального поля K . Соответствующие контрпримеры будут рассмотрены в следующей работе из этой серии. Тем не менее, оказывается, что верен следующий ослабленный вариант теоремы В.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть K – произвольное конечное расширение $\mathbb{Q}_\ell$, $K_n = K \cdot k_n$ и $K_\infty = \bigcup K_n$. Тогда существуют индекс p и неотрицательная константа C , зависящие только от расширения K_∞/K и такие, что для любого $n > p$ в $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле $\log(U(K_n))$ существует $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль M_n такой, что группа $\log(U(K_n))/M_n$ может быть порождена не более чем Cn образующими, и

$$(\gamma_p - 1)\Phi_n(M_n) \subseteq U(K_n)^\perp.$$

При этом p и C могут быть определены эффективно.

Доказательство этой теоремы и составляет основное содержание работы. В следующей работе из этой серии мы дадим некоторые приложения этой теоремы. В частности, мы докажем, что в случае, когда K – произвольное ℓ -расширение некоторого абсолютно абелева числового поля k , для кругового $\mathbb{Z}_\ell$ -расширения K_∞/K справедлива слабая гипотеза о ℓ -адическом регуляторе. В [3] аналогичный результат был доказан в предположении, что поле K имеет абелевы пополнения K_v для всех точек $v \mid \ell$.

Теперь мы кратко изложим идею доказательства основной теоремы и дадим обзор содержания работы. Наш метод состоит в том, чтобы обобщить на случай неабелевых локальных полей доказательство теоремы В из [7].

Начнем с вопроса о представлении логарифмов локальных единиц. Мы будем предполагать, что корни ζ_n согласованы для различных n условиями $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$. Тогда в каждом круговом локальном поле k_n имеется “хороший” локальный параметр $\pi_n = 1 - \zeta_n$ и группа $\log(U(k_n))$ порождается логарифмами Артина–Хассе

$$\eta_n(\alpha, a) = \sum_{r=0}^{\infty} \ell^{-r} \varphi^r(\alpha) \pi_n^{a\ell^r}, \quad (0.6)$$

где α принадлежит кольцу целых $\mathcal{O}_H$ поля H , φ – автоморфизм Фробениуса в H и a – некоторое натуральное число.

В § 1 мы определяем набор локальных параметров $\lambda_n \in K_n$, которые ведут себя так же хорошо, как и π_n . Мы показываем, что существуют индекс q и многочлен $F(X, T) \in \mathcal{O}_H[[T]][X]$, коэффициенты которого являются формальными степенными рядами от T , такие, что для всех $n \geq q$ в поле K_n существует локальный параметр λ_n , являющийся корнем уравнения $F^{(-n)}(X, \pi_n) = 0$. Здесь и ниже $(-n)$ означает результат действия φ^{-n} на коэффициенты рассматриваемых рядов. При этом q можно определить как минимальный индекс такой, что $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_q/k_q)) < 1/2$, где $\mathcal{D}(K_q/k_q)$ – относительная дифферента и ν_ℓ – ℓ -адический показатель такой, что $\nu_\ell(\ell) = 1$.

Другой важный инвариант расширения K_∞/K – это натуральное число δ , определяемое из условия $(\mathcal{D}(K_q/k_q)) = (\lambda_q^\delta)$. В то время как элементы π_n удовлетворяют сравнению

$$\pi_{n+1}^\ell \equiv \pi_n \pmod{\ell}, \quad (0.7)$$

мы показываем, что элементы λ_n могут быть выбраны так, что для всех $n \geq q$

$$\lambda_{n+1}^\ell \equiv \lambda_n \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta}}, \quad (0.8)$$

что является хорошим приближением к (0.7).

В § 2 мы рассматриваем выражение

$$A := \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}((\gamma_p - 1)\Phi_n(\eta_n(\alpha, a))\eta_n(\beta, b)) \quad (0.9)$$

для некоторого $p \geq q$, где $\eta_n(\alpha, a)$ и $\eta_n(\beta, b)$ определены, как в (0.6), с заменой π_n на λ_n . Мы доказываем (теорема 2.1) некоторое сравнение по модулю $\mathbb{Z}_\ell$ для (0.9), позволяющее представить A как сумму выражений более простого вида, но распространенную на поля K_j для всех $j \geq n$. Наши результаты здесь вполне аналогичны тем, что получены в [7]. Отличие только в том, что вместо (0.7) мы используем более слабое сравнение (0.8), поэтому в (0.9) мы вынуждены предполагать, что $p > q + 2$ (при $\ell = 2$ на p накладывается еще более сильное ограничение).

По существу, теорема 2.1 утверждает, что $A = \sum_{j=n}^{\infty} \mathrm{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}(R_j(\lambda_j))$, где R_j – некоторая функция от λ_j , слабо зависящая от j . В круговом случае это означает, что существует формальный степенной ряд $R(T) \in \ell^{-m} \mathcal{O}_H[[T]]$ такой, что $R_j(\pi_j) = R^{(-j)}(\pi_j)$, т.е. зависимость R_j от j состоит просто в подкручивании коэффициентов ряда $R(T)$ с помощью φ^{-j} . Нечто похожее мы хотели бы сделать

и в общем случае, но здесь уже невозможно обойтись формальными степенными рядами. Приходится привлекать к рассмотрению формальные ряды Лорана (с коэффициентами в $\mathcal{O}_H$) с бесконечной главной частью.

В § 3 мы даем нужные нам определения, относящиеся к рядам Лорана, и доказываем первые нетривиальные результаты об этих рядах. Заметим, что в формулировку теоремы 2.1 входит величина

$$S_j := \mathcal{F}_j^{n-p-1}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a)). \quad (0.10)$$

Проблема состоит в том, чтобы получить аналитическое выражение для S_j как функции от λ_j . Для этого необходимо решить следующую задачу. Пусть σ – автоморфизм поля K_j такой, что $\sigma(\zeta_j) = \zeta_j \xi_\sigma$ для некоторого корня из единицы ξ_σ . Как выразить аналитически $\sigma(\lambda_j)$ через λ_j и ξ_σ ? Мы знаем, что $\sigma(\lambda_j)$ является корнем уравнения

$$F^{(-j)}(X, \sigma(\pi_j)) = 0, \quad (0.11)$$

причем $\sigma(\pi_j)$ очевидным образом выражается аналитически через π_j и ξ_σ , а λ_j является приближенным решением (0.11) по модулю $1 - \xi_\sigma$. Используя лемму Хензеля, мы показываем (теорема 3.1), что существует ряд Лорана от λ : $\mu(u, \lambda)$, коэффициенты которого являются формальными степенными рядами от u , где λ и u – независимые переменные, дающий в определенном смысле формальное решение уравнения (0.11). В частности, это означает, что $\sigma(\lambda_j) = \mu^{(-j)}(\xi_\sigma, \lambda_j)$ для всех $j \geq n$. Мы получаем также (см. (3.8)) оценки для коэффициентов ряда $\mu(u, \lambda)$ при отрицательных степенях λ , которые играют исключительно важную роль в дальнейшем.

В § 4 мы доказываем (теорема 4.1), что существует формальный ряд Лорана $G(\lambda)$ с коэффициентами в $\mathcal{O}_H$ такой, что $S_j = G^{(-j)}(\lambda_j)$, причем снова нам удастся проконтролировать поведение коэффициентов при отрицательных степенях λ .

Следует отметить, что ряд $G(\lambda)$ неудобен для дальнейшей работы, так как его коэффициенты при отрицательных степенях λ слишком медленно убывают в ℓ -адической метрике. В § 5 мы исправляем этот недостаток. Заметим, что величина S_j из (0.10), являющаяся функцией от λ_j , на самом деле лежит в поле k_{j-s} и, следовательно, является функцией от λ_{j-s} , где $s = n - p - 1$. В теореме 5.1 мы показываем, еще раз используя лемму Хензеля, что существует формальный ряд Лорана $\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)$, обладающий тем свойством, что $\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \lambda_{j-s}$ для всех $j \geq n$. Мы доказываем (теорема 5.2), что существует ряд Лорана $D(X)$ такой, что $G(\lambda) = D(\lambda_{\langle s \rangle})$, откуда следует (теорема 5.3), что $S_j = D^{(-j)}(\lambda_{j-s})$, причем $D(X)$ обладает быстро убывающими коэффициентами при отрицательных степенях X .

В § 6 мы рассматриваем действие $(\gamma_p - 1)$ на S_j и соответственно на $D(X)$. Мы доказываем (теорема 6.3), что существует ряд Лорана $\mathcal{E}(X)$ такой, что для всех $j \geq n$

$$(\gamma_p - 1)S_j = \pi_{j-n} \mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}), \quad (0.12)$$

причем $\mathcal{E}(X)$ снова обладает быстро убывающими коэффициентами при отрица-

В § 7 мы заканчиваем доказательство основной теоремы. Напомним, что ряд $\mathcal{E}(X)$ строился для конкретного элемента $\eta_n(\alpha, a)$. Выберем $\eta_{n,1} = \eta_n(\alpha_1, a_1), \dots, \eta_{n,t} = \eta_n(\alpha_n, a_n)$ так, чтобы эти элементы порождали $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $\log U(K_n)$. Тогда произвольный элемент $\eta \in \log U(K_n)$ записывается в виде линейной комбинации $\eta = \sum_{i=1}^t c_i \eta_{n,i}$, $c_i \in \mathbb{Z}_\ell$. При этом если $\mathcal{E}_1(X), \dots, \mathcal{E}_t(X)$ – ряды, соответствующие $\eta_{n,1}, \dots, \eta_{n,t}$, то элементу η сопоставляется ряд

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_\eta(X) = \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_i(X). \quad (0.13)$$

Мы определим M_n в формулировке основной теоремы как подмодуль, состоящий из тех η , для которых ряд $\mathcal{E}_\eta(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e_\nu X^\nu$ в (0.13) имеет нулевые коэффициенты e_ν для всех ν таких, что $|\nu| \leq 4(n-p+2)\ell\delta$. Тогда M_n задается не более чем $8(n-p+2)\ell\delta f + f$ линейными уравнениями, где $f = [H: \mathbb{Q}_\ell]$, и мы можем положить в основной теореме $C = 8\ell\delta f$.

Пусть $\mathcal{E}_\eta(X) = \mathcal{E}_1(X) + \mathcal{E}_2(X)$, где $\mathcal{E}_1(X)$ содержит только степени X^ν для $\nu < -4(n-p+2)\ell\delta$, а $\mathcal{E}_2(X)$ содержит только степени X^ν с $\nu > 4(n-p+2)\ell\delta$. Тогда для вычисления по модулю $\mathbb{Z}_\ell$ выражения $A := \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}((\gamma_p - 1)\Phi_n(\eta)\eta_{n,i})$ для некоторого $\eta_{n,i}$ мы должны согласно теореме 2.1 исследовать выражение вида

$$\ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \text{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}(\pi_{j-n} \mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) D^{(-j)}(\lambda_{j-s})), \quad (0.14)$$

где $\mathcal{E}(X)$ определен в (0.13) и $D(X)$ – ряд, соответствующий элементу $\eta_{n,i}$. Мы представляем $D(X)$ в виде $D(X) = D_1(X) + D_2(X)$, где $D_1(X)$ может содержать степени X^ν только при $\nu < -4(n-p+2)\ell\delta$, а $D_2(X)$ может содержать степени X^ν только для $\nu \geq -4(n-p+2)\ell\delta$. Тогда (0.14) содержит сумму произведений

$$\mathcal{E}_1(X)D_1(X) + \mathcal{E}_1(X)D_2(X) + \mathcal{E}_2(X)D_1(X) + \mathcal{E}_2(X)D_2(X).$$

Пользуясь нашими знаниями о поведении коэффициентов всех рассматриваемых рядов при отрицательных степенях X (вот зачем мы все время отслеживали эти коэффициенты!), мы получаем, что первые три слагаемых не меняют (0.14) по модулю $\mathbb{Z}_\ell$. Таким образом, мы можем работать только со слагаемым $\mathcal{E}_2(X)D_2(X)$, которое, как легко видеть, является формальным степенным рядом, т.е. не содержит отрицательных степеней X .

Мы показываем, что существует формальный степенной ряд $P(X)$ такой, что

$$\text{Sp}_{K_j/k_j}(\mathcal{E}_2^{(-j)}(\lambda_{j-s}) D_2^{(-j)}(\lambda_{j-s})) = P^{(-j)}(\pi_{j-s}),$$

что позволяет закончить доказательство основной теоремы теми же аргументами, что и в [7].

§ 1. Система локальных параметров

Пусть K – произвольное конечное расширение поля $\mathbb{Q}_\ell$, содержащее первообразный корень из единицы степени ℓ (степени 4 при $\ell = 2$). Для $n \geq 0$ обозначим через ζ_n первообразный корень из единицы степени ℓ^n , где

$$m = \begin{cases} n+1 & \text{при } \ell \neq 2, \\ n+2 & \text{при } \ell = 2. \end{cases} \quad (1.1)$$

Мы предполагаем, что корни ζ_n удовлетворяют условию $\zeta_{n+1}^\ell = \zeta_n$ при любом $n \geq 0$.

Пусть $K_n = K(\zeta_n)$ и $K_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty K_n$ – круговое Γ -расширение поля K , где $\Gamma = G(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_\ell$. Пусть H – максимальное неразветвленное подполе поля K_∞ и $\mathcal{O}_H$ – кольцо целых поля H . Тогда H является конечным расширением $\mathbb{Q}_\ell$. Положим $k_n = H(\zeta_n)$ и $k_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty k_n$. Таким образом, k_∞ – это максимальное круговое подполе поля K_∞ , и K_∞/k_∞ – конечное чисто разветвленное расширение, степень которого мы будем обозначать через e . Пусть $\nu_\ell(\cdot)$ – ℓ -адический показатель, нормированный условием $\nu_\ell(\ell) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Для всех достаточно больших n K_n/k_n является чисто разветвленным расширением степени e , не зависящей от n .*

Пусть $\mathcal{D}(K_n/k_n)$ – дифферента расширения K_n/k_n . Тогда найдется индекс q такой, что

$$\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/k_n)) < 1/2 \quad \text{для всех } n \geq q.$$

Действительно, согласно [8] мы имеем $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/k_n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для любого $n \geq 0$ элемент $\pi_n = 1 - \zeta_n$ является локальным параметром поля k_n . Наша ближайшая задача состоит в построении системы локальных параметров $\lambda_n \in K_n$, $n \geq q$, которые определенным образом согласованы друг с другом и с элементами π_n .

Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $R = \mathcal{O}_H[[T]]$. Пусть φ – автоморфизм Фробениуса поля H . Мы продолжим действие φ с $\mathcal{O}_H$ на R , полагая $\varphi(T) = T$. Если $f(T) \in R$, то ряд $f(\pi_n)$ сходится при любом $n \geq 0$, причем $(\varphi f)(\pi_n) = \varphi(f(\pi_n))$, где в правой части равенства под φ понимается автоморфизм поля k_n , совпадающий с автоморфизмом Фробениуса на H и такой, что $\varphi(\pi_n) = \pi_n$. Мы продолжим также действие φ с R на кольцо многочленов $R[X]$, полагая $\varphi(X) = X$. Для упрощения обозначений мы будем результат действия φ^i на многочлен $F(X, T) \in R[X]$ обозначать просто через $F^{(i)}(X, T)$. Отметим, что любой многочлен $F(X, T) \in R[X]$ определяет для любого $n \geq 0$ многочлен $F(X, \pi_n) \in \mathcal{O}(k_n)[X]$, где $\mathcal{O}(k_n)$ – кольцо целых поля k_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Пусть q – индекс из предложения 1.1, т.е. K_n/k_n – чисто разветвленное расширение степени e и $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/k_n)) < 1/2$ для всех $n \geq q$. Тогда существует неприводимый над R многочлен $F(X, T) \in R[\mathbb{Z}]$*

степени e со старшим коэффициентом 1 такой, что многочлен $F(X, \pi_n)$ неприводим в $\mathcal{O}(k_n)[X]$ при любом $n \geq 0$, и при любом $n \geq q$ в поле K_n существует локальный параметр λ_n , удовлетворяющий равенству $F^{(-n)}(\lambda_n, \pi_n) = 0$. Существует целое неотрицательное δ , не зависящее от n и такое, что $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/k_n)) = \nu_\ell(\lambda_n^\delta)$ для всех $n \geq q$. При этом элементы λ_n можно выбрать так, чтобы при всех $n \geq q$ выполнялось сравнение

$$\lambda_{n+1}^\ell \equiv \lambda_n \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta}}. \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_q – произвольный локальный параметр поля K_q . Он является корнем минимального многочлена над полем k_q вида

$$F(X) = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \dots + a_0 \in \mathcal{O}(k_q)[X].$$

Так как λ_q – локальный параметр в K_q и расширение K_q/k_q чисто разветвлено, то $F(X)$ является многочленом Эйзенштейна, т.е. коэффициенты a_i делятся на π_q при $0 \leq i \leq e-1$ и a_0 не делится на π_q^2 . Мы можем записать коэффициенты a_i в виде степенных рядов (или даже многочленов) от π_q , $a_i = f_i(\pi_q)$, $0 \leq i \leq e$, где $f_i(T) \in R$ и $f_e(T) = 1$. Более того, при $0 \leq i \leq e-1$ ряд $f_i(T)$, если $a_i \neq 0$, может быть выбран в виде

$$f_i(T) = T^{n_i} g_i(T), \quad (1.3)$$

где $n_i \geq 1$ и $g_i(0) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ при $0 \leq i \leq e-1$, причем $n_0 = 1$. Мы зафиксируем раз и навсегда некоторый выбор рядов $f_i(T)$, удовлетворяющих условию (1.3), и рассмотрим многочлен $F(X, T) \in R[X]$, определенный условием

$$F^{(-q)}(X, T) = X^e + f_{e-1}(T)X^{e-1} + \dots + f_0(T) \in R[X].$$

Условие (1.3) показывает, что многочлен $F^{(-n)}(X, \pi_n)$ является многочленом Эйзенштейна при любом $n \geq 0$. Следовательно, для любого $n \geq 0$ многочлен $F^{(-n)}(X, \pi_n)$ неприводим и любой его корень $z \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ удовлетворяет условию $\nu_\ell(z) = \nu_\ell(\pi_n)/e$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $H(X, T)$ – формальная производная многочлена $F(X, T)$ по X и z_n – произвольный корень многочлена $F^{(-n)}(X, \pi_n)$. Тогда существует целое неотрицательное δ , зависящее только от поля K_∞ и такое, что

$$\nu_\ell(H^{(-n)}(z_n, \pi_n)) = \delta \nu_\ell(z_n) = \frac{\delta}{e} \nu_\ell(\pi_n) \quad \text{для всех } n \geq q. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен (от z_n) $H^{(-n)}(z_n, \pi_n)$ является суммой одночленов вида

$$iz_n^{i-1} f_i^{(-n)}(\pi_n), \quad 1 \leq i \leq e. \quad (1.5)$$

Согласно (1.3) $f_i(\pi_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $f_i(T) = 0$ в R . Ввиду равенства $\nu_\ell(\pi_n) = e \nu_\ell(z_n)$ все ненулевые одночлены в (1.5) имеют различные ℓ -адические показатели, поэтому

$$\nu_\ell(H^{(-n)}(z_n, \pi_n)) = \min\{\nu_\ell(iz_n^{i-1} f_i(\pi_n))\}, \quad (1.6)$$

где минимум берется по всем $1 \leq i \leq e$ таким, что $f_i(T) \neq 0$.

Пусть для $n = q$ указанный минимум достигается при $i = k$. Согласно нашим предположениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &> \nu_\ell(\mathcal{D}(K_q/k_q)) = \nu_\ell(H^{(-q)}(\lambda_q, \pi_q)) = \nu_\ell(k\lambda_q^{k-1}f_k(\pi_q)) \\ &= \nu_\ell(k) + (k-1)\nu_\ell(\lambda_q) + n_k\nu_\ell(\pi_q), \end{aligned}$$

откуда следует, что $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Таким образом, k определяется тем, что величина $(i-1) + n_i e$ достигает минимума при $i = k$, где i пробегает все значения $1 \leq i \leq e$ такие, что $i \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ и $f_i(T) \neq 0$.

Заметим, что при любом $n \geq q$ мы имеем

$$\nu_\ell(kz_n^{k-1}f_k(\pi_n)) = \nu_\ell(k) + (k-1 + n_k e)\nu_\ell(z_n) < \frac{1}{2},$$

поэтому минимум в (1.6) не может достигаться на индексе $k' \equiv 0 \pmod{\ell}$. Следовательно, он достигается на том же индексе k при любом $n \geq q$. Полагая $\delta = k-1 + n_k e$, мы получаем, что $\nu_\ell(H^{(-n)}(z_n, \pi_n)) = \delta\nu_\ell(z_n)$ для всех $n \geq q$, что доказывает лемму.

Мы будем строить систему локальных параметров $\{\lambda_n\}$ по индукции. Предположим, что элементы $\lambda_q, \dots, \lambda_n$, $n \geq q$, удовлетворяющие нашему предположению, уже определены. Пусть $\lambda_n = y_1, \dots, y_e$ и $z_1, \dots, z_e$ — все корни многочленов $F^{(-n)}(X, \pi_n)$ и $F^{(-n-1)}(X, \pi_{n+1})$ соответственно в некотором фиксированном алгебраическом замыкании $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ поля $\mathbb{Q}_\ell$. Мы покажем, что для любого $i = 1, \dots, e$ существует единственный индекс $j = j(i)$ такой, что $k_{n+1}(z_i) = k_{n+1}(y_j)$ и $z_i^\ell \equiv y_j \pmod{\ell y_j^{-\delta}}$. Действительно, возводя обе части равенства

$$F^{(-n-1)}(z_i, \pi_{n+1}) = 0$$

в степень ℓ и учитывая, что

$$\pi_{n+1}^\ell = (1 - \zeta_{n+1})^\ell \equiv 1 - \zeta_n = \pi_n \pmod{\ell}$$

и $\varphi(a) \equiv a^\ell \pmod{\ell}$ для любого $a \in \mathcal{O}_H$, мы получаем

$$0 = (F^{(-n-1)}(z_i, \pi_{n+1}))^\ell \equiv F^{(-n)}(z_i^\ell, \pi_n) \pmod{\ell}.$$

Таким образом, z_i^ℓ является приближенным (по модулю ℓ) решением уравнения $F^{(-n)}(X, \pi_n) = 0$ в поле $k_{n+1}(z_i)$. Применяя рассуждение леммы 1.1 к вычислению производной $H^{(-n)}(X, \pi_n)$ многочлена $F^{(-n)}(X, \pi_n)$ в точке $X = z_i^\ell$, мы получаем

$$\nu_\ell(H^{(-n)}(z_i^\ell, \pi_n)) = \delta\nu_\ell(z_i^\ell) = \frac{\delta}{e}\nu_\ell(\pi_n) = \delta\nu_\ell(\lambda_n) = \nu_\ell(H^{(-n)}(\lambda_n, \pi_n)) < \frac{1}{2}.$$

Это означает, что согласно лемме Хензеля приближенное решение z_i^ℓ продолжается до некоторого решения y_j уравнения $F^{(-n)}(X, \pi_n) = 0$ такого, что

$$z_i^\ell \equiv y_j \pmod{\ell\lambda_n^{-\delta}}. \quad (1.7)$$

Следовательно, $k_{n+1}(z_i) \supseteq k_{n+1}(y_j)$, а поскольку оба эти поля имеют степень e над k_{n+1} , мы получаем, что $k_{n+1}(z_i) = k_{n+1}(y_j)$.

Теперь мы покажем, что (1.7) определяет некоторую подстановку $i \rightarrow j(i)$ множества $\{1, \dots, e\}$, т.е. что соответствие $i \leftrightarrow j(i)$ корректно определено и взаимно однозначно на этом множестве. Предположим, что для некоторого i элемент $j(i)$ определен неоднозначно, т.е. уравнение $F^{(-n)}(X, \pi_n) = 0$ имеет два корня y_j, y_h , удовлетворяющие (1.7). Тогда

$$\frac{1}{2} < \nu_\ell(y_j - y_h) \leq \sum_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq e}} \nu_\ell(y_j - y_k) = \nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/k_n)) < \frac{1}{2}. \quad (1.8)$$

Противоречие.

Предположим теперь, что для $i \neq h$ мы имеем $j(i) = j(h)$. Согласно (1.7) это означает, что $z_i^\ell \equiv z_h^\ell \equiv y_j \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta}}$, откуда, учитывая, что $\nu_\ell(\lambda_n^\delta) < 1/2$, мы получаем $\nu_\ell(z_i - z_h) > 1/(2\ell)$. Поскольку $n+1 > q$, мы имеем, как и в (1.8),

$$\frac{1}{2\ell} < \nu_\ell(z_i - z_h) \leq \nu_\ell(\mathcal{D}(K_{n+1}/k_{n+1})) < \frac{1}{2\ell},$$

откуда следует инъективность, а значит, и сюръективность отображения $i \rightarrow j(i)$. Следовательно, для $\lambda_n = y_1$ найдется элемент $\lambda_{n+1} = z_{j(1)}$ такой, что $F^{(-n-1)}(\lambda_{n+1}, \pi_{n+1}) = 0$, $K_{n+1} = k_{n+1}K_n = k_{n+1}(\lambda_n) = k_{n+1}(\lambda_{n+1})$ и $\lambda_{n+1}^\ell \equiv \lambda_n \pmod{\ell \lambda_n^{-\delta}}$. Этими условиями элемент λ_{n+1} определяется однозначно. Из леммы 1.1 следует, что $\mathcal{D}(K_n/k_n) = (H^{(-n)}(\lambda_n, \pi_n)) = \lambda_n^\delta$ (другое доказательство этого равенства содержится в [9]). Предложение доказано.

Как обычно, для $g \in G(K_n/K_q)$ мы определим $i_n(g)$ как максимальный индекс i такой, что $g(x) \equiv x \pmod{\lambda_n^i}$ для любого $x \in \mathcal{O}_{K_n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $n > p \geq q$, где q имеет тот же смысл, что и в предложении 1.1. Тогда

$$\mathcal{D}(K_n/K_p) = (\ell^{n-p} \lambda_n^\delta \lambda_p^{-\delta}), \quad (1.9)$$

где δ – константа из предложения 1.2.

Пусть σ – некоторая образующая группы $G(K_n/K_p)$. Тогда

$$i_n(\sigma) = e\ell^{p+m-n} - \delta. \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (1.9) достаточно заметить, что в силу мультипликативного свойства дифференты мы имеем

$$\mathcal{D}(K_n/K_p)\mathcal{D}(K_p/k_p) = \mathcal{D}(K_n/k_n)\mathcal{D}(k_n/k_p),$$

и воспользоваться предложением 1.2.

Для доказательства (1.10) заметим, что

$$\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/K_p)) = \sum_{\substack{g \in G(K_n/K_p) \\ g \neq 1}} i_n(g). \quad (1.11)$$

Аналогичная формула имеет место и для $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/K_{p+1}))$. Вычитая ее из (1.11) и используя (1.9), мы получаем

$$\nu_\ell(\ell\lambda_p^{-\delta}\lambda_{p+1}^\delta) = \nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/K_p)) - \nu_\ell(\mathcal{D}(K_n/K_{p+1})) = \sum_{g \in V} i_n(g), \quad (1.12)$$

где $V = G(K_n/K_p) \setminus G(K_n/K_{p+1})$.

Множество V состоит из $(\ell - 1)\ell^{n-p-1}$ элементов, причем $g \in V$ тогда и только тогда, когда g порождает $G(K_n/K_p)$. В частности, $i_n(g)$ имеет одно и то же значение для всех $g \in V$. Тогда, используя (1.12) и то, что K_n имеет индекс ветвления $e(\ell - 1)\ell^{m-1}$ над $\mathbb{Q}_\ell$, мы получаем

$$i_n(\sigma) = \frac{\nu_\ell(\ell\lambda_p^{-\delta}\lambda_{p+1}^\delta)}{(\ell - 1)\ell^{n-p-1}} e(\ell - 1)\ell^{m-1} = e\ell^{p+m-n} - \delta.$$

Предложение доказано.

§ 2. Редукция

Пусть q – индекс из предложения 1.1 и целые неотрицательные индексы n, i таковы, что $n - i - 1 \geq q$. Положим, как и в [7],

$$\mathcal{F}_n^{(i)} = \ell \operatorname{Sp}_{\Gamma_{n-i}/\Gamma_n} - \operatorname{Sp}_{\Gamma_{n-i-1}/\Gamma_n} \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_q)],$$

где для любого $j \geq q$ $\Gamma_j = G(K_\infty/K_j) = G(k_\infty/k_j)$ и для любой конечной группы G $\operatorname{Sp}_G = \sum_{\sigma \in G} \sigma \in \mathbb{Q}_\ell[G]$. Положим

$$\Phi_n(q) = \ell^{-m-1} \sum_{i=0}^{n-q-1} \mathcal{F}_n^{(i)}.$$

Для $p > q$ пусть γ_p – некоторая фиксированная топологическая образующая группы Γ_p . Тогда определен элемент

$$\Theta_n(q, p) := (\gamma_p - 1)\Phi_n(q) \in \mathbb{Q}_\ell[G(K_n/K_q)].$$

Заметим, что при $p \geq q$

$$\Theta_n(q, p) = (\gamma_p - 1)\ell^{-m-1} \sum_{i=0}^{n-p-1} \mathcal{F}_n^{(i)} = \Theta_n(p, p),$$

поэтому вместо $\Theta_n(q, p)$ мы будем просто писать $\Theta_n(p)$.

Пусть $\alpha \in \mathcal{O}_H$ и a – некоторое натуральное число. Известно, что $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $\log(U(K_n))$ порождается логарифмами Артина–Хассе

$$\eta_n(\alpha, a) = \sum_{r=0}^{\infty} \ell^{-r} \varphi^r(\alpha) \lambda_n^{a\ell^r}, \quad (2.1)$$

где α пробегает некоторый $\mathbb{Z}_\ell$ -базис $\mathcal{O}_H$ и a пробегает все натуральные числа.

Нашей ближайшей целью является вычисление по модулю $\mathbb{Z}_\ell$ величины

$$A := \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\Theta_n(p)(\eta_n(\alpha, a))\eta_n(\beta, b)) \quad (2.2)$$

для произвольных $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_H$, натуральных a, b и подходящего $p \geq q$.

Для любых $x, y \in K_n$ мы имеем

$$\mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Sp}_{K_n/K_q}(x)(\gamma_p - 1)(y)) = \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}((\gamma_p^{-1} - 1)(\mathrm{Sp}_{K_n/K_q}(x))y) = 0 \quad (2.3)$$

и

$$\mathcal{F}_n^{(i)}(x) = \mathcal{F}_{n-i}^{(0)} \mathrm{Sp}_{K_n/K_{n-i}}(x) \in K_{n-i}, \quad (2.4)$$

откуда следует, что

$$\mathrm{Sp}_{K_{n-i}/K_{n-i-1}}(\mathcal{F}_n^{(i)}(x)) = 0, \quad \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\mathcal{F}_n^{(i)}(x)\mathcal{F}_n^{(j)}(y)) = 0$$

при любых $0 \leq i, j \leq n - q - 1$, $i \neq j$. Заметим, что для любого $y \in K_n$ существует представление

$$y = \sum_{i=0}^{n-q-1} \ell^{-i-1} \mathcal{F}_n^{(i)}(y) + \ell^{q-n} \mathrm{Sp}_{\Gamma_q/\Gamma_n}(y).$$

Поэтому для любых $x, y \in K_n$ мы имеем

$$\mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\Theta_n(p)(x)y) = \ell^{-m-1} \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell} \left(\sum_{i=0}^{n-q-1} \ell^{-i-1} (\gamma_p - 1) \mathcal{F}_n^{(i)}(x) \mathcal{F}_n^{(i)}(y) \right). \quad (2.5)$$

Применяя (2.5) к (2.2) и полагая $t_n(a, r) = \ell^{-r} \lambda_n^{a\ell^r}$, мы получаем

$$A = \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell} \left[\sum_{i=0}^{n-q-1} \ell^{-m-i-2} \sum_{r,s=0}^{\infty} (\gamma_p - 1) \mathcal{F}_n^{(i)}(\varphi^r(\alpha) t_n(a, r)) \right. \\ \left. \times \mathcal{F}_n^{(i)}(\varphi^s(\beta) t_n(b, s)) \right]. \quad (2.6)$$

Положим

$$C_n^i(\alpha, a, r) := \mathcal{F}_n^{(i)}(\varphi^r(\alpha) t_n(a, r)). \quad (2.7)$$

Для $r < 0$ мы полагаем по определению $C_n^i(\alpha, a, r) = 0$. Тогда, считая $\alpha, \beta, a, b, p, q$ фиксированными, можно переписать (2.6) в виде

$$A = \sum_{-\infty < r, s < \infty} B(r, s),$$

где

$$B(r, s) := \sum_{i=0}^{n-q-1} \ell^{-m-i-2} \operatorname{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell} [(\gamma_p - 1)(C_n^i(\alpha, a, r+i)) C_n^i(\beta, b, s+i)]. \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $n > p > q + 2$. При $\ell = 2$ пусть p удовлетворяет условию из леммы 2.2 (см. ниже). Тогда справедливо сравнение

$$B(r, s) \equiv \ell^{-m-n+q-1} \sum_{j=n}^{\infty} \operatorname{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} [(\gamma_p - 1)(C_j^{n-q-1}(\varphi^{n-j}(\alpha), a, n+r-1)) \times C_j^{n-q-1}(\varphi^{n-j}(\beta), b, n+s-1)] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть $n > q$, $n - q - 1 > i \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{O}_H$, $a \geq 1$ и $r \geq 0$. Тогда справедливо сравнение

$$C_n^i(\alpha, a, r) \equiv 0 \pmod{\ell \lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $r = 0$, то $\varphi^r(\alpha) t_n(a, r)$ — целый элемент. Следовательно,

$$\mathcal{F}_n^{(0)}(t_n(a, r)) \equiv \operatorname{Sp}_{K_n/K_{n-1}}(t_n(a, r)) \pmod{\ell}.$$

Поскольку

$$\mathcal{D}_{K_n/K_{n-1}} = (\ell \lambda_n^\delta \lambda_{n-1}^{-\delta}), \quad (2.9)$$

мы имеем

$$\mathcal{F}_n^{(0)}(t_n(a, r)) \equiv 0 \pmod{\ell \lambda_{n-1}^{-\delta}}.$$

В силу (2.4)

$$\mathcal{F}_n^{(i)}(t_n(a, r)) = \mathcal{F}_{n-i}^{(0)} \operatorname{Sp}_{K_n/K_{n-i}}(t_n(a, r)) \equiv 0 \pmod{\ell \lambda_{n-1}^{-\delta}}.$$

Пусть теперь $r > 0$. Тогда согласно (1.2) $\lambda_n^\ell = \lambda_{n-1} + \mu$, где $\mu \in K_n$ и $\mu \equiv 0 \pmod{\ell \lambda_{n-1}^{-\delta}}$. Возводя это равенство $r-1$ раз в степень ℓ , мы получаем по индукции

$$\lambda_n^{\ell^r} \equiv \lambda_{n-1}^{\ell^{r-1}} + \ell^{r-1} \mu \lambda_{n-1}^{\ell^{r-1}-1} \equiv \lambda_{n-1}^{\ell^{r-1}} \pmod{\ell^r \lambda_{n-1}^{-\delta}}.$$

Таким образом,

$$\varphi^r(\alpha) t_n(a, r) = \ell^{-1} \varphi^r(\alpha) t_{n-1}(a, r-1) + x \quad (2.10)$$

для некоторого $x \in \lambda_{n-1}^{-\delta} \mathcal{O}_{K_n}$. Тогда из (2.7) следует, что при $i > 0$, $r > 0$

$$C_n^i(\alpha, a, r) = C_{n-1}^{i-1}(\varphi(\alpha), a, r-1) + \mathcal{F}_n^{(i)}(x).$$

Из (2.9) вытекает, что $\text{Sp}_{K_n/K_{n-1}}(\ell^{-1}\lambda_{n-1}^\delta \mathcal{O}_{K_n}) \subseteq \mathcal{O}_{K_{n-1}}$, поэтому $y := \text{Sp}_{K_n/K_{n-1}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell\lambda_{n-1}^{-2\delta}}$. Поэтому $\mathcal{F}_n^{(i)}(x) = \mathcal{F}_{n-1}^{(i-1)}(y)$ для некоторого $y \in K_{n-1}$, $y \equiv 0 \pmod{\ell\lambda_{n-1}^{-2\delta}}$.

Если $n-1 > q$, то $\nu_\ell(\lambda_{n-1}^{2\delta}) \leq \nu_\ell(\lambda_q^{2\delta}) < 1/2$, т.е. $\nu_\ell(y) > 1/2$. Тогда $\mathcal{F}_{n-1}^{(i-1)}(y) \equiv 0 \pmod{\ell}$, т.е.

$$C_n^i(\alpha, a, r) \equiv C_{n-1}^{i-1}(\varphi(\alpha), a, r-1) \pmod{\ell}. \quad (2.11)$$

Пусть теперь i и r – любые индексы. Положим $c = \min\{i, r\}$. Если $c > 0$, то, применяя (2.11) c раз, мы придем к случаю, когда один из индексов i, r равен нулю. Отметим, что по условию леммы $n-i-1 > q$, поэтому условие $n-1 > q$, при котором справедливо сравнение (2.11), будет все время соблюдаться.

Итак, достаточно рассмотреть случай, когда $i = 0$ или $r = 0$. Случай $r = 0$ уже разобран. Если $i = 0$ и $r > 0$, то из (2.10) следует, что

$$\mathcal{F}_n^{(0)}(\varphi^r(\alpha) t_n(a, r)) = \mathcal{F}_n^{(0)}(\varphi(\alpha) t_{n-1}(a, r-1) + x),$$

где $x \in \lambda_{n-1}^{-\delta} \mathcal{O}_{K_n}$. Поскольку $\varphi^r(\alpha) t_{n-1}(a, r-1) \in K_{n-1}$, мы имеем $\mathcal{F}_n^{(0)}(\varphi^r(\alpha) \times t_n(a, r-1)) = 0$, т.е. $\mathcal{F}_n^{(0)}(\varphi^r(\alpha) t_n(a, r)) = \mathcal{F}_n^{(0)}(x)$. Тогда из (2.9) следует, что $\mathcal{F}_n^{(0)}(x) \equiv 0 \pmod{\ell\lambda_{n-1}^{-2\delta}}$, что доказывает лемму.

ЛЕММА 2.2. При $\ell \neq 2$ для любых $n > q$, $p > q$, $n-q-2 > i \geq 0$, $a, b \geq 1$, $r, s \geq 0$ и $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_H$ справедливо сравнение

$$\begin{aligned} & \ell^{-m-i-2} \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}[(\gamma_p - 1)(C_n^i(\alpha, a, r)) C_n^i(\beta, b, s)] \\ & \equiv \ell^{-m-i-3} \text{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}[(\gamma_p - 1)(C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\alpha), a, r+1)) \\ & \quad \times C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\beta), b, s+1)] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned}$$

При $\ell = 2$ это сравнение справедливо, если $p \geq \log_2(9\delta + 1) - \log_2 e - 2$, где $\log_2$ – вещественный логарифм по основанию 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.10) мы имеем

$$C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\alpha), a, r+1) = \mathcal{F}_{n+1}^{(i+1)}(\ell^{-1}\varphi^{-1}(\alpha) t_n(a, r) + x) = C_n^i(\alpha, a, r) + a_1, \quad (2.12)$$

где $x \in \lambda_n^{-\delta} \mathcal{O}_{K_{n+1}}$ и $a_1 = \mathcal{F}_{n+1}^{(i+1)}(x)$, в частности $a_1 \in K_{n-i}$.

Из (1.9) следует, что $\mathcal{D}(K_{n+1}/K_{n-i}) = \ell^{i+1}\lambda_{n+1}^\delta \lambda_{n-i}^{-\delta}$. Учитывая, что $\nu_\ell(\lambda_n^\delta) < \nu_\ell(\lambda_{n-i}^\delta)$, мы получаем $\text{Sp}_{K_{n+1}/K_{n-i-1}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell^{i+2}\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}$. Аналогично, $\text{Sp}_{K_{n+1}/K_{n-i}}(x) \equiv 0 \pmod{\ell^{i+1}\lambda_{n-i}^{-2\delta}}$. Следовательно, $a_1 \equiv 0 \pmod{\ell^{i+2}\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}$.

Аналогичным образом мы получаем, что

$$C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\beta), b, s+1) = C_n^i(\beta, b, s) + a_2, \quad (2.13)$$

где $a_2 \in K_{n-i}$ и $a_2 \equiv 0 \pmod{\ell^{i+2}\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}$. Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$\begin{aligned} & \ell^{-m-i-3} C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\alpha), a, r+1) C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\beta), b, s+1) \\ &= \ell^{-m-i-3} C_n^i(\alpha, a, r) C_n^i(\beta, b, s) + \ell^{-m-i-3} C_n^i(\alpha, a, r) a_2 \\ & \quad + \ell^{-m-i-3} a_1 C_n^i(\beta, b, s) + \ell^{-m-i-3} a_1 a_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку

$$a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod{\ell^{i+2}\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}, \quad (2.15)$$

мы имеем

$$a_1 a_2 \equiv 0 \pmod{\ell^{2i+4}\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}},$$

поэтому

$$\ell^{-m-i-3} a_1 a_2 \equiv 0 \pmod{\ell^{-m+i+1}\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}}. \quad (2.16)$$

Используя (2.15), лемму 2.1 и учитывая, что $i \geq 0$, мы получаем

$$\ell^{-m-i-3} C_n^i(\alpha, a, r) a_2 \equiv \ell^{-m-i-3} a_1 C_n^i(\beta, b, s) \equiv 0 \pmod{\ell^{-m}\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}}. \quad (2.17)$$

Предположим теперь, что $\ell \neq 2$. В этом случае $\mathcal{D}(K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell) = \ell^{m+1}\pi_0^{-1}\lambda_{n+1}^\delta$, следовательно,

$$\nu_\ell(\mathcal{D}(K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell)) \geq m+1 - \frac{1}{\ell-1}.$$

По условию леммы $n-i-1 > q$, поэтому из условия $\nu_\ell(\lambda_q^\delta) < 1/2$ вытекает, что $\nu_\ell(\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}) > -2/\ell > -1$. Тогда из (2.16) следует, что $\ell^{-m-i-3} a_1 a_2 \equiv 0 \pmod{\ell^{-m}}$, т.е.

$$\mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-3} a_1 a_2) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \quad (2.18)$$

Аналогичным образом мы получаем $\nu_\ell(\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}) > -2/\ell^2 \geq -1/2$, поэтому оба члена в (2.17) сравнимы с нулем по модулю $\ell^{-m-1/2}$, т.е.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-3} C_n^i(\alpha, a, r) a_2) \\ & \equiv \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-3} a_1 C_n^i(\beta, b, s)) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-3} C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\alpha), a, r+1) C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\beta), b, s+1)) \\ & \equiv \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-2} C_n^i(\alpha, a, r) C_n^i(\beta, b, s)) \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned}$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sp}_{K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-3} \gamma_p(C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\alpha), a, r+1)) C_{n+1}^{i+1}(\varphi^{-1}(\beta), b, s+1)) \\ & \equiv \mathrm{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-i-2} \gamma_p(C_n^i(\alpha, a, r)) C_n^i(\beta, b, s)) \pmod{\mathbb{Z}_\ell}, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость леммы при $\ell \neq 2$.

Пусть теперь $\ell = 2$. В этом случае $\mathcal{D}(K_{n+1}/\mathbb{Q}_\ell) = (\ell^m)$. Снова мы имеем $\nu_\ell(\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}) > -1$, откуда следует, что сравнение (2.18) остается справедливым и при $\ell = 2$.

Что касается сравнения (2.17), то при $\ell = 2$ из него уже нельзя непосредственно вывести (2.19). Поэтому мы поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что $C_n^i(\alpha, a, r)$, $C_n^i(\beta, b, s)$, a_1, a_2 являются элементами поля K_{n-i} . Для $x \in K_{n-i}$ положим $\text{ord}(x) = e2^{m-i-1}\nu_\ell(x)$, т.е. $\text{ord}(x)$ – это показатель, с которым λ_{n-i} входит в x . Без труда проверяется, что для любого $x \in K_{n-i}$ справедливо неравенство

$$\text{ord}(\gamma_p(x) - x) \geq \text{ord}(x) + i(\gamma_p) - 1,$$

где в силу (1.10) $i(\gamma_p) = e2^{p+2} - \delta$. Таким образом, при $p \geq \log_2(9\delta + 1) - \log_2 e - 2$ мы имеем $e2^{p+2} - \delta - 1 \geq 8\delta$. Учитывая, что $\text{ord}(\lambda_{n-i-1}^{-4\delta}) = -8\delta$, мы получаем из (2.17)

$$\begin{aligned} & \ell^{-m-i-3}(\gamma_p - 1)(C_n^i(\alpha, a, r)) a_2 \\ & \equiv \ell^{-m-i-3}(\gamma_p - 1)(a_1) C_n^i(\beta, b, s) \equiv 0 \pmod{\ell^{-m}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

откуда следует, что для элементов, входящих в (2.20), выполняется аналог сравнения (2.19). После этого доказательство можно закончить так же, как и в случае $\ell \neq 2$. Этим наша лемма доказана полностью.

ЛЕММА 2.3. Пусть $p > q + 1$, $0 \leq i \leq n - p - 1$ и хотя бы один из индексов $r + i$, $s + i$ отрицателен. При $\ell = 2$ предположим дополнительно, что $p \geq \log_2(7\delta + 1) - \log_2 e - 2$. Пусть $c = -\min\{r + i, s + i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \ell^{-m-i-c-2} \text{Sp}_{K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell} \left[(\gamma_p - 1)(C_{n+c}^{i+c}(\varphi^{-c}(\alpha), a, r + i + c)) \right. \\ & \left. \times C_{n+c}^{i+c}(\varphi^{-c}(\beta), b, s + i + c) \right] \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы хотя один из индексов $r + i + c$, $s + i + c$ равен нулю. Предположим, что $r + i + c = 0$ и $s + i + c \geq 0$. Тогда

$$C_{n+c}^{i+c}(\varphi^{-c}(\alpha), a, r + i + c) = \mathcal{F}_{n+c}^{(i+c)}(\varphi^{-c}(\alpha) t_{n+c}(a, r + i + c)),$$

где $t_{n+c}(a, r + i + c) = t_{n+c}(a, 0)$ – целое число, откуда, используя явный вид дифференты $\mathcal{D}(K_{n+c}/K_{n-i-1})$, мы получаем

$$C_{n+c}^{i+c}(\varphi^{-c}(\alpha), a, r + i + c) \equiv 0 \pmod{\ell^{i+c+1}\lambda_{n-i-1}^{-\delta}}.$$

В силу леммы 2.1 мы имеем

$$C_{n+c}^{i+c}(\varphi^{-c}(\beta), b, s + i + c) \equiv 0 \pmod{\ell\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}.$$

Таким образом, левая часть (2.21) имеет вид

$$\ell^{-m-i-c-2} \text{Sp}_{K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell}((\gamma_p - 1)(x)y),$$

где $x \equiv 0 \pmod{\ell^{i+c+1}\lambda_{n-i-1}^{-\delta}}$ и $y \equiv 0 \pmod{\ell\lambda_{n-i-1}^{-2\delta}}$. Поэтому

$$z := \ell^{-m-i-c-2}(\gamma_p - 1)(x)y \equiv 0 \pmod{\ell^{-m}\lambda_{n-i-1}^{-3\delta}}.$$

Если $\ell \neq 2$, то, учитывая, что $c \geq 1$, мы получаем, что $\mathcal{D}(K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell) \equiv 0 \pmod{\ell^{m+1}\pi_0^{-1}}$, т.е.

$$\nu_\ell(\mathcal{D}(K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell)) \geq m + 1 - \frac{1}{\ell - 1}.$$

Из условия $i \leq n - p - 1$ следует, что $n - i - 1 \geq p > q + 1$. Следовательно, $\nu_\ell(\lambda_{n-i-1}^{3\delta}) \leq (1/\ell)\nu_\ell(\lambda_{q+1}^{3\delta}) \leq 1/\ell$. Таким образом, мы получаем $\nu_\ell(z) \geq \nu_\ell(\mathcal{D}(K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell))$, т.е. $\text{Sp}_{K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell}(z) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}$.

Предположим теперь, что $\ell = 2$. Тогда $\nu_\ell(\mathcal{D}(K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell)) \geq m$. Поскольку $x \in K_{n-i}$ и $x \equiv 0 \pmod{\ell^{i+c+1}\lambda_{n-i}^{-2\delta}}$, мы, используя (1.10), получаем, что при $p \geq \log_2(7\delta + 1) - \log_2 e - 2$ справедливо сравнение $(\gamma_p - 1)(x) \equiv 0 \pmod{\ell^{i+c+1}\lambda_{n-i}^{4\delta}}$, т.е. $z \equiv 0 \pmod{\ell^{-m}}$ и $\text{Sp}_{K_{n+c}/\mathbb{Q}_\ell}(z) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}$.

Случай, когда $s + i + c = 0$ и $r + i + c \geq 0$, разбирается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $j \geq 2n - p$ и $r, s \geq 0$. При $\ell = 2$ предположим дополнительно, что $p \geq \log_2(7\delta + 1) - \log_2 e - 2$. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_H$ и любых натуральных a, b

$$\ell^{-m-n+p-1} \text{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}[(\gamma_p - 1)(C_j^{n-p-1}(\alpha, a, r)) C_j^{n-p-1}(\beta, b, s)] \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 следует, что

$$u := C_j^{n-p-1}(\alpha, a, r) C_j^{n-p-1}(\beta, b, s) \equiv 0 \pmod{\ell^2 \lambda_{j-n+p}^{-4\delta}}.$$

При $\ell \neq 2$, учитывая, что $j \geq 2n - p$, мы имеем $\mathcal{D}(K_j/\mathbb{Q}_\ell) \equiv 0 \pmod{\ell^{2n-p+1}\pi_0^{-1}}$. Так как $\ell^{-m-n+p-1}u \equiv 0 \pmod{\ell^{2n-p}\lambda_{j-n+p}^{-4\delta}}$, мы имеем

$$\text{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{-m-n+p-1}u) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Аналогичное рассуждение проходит и при $\ell = 2$ и $j > 2n - p$.

Пусть теперь $\ell = 2$ и $j = 2n - p$. Тогда $u \equiv 0 \pmod{\ell^2 \lambda_n^{-4\delta}}$. Используя (1.10), мы получаем, что в этом случае

$$(\gamma_p - 1)(C_j^{n-p-1}(\alpha, a, r)) C_j^{n-p-1}(\beta, b, s) \equiv 0 \pmod{\ell^2},$$

откуда следует справедливость леммы и в этом случае. Лемма доказана.

Теперь мы можем легко закончить доказательство предложения. Рассмотрим следующее

$$V_i := \ell^{-m-i-2} \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}[(\gamma_p - 1)(C_n^i(\alpha, a, r + i)) C_n^i(\beta, b, s + i)].$$

Если $r + i, s + i \geq 0$, то, применяя к V_i лемму 2.2 $n - p - 1 - i$ раз и полагая $j = 2n - p - 1 - i$, мы получаем

$$\begin{aligned} V_i \equiv & \ell^{-m-n+p-1} \operatorname{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} \left[(\gamma_p - 1) (C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\alpha), a, n + r - p - 1)) \right. \\ & \left. \times C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\beta), b, n + s - p - 1) \right] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если один из индексов, например $r + i$, отрицателен, то $V_i = 0$ по определению. В этом случае положим $c = -\min\{r+i, s+i\}$. Если $c > n - p - 1 - i$, то хотя бы один из индексов $n + r - p - 1, n + s - p - 1$ отрицателен. В этом случае сравнение (2.23) справедливо, поскольку обе его части равны нулю по определению.

Предположим теперь, что $c \leq n - p - 1 - i$. Тогда в силу леммы 2.3 выполняется сравнение (2.21). Применяя к его левой части лемму 2.2 $n - p - i - c - 1$ раз, мы получаем и в этом случае, что правая часть (2.23) сравнима с нулем по модулю $\mathbb{Z}_\ell$.

Таким образом, сравнение (2.23) справедливо при $0 \leq i \leq n - p - 1$ и любых целых r, s . Тогда из (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} B(r, s) \equiv & \ell^{-m-n+p-1} \\ & \times \sum_{j=n}^{2n-p-1} \operatorname{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} \left[(\gamma_p - 1) (C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\alpha), a, n + r - p - 1)) \right. \\ & \left. \times C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\beta), b, n + s - p - 1) \right] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из лемм 2.4 и 2.1 следует, что при $j \geq 2n - p$ левая часть сравнения (2.22) целая и стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, сравнение (2.24) остается справедливым, если распространить суммирование на область $n \leq j < \infty$, что доказывает предложение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $n > p > q + 2$. При $\ell = 2$ предположим дополнительно, что $p \geq \log_2(9\delta + 1) - \log_2 e - 2$. Пусть A — величина, определенная в (2.2). Тогда

$$\begin{aligned} A \equiv & \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \operatorname{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} \left[(\gamma_p - 1) (\mathcal{F}_j^{(n-p-1)} (\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a))) \right. \\ & \left. \times \mathcal{F}_j^{(n-p-1)} (\eta_j(\varphi^{n-j}(\beta), b)) \right] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.1 мы имеем

$$\begin{aligned} A = & \sum_{-\infty < r, s < \infty} B(r, s) \\ \equiv & \sum_{-\infty < r, s < \infty} \sum_{j=n}^{\infty} \operatorname{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} \left[(\gamma_p - 1) (C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\alpha), a, n + r - p - 1)) \right. \\ & \left. \times C_j^{n-p-1} (\varphi^{n-j}(\beta), b, n + s - p - 1) \right] \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, вводя новые индексы суммирования $r' = n + r - p - 1$, $s' = n + s - p - 1$ и учитывая, что все слагаемые с $r' < 0$ или $s' < 0$ равны нулю, мы получаем

$$A = \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \mathrm{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} \sum_{r', s'=0}^{\infty} \left[(\gamma_p - 1) (C_j^{n-p-1}(\varphi^{n-j}(\alpha), a, r')) \times C_j^{n-p-1}(\varphi^{n-j}(\beta), b, s') \right].$$

Из (2.7) следует, что

$$(\gamma_p - 1) \sum_{r'=0}^{\infty} C_j^{n-p-1}(\varphi^{n-j}(\alpha), a, r') = (\gamma_p - 1) \mathcal{F}_j^{(n-p-1)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a))$$

и

$$\sum_{s'=0}^{\infty} C_j^{n-p-1}(\varphi^{n-j}(\beta), b, s') = \mathcal{F}_j^{(n-p-1)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\beta), b)),$$

что доказывает теорему.

§ 3. Формальные ряды Лорана

Хотя многочлен $F(X, T)$ из предложения 1.2 определен над кольцом $R = \mathcal{O}_H[[T]]$, некоторые вычисления, связанные с этим многочленом, требуют замены R большим кольцом.

Пусть $\mathcal{O}$ означает одно из колец $\mathcal{O}_H$, $\mathcal{O}_H[\xi]$, где ξ – первообразный корень из единицы некоторой фиксированной степени ℓ^k , или $\mathcal{O}_H[[u]]$, где u – независимая переменная. Определим на $\mathcal{O}$ функцию ν , которая на $\mathcal{O}_H$ и $\mathcal{O}_H[\xi]$ совпадает с ℓ -адическим показателем ν_ℓ , а в случае $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H[[u]]$, для одночлена au^n , $a \in \mathcal{O}_H$, мы полагаем $\nu(au^n) = \nu_\ell(a) + n$, а для $f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i u^i$ мы положим $\nu(f(u)) = \inf_i \{\nu(b_i u^i)\}$. Мы будем рассматривать $\mathcal{O}_H[[u]]$ как топологическое кольцо относительно топологии, порожденной степенями максимального идеала (ℓ, u) .

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{O}\{\{T\}\}$ – кольцо формальных рядов Лорана вида

$$f(T) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i T^i, \quad a_i \in \mathcal{O}, \quad (3.1)$$

причем $\nu(a_i) > 0$ при $i < 0$ и $\nu(a_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow -\infty$. Без труда проверяется, что $\mathcal{A}$ не имеет делителей нуля. Для $f(T)$ вида (3.1) мы полагаем $\nu(f) = \min\{\nu(a_i)\}$, где минимум берется по всем $-\infty < i < \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Ряд $f(T)$ вида (3.1) является единицей в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда a_0 является единицей в $\mathcal{O}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия очевидна. Если $a_0 \in \mathcal{O}^\times$, то без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 1$. В этом случае $f(T)$ представим в виде $f(T) = 1 + Tf_1(T) + \pi f_2(T^{-1})$, где $f_1(T) \in \mathcal{O}[[T]]$, $f_2(T^{-1}) \in \mathcal{O}[[T^{-1}]]$, причем коэффициенты b_i ряда $f_2(T^{-1})$ удовлетворяют условию $\nu(b_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow -\infty$ и $\pi = \ell, 1 - \xi$ или u соответственно. Тогда

$$f(T)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (Tf_1(T) + \pi f_2(T^{-1}))^n. \quad (3.2)$$

Действительно, для заданного натурального N и $n > 2N$ мы имеем $(Tf_1(T) + \pi f_2(T^{-1}))^n = G_1 + G_2$, где $G_1 \in T^N \mathcal{O}[[T]]$ и $\nu(G_2) \geq \nu(\pi^N)$. Тогда ряд, стоящий в правой части (3.2), сходится покоэффициентно и определяет в пределе ряд $f(T)^{-1} \in \mathcal{A}$, обратный к $f(T)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{O}\{\{T\}\}$, где $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H$ или $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H[\xi]$, и $\mathcal{K}$ – поле частных $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}$ целозамкнуто в $\mathcal{K}$ и произвольный элемент из $\mathcal{K}^\times$ однозначно представим в виде $x = \pi^n T^m f(T)$, где $n, m \in \mathbb{Z}$, $f(T) \in \mathcal{A}^\times$ и $\pi = \ell, 1 - \xi$ – локальный параметр в $\mathcal{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный ряд $g_1(T) \in \mathcal{A}$ однозначно представим в виде $g_1(T) = \pi^{n_1} T^{m_1} f_1(T)$, где $n_1 \geq 0$, $m_1 \in \mathbb{Z}$, причем при $n_1 = 0$ выполняются условия: $m_1 \geq 0$ и $f_1(T)$ – ряд, имеющий обратимый свободный член и, следовательно, обратимый согласно предложению 3.1. Если $g_2(T) = \pi^{n_2} T^{m_2} f_2(T)$ – любой ненулевой элемент $\mathcal{A}$, то $g_1(T)/g_2(T) = \pi^{n_1-n_2} T^{m_1-m_2} f_1(T)f_2(T)^{-1}$, причем $f_1(T)/f_2(T) \in \mathcal{A}^\times$, что доказывает второе утверждение предложения. Предположим, что элемент $g_1(T) = \pi^n T^m f(T) \in \mathcal{K}$ цел над $\mathcal{A}$. Тогда без труда проверяется, что $n \geq 0$. Если $n > 0$, то $g(T) \in \mathcal{A}$. Если $n = 0$, то, редуцируя уравнение целой зависимости для $g(T)$ по модулю π , мы получаем, что $m \geq 0$, что полностью доказывает предложение.

Пусть $F(X) = F(X, T) \in R[X]$ – многочлен из предложения 1.2. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{A}[X]/(F(X))$ и обозначим через λ образ X в $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Кольцо $\mathcal{B}$ не имеет делителей нуля и естественно изоморфно кольцу $\mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A} = \mathcal{O}\{\{T\}\}$, где $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H$ или $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H[\xi]$, и π – локальный параметр в $\mathcal{O}$, то $F(X, T) \pmod{\pi}$ является многочленом Эйзенштейна той же степени над кольцом формальных степенных рядов $\mathcal{O}/(\pi)[[T]]$. Следовательно, $F(X, T)$ неприводим над $\mathcal{A}$. Для кольца $\mathcal{A} = \mathcal{O}_H[[u]]\{\{T\}\}$ неприводимость $F(X, T)$ над $\mathcal{A}$ следует из того, что $F(X, T)$ переходит в неприводимый многочлен той же степени при подстановке $u = 0$. Следовательно, $\mathcal{B}$ – область целостности.

ЛЕММА 3.1. В кольце $\mathcal{O}_H[[\lambda]]$ существует однозначно определенный ряд $T = T(\lambda)$ такой, что $F(\lambda, T(\lambda)) = 0$. При этом $T(\lambda) = \lambda^e t(\lambda)$, где e – степень $F(X)$ и $t(\lambda) \in \mathcal{O}_H[[\lambda]]^\times$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.3)

$$F(X, T) = X^e + b_{e-1}(T) + \dots + b_1(T)X + b_0(T), \quad (3.3)$$

где $b_i(T) \in TR$ для $0 \leq i \leq e-1$ и $b_0(T) = Tc(T)$ для некоторого $c(T) \in R^\times$. Положим $T_1(\lambda) = c(T)^{-1}\lambda^e$. Из (3.3) следует, что $F(\lambda, T_1(\lambda)) \equiv 0 \pmod{\lambda^{e+1}}$. Предположим, что для некоторого $i \geq 0$ уже определен ряд $T_i = T_i(\lambda)$ такой, что $F(\lambda, T_i(\lambda)) \equiv 0 \pmod{\lambda^{e+i}}$. Тогда, полагая $T_{i+1}(\lambda) = T_i(\lambda) + x\lambda^{e+i}$ с неопределенным коэффициентом $x \in \mathbb{Z}_\ell$, мы получаем

$$\begin{aligned} F(\lambda, T_{i+1}(\lambda)) &\equiv \lambda^e + \sum_{n=1}^{e-1} b_n(T_i(\lambda))\lambda^n \\ &\quad + (T_i(\lambda) + x\lambda^{e+i})c(T_i(\lambda)) \pmod{\lambda^{e+i+1}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку $c(0) \in \mathbb{Z}_\ell^\times$, из (3.4) следует, что существует однозначно определенное по модулю ℓ число $x_0 \in \mathbb{Z}_\ell$ такое, что при $x = x_0$ $F(\lambda, T_{i+1}(\lambda)) \equiv 0 \pmod{\lambda^{e+i+1}}$. Элементы $T_i(\lambda)$ при $i \rightarrow \infty$ сходятся к элементу $T(\lambda) \in \mathcal{O}_H[[\lambda]]$, удовлетворяющему всем требованиям леммы. Лемма доказана.

Пусть $f(T)$ – произвольный элемент из $\mathcal{A}$. Без труда проверяется, что $f(T(\lambda))$ является корректно определенным элементом кольца $\mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$ и сопоставление $f(T) \rightarrow f(T(\lambda))$ определяет вложение колец $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$. Поскольку в $\mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$ выполняется соотношение $f(\lambda, T(\lambda)) = 0$ и элементы $1, \lambda, \dots, \lambda^{e-1}$ линейно независимы над $\mathcal{A}$, определенное выше вложение $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$ продолжается до вложения $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$. Чтобы доказать, что это вложение является изоморфизмом, достаточно проверить, что произвольный ряд $f(\lambda) \in \mathcal{O}\{\{\lambda\}\}$ является элементом $\mathcal{B}$.

Пусть $f(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \lambda^j$. Стандартные рассуждения показывают, что формальный степенной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i$ представим в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i = \sum_{j=0}^{e-1} \lambda^j f_j(T(\lambda)), \quad f_j \in \mathcal{O}[[T]]. \quad (3.5)$$

Для $i < 0$ член $a_i \lambda^i$ представим в виде $a_i \lambda^i = a_i \lambda^j \lambda^{-ek}$, где $j = 0, 1, \dots, e-1$ и k – некоторое натуральное число. Поскольку $T(\lambda) = \lambda^e t(\lambda)$, мы получаем $\lambda^i = \lambda^j T(\lambda)^{-k} t(\lambda)^k$. Согласно предыдущему замечанию ряд $\lambda^j t(\lambda)^k$ представим в виде (3.5), т.е.

$$a_i \lambda^i = a_i T(\lambda)^{-k} \sum_{j=0}^{e-1} \lambda^j g_{i,j}(T(\lambda))$$

для некоторых $g_{i,j} T(\lambda) \in \mathcal{O}[[T]]$. Поскольку $a_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow -\infty$, мы получаем

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{e-1} \lambda^j \left(f_j(T(\lambda)) + \sum_{i=-1}^{\infty} a_i T(\lambda)^{-k} g_{i,j}(T(\lambda)) \right), \quad (3.6)$$

где $k = -[i/e]$ и $[i/e]$ – целая часть i/e , т.е. такое целое число, что $0 \leq i/e - [i/e] < 1$ (напомним, что i отрицательно), причем правая часть (3.6) является корректно определенным элементом кольца $\mathcal{B}$. Предложение доказано.

Начиная с этого места, мы будем обозначать кольца $\mathcal{O}_H\{\{T\}\}$ и $\mathcal{O}_H\{\{\lambda\}\}$ через $\mathcal{A}[\ell]$ и $\mathcal{B}[\ell]$, а $\mathcal{O}_H[\xi]\{\{T\}\}$ и $\mathcal{O}_H[\xi]\{\{\lambda\}\}$ через $\mathcal{A}[\xi]$ и $\mathcal{B}[\xi]$ соответственно. Кольца $\mathcal{O}_H[[u]]\{\{T\}\}$ и $\mathcal{O}_H[[u]]\{\{\lambda\}\}$ мы будем обозначать через $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ соответственно.

Мы определим в этих кольцах топологию, полагая, что для кольца вида $\mathcal{O}\{\{Y\}\}$ система

$$U_{m,n} := \{f(Y) \in \mathcal{O}\{\{Y\}\} \mid f(Y) = f_1(Y) + f_2(Y), \\ f_1(Y), f_2(Y) \in \mathcal{O}\{\{Y\}\}, \nu'(f_1(Y)) \geq n, f_2(Y) \equiv 0 \pmod{Y^m}\}$$

для $n, m \geq 0$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля. Здесь $\nu' = \nu_\ell$ для $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H, \mathcal{O}_H[\xi]$ и $\nu' = \nu$ для $\mathcal{O} = \mathcal{O}_H[[u]]$. Без труда проверяется, что все рассматриваемые кольца полны относительно этой топологии.

Пусть G – циклическая группа порядка ℓ^k вместе с фиксированным изоморфизмом $G \cong \langle \xi \rangle$. Корень из единицы, соответствующий элементу $\sigma \in G$ при этом изоморфизме, мы будем обозначать через ξ_σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Существует единственное действие G как группы непрерывных автоморфизмов кольца $\mathcal{A}[\xi]$ такое, что G действует тождественно на $\mathcal{O}_H[\xi]$ и $\sigma(T) = 1 - \xi_\sigma + \xi_\sigma T$ для любого $\sigma \in G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что определено действие G на кольцо многочленов $\mathcal{O}_H[\xi][T]$, которое по непрерывности продолжается до действия G на кольцо формальных степенных рядов $\mathcal{O}_H[\xi][[T]]$. Чтобы продолжить это действие на $\mathcal{A}[\xi]$, заметим, что

$$\sigma(T^{-1}) = \sigma(T)^{-1} = \left[\xi_\sigma T \left(1 - \frac{1 - \xi_\sigma^{-1}}{T} \right) \right]^{-1} = \xi_\sigma^{-1} T^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \xi_\sigma^{-1})^i T^{-i}.$$

Следовательно, полагая для произвольного $f(T) \in \mathcal{A}[\xi]$ вида (3.1) $\sigma(f(T)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \sigma(T^i)$, мы получаем непрерывный автоморфизм кольца $\mathcal{A}[\xi]$. Предложение доказано.

Для кольца $\tilde{\mathcal{A}}$ справедлив следующий аналог предложения 3.4, который может быть доказан теми же рассуждениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Существует единственный непрерывный автоморфизм τ кольца $\tilde{\mathcal{A}}$ такой, что τ действует тождественно на $\mathcal{O}_H[[u]]$ и $\tau(T) = u + (1 - u)T = T + (1 - T)u$.*

Соотопавление $u \rightarrow 1 - \xi_\sigma$ однозначно продолжается до гомоморфизма $f_\sigma: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}[\xi]$ такого, что $f_\sigma \tau = \sigma f_\sigma$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, T) = \tau(F(X, T)) \in \tilde{\mathcal{A}}[X]$ – многочлен, полученный действием τ на коэффициенты многочлена (3.3). Тогда в кольце $\tilde{\mathcal{B}}$ существует однозначно определенный ряд

$$\mu = \mu(u, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(u) \lambda^j \quad (3.7)$$

такой, что $\mathcal{F}(\mu) = 0$ и $\mu \equiv \lambda \pmod{u}$.

Коэффициенты $c_j(u) \in \mathcal{O}_H[[u]]$ для $j < 0$ удовлетворяют условию

$$\nu(c_j(u)) > -\frac{j}{2\delta}, \quad (3.8)$$

где ν – определенная выше функция в кольце $\mathcal{O}_H[[u]]$ и δ имеет тот же смысл, что и в предложении 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша теорема является вариантом леммы Хензеля. Поскольку $\mathcal{F}(X) \equiv F(X, T) \pmod{u}$, мы имеем $\mathcal{F}(\lambda) \equiv 0 \pmod{u}$. Наша задача заключается в том, чтобы поднять λ до решения μ уравнения $\mathcal{F}(X) = 0$. При этом мы вынуждены повторить все этапы доказательства леммы Хензеля, чтобы контролировать выполнение условия (3.8).

Пусть $H(X, T)$ – формальная производная многочлена $F(X, T)$ по X . Из доказательства леммы 1.1 и определения δ следует, что $H(\lambda, T(\lambda)) = \lambda^\delta H_1(\lambda) + \ell H_2(\lambda)$, где $H_1(\lambda) \in \mathcal{O}_H[[\lambda]]$, $H_2(\lambda) \in \lambda \mathcal{O}_H[[\lambda]]$ и $H_1(0) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Таким образом,

$$H(\lambda, T(\lambda)) = d_0 \lambda^\delta \left(1 - \sum_{i > -\delta}^{\infty} d_i \lambda^i \right),$$

где $d_0 \in \mathcal{O}_H^\times$, $d_i \in \mathcal{O}_H$ и $\nu_\ell(d_i) \geq 1$ при $i < 0$. Следовательно,

$$H(\lambda, T(\lambda))^{-1} = d_0^{-1} \lambda^{-\delta} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i > -\delta}^{\infty} d_i \lambda^i \right)^n \right) = \lambda^{-\delta} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i \lambda^i \right) = \lambda^{-\delta} P(\lambda), \quad (3.9)$$

где $p_i \in \mathcal{O}_H$, $P(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]$ и для $i < 0$ справедливо неравенство $\nu_\ell(p_i) > -i/\delta$.

Положим $\mu_0 = \lambda$. Мы определим индуктивно последовательность приближений

$$\mu_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_{i,j}(u) \lambda^j \in \tilde{\mathcal{B}} \quad (3.10)$$

такую, что $m_{i,j}(u)$ – многочлены от u степени не выше i . Если μ_i уже определен для некоторого $i \geq 0$, то определим μ_{i+1} как ряд вида (3.10), коэффициенты которого являются многочленами от u степени не выше $i + 1$ и который удовлетворяет сравнению

$$\mu_{i+1} \equiv \mu_i - \mathcal{F}(\mu_i)/H(\lambda, T(\lambda)) \pmod{u^{i+2}}. \quad (3.11)$$

Прежде всего мы покажем, что если μ_i уже определен и $\mathcal{F}(\mu_i) \equiv 0 \pmod{u^{i+1}}$, то выполняются сравнения

$$\mu_{i+1} \equiv \mu_i \pmod{u^{i+1}}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{F}(\mu_{i+1}) \equiv 0 \pmod{u^{i+2}}. \quad (3.13)$$

Действительно, по предположению индукции $\mathcal{F}(\mu_i) \equiv 0 \pmod{u^{i+1}}$, поэтому $\mathcal{F}(\mu_i)/H(\lambda, T(\lambda)) \equiv 0 \pmod{u^{i+1}}$. Тогда (3.12) следует из (3.11) и (3.9).

Для доказательства (3.13) заметим, что для формальной переменной Y

$$\mathcal{F}(\mu_i + Y) = \mathcal{F}(\mu_i) + \mathcal{F}_1(\mu_i)Y + \mathcal{F}_2(\mu_i)Y^2 + \dots + \mathcal{F}_e(\mu_i)Y^e, \quad (3.14)$$

где $\mathcal{F}_1(\mu_i)$ – значение производной многочлена $\mathcal{F}(X)$ в точке $X = \mu_i$ и $\mathcal{F}_2(X), \dots, \mathcal{F}_e(X)$ – многочлены от X с коэффициентами из $\mathcal{O}_H[[u, \lambda]]$. Поскольку $\mu_i \equiv \lambda \pmod{u}$ и $\mathcal{F}(X) \equiv F(X) \pmod{u}$, мы имеем $\mathcal{F}_1(\mu_i) = H(\lambda, T(\lambda)) + uG(\lambda)$ для некоторого $G(\lambda) \in \mathcal{B}$. Тогда из (3.9) следует, что $\mathcal{F}_1(\mu_i) = \lambda^\delta P(\lambda)^{-1}(1 + uP(\lambda)G(\lambda))$, откуда мы получаем, что $\mathcal{F}_1(\mu_i)^{-1} \equiv \lambda^{-\delta} P(\lambda) \equiv H(\lambda, T(\lambda))^{-1} \pmod{u}$. Поскольку $\mathcal{F}(\mu_i) \equiv 0 \pmod{u^{i+1}}$, мы получаем

$$\mathcal{F}(\mu_i)/\mathcal{F}_1(\mu_i) \equiv \mathcal{F}(\mu_i)/H(\lambda, T(\lambda)) \pmod{u^{i+2}}. \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.14) $Y = -\mathcal{F}(\mu_i)/\mathcal{F}_1(\mu_i)$ и учитывая (3.15), мы получаем (3.13).

В силу (3.12) существует однозначно определенный элемент $\mu \in \mathcal{B}$ такой, что $\mu \equiv \mu_i \pmod{u^{i+1}}$ для всех $i \geq 0$. Из (3.13) следует тогда, что $\mathcal{F}(\mu) = 0$. Единственность μ следует из (3.14). Действительно, если μ' – другой корень уравнения $\mathcal{F}(X) = 0$ такой, что $\mu' \equiv \lambda \pmod{u}$, то полагаем в (3.14) $\mu_i = \mu$ и $Y = \mu - \mu'$. Противоречие.

Итак, нам осталось проверить выполнение условия (3.8). Вместо (3.8) мы рассмотрим более сильное условие, которое лучше подходит для применения индукции. Именно, мы будем доказывать, что при $j < 0$ коэффициенты $c_j(u)$ удовлетворяют условию

$$\nu(c_j(u)) > -\frac{1}{2} \left[\frac{j}{\delta} \right], \quad (3.16)$$

где $[j/\delta]$ – такое целое число, что $0 \leq j/\delta - [j/\delta] < 1$. Поскольку $c_j(u) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} u^i$, где $c_{i,j} \in \mathcal{O}_H$, для доказательства неравенства (3.16) достаточно проверить, что при заданном i для всех $j < 0$ выполняется условие

$$i + \nu_\ell(c_{i,j}) > -\frac{1}{2} \left[\frac{j}{\delta} \right]. \quad (3.17)$$

Отметим, что при $i + \nu_\ell(c_{i,j}) > 0$ и $j \geq 0$ условие (3.17) всегда выполняется.

Мы докажем (3.17) индукцией по i . При $i = 0$ мы имеем $\mu \equiv \lambda \pmod{u}$, т.е. $c_{0,j} = 0$ при всех $j < 0$. Следовательно, (3.17) выполняется в этом случае тривиальным образом.

Предположим, что (3.17) уже доказано для всех $i < i_0$ и $j < 0$ для некоторого индекса $i_0 \geq 1$. Чтобы доказать, что (3.17) выполняется для $i = i_0$, мы заметим,

что $\mu \equiv \mu_{i_0} \pmod{u^{i_0+1}}$ и $\mu_{i_0-1} \equiv \mu_{i_0} \pmod{u^{i_0}}$. Тогда из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{i_0,j} u^{i_0} \lambda^j \equiv \mathcal{F}(\mu_{i_0-1})/H(\lambda, T(\lambda)) \pmod{u^{i_0+1}}.$$

Согласно (3.10) и (3.12)

$$\mu_{i_0-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{i_0-1} c_{k,j} u^k \lambda^j, \quad c_{k,j} \in \mathcal{O}_H.$$

Пусть q_r – коэффициент при X^r многочлена $\mathcal{F}(X)$. Тогда

$$q_r = b_r(\tau(T)) = b_r(u + (1-u)T) = \sum_{s=0}^{\infty} u^s q_{r,s}(T(\lambda)) = \sum_{s=0}^{\infty} u^s \sum_{t=0}^{\infty} q_{r,s,t} \lambda^t,$$

где $q_{r,s,t} \in \mathcal{O}_H$. Следовательно, $\mathcal{F}(\mu_{i_0-1})/H(\lambda, T(\lambda)) \pmod{u^{i_0+1}}$ является суммой одночленов вида

$$u^s q_{r,s,t} \lambda^t \times \prod_{\alpha=1}^r c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha} \times \lambda^{-\delta} p_i \lambda^i, \quad (3.18)$$

где $s+k_1+\dots+k_r = i_0$ и p_i – коэффициенты из (3.9). Поэтому достаточно доказать, что условие вида (3.17) выполняется для любого одночлена (3.18).

Предположим, что $x_1 = a_1 u^{n_1} \lambda^{m_1}$ и $x_2 = a_2 u^{n_2} \lambda^{m_2}$, где $a_1, a_2 \in \mathcal{O}_H$. Если $n_1 + \nu_\ell(a_1) > -[m_1/\delta]/2$ и $n_2 + \nu_\ell(a_2) > -[m_2/\delta]/2$, то

$$n_1 + n_2 + \nu_\ell(a_1 a_2) > -\frac{1}{2} \left[\frac{m_1}{\delta} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{m_2}{\delta} \right] \geq -\frac{1}{2} \left[\frac{m_1 + m_2}{\delta} \right].$$

Таким образом, если для x_1, x_2 выполняется условие (3.17), то оно выполняется и для произведения $x_1 x_2$. Если один из элементов x_1, x_2 удовлетворяет условию (3.17), а другой содержит λ в неотрицательной степени, то $x_1 x_2$ снова удовлетворяет условию (3.17). Поэтому наша задача сводится к тому, чтобы разбить каждое из произведений (3.18) на множители, каждый из которых либо удовлетворяет условию (3.17), либо содержит λ в неотрицательной степени.

Если $s \geq 1$, то (3.18) после перестановки сомножителей превращается в произведение вида

$$u^s q_{r,s,t} \lambda^{t-\delta} \times \prod_{\alpha=1}^r c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha} \times p_i \lambda^i.$$

Поскольку $t \geq 0$, мы имеем $s > -[(t-\delta)/\delta]/2$. Любой из одночленов $c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha}$ входит в μ_{i_0-1} , поэтому для него либо $j_\alpha \geq 0$, либо условие (3.17) выполнено по предположению индукции. Наконец, в (3.9) мы имеем $\nu_\ell(p_i) > -i/\delta$. Поэтому $\nu_\ell(p_i) > -[i/\delta]/2$. Следовательно, при $s \geq 1$ для одночлена (3.18) выполняется условие (3.17). Отметим, что при $i_0 = 1$ только этот случай и может встретиться.

Рассмотрим теперь случай, когда $s = 0$. Поскольку каждый из показателей k_α строго меньше i_0 , мы имеем хотя бы пару положительных индексов k_α . Пусть, например, $k_1, k_2 > 0$. В силу этого предположения, а также предположения индукции мы имеем

$$2(\nu_\ell(c_{k_1, j_1}) + k_1) > -\left\lfloor \frac{j_1}{\delta} \right\rfloor, \quad 2(\nu_\ell(c_{k_2, j_2}) + k_2) > -\left\lfloor \frac{j_2}{\delta} \right\rfloor.$$

Поскольку в каждом из этих неравенств и справа, и слева стоят целые числа, мы получаем

$$2(\nu_\ell(c_{k_1, j_1} c_{k_2, j_2}) + k_1 + k_2) > -\left\lfloor \frac{j_1}{\delta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j_2}{\delta} \right\rfloor + 1 \geq -\left\lfloor \frac{j_1 + j_2}{\delta} \right\rfloor + 1 = -\left\lfloor \frac{j_1 + j_2 - \delta}{\delta} \right\rfloor,$$

т.е. для произведения $\lambda^{-\delta} c_{k_1, j_1} c_{k_2, j_2} u^{k_1 + k_2} \lambda^{j_1 + j_2}$ выполняется условие (3.17). В силу этого в данном случае (3.18) можно представить в виде

$$q_{r,0,t} \lambda^t \times \lambda^{-\delta} \prod_{\alpha=1}^2 c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha} \times \prod_{\alpha=3}^r c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha} \times p_i \lambda^i, \quad (3.19)$$

где произведение по $\alpha = 3, \dots, r$ предполагается равным 1 при $r = 2$. Таким образом, мы разложили одночлен (3.18) в произведение сомножителей (отделенных друг от друга косым крестом), каждый из которых либо содержит λ в неотрицательной степени, либо удовлетворяет условию (3.17), причем имеется хотя бы один такой сомножитель, а именно $\lambda^{-\delta} \prod_{\alpha=1}^2 c_{k_\alpha, j_\alpha} u^{k_\alpha} \lambda^{j_\alpha}$, удовлетворяющий условию (3.17). Теорема доказана полностью.

Из доказанной теоремы вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *Действие группы G на кольцо $\mathcal{A}[\xi]$, определенное в предположении 3.4, однозначно продолжается на кольцо $\mathcal{B}[\xi]$. Это продолжение однозначно определяется условием $\sigma(\lambda) \equiv \lambda \pmod{(1 - \xi_\sigma)}$. При этом для любого $\sigma \in G$*

$$\sigma(\lambda) = \mu(1 - \xi_\sigma, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(1 - \xi_\sigma) \lambda^j, \quad (3.20)$$

где $c_j(u)$ – коэффициенты из (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3.1 показывает, что автоморфизм τ кольца $\tilde{\mathcal{A}}$ из предложения 3.5 однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\tilde{\mathcal{B}}$, который мы снова будем обозначать через τ , такого, что $\tau(\lambda) = \mu$. Действительно, $\tilde{\mathcal{B}} \cong \tilde{\mathcal{A}}[X]/(F(X)) \cong \mathcal{O}_H[[u]]\{\{\lambda\}\}$, где λ – корень многочлена $F(X)$, поэтому для любого гомоморфизма $\tau: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, переводящего $F(X)$ в некоторый многочлен $\mathcal{F}(X)$, и любого корня μ многочлена $\mathcal{F}(X)$ существует единственное продолжение τ на кольцо $\tilde{\mathcal{B}}$ такое, что $\tau(\lambda) = \mu$. То, что τ – автоморфизм, следует из того, что τ^{-1} – продолжение на $\tilde{\mathcal{B}}$ автоморфизма τ^{-1} кольца $\tilde{\mathcal{A}}$ такого, что $\tau^{-1}(T) = v + (1 - v)T$, где $v = -\sum_{i=1}^{\infty} u^i$. При этом $\tau^{-1}(\lambda) = \mu(v, \lambda)$. Для $\sigma \in G$ пусть $\tilde{f}_\sigma: \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}[\xi]$ – гомоморфизм колец, продолжающий гомоморфизм f_σ из

предложения 3.5, т.е. тождественный на $\mathcal{O}_H$ и такой, что $\tilde{f}_\sigma(\lambda) = \lambda$ и $\tilde{f}_\sigma(u) = 1 - \xi_\sigma$. Тогда $\tilde{f}_\sigma$ переводит $\mathcal{F}(X)$ в $\sigma(F(X))$ и корень $\mu = \mu(u, \lambda)$ многочлена $\mathcal{F}(X)$ в корень $\mu_\sigma = \mu(1 - \xi_\sigma, \lambda)$ многочлена $\sigma(F(X))$. Отметим, что $\tilde{f}_\sigma$ сюръективно только в том случае, когда σ является образующей группы G .

Поскольку $\mathcal{B}[\xi] \cong \mathcal{A}[\xi][X]/(F(X))$, автоморфизм σ кольца $\mathcal{A}[\xi]$ продолжается до автоморфизма $\sigma: \mathcal{B}[\xi] \rightarrow \mathcal{B}[\xi]$, при котором $\sigma(\lambda) = \mu(1 - \xi_\sigma, \lambda)$. Следовательно, действие группы G однозначно продолжается на $\mathcal{B}[\xi]$ и при этом выполняется соотношение $f_\sigma \tau = \sigma f_\sigma$ для любого $\sigma \in G$. Теорема доказана.

§ 4. Применение формальных рядов Лорана

В теореме 2.1 фигурирует выражение $S_j := \mathcal{F}_j^{(n-p-1)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a))$, где $\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a)$ – логарифм Артина–Хассе, определенный в (2.1). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать существование универсального формального ряда Лорана $G(\lambda) \in \mathcal{A}[\ell] = \mathcal{O}_H\{\{\lambda\}\}$, зависящего от $n - p - 1$, $\varphi^n(\alpha)$, a и такого, что для любого $j \geq n$ выполняется равенство $S_j = G^{(-j)}(\lambda_j)$, где $G^{(-j)}(\lambda)$ – ряд, полученный из $G(\lambda)$ действием φ^{-j} на коэффициенты, и λ_j – локальный параметр поля K_j из предложения 1.2. В тех случаях, когда необходимо указать зависимость $G(\lambda)$ и S_j от дополнительных параметров, мы будем писать $G(n - p - 1, \varphi^n(\alpha), a, \lambda)$ и $S_j(n - p - 1, \varphi^n(\alpha), a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\sigma \in G(K_j/K_{j-n+p})$ и ξ_σ – корень из единицы (не обязательно первообразный) степени ℓ^{n-p} , определенный условием $\sigma(\xi_j) = \xi_\sigma \xi_j$. Пусть $\mu(u, \lambda) \in \mathcal{O}_H[[u]]\{\{\lambda\}\}$ – формальный ряд из (3.7) и $\mu^{(-j)}(u, \lambda)$ – ряд, полученный из $\mu(u, \lambda)$ действием φ^{-j} на коэффициенты. Тогда ряд $\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda_j)$ сходится в K_j и справедливо равенство

$$\sigma(\lambda_j) = \mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda_j). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие автоморфизма Фробениуса φ , а также любой его целой степени на $\mathcal{O}_H$ естественно продолжается на $\mathcal{A}[\ell]$ и $\mathcal{A}[\xi]$. При этом мы считаем, что $\varphi(T) = T$ и $\varphi(\xi) = \xi$, где ξ – первообразный корень из единицы степени ℓ^{n-p} . Тогда φ^{-j} индуцирует изоморфизм

$$\begin{aligned} \varphi^{-j}: \mathcal{B}[\xi] &= \mathcal{A}[\xi][X]/(F(X)) \\ &\cong \mathcal{B}^{(-j)}[\xi] := \mathcal{A}[\xi][X]/(F^{(-j)}(X)) \cong \mathcal{A}[\xi]\{\{\lambda^{(-j)}\}\}, \end{aligned}$$

который переводит $\lambda \in \mathcal{B}[\xi]$ в элемент $\lambda^{(-j)}$, являющийся корнем многочлена $F^{(-j)}(X)$. При этом изоморфизме произвольный ряд $f(\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \lambda^i$, $a_i \in \mathcal{O}_H[\xi]$, переходит в ряд

$$f^{(-j)}(\lambda^{(-j)}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi^{-j}(a_i)(\lambda^{(-j)})^i.$$

Пусть $\hat{\sigma} \in G$ – такой автоморфизм кольца $\mathcal{B}[\xi]$, что $\hat{\sigma}(T) = (1 - \xi_\sigma) + \xi_\sigma T$, где ξ_σ имеет тот же смысл, что и в формулировке предложения. Применяя теорему 3.2 к кольцу $\mathcal{B}^{(-j)}[\xi]$ и многочлену $F^{(-j)}(X)$, мы получаем, что ограничение

автоморфизма $\hat{\sigma}$ на $\mathcal{A}[\xi]$ однозначно продолжается до автоморфизма σ_1 кольца $\mathcal{B}^{(-j)}[\xi]$. Из однозначности этого продолжения следует, что $\varphi^{(-j)}\hat{\sigma} = \sigma_1\varphi^{(-j)}$. В частности, мы получаем, что $\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda^{(-j)})$ является корнем многочлена $\mathcal{F}^{(-j)}(X) = F^{(-j)}(X, 1 - \xi_\sigma + \xi_\sigma T)$, т.е. что

$$F^{(-j)}(\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda^{(-j)}), 1 - \xi_\sigma + \xi_\sigma T) = 0. \quad (4.2)$$

Если $T = T(\lambda)$ – ряд из леммы 3.1, то, применяя к обеим частям последнего равенства φ^{-j} , мы получаем $T = T^{(-j)}(\lambda^{(-j)})$. Тогда (4.2) приводит к тождеству (в кольце $\mathcal{B}^{(-j)}[\xi]$)

$$F^{(-j)}(\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda^{(-j)}), 1 - \xi_\sigma + \xi_\sigma T^{(-j)}(\lambda^{(-j)})) = 0.$$

Из доказательства леммы 3.1, примененного к многочлену $F^{(-j)}(X, T)$, следует, что $T^{(-j)}(\lambda_j) = \pi_j$. Легко показать, что ряд $\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda_j)$ сходится в K_j при $j \geq n$. Действительно, для коэффициентов этого ряда выполнено условие (3.8). Если ℓ^t – порядок σ в $G(K_j/K_{j-n+p})$, то $\nu_\ell(1 - \xi_\sigma) = \ell^{1-t}(\ell - 1)^{-1}$, причем эта формула верна как при $\ell \neq 2$, так и при $\ell = 2$. В любом случае $\nu_\ell(1 - \xi_\sigma) > \ell^{-t} \geq \ell^{p-n}$. Учитывая, что любая степень φ сохраняет ℓ -адический показатель, мы получаем, что из условия $\nu(c_r(u)) = a$ следует, что $\nu_\ell(c_r^{(-j)}(1 - \xi_\sigma)) \geq a\ell^{p-n}$. Согласно предложениям 1.1 и 1.2 мы имеем $\nu_\ell(\lambda_q^\delta) < 1/2$. Поскольку $p > q$ и $j \geq n$, мы получаем, что $j - q > n - p$, т.е.

$$\nu_\ell(\lambda_j^\delta) < \frac{1}{2}\ell^{p-n-1}. \quad (4.3)$$

Это показывает, что член $c_r^{(-j)}(1 - \xi_\sigma)\lambda_j^r$ является целым числом при $r < 0$ и стремится к нулю в K_j при $r \rightarrow -\infty$, т.е. ряд $\mu^{(-j)}(1 - \xi_\sigma, \lambda^{(-j)})$ сходится к некоторому $z \in \mathcal{O}_{K_j}$ такому, что $F^{(-j)}(z, \sigma(\pi_j)) = 0$.

Так как $\mu(u, \lambda) \equiv \lambda \pmod{u}$, получаем из (3.8), что $z \equiv \lambda_j \pmod{(1 - \xi_\sigma)\lambda^{-2\delta}}$, в частности $z \equiv \lambda_j \pmod{\lambda_j^{\delta+1}}$, причем z – единственный корень многочлена $F^{(-j)}(X, \sigma(\pi_j))$, удовлетворяющий последнему сравнению. Так как $\sigma(\lambda_j) \equiv \lambda_j \pmod{\lambda_j^{i_n(\sigma)}}$ и $i_n(\sigma)$ определяется формулой (1.10), мы получаем, что $\sigma(\lambda_j) \equiv \lambda_j \pmod{\pi_j^{p+\alpha}\lambda_j^{-\delta}}$, где $\alpha = 1$ при $\ell \neq 2$ и $\alpha = 2$ при $\ell = 2$. Поскольку $\nu_\ell(\pi_j) \geq \ell^{-(j+1)}$, мы имеем $\nu_\ell(\pi_j^{p+\alpha}) \geq \ell^{p-j}$. Из неравенств $\nu_\ell(\lambda_q^\delta) < 1/2$ и $p > q$ мы получаем $\nu_\ell(\lambda_j^\delta) < \ell^{p-j-1}/2$, откуда следует, что $\sigma(\lambda_j) \equiv z \pmod{\lambda_j^{\delta+1}}$. Следовательно, $\sigma(\lambda_j) = z$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует формальный ряд Лорана $G(\lambda) = G(n - p - 1, \varphi^n(\alpha), a, \lambda) \in \mathcal{B}[\ell]$ такой, что для любого $j \geq n$ ряд $G^{(-j)}(\lambda_j)$ сходится и*

$$G^{(-j)}(\lambda_j) = \mathcal{F}_j^{(n-p-1)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a)). \quad (4.4)$$

Если $G(\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i \lambda^i$, то $g_i \in \ell \mathcal{O}_H$ для всех i и для всех $i < 0$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(g_i) > -\frac{i}{2\delta\ell^{n-p}}. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S_j := \mathcal{F}_j^{(n-p-1)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a))$ и

$$S_{j,r} = \ell^{-r} \varphi^{n+r-j}(\alpha) [\ell \operatorname{Sp}_{K_j/K_{j-n+p+1}}(\lambda_i^{a\ell^r}) - \operatorname{Sp}_{K_j/K_{j-n+p}}(\lambda_j^{a\ell^r})].$$

Тогда $S_j = \sum_{r=0}^{\infty} S_{j,r}$.

Если σ пробегает группу $G(K_j/K_{j-n+p+1})$ (соответственно группу $G(K_j/K_{j-n+p})$), то ξ_σ пробегает все корни из единицы степени ℓ^{n-p-1} (соответственно степени ℓ^{n-p}). Из предложения 4.1 непосредственно следует, что для любых $j \geq n$ и $r \geq 0$

$$S_{j,r} = \ell^{-r} \varphi^{n+r-j}(\alpha) G_r^{(-i)}(\lambda_j), \quad (4.6)$$

где формальный ряд Лорана $G_r(\lambda) \in \mathcal{B}[\xi]$ определяется равенством

$$G_r(\lambda) = \ell \sum_{\xi \ell^{n-p-1}=1} (\mu(1-\xi, \lambda))^{a\ell^r} - \sum_{\xi \ell^{n-p}=1} (\mu(1-\xi, \lambda))^{a\ell^r}. \quad (4.7)$$

Покажем, что для любого $r \geq 0$ коэффициенты ряда $\ell^{-r} G_r(\lambda)$ принадлежат $\ell\mathcal{O}_H$ и удовлетворяют при $i < 0$ неравенству вида (4.5). Затем покажем, что формальная сумма $\sum_{r \geq 0} \ell^{-r} \varphi^{n+r}(\alpha) G_r(\lambda)$ сходится покоэффициентно к некоторому ряду $G(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]$, удовлетворяющему всем условиям теоремы.

ЛЕММА 4.1. Для фиксированного натурального $\varkappa$ и $i \geq 0$ положим

$$d(i) = \ell \sum_{\xi \ell^{\varkappa-1}=1} (1-\xi)^i - \sum_{\xi \ell^{\varkappa}=1} (1-\xi)^i.$$

Тогда $d(i) \in \ell^{\varkappa} \mathbb{Z}_\ell$ для любого $i \geq 0$ и $d(0) = 0$. Если $b := [i\ell^{-\varkappa}]$ — целая часть $i\ell^{-\varkappa}$, то при любом ℓ

$$\nu_\ell(d(i)) \geq \varkappa + b. \quad (4.8)$$

Если $\ell \neq 2$, то

$$\nu_\ell(d(i)) \geq \varkappa + b + b_1, \quad (4.9)$$

где $b_1 = [i\ell^{-\varkappa-1}]$. Если $\ell = 2$, то

$$\nu_\ell(d(i)) \geq \varkappa + b_0 - 1, \quad (4.10)$$

где $b_0 = [i\ell^{1-\varkappa}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка показывает, что

$$\ell \sum_{\xi \ell^{\varkappa-1}=1} \xi^i - \sum_{\xi \ell^{\varkappa}=1} \xi^i = \begin{cases} \ell^{\varkappa} & \text{при } i \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa-1}}, \\ i \not\equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa}}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это доказывает, что $d(i) \in \ell^{\varkappa} \mathbb{Z}_\ell$ для всех i и $d(0) = 0$.

Пусть $b = [i\ell^{-\varkappa}] > 0$. Если $\xi_\varkappa$ – первообразный корень из единицы степени $\ell^\varkappa$, то $\nu_\ell(1 - \xi_\varkappa) = \ell^{1-\varkappa}/(\ell - 1)$, поэтому

$$(1 - \xi_\varkappa)^i \equiv 0 \pmod{\ell^b \pi_0}, \quad (4.11)$$

где $\nu_\ell(\pi_0) = 1/(\ell - 1)$. Положим $\alpha = 1$ при $\ell \neq 2$ и $\alpha = 2$ при $\ell = 2$. Легко видеть, что при $i > 0$

$$\sum_{\xi^{\ell^\varkappa}=1} (1 - \xi)^i = \beta + \sum_{j=0}^{\varkappa-\alpha} \text{Sp}_{k_j/\mathbb{Q}_\ell}((1 - \zeta_j)^i), \quad (4.12)$$

где $\beta = 0$ при $\ell \neq 2$ и $\beta = 2^i$ при $\ell = 2$. Поскольку для дифференты $\mathcal{D}(k_{\varkappa-\alpha}/\mathbb{Q}_\ell)$ справедлива формула $\mathcal{D}(k_{\varkappa-\alpha}/\mathbb{Q}_\ell) = (\ell^\varkappa \pi_0^{-1})$, из (4.11) следует, что

$$\text{Sp}_{k_{\varkappa-\alpha}/\mathbb{Q}_\ell}((1 - \zeta_{\varkappa-\alpha})^i) \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa+b}}.$$

Учитывая, что $b \geq 1$, мы получаем из (4.11), что для любого $j = \varkappa - \alpha - c$, где $1 \leq c \leq \varkappa - \alpha$, справедливо сравнение

$$(1 - \zeta_j)^i \equiv (1 - \zeta_{\varkappa-\alpha})^{i\ell^c} \equiv 0 \pmod{\ell^{b+c} \pi_0},$$

откуда следует, что при любом c

$$\text{Sp}_{k_j/\mathbb{Q}_\ell}((1 - \zeta_j)^i) \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa+b}}.$$

Если $\ell = 2$, то $\beta = 2^i \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa+b}}$. Следовательно,

$$\sum_{\xi^{\ell^\varkappa}=1} (1 - \xi)^i \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa+b}}.$$

Аналогичные оценки показывают, что и

$$\ell \sum_{\xi^{\ell^{\varkappa-1}}=1} (1 - \xi)^i \equiv 0 \pmod{\ell^{\varkappa+b}},$$

что доказывает неравенство (4.8).

Если $\ell \neq 2$, то $(1 - \xi_\varkappa)^{\ell^\varkappa} \equiv 0 \pmod{\ell \pi_0}$, поэтому $(1 - \xi_\varkappa)^i \equiv 0 \pmod{(\ell \pi_0)^b}$, т.е. $(1 - \xi_\varkappa)^i \equiv 0 \pmod{\ell^{b+b_1} \pi_0}$, откуда, повторяя предыдущие рассуждения, мы получаем неравенство (4.9).

Если $\ell = 2$, то $(1 - \xi_\varkappa)^{\ell^{\varkappa-1}} \equiv 0 \pmod{\ell}$, т.е. $(1 - \xi_\varkappa)^i \equiv 0 \pmod{\ell^{b_0}}$ и $\mathcal{D}(k_{\varkappa-\alpha}/\mathbb{Q}_\ell) = (\ell^{\varkappa-1})$, откуда легко следует неравенство (4.10). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для произвольного $c \in \mathcal{O}_H$ положим $i_0 := \nu(c(1 - \xi)^i) = \nu_\ell(c) + i$. Тогда

$$\nu_\ell(cd(i)) \geq \varkappa + b, \quad (4.13)$$

где $b = [i_0 \ell^{-\varkappa}] = [(\nu_\ell(c) + i) \ell^{-\varkappa}]$. Аналогичным образом обобщаются неравенства (4.9) и (4.10).

Действительно, пусть $\nu_\ell(c) = 1$. В силу доказанной леммы $\nu_\ell(d(i+1)) \geq \varkappa + b$, где $b = [(i+1) \ell^{-\varkappa}]$. В доказательстве леммы было показано, что $(1 - \xi_\varkappa)^{i+1} \equiv 0 \pmod{\ell^b \pi_0}$, поэтому $(1 - \xi_\varkappa)^i \equiv 0 \pmod{\ell^{b-1} \pi_0}$, откуда следует, что $\nu_\ell(d(i)) \geq \varkappa + b - 1$ и $\nu_\ell(cd(i)) \geq \varkappa + b$. Переход к произвольному c осуществляется индукцией по $\nu_\ell(c)$, что доказывает (4.13). Обобщения неравенств (4.9) и (4.10) доказываются аналогично.

Мы применим лемму 4.1 и замечание к ней для оценок коэффициентов формального ряда $G_r(\lambda)$. Согласно теореме 3.1

$$\mu(1 - \xi, \lambda) = \lambda + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 1}}^{\infty} c_j (1 - \xi) \lambda^j = \lambda + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 1}}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,j} (1 - \xi)^i \lambda^j, \quad (4.14)$$

где $c_j(u) \in u \mathcal{O}_H[[u]]$ и $c_{i,j} \in \mathcal{O}_H$ для всех i, j . При этом согласно (3.8) $\nu(c_j(u)) > -j/(2\delta)$, т.е. для любой пары индексов i, j справедливо неравенство $\nu_\ell(c_{i,j}) + i > -j/(2\delta)$.

Заметим, что для любых элементов $a_1, \dots, a_s$ мы имеем

$$\left(\sum_{i=1}^s a_i \right)^\ell = \sum_{i=1}^s a_i^\ell + \ell F(a_1, \dots, a_s), \quad (4.15)$$

где F — некоторая форма степени ℓ от $a_1, \dots, a_s$ с целыми рациональными коэффициентами. Применяя (4.15) r раз к выражению $\left(\sum_{i=1}^s a_i \right)^a$, мы получаем

$$\left(\sum_{i=1}^s a_i \right)^{a\ell^r} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} a_1^{\alpha_1} \dots a_s^{\alpha_s}, \quad (4.16)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ пробегает все наборы целых неотрицательных чисел таких, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = a\ell^r$. При этом если $v = \nu_\ell(b_{\alpha_1, \dots, \alpha_s})$, то $\alpha_1 \equiv \dots \equiv \alpha_s \equiv 0 \pmod{\ell^{r-v}}$.

Возводя правую часть (4.14) в степень $a\ell^r$ и используя (4.16), мы получаем, что ряд

$$h(1 - \xi, \lambda) := \mu(1 - \xi, \lambda)^{a\ell^r}$$

можно представить в виде сходящейся суммы одночленов вида $bc(1 - \xi)^i \lambda^j$, где $b \in \mathbb{Z}$ — это коэффициент $b_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}$ для некоторого набора индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и $c(1 - \xi)^i \lambda^j = \prod_{\nu=1}^s (c_{i_\nu, j_\nu} (1 - \xi)^{i_\nu} \lambda^{j_\nu})^{\alpha_\nu}$, причем $\sum_{\nu=1}^s \alpha_\nu i_\nu = i$ и $\sum_{\nu=1}^s \alpha_\nu j_\nu = j$. При этом из (4.16) следует, что для $v = \nu_\ell(b)$ справедливо сравнение

$$\nu_\ell(c) \equiv i \equiv j \equiv 0 \pmod{\ell^{r-v}}, \quad (4.17)$$

а из (3.8) следует, что

$$\nu_\ell(c) + i > -\frac{j}{2\delta}. \quad (4.18)$$

Тогда ряд $G_r(\lambda)$ можно представить в виде сходящейся суммы одночленов вида $bcd(i)\lambda^j$. Прежде всего мы покажем, что ряд $\ell^{-r}G_r(\lambda)$ имеет целые коэффициенты, делящиеся на ℓ , для чего достаточно проверить, что для любого одночлена $bc(1-\xi)^i\lambda^j$, указанного выше вида, справедливо неравенство $\nu_\ell(bcd(i)) > r$. Если $n-p > r-v$, где $v = \nu_\ell(b)$, то согласно лемме 4.1 $\nu_\ell(d(i)) \geq n-p$, т.е. $\nu_\ell(bcd(i)) \geq n-p+v > r$.

Предположим теперь, что $n-p \leq r-v$. Пусть $h = r-v-n+p$. Тогда из (4.17) следует, что $[i\ell^{p-n}] = \ell^h$ при $i \neq 0$, т.е. согласно (4.8) справедливо неравенство $\nu_\ell(bcd(i)) \geq v+n-p+\ell^h > r$. Этим доказано, что ряд $\ell^{-r}G_r(\lambda)$ имеет целые коэффициенты, делящиеся на ℓ .

Теперь мы покажем, что при $j < 0$ для любого одночлена $bc(1-\xi)^i\lambda^j$, удовлетворяющего условиям (4.17) и (4.18), справедливо неравенство

$$\nu_\ell(\ell^{-r}bcd(i)) > -\frac{j}{2\delta\ell^{n-p}}. \quad (4.19)$$

Если $n-p > r-v$, где $v = \nu_\ell(b)$, то согласно (4.8), замечанию к лемме 4.1 и (4.18) мы имеем

$$\nu_\ell(cd(i)) \geq n-p + [(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n}] \geq n-p + \left[-\frac{j}{2\delta\ell^{n-p}}\right].$$

Так как $-j/(2\delta\ell^{n-p}) - [-j/(2\delta\ell^{n-p})] < 1$ и $n-p-r+v \geq 1$, мы получаем (4.19).

Пусть $n-p = r-v$. Тогда $[(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n}] = (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n}$, и, снова используя (4.8) и (4.18), мы получаем

$$\nu_\ell(cd(i)) \geq n-p + (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} > n-p - \frac{j}{2\delta\ell^{n-p}} = r-v - \frac{j}{2\delta\ell^{n-p}},$$

т.е. (4.19) справедливо и в этом случае.

Если $n-p < r-v$, то мы рассмотрим по отдельности случаи $\ell \neq 2$ и $\ell = 2$.

Если $\ell \neq 2$, то в силу (4.17) при $j < 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} [(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n}] &= (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} \geq \ell, \\ [(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n-1}] &= (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n-1} \\ &\geq \ell^{r-v+p-n-1} \geq r-v+p-n, \end{aligned}$$

поэтому из (4.9), замечания к лемме 4.1 и (4.18) следует, что

$$\begin{aligned} \nu_\ell(cd(i)) &\geq n-p + (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} - 1 \\ &\geq n-p + (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} - 1 + r-v-n+p+1 > r-v - \frac{j}{2\delta\ell^{n-p}}, \end{aligned}$$

откуда следует (4.19).

Если $\ell = 2$ и $n-p < r-v$, то из (4.17) следует, что

$$\begin{aligned} [(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n+1}] &= (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n+1} = 2(\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} \\ &\geq (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} + \ell^{r-v-n+p} \\ &\geq (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n} + r-v-n+p+1, \end{aligned}$$

откуда, используя (4.10), замечание к лемме 4.1 и (4.18), мы получаем

$$\nu_\ell(cd(i)) \geq n - p + (\nu_\ell(c) + i)\ell^{p-n+1} - 1 > r - v - \frac{j}{2\delta\ell^{p-n}},$$

что доказывает справедливость (4.19) и в этом случае.

Итак, мы доказали, что при любом r коэффициенты ряда

$$\ell^{-r}G_r(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{r,j}\lambda^j$$

обладают тем свойством, что $g_{r,j} \in \ell\mathcal{O}_H$ при всех j , и для любого $j < 0$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(g_{r,j}) < -\frac{j}{2\delta\ell^{n-p}}.$$

Теперь мы покажем, что формальная сумма $\sum_{r=0}^{\infty} \ell^{-r}\varphi^{n+r}(\alpha)G_r(\lambda)$ сходится покоэффициентно, т.е. что $\nu_\ell(g_{r,j}) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ для любого фиксированного j . Как было показано выше, член $g_{r,j}\lambda^j$ ряда $\ell^{-r}G_r(\lambda)$ является суммой одночленов вида $\ell^{-r}bcd(i)\lambda^j$, удовлетворяющих условиям (4.17) и (4.18). Пусть $\gamma = \nu_\ell(j)$. Тогда из (4.17) следует, что $r - v \leq \gamma$, где $v = \nu_\ell(b)$, т.е.

$$\nu_\ell(\ell^{-r}b) \leq \gamma. \quad (4.20)$$

Согласно (4.16) одночлен $\ell^{-r}bcd(i)\lambda^j$ имеет следующий вид. Существует некоторый набор целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ и некоторый набор одночленов $c_{i_\nu, j_\nu} (1 - \xi)^{i_\nu} \lambda^{j_\nu}$, $1 \leq \nu \leq s$, входящих в (4.8), такой, что выполнены следующие условия:

- (i) $-\infty < j < \infty$ и $i \geq 0$, причем из $i = 0$ следует, что $j = 1$ и $c_{0,1} = 1$;
- (ii) $\sum_{\nu=1}^s \alpha_\nu = a\ell^r$;
- (iii) $\sum_{\nu=1}^s \alpha_\nu i_\nu = i$;
- (iv) $\sum_{\nu=1}^s \alpha_\nu j_\nu = j$;
- (v) $c = \prod_{\nu=1}^s c_{i_\nu, j_\nu}^{\alpha_\nu}$.

Нам нужно оценить величину коэффициента $cd(i)$ при λ^j , поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что все α_ν положительны и что $j_1, \dots, j_t < 0$, $j_{t+1}, \dots, j_u = 0$ и $j_{u+1}, \dots, j_s > 0$. Тогда из (ii) следует, что хотя бы одна из сумм $S_1 = \sum_{\nu=1}^t \alpha_\nu$, $S_2 = \sum_{\nu=t+1}^u \alpha_\nu$ и $S_3 = \sum_{\nu=u+1}^s \alpha_\nu$ не меньше, чем $a\ell^r/3$.

Если $S_1 \geq a\ell^r/3$ или $S_2 \geq a\ell^r/3$, то, учитывая, что $i_\nu \geq 1$ при $j_\nu \leq 0$, мы получаем из (iii), что $i \geq a\ell^r/3$. Тогда из леммы 4.1 следует, что $\nu_\ell(d(i)) \geq [a\ell^r/(3\ell^{n-p})]$, а это вместе с (4.20) дает нам, что $\nu_\ell(g_{r,j}) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Если $S_3 \geq a\ell^r/3$, то $\sum_{\nu=u+1}^s \alpha_\nu j_\nu \geq a\ell^r/3$, поэтому из (iv) следует, что

$$-\sum_{\nu=1}^t \alpha_\nu j_\nu \geq \frac{a\ell^r}{3} - j.$$

Согласно (3.8) $\nu_\ell(c_{i_\nu, j_\nu}) + i_\nu \geq -j_\nu/2\delta$ для $\nu = 1, \dots, t$, откуда согласно (v) следует, что

$$\nu_\ell(c) + i \geq \sum_{\nu=1}^t \alpha_\nu (\nu_\ell(c_{i_\nu, j_\nu}) + i_\nu) \geq \frac{1}{2\delta} \left(\frac{a\ell^r}{3} - j \right).$$

Тогда из (4.13) вытекает, что

$$\nu_\ell(cd(i)) \geq n - p + \left[\left(\frac{a\ell^r}{3} - j \right) \frac{1}{2\delta\ell^{n-p}} \right],$$

т.е. и в этом случае $\nu_\ell(g_{r,j}) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, формальная сумма $G(\lambda) := \sum_{r=0}^{\infty} \ell^{-r} \varphi^{n+r}(\alpha) G_r(\lambda)$ сходится покоэффициентно и определяет формальный ряд Лорана $G(\lambda)$, коэффициенты которого g_i принадлежат $\ell\mathcal{O}_H$ и удовлетворяют условию (4.5). Из этого условия следует, что $G(x)$ сходится для любого $x \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ такого, что

$$0 < \nu_\ell(x) < (2\delta\ell^{n-p})^{-1}. \quad (4.21)$$

Более того, легко видеть, что для такого x

$$G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \ell^{-r} \varphi^{n+r}(\alpha) G_r(x). \quad (4.22)$$

Действительно, нам достаточно проверить, что $\nu_\ell(\ell^{-r} G_r(x)) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Пусть N – достаточно большое натуральное число. Мы имеем

$$\ell^{-r} G_r(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{r,j} \lambda^j = \sum_{j=N+1}^{\infty} g_{r,j} \lambda^j + \sum_{j=-N}^N g_{r,j} \lambda^j + \sum_{j=-\infty}^{-N-1} g_{r,j} \lambda^j.$$

Обозначим эти три суммы через S_1, S_2 и S_3 соответственно. Тогда $\nu_\ell(S_1) \geq N\nu_\ell(x)$, показатель $\nu_\ell(S_2)$ при фиксированном N и $r \rightarrow \infty$ становится сколь угодно большим, так как $\nu_\ell(g_{r,j}) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ для любого j . Наконец, в силу (4.5) мы имеем

$$\nu_\ell(S_3) \geq N \left(\frac{1}{2\delta\ell^{n-p}} - \nu_\ell(x) \right).$$

Этим доказано, что для x , удовлетворяющего (4.21), справедлива формула (4.22). В частности, действуя на коэффициенты в обеих частях формулы (4.22) автоморфизмом φ^{-j} , подставляя $x = \lambda_j$, где $j \geq n$, и используя (4.6), мы получаем (4.4). Теорема доказана полностью.

§ 5. G -инвариантные ряды Лорана

В § 3 было определено действие циклической группы G порядка ℓ^k на кольца $\mathcal{A}[\xi]$ и $\mathcal{B}[\xi]$. В этом параграфе для произвольной подгруппы $\mathcal{H} \subseteq G$ будет дана характеристика колец $\mathcal{A}[\xi]^\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}[\xi]^\mathcal{H}$. Эта характеристика будет затем применена к ряду $G(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]$ из теоремы 4.1.

Итак, пусть $\mathcal{H}$ – некоторая подгруппа группы G порядка ℓ^s , где $1 \leq s \leq k$. Для произвольного натурального m положим

$$T_{\langle m \rangle} = T_{\langle m \rangle}(T) = 1 - (1 - T)^{\ell^m} = \sum_{i=1}^{\ell^m} \binom{\ell^m}{i} (-1)^{i+1} T^i.$$

Для любого элемента $\sigma \in \mathcal{H}$ мы имеем $\sigma(1 - T) = \xi_\sigma(1 - T)$, поэтому $\sigma(T_{\langle s \rangle}) = T_{\langle s \rangle}$, т.е. $T_{\langle s \rangle} \in \mathcal{A}[\xi]^{\mathcal{H}}$.

Пусть $C(X) \in \mathcal{O}_H[\xi][\{X\}]$. Поскольку $T_{\langle s \rangle} \equiv \pm T^{\ell^s} \pmod{\ell}$ и $T_{\langle s \rangle}^{-1} = \pm T^{-\ell^s} \times U(T)$, где $U(T) \in \mathcal{A}[\ell]^\times$ и $U(T) \equiv 1 \pmod{\ell}$, мы получаем, что ряд $i(C(T_{\langle s \rangle})) := C(T_{\langle s \rangle}(T))$ является корректно определенным элементом кольца $\mathcal{A}[\xi]$, что определяет гомоморфизм колец

$$i: \mathcal{O}_H[\xi][\{T_{\langle s \rangle}\}] \longrightarrow \mathcal{A}[\xi],$$

который, как легко можно проверить, является вложением. Пользуясь этим вложением, мы будем рассматривать $\mathcal{O}_H[\xi][\{T_{\langle s \rangle}\}]$ как подкольцо кольца $\mathcal{A}[\xi]$.

Предложение 5.1. Пусть $1 \leq s \leq k$ и $\mathcal{H}$ – подгруппа группы G порядка ℓ^s . Тогда

$$\mathcal{A}[\xi]^{\mathcal{H}} = \mathcal{O}_H[\xi][\{T_{\langle s \rangle}\}].$$

Другими словами, любой ряд Лорана от T из кольца $\mathcal{A}[\xi]$, неподвижный относительно $\mathcal{H}$, может быть представлен как ряд Лорана от $T_{\langle s \rangle}$.

Доказательство. Обозначим кольцо $\mathcal{O}_H[\xi][\{T_{\langle s \rangle}\}]$ через $\mathbb{A}[\xi]$. Мы покажем, что $\mathcal{A}[\xi]$ порождается элементами $1, T, \dots, T^{\ell^s-1}$ как $\mathbb{A}[\xi]$ -модуль. Действительно, поскольку $T_{\langle s \rangle} \equiv \pm T^{\ell^s} \pmod{\ell}$, мы получаем, что любой ряд $f(T) \in \mathcal{A}[\xi]$ представим в виде

$$f(T) \equiv \sum_{i=0}^{\ell^s-1} f_{i,1}(T_{\langle s \rangle}) T^i \pmod{\pi}, \quad (5.1)$$

где $f_{i,1}(T_{\langle s \rangle}) \in \mathcal{O}_H[\xi][[T_{\langle s \rangle}]]$, коэффициенты рядов $f_{i,1}$ определены однозначно по модулю π и π – локальный параметр кольца $\mathcal{O}_H[\xi]$. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$ уже построены формальные ряды Лорана с конечной главной частью:

$$f_{i,n}(T_{\langle s \rangle}) \in \mathcal{O}_H[\xi]((T_{\langle s \rangle})), \quad 0 \leq i \leq \ell^s - 1,$$

такие, что все коэффициенты при отрицательных степенях $T_{\langle s \rangle}$ делятся на π , и выполняется сравнение

$$f(T) \equiv \sum_{i=0}^{\ell^s-1} f_{i,n}(T_{\langle s \rangle}) T^i \pmod{\pi^n}. \quad (5.2)$$

Тогда, как и в (5.1), мы можем найти формальные ряды Лорана с конечной главной частью $g_i(T_{\langle s \rangle})$, $0 \leq i \leq \ell^s - 1$, такие, что

$$f(T) - \sum_{i=0}^{\ell^s-1} f_{i,n}(T_{\langle s \rangle}) T^i \equiv \pi^n \sum_{i=0}^{\ell^s-1} g_i(T_{\langle s \rangle}) T^i \pmod{\pi^{n+1}}.$$

Полагая $f_{i,n+1}(T_{\langle s \rangle}) = f_{i,n}(T_{\langle s \rangle}) + \pi^n g_i(T_{\langle s \rangle})$, мы получаем, что сравнение вида (5.2) выполняется и для $n + 1$. Полагая $f_i(T_{\langle s \rangle}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{i,n}(T_{\langle s \rangle})$ для $0 \leq i \leq \ell^s - 1$ и учитывая, что $f_{i,n}(T_{\langle s \rangle})$ имеет конечную главную часть при любом n , мы получаем, что $f_i(T_{\langle s \rangle}) \in \mathbb{A}[\xi]$ для $0 \leq i \leq \ell^s - 1$ и $f(T) = \sum_{i=0}^{\ell^s-1} f_i(T_{\langle s \rangle}) T^i$. Это означает, что $1, T, \dots, T^{\ell^s-1}$ порождают $\mathcal{A}[\xi]$ как $\mathbb{A}[\xi]$ -модуль.

Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ – поля частных колец $\mathbb{A}[\xi]$ и $\mathcal{A}[\xi]$ соответственно. Тогда элементы $1, T, \dots, T^{\ell^s-1}$ порождают $\mathcal{L}$ над $\mathcal{K}$. Группа $\mathcal{H}$ действует на $\mathcal{L}$, и $\mathcal{L}/\mathcal{L}^{\mathcal{H}}$ является расширением Галуа степени ℓ^s , причем $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}^{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{K}$. Следовательно, $\mathcal{L}^{\mathcal{H}} = \mathcal{K}$.

Поскольку T удовлетворяет уравнению $1 - (1 - T)^{\ell^s} - T_{\langle s \rangle} = 0$, мы получаем, что $\mathcal{A}[\xi]$ цело над $\mathbb{A}[\xi]$. Тогда из условия $x \in \mathcal{A}[\xi]^{\mathcal{H}}$ следует, что $x \in \mathcal{A}[\xi] \cap \mathcal{K}$, откуда следует, что $x \in \mathcal{K}$ и x цел над $\mathbb{A}[\xi]$, но согласно предложению 3.2 кольцо $\mathbb{A}[\xi]$ целозамкнуто в $\mathcal{K}$, откуда вытекает, что $x \in \mathbb{A}[\xi]$. Предложение доказано.

Теперь мы дадим характеристику кольца $\mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}}$. Мы рассмотрим сначала случай, когда $|\mathcal{H}| = \ell$, а затем покажем, что общий случай легко сводится к этому частному случаю.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $F(X, T)$ – многочлен из предложения 1.3 и $F^{(1)}(X, T)$ – многочлен, полученный из $F(X, T)$ действием автоморфизма Фробениуса φ на коэффициенты. Пусть $T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)$ – результат композиции рядов $T_{\langle 1 \rangle}(T)$ и $T(\lambda)$. Тогда в кольце $\mathcal{B}[\ell]$ существует единственный элемент $\lambda_{\langle 1 \rangle} = \lambda_{\langle 1 \rangle}(\lambda) = Q(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q_j \lambda^j$ такой, что $\lambda_{\langle 1 \rangle}(\lambda) \equiv \lambda^\ell \pmod{\ell}$ и $F^{(1)}(\lambda_{\langle 1 \rangle}(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) = 0$. При этом для всех $j < 0$ выполняется неравенство

$$\nu_\ell(q_j) > -\frac{j}{2\delta\ell}, \quad (5.3)$$

где δ имеет тот же смысл, что и в предложении 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем мы будем часто иметь дело с условиями вида (5.3), поэтому нам удобно ввести следующее определение. Для любого кольца формальных рядов Лорана $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ вида (3.1) и произвольного натурального r положим

$$\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r = \left\{ A(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}, \quad A(X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X^j \mid \right. \\ \left. \nu_\ell(a_j) > -\frac{j}{2\delta\ell^r} \text{ при всех } j < 0 \right\}.$$

Через $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r^{(0)}$ обозначим множество всех тех рядов из $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r$, все коэффициенты которых делятся на ℓ . Без труда проверяется, что $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r$ является подкольцом в $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}$, а $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r^{(0)}$ является идеалом в $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_r$.

На языке этого определения условие (5.3) означает, что $\lambda_{\langle 1 \rangle}(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]_1$, а теорема 4.1 утверждает, что $G(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]_{n-p}^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Поскольку

$$F(X, T)^\ell \equiv F^{(1)}(X^\ell, T^\ell) \equiv F^{(1)}(X^\ell, T_{\langle 1 \rangle}) \pmod{\ell},$$

мы получаем $F^{(1)}(\lambda^\ell, T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) \equiv 0 \pmod{\ell}$, т.е. λ^ℓ является приближенным (по модулю ℓ) решением уравнения $F^{(1)}(X, T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) = 0$. Мы поднимем λ^ℓ до решения этого уравнения тем же способом, что и в доказательстве теоремы 3.1.

Пусть $H^{(1)}(X, T)$ – формальная производная многочлена $F^{(1)}(X, T)$ по X . Поскольку $T_{\langle 1 \rangle} \equiv T^\ell \pmod{\ell}$, мы получаем, используя определение δ , что

$$H^{(1)}(\lambda^\ell, T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) \equiv \lambda^{\ell\delta} h(\lambda) \pmod{\ell},$$

где $h(\lambda)$ – некоторый обратимый формальный степенной ряд.

Мы определим последовательность приближений $Q_i(\lambda)$, где $Q_i(\lambda) \in \mathcal{O}_H((\lambda))$, т.е. $Q_i(\lambda)$ – ряд Лорана с конечной главной частью, таких, что

$$F^{(1)}(Q_i(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) \equiv 0 \pmod{\ell^i}, \quad (5.4)$$

$$Q_{i+1}(\lambda) \equiv Q_i(\lambda) \pmod{\ell^i} \quad (5.5)$$

для всех $i \geq 0$.

Положим $Q_1(\lambda) = \lambda^\ell$. Если элемент $Q_i(\lambda)$ уже определен, то мы положим

$$Q_{i+1}(\lambda) \equiv Q_i(\lambda) - \frac{F^{(1)}(Q_i(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda))}{\lambda^{\ell\delta} h(\lambda)} \pmod{\ell^{i+1}}. \quad (5.6)$$

Условие (5.6) определяет коэффициенты ряда $Q_{i+1}(\lambda)$ только по модулю ℓ^{i+1} . Поэтому мы определим $Q_{i+1}(\lambda)$ как некоторый ряд, удовлетворяющий сравнению (5.6) и такой, что среди его ненулевых коэффициентов нет коэффициентов, делящихся на ℓ^{i+1} . Применяя к нашему уравнению аналог формулы (3.14) и учитывая, что согласно (5.5)

$$H^{(1)}(Q_i(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) \equiv \lambda^{\ell\delta} h(\lambda) \pmod{\ell}$$

при любом $i \geq 1$, мы получаем, что из справедливости (5.4) для некоторого i следует справедливость для этого же i сравнения (5.5), а также справедливость сравнения (5.4) для $i+1$. Следовательно, полагая $Q(\lambda) = \lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\lambda)$ (в смысле покоэффициентной сходимости), мы получаем

$$F^{(1)}(Q(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) = 0, \quad (5.7)$$

$$Q(\lambda) \equiv Q_i(\lambda) \pmod{\ell^i} \quad (5.8)$$

для любого $i \geq 1$.

Нам осталось проверить только, что для $Q(\lambda)$ выполняется неравенство (5.3), т.е. что $Q(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell]_1$. Как и в доказательстве теоремы 3.1, мы будем доказывать индукцией по i , что для всех коэффициентов $q_{i,j}$ ряда $Q_i(\lambda)$ выполняется более сильное неравенство:

$$\mathbf{3} \quad \text{Серия математическая, №6} \quad \nu_\ell(q_{i,j}) > -\frac{1}{2} \left[\frac{j}{\delta\ell} \right] \quad \text{при всех } j < 0. \quad (5.9)$$

Предположим, что (5.9) уже доказано для коэффициентов ряда $Q_i(\lambda)$ при некотором $i \geq 1$. Тогда в силу (5.6) нам достаточно доказать, что аналог (5.9) выполняется для всех тех коэффициентов $r_{i,j}$ ряда

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} r_{i,j} \lambda^j := \frac{F^{(1)}(Q_i(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda))}{\lambda^{\ell\delta} h(\lambda)}, \quad (5.10)$$

для которых $\nu_\ell(r_{i,j}) < i + 1$. Поскольку для $Q_i(\lambda)$ выполняется сравнение (5.4), мы имеем

$$r_{i,j} \equiv 0 \pmod{\ell^i} \text{ для всех } j.$$

Таким образом, нам достаточно проверить, что для всех тех коэффициентов $r_{i,j}$ ряда (5.10), для которых $\nu_\ell(r_{i,j}) = i$, выполняется неравенство

$$i > -\frac{1}{2} \left[\frac{j}{\delta\ell} \right]. \quad (5.11)$$

Как и в доказательстве теоремы 3.1, ряд (5.10) можно представить в виде суммы одночленов вида

$$a_t \lambda^t \times \lambda^{-\ell\delta} h'_s \lambda^s \times \prod_{\alpha=1}^r q_{i,j_\alpha} \lambda^{j_\alpha}, \quad (5.12)$$

где $a_t \lambda^t$ — один из одночленов, входящих в коэффициент многочлена $F^{(1)}(X, T_{\langle 1 \rangle}(\lambda))$ при X^r для $r \geq 0$, причем при $r = 0$ произведение по $\alpha = 1, \dots, r$ в (5.12) предполагается равным 1, а h'_s — коэффициент при λ^s ряда $h(\lambda)^{-1}$. Таким образом, одночлен (5.12) имеет степень

$$j = s + t - \ell\delta + \sum_{\alpha=1}^r j_\alpha, \quad (5.13)$$

где при $r = 0$ сумма от 1 до r предполагается равной нулю.

Если $r = 0$, то $j \geq -\ell\delta$. Поскольку $\nu_\ell(r_{i,j}) \geq i \geq 1$, мы получаем, что член $r_{i,j} \lambda^j$, который является суммой всех одночленов вида (5.12) с заданным значением j , удовлетворяет неравенству (5.11).

Пусть $r \geq 1$ и лишь один из показателей $j_1, \dots, j_r$ отрицателен; например, пусть $j_1 < 0$ и $j_2, \dots, j_r \geq 0$. Тогда согласно (5.13) λ входит в (5.12) с показателем $j \geq j_1 - \ell\delta$. Поскольку и в этом случае одночлен (5.12) входит в член $r_{i,j} \lambda^j$, где $\nu_\ell(r_{i,j}) \geq i$, учитывая (5.9) и то, что

$$\left[\frac{j}{\ell\delta} \right] \geq \left[\frac{j_1 - \ell\delta}{\ell\delta} \right] = \left[\frac{j_1}{\ell\delta} \right] - 1,$$

мы получаем

$$i \geq \nu_\ell(q_{i,j_1}) + 1 > -\frac{1}{2} \left[\frac{j_1}{\ell\delta} \right] + 1 > -\frac{1}{2} \left(\left[\frac{j_1}{\ell\delta} \right] - 1 \right) \geq -\frac{1}{2} \left[\frac{j}{\ell\delta} \right].$$

Таким образом, и в этом случае одночлен (5.12) входит в член $r_{i,j}\lambda^j$, удовлетворяющий условию (5.11).

Наконец, предположим, что в (5.12) имеются хотя бы два отрицательных показателя. Например, пусть $j_1, j_2 < 0$, а остальные j_α произвольны. Тогда, рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 3.1, мы получаем

$$\nu_\ell(q_{i,j_1}q_{i,j_2}) > \frac{1}{2} \left[\frac{j_1 + j_2 - \ell\delta}{\ell\delta} \right],$$

откуда, снова рассуждая, как и в доказательстве теоремы 3.1, мы получаем, что в этом случае уже для самого одночлена (5.12) справедливо неравенство вида (5.11), т.е. что

$$\nu_\ell \left(a_t h'_s \prod_{\alpha=1}^r q_{i,j_\alpha} \right) > \frac{1}{2} \left[\frac{j}{\ell\delta} \right],$$

где j определяется формулой (5.13). Этим теорема доказана полностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathcal{H}$ – подгруппа порядка ℓ группы G . Тогда $\lambda_{\langle 1 \rangle} \in \mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\sigma(T_{\langle 1 \rangle}) = T_{\langle 1 \rangle}$ для любого $\sigma \in \mathcal{H}$, мы получаем

$$0 = \sigma(F^{(1)}(\lambda_{\langle 1 \rangle}, T_{\langle 1 \rangle}(\lambda))) = F^{(1)}(\sigma(\lambda_{\langle 1 \rangle}), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)). \quad (5.14)$$

Согласно теореме 3.2 $\sigma(\lambda) \equiv \lambda \pmod{1 - \xi_\sigma}$, поэтому для элемента σ порядка ℓ мы имеем $\sigma(\lambda^\ell) \equiv \lambda^\ell \pmod{\ell}$. Поскольку и $\lambda_{\langle 1 \rangle} \equiv \lambda^\ell \pmod{\ell}$, из теоремы 5.1 следует, что $\sigma(\lambda_{\langle 1 \rangle}) = \lambda_{\langle 1 \rangle}$. Предложение доказано.

Положим $\lambda_{\langle 2 \rangle} = Q^{(1)}(Q(\lambda))$, где $Q(\lambda) = \lambda_{\langle 1 \rangle}$ – ряд из теоремы 5.1. Вообще, если ряд $\lambda_{\langle m \rangle} = \lambda_{\langle m \rangle}(\lambda)$ уже определен, то мы полагаем $\lambda_{\langle m+1 \rangle} = Q^{(m)}(\lambda_{\langle m \rangle}(\lambda))$, где $Q^{(m)}(X)$ – ряд, полученный действием φ^m на коэффициенты ряда $Q(X)$.

Последовательно применяя (5.7) m раз, мы получаем

$$F^{(m)}(\lambda_{\langle m \rangle}(\lambda), T_{\langle m \rangle}(\lambda)) = 0, \quad (5.15)$$

т.е. $\lambda_{\langle m \rangle}$ – корень уравнения $F^{(m)}(X, T_{\langle m \rangle}(\lambda)) = 0$, при этом $\lambda_{\langle m \rangle}$ однозначно выделяется среди других корней этого уравнения условием $\lambda_{\langle m \rangle} \equiv \lambda^{\ell^m} \pmod{\ell}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\mathcal{H}$ – подгруппа порядка ℓ^s группы G . Тогда подстановка $\lambda_{\langle s \rangle} = \lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)$ определяет естественное вложение

$$i: \mathcal{O}_H[\xi][\{\lambda_{\langle s \rangle}\}] \hookrightarrow \mathcal{B}[\xi],$$

которое позволяет рассматривать $\mathcal{O}_H[\xi][\{\lambda_{\langle s \rangle}\}]$ как подкольцо кольца $\mathcal{B}[\xi]$. При этом $\mathcal{H}$ действует тождественно на $\lambda_{\langle s \rangle}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}} &= \mathcal{O}_H[\xi][\{\lambda_{\langle s \rangle}\}], \\ \mathcal{O}_H[\{\lambda_{\langle s \rangle}\}] &= \mathcal{B}[\ell] \cap \mathcal{O}_H[\xi][\{\lambda_{\langle s \rangle}\}]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\lambda_{\langle s \rangle} \equiv \lambda^{\ell^s} \pmod{\ell}$, ряд $f(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda))$ является корректно определенным элементом кольца $\mathcal{B}[\xi]$ для любого $f(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$. Инъективность i вытекает из сравнения $\lambda_{\langle s \rangle} \equiv \lambda^{\ell^s} \pmod{\ell}$.

То, что $\mathcal{H}$ действует тождественно на $\lambda_{\langle s \rangle}$, можно доказать индукцией по s . Действительно, для $s = 1$ наше утверждение доказано в предложении 5.2.

Пусть $\mathcal{H}_1$ – подгруппа индекса ℓ группы $\mathcal{H}$. По предположению индукции мы можем считать, что $\mathcal{H}_1$ действует тождественно на $T_{\langle s-1 \rangle}$ и на $\lambda_{\langle s-1 \rangle}$. Тогда на $\mathcal{O}_H[\xi]\{\{\lambda_{\langle s-1 \rangle}\}\}$ действует группа $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ порядка ℓ , и, применяя в этой ситуации предложение 5.2, мы получаем, что $\mathcal{H}$ действует тождественно на $\lambda_{\langle s \rangle}$, т.е. $\mathcal{O}_H[\xi]\{\{\lambda_{\langle s \rangle}\}\} \subseteq \mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}}$. Рассуждая, как и в доказательстве предложения 5.1, мы получаем, что $\mathcal{B}[\xi]$ порождается как $\mathcal{O}_H[\xi]\{\{\lambda_{\langle s \rangle}\}\}$ -модуль элементами $1, \lambda, \dots, \lambda^{\ell^s-1}$, откуда, как и в доказательстве предложения 5.1, мы получаем

$$\mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}} = \mathcal{O}_H[\xi]\{\{\lambda_{\langle s \rangle}\}\}.$$

Если $F(\lambda) \in \mathcal{B}[\ell] \cap \mathcal{B}[\xi]^{\mathcal{H}}$, то согласно уже доказанному $F(\lambda) = F_1(\lambda_{\langle s \rangle})$ для некоторого $F_1(X) \in \mathcal{O}_H[\xi]\{\{X\}\}$. Если не все коэффициенты $F_1(X)$ принадлежат $\mathcal{O}_H$, то пусть ℓ^n – максимальная степень ℓ , для которой существует ряд $A(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ такой, что $F_1(X) \equiv A(X) \pmod{\ell^n}$. Тогда ряд $B(\lambda_{\langle s \rangle}) := F_1(\lambda_{\langle s \rangle}) - A(\lambda_{\langle s \rangle})$ обладает тем свойством, что $B(\lambda_{\langle s \rangle}) \equiv 0 \pmod{\ell^n}$, и существует коэффициент b_i ряда $B(X)$ такой, что $b_i \pmod{\ell^{n+1}} \notin \mathcal{O}_H/\ell^{n+1}\mathcal{O}_H$. Очевидно, что $B(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) = F(\lambda) - A(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) \in \mathcal{O}_H\{\{\lambda\}\}$, что противоречит сравнению

$$B(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \lambda^{\ell^s j} \pmod{\ell^{n+1}}.$$

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $G(\lambda) = G(n-p-1, \varphi^n(\alpha), a, \lambda)$ – формальный ряд Лорана из теоремы 4.1. Тогда существует формальный ряд Лорана $D(X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i X^i$ такой, что $G(\lambda) = D(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda))$, где $s = n-p-1$. При этом $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$, т.е. $d_i \in \ell\mathcal{O}_H$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ и

$$\nu_{\ell}(d_i) > -\frac{i}{2\delta\ell} \quad (5.16)$$

для всех $i < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – подгруппа индекса ℓ в G . Напомним, что G имеет порядок ℓ^{n-p} . Соответственно порядок $\mathcal{H}$ равен ℓ^s .

Из определения рядов $G_r(\lambda)$ в (4.7) и теоремы 3.2 следует, что ряды $G_r(\lambda)$ остаются неподвижными относительно действия $\mathcal{H}$. Следовательно, и $G(\lambda)$ неподвижен относительно действия $\mathcal{H}$. Тогда согласно предложению 5.4 $G(\lambda) = D(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda))$ для некоторого ряда $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$.

Нам осталось проверить, что $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$. Для этого мы заметим, что для любого индекса r , $1 \leq r \leq s$, ряд $G(\lambda)$ неподвижен относительно действия единственной подгруппы группы $\mathcal{H}$ порядка ℓ^r . Поэтому в силу предложения 5.4

для любого такого r существует формальный ряд $D_r(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ такой, что $G(\lambda) = D_r(\lambda_{\langle r \rangle}(\lambda))$. При этом $D_r(X) = D_{r+1}(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$ для $r = 1, \dots, s-1$. Отметим, что $D_s(X) = D(X)$.

Прежде всего заметим, что из сравнений $G(\lambda) \equiv 0 \pmod{\ell}$ и $\lambda_{\langle r \rangle} \equiv \lambda^{\ell^r} \pmod{\ell}$ мы получаем

$$0 \equiv G(\lambda) \equiv D_r(\lambda^{\ell^r}) \pmod{\ell},$$

откуда следует, что все коэффициенты ряда $D_r(X)$ делятся на ℓ для любого $1 \leq r \leq s$.

Чтобы доказать (5.16), мы докажем, что для любых двух рядов $F(X), H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ таких, что $H(X) = F(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$, условие $F(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$ равносильно условию $H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $F(X), H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$, $H(X) = F(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$ и $F(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$. Тогда $H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд $F(X)$ является суммой одночленов $F_i(X) = f_i X^i$, $-\infty < i < \infty$, и нам достаточно проверить, что для любого целого i ряд $H_i(X) := f_i \lambda_{\langle 1 \rangle}(X)^i$ принадлежит $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$.

Если $i > 0$, то, учитывая, что $\lambda_{\langle 1 \rangle}(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1$, мы получаем $H_i(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1 \subseteq \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$.

Если $i = 0$, то $H_0(X) = f_0 \in \mathcal{O}_H \subset \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$.

Предположим теперь, что $i < 0$. Из теоремы 5.1 следует, что

$$\lambda_{\langle 1 \rangle}(X) = q_\ell X^\ell \left(1 + \sum_{\substack{-\infty < j < \infty \\ j \neq \ell}} q_\ell^{-1} q_j X^{j-\ell} \right),$$

где $q_\ell \equiv 1 \pmod{\ell}$ и $q_\ell^{-1} q_j \equiv 0 \pmod{\ell}$ для всех $j \neq \ell$. Положим

$$M(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} m_\nu X^\nu = \sum_{\substack{-\infty < j < \infty \\ j \neq \ell}} q_\ell^{-1} q_j X^{j-\ell}.$$

Тогда

$$\lambda_{\langle 1 \rangle}(X)^{-1} = q_\ell^{-1} X^{-\ell} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M(X)^n \right). \quad (5.17)$$

Мы покажем, что $M(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2$, т.е. что для всех $\nu < 0$ справедливо неравенство

$$\nu_\ell(m_\nu) > -\frac{\nu}{2\ell^2\delta}.$$

Действительно, если $\nu \leq -(\ell+2)$, то $-(\nu + \ell)\ell \geq -\nu$, откуда следует, что

$$\nu_\ell(m_\nu) = \nu_\ell(q_{\nu+\ell}) > -\frac{(\nu + \ell)\ell}{2\ell^2\delta} \geq -\frac{\nu}{2\ell^2\delta}.$$

Если $\nu > -(\ell + 2)$, то $\nu_\ell(m_\nu) \geq 1 > -\nu/(2\ell^2\delta)$. Следовательно, $M(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2$. Тогда и $M(X)^n \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2$ для любого n , откуда следует, что

$$1 + N(X) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M(X)^n \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2. \quad (5.18)$$

Итак, пусть $H_i(X) = f_i \lambda_{\langle 1 \rangle}(X)^i$ для $i < 0$. Тогда

$$H_i(X) = f_i q_\ell^i X^{i\ell} (1 + N(X))^{-i}. \quad (5.19)$$

Согласно условию леммы $F(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$, т.е. $\nu_\ell(f_i) > -i/(2\ell^m\delta)$, откуда следует, что

$$f_i q_\ell^i X^{i\ell} \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}. \quad (5.20)$$

Согласно (5.18) множитель $(1 + N(X))^{-i}$ в (5.19) также принадлежит $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2$ (напомним, что $-i$ – натуральное число). Поскольку $m + 1 \geq 2$, мы имеем $\mathcal{O}_H\{\{X\}\}_2 \subseteq \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть, как и в лемме 5.1, $F(X), H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ и $H(X) = F(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$. Пусть $H(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$ для некоторого $m \geq 1$. Тогда $F(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $F(X) \notin \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$. Это означает, что существует индекс $j_0 < 0$ такой, что

$$\nu_\ell(f_{j_0}) \leq -\frac{j_0}{2\ell^m\delta}, \quad \text{где } F(X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j X^j. \quad (5.21)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что j_0 – максимальный индекс, для которого выполняется (5.21). Рассмотрим представление $F(X) = F_1(X) + F_2(X)$, где $F_1(X) = \sum_{j=-\infty}^{j_0} f_j X^j$ и $F_2(X) = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} f_j X^j$. Из определения индекса j_0 следует, что $F_2(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_m$. Тогда в силу леммы 5.2 мы имеем $H_2(X) := F_2(\lambda_{\langle 1 \rangle}(x)) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$. Положим $H_1(X) = H(X) - H_2(X)$. Тогда из условия $H(X), H_2(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$ следует, что и

$$H_1(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}. \quad (5.22)$$

С другой стороны, $H_1(X) = F_1(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$. Пусть ℓ^t – максимальная степень ℓ такая, что $F_1(X) \equiv 0 \pmod{\ell^{t-1}}$, и пусть j_1 – максимальный индекс такой, что $f_{j_1} \not\equiv 0 \pmod{\ell^t}$. Тогда $j_1 \leq j_0$ и $\nu_\ell(f_{j_1}) \leq \nu_\ell(f_{j_0})$, откуда следует, что

$$\nu_\ell(f_{j_1}) \leq -\frac{j_1}{2\ell^m\delta}. \quad (5.23)$$

Поскольку $H_1(X) \equiv F_1(X^{\ell^t}) \pmod{\ell^t}$, мы получаем $H_1(X) \equiv f_{j_1} X^{\ell^t j_1} + \dots \pmod{\ell^t}$. Ввиду (5.23) это означает, что $H_1(X) \notin \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{m+1}$. Полученное противоречие с (5.22) доказывает лемму.

Теперь мы легко можем закончить доказательство теоремы. Согласно теореме 4.1 $G(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{s+1}$, где $s = n - p - 1$. Тогда согласно лемме 5.2 $D_1(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_s$, где $D_1(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X)) = G(X)$. Если для $D_i(X)$ уже доказано, что $D_i(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{s+1-i}$, то из леммы 5.2 снова следует, что для ряда $D_{i+1}(X)$, связанного с $D_i(X)$ соотношением $D_i(X) = D_{i+1}(\lambda_{\langle 1 \rangle}(X))$, выполнено включение $D_{i+1}(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_{s-i}$. Продолжая этот процесс вплоть до ряда $D(X) = D_s(X)$, мы получаем, что $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1$. Поскольку делимость всех коэффициентов ряда $D(X)$ на ℓ была уже проверена выше, мы получаем, что $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $D(X)$ – формальный ряд Лорана из теоремы 5.2. Тогда для любого $j \geq n$

$$S_j := \mathcal{F}_j^{(s)}(\eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha), a)) = G^{(-j)}(\lambda_j) = D^{(-j)}(\lambda_{j-s}),$$

где $s = n - p - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5.2 имеется равенство формальных рядов Лорана $G(\lambda) = D(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda))$. Применяя φ^{-j} к коэффициентам в обеих частях этого равенства и подставляя $\lambda = \lambda_j$, мы получаем $S_j = G^{(-j)}(\lambda_j) = D^{(-j)}(\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j))$. Заметим, что сходимость ряда $\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j)$ обеспечивается неравенством (5.3). Из него же легко выводится, что $\nu_\ell(\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j)) = \ell^s \nu_\ell(\lambda_j)$, что совместно с (5.16) доказывает сходимость ряда $D^{(-j)}(\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j))$.

Наконец, отметим, что согласно (5.7) мы имеем $F^{(1)}(\lambda_{\langle 1 \rangle}(\lambda), T_{\langle 1 \rangle}(\lambda)) = 0$. Применяя к этому равенству φ^{-j} и подставляя $\lambda = \lambda_j$, мы получаем $F^{(1-j)}(\lambda_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j), T_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j)) = 0$. Поскольку λ_j удовлетворяет равенству $F^{(-j)}(\lambda_j, T^{(-j)}(\lambda_j)) = 0$, мы получаем, что $T^{(-j)}(\lambda_j) = \pi_j$, откуда следует, что $T_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \pi_{j-1}$. Таким образом, $\lambda_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j)$ – это корень уравнения $F^{(1-j)}(X, \pi_{j-1}) = 0$. Поскольку $\lambda_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) \equiv \lambda_j^\ell \pmod{\ell \lambda_j^{-\delta}}$, мы получаем, что $\lambda_{\langle 1 \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \lambda_{j-1}$. Аналогичным образом мы получаем, что $\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \lambda_{j-s}$. Тогда

$$S_j = G^{(-j)}(\lambda_j) = D^{(-j)}(\lambda_{j-s}).$$

Теорема доказана.

§ 6. Действие $\gamma_p - 1$ на формальные ряды Лорана

Теперь мы рассмотрим еще один тип автоморфизмов колец $\mathcal{A}[\ell]$ и $\mathcal{B}[\ell]$. Пусть $\Gamma = G(k_\infty/k_0)$, где k_∞ и k_0 имеют тот же смысл, что и в § 1. Для любого $\sigma \in \Gamma$ однозначно определен элемент $\varkappa(\sigma) \in \mathbb{Z}_\ell^\times$ такой, что $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\varkappa(\sigma)}$ для любого n . Отображение $\varkappa$ определяет изоморфизм $\varkappa: \Gamma \cong 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ ($\varkappa: \Gamma \cong 1 + 4\mathbb{Z}_2$ при $\ell = 2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Для любого $\sigma \in \Gamma$ существует единственный автоморфизм кольца $\mathcal{A}[\ell]$, который мы будем обозначать снова через σ , такой, что σ действует тождественно на $\mathcal{O}_H$ и

$$\sigma(T) = 1 - (1 - T)^{\varkappa(\sigma)}. \quad (6.1)$$

Указанное действие определяет действие Γ как группы автоморфизмов кольца $\mathcal{A}[\ell]$.

Если $\sigma \in \Gamma_s$ для некоторого $s \geq 0$, то для любого $F(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$ в кольце $\mathcal{O}_H[[T]]$ выполняются сравнения

$$\sigma(F(T)) \equiv F(T) \pmod{T_{\langle s+1 \rangle}} \quad \text{при } \ell \neq 2, \quad (6.2)$$

$$\sigma(F(T)) \equiv F(T) \pmod{T_{\langle s+2 \rangle}} \quad \text{при } \ell = 2. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6.1) следует, что $\sigma(T) \equiv T \pmod{T^2}$ для любого $\sigma \in \Gamma$, поэтому для любого ряда $F(T) \in \mathcal{A}[\ell]$ ряд $F(\sigma(T))$ является корректно определенным элементом кольца $\mathcal{A}[\ell]$. Полагая $\sigma(F(T)) = F(\sigma(T))$, мы определяем действие σ на $\mathcal{A}[\ell]$. Без труда проверяется, что таким образом мы определяем действие Γ как группы автоморфизмов кольца $\mathcal{A}[\ell]$.

Пусть $\sigma \in \Gamma_s$ и $F(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$. Тогда $\varkappa(\sigma) \equiv 1 \pmod{\ell^{s+1}}$, т.е. $\varkappa(\sigma) = 1 + a\ell^{s+1}$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}_\ell^\times$, и из (6.1) следует, что

$$\sigma(T) - T = 1 - (1 - T)(1 - T)^{\ell^{s+1}a} - T = (1 - T)[1 - (1 - T_{\langle s+1 \rangle})^a] \equiv 0 \pmod{T_{\langle s+1 \rangle}}.$$

Отсюда следует, что $\sigma(T^i) - T^i \equiv 0 \pmod{T_{\langle s+1 \rangle}}$, что доказывает (6.2). Сравнение (6.3) доказывается аналогично. Предложение доказано.

Как и в § 3, мы введем формальную переменную u и рассмотрим кольцо $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{O}_H[[u]]\{\{X\}\}$ и его подкольцо $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_H[[u]]\{\{T\}\}$. Положим

$$\sigma(T) = T - (1 - T)[(1 - u)^a - 1]. \quad (6.4)$$

Тогда $\sigma(T) \equiv T \pmod{u}$, и формула (6.4) определяет действие σ на кольца $\mathcal{O}_H[[u]][[T]] = \mathcal{O}_H[[u, T]]$ и $\mathcal{O}_H[[u]]\{\{T\}\}$. В частности, для многочлена $F(X, T)$ из предложения 1.2 определен многочлен $\mathbb{F}(X, T) = F(X, \sigma(T)) \in \mathcal{O}_H[[u, T]][X]$. То же рассуждение, что и в доказательстве предложения 6.1, показывает, что в кольце $\mathcal{O}_H[[u, T]][X]$ выполняется сравнение

$$\mathbb{F}(X, T) \equiv F(X, T) \pmod{u}. \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.1. В кольце $\tilde{\mathcal{B}}$ существует однозначно определенный элемент

$$L(\lambda) = L(u, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j(u) \lambda^j, \quad l_j(u) \in \mathcal{O}_H[[u]], \quad -\infty < j < \infty,$$

такой, что $L(\lambda) \equiv \lambda \pmod{u}$ и в $\tilde{\mathcal{B}}$ выполняется равенство

$$\mathbb{F}(L(\lambda), T(\lambda)) = 0.$$

Для любого $j < 0$ коэффициент $l_j(u)$ удовлетворяет условию

$$\nu(l_j(u)) > -\frac{j}{2\delta}, \quad (6.6)$$

где функция ν имеет тот же смысл, что и в теореме 3.1.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 3.1.

Отметим, что из (6.5) следует

$$0 = F(\lambda, T) \equiv \mathbb{F}(\lambda, T) \pmod{u},$$

т.е. λ является приближенным решением уравнения $\mathbb{F}(X, T) = 0$ по модулю u .

В частном случае, когда $\varkappa(\sigma) = 1 + \ell^{s+1}$ ($\varkappa(\sigma) = 1 + \ell^{s+2}$ при $\ell = 2$), мы имеем $L(u, \lambda) = \mu(u, \lambda)$, где $\mu(u, \lambda)$ – ряд из теоремы 3.1.

Пусть p и γ_p имеют тот же смысл, что и в теореме 2.1. Тогда согласно предложению 6.1 γ_p действует на $\mathcal{A}[\ell]$, причем для любого $f(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$

$$\begin{aligned} \gamma_p(f(T)) &\equiv f(T) \pmod{T_{\langle p+1 \rangle}} \quad \text{при } \ell \neq 2, \\ \gamma_p(f(T)) &\equiv f(T) \pmod{T_{\langle p+2 \rangle}} \quad \text{при } \ell = 2. \end{aligned}$$

Обозначим через $F_1(X, T)$ образ многочлена $F(X, T)$ относительно указанного действия γ_p на коэффициенты. При этом

$$\begin{aligned} F_1(X, T) &\equiv F(X, T) \pmod{T_{\langle p+1 \rangle}} \quad \text{при } \ell \neq 2, \\ F_1(X, T) &\equiv F(X, T) \pmod{T_{\langle p+2 \rangle}} \quad \text{при } \ell = 2. \end{aligned}$$

До конца этого параграфа мы будем проводить все доказательства только для случая $\ell \neq 2$. Случай $\ell = 2$ разбирается аналогично, и мы оставляем его читателю.

Пусть $\varkappa(\gamma_p) = 1 + a\ell^{p+1}$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}_\ell$. Мы определим действие γ_p на T формулой (6.4), что определяет действие γ_p на все кольцо $\tilde{\mathcal{A}}$. Сопоставление $u \rightarrow T_{\langle p+1 \rangle}$ индуцирует гомоморфизм колец $\psi: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}[\ell]$, перестановочный с действием γ_p и такой, что

$$\psi(\mathbb{F}(X, T)) = F_1(X, T).$$

Положим

$$\psi(L(\lambda)) = L(T_{\langle p+1 \rangle}, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j(T_{\langle p+1 \rangle}) \lambda^j. \quad (6.7)$$

Из (6.6) и того, что $T_{\langle p+1 \rangle} \equiv T^{\ell^{p+1}} \pmod{\ell}$, легко выводится, что правая часть (6.7) сходится в $\mathcal{B}[\ell]$. Это показывает, что элемент $\psi(L(\lambda))$ определен корректно.

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.

ТЕОРЕМА 6.2. *Существует продолжение определенного выше действия γ_p с $\tilde{\mathcal{A}}$ на кольцо $\tilde{\mathcal{B}}$. Это действие однозначно определяется условием $\gamma_p(\lambda) \equiv \lambda \pmod{u}$. В явном виде это действие задается формулой $\gamma_p(\lambda) = L(u, \lambda)$. Существует продолжение определенного выше действия γ_p с $\mathcal{A}[\ell]$ на кольцо $\mathcal{B}[\ell]$ такое, что $\gamma_p(\lambda) = L(T_{\langle p+1 \rangle}, \lambda)$. Этим условием действие γ_p на $\mathcal{B}[\ell]$ определяется однозначно.*

Существует единственное продолжение гомоморфизма $\psi: \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}[\ell]$ до гомоморфизма $\psi: \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}[\ell]$ такое, что для любого $x \in \tilde{\mathcal{B}}$

$$\psi\gamma_p(x) = \gamma_p\psi(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть, как и в теореме 5.2, $s = n - p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\gamma_p(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) &= L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) \quad \text{при } \ell \neq 2, \\ \gamma_p(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) &= L^{(s)}(T_{\langle n+1 \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) \quad \text{при } \ell = 2,\end{aligned}$$

где $L^{(s)}(u, X)$ – ряд, полученный из $L(u, X)$ в результате действия φ^s на коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (5.15)

$$F^{(s)}(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda), T_{\langle s \rangle}(\lambda)) = 0. \quad (6.8)$$

Обозначим через ψ_s гомоморфизм $\mathcal{A}[\ell]$ в $\mathcal{A}[\ell]$ такой, что ψ_s совпадает с φ^s на $\mathcal{O}_H$ и $\psi_s(T) = T_{\langle s \rangle}$. Поскольку λ является корнем неприводимого многочлена $F(X, T)$, который под действием ψ_s переходит в многочлен $F^{(s)}(X, T_{\langle s \rangle})$, гомоморфизм ψ_s может быть продолжен до гомоморфизма $\psi_s: \mathcal{B}[\ell] \rightarrow \mathcal{B}[\ell]$ такого, что $\psi_s(\lambda) = \lambda_{\langle s \rangle}$.

Мы можем продолжить гомоморфизм $\psi_s: \mathcal{B}[\ell] \rightarrow \mathcal{B}[\ell]$ до гомоморфизма $\psi_s: \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}[\ell]$ такого, что $\psi_s(u) = T_{\langle n \rangle}$ при $\ell \neq 2$ и $\psi_s(u) = T_{\langle n+1 \rangle}$ при $\ell = 2$. Тогда ψ_s коммутирует с γ_p и, следовательно, при $\ell \neq 2$

$$\gamma_p(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) = \gamma_p \psi_s(\lambda) = \psi_s \gamma_p(\lambda) = \psi_s(L(u, \lambda)) = L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}(\lambda), \lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)),$$

а при $\ell = 2$

$$\gamma_p(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)) = L^{(s)}(T_{\langle n+1 \rangle}(\lambda), \lambda_{\langle s \rangle}(\lambda)).$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $D(\lambda_{\langle s \rangle}) = D(\lambda_{\langle s \rangle}(\lambda))$ – формальный ряд из теоремы 5.2. Тогда при $\ell \neq 2$ существует формальный ряд $E(u, \lambda_{\langle s \rangle}) \in \mathcal{O}_H[[u]]\{\{\lambda_{\langle s \rangle}\}\}$ такой, что

$$\gamma_p(D(\lambda_{\langle s \rangle})) = E(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle}).$$

Существует формальный ряд $E_1(u, \lambda_{\langle s \rangle}) \in \mathcal{O}_H[[u]]\{\{\lambda_{\langle s \rangle}\}\}$ такой, что

$$E(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle}) = D(\lambda_{\langle s \rangle}) + T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle})E_1(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle}).$$

Существует формальный ряд $\mathcal{E}(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}$ такой, что

$$E_1(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle}) = \mathcal{E}(\lambda_{\langle s \rangle}).$$

При этом $\ell \mathcal{E}(X) = \ell \sum_{j=-\infty}^{\infty} e_j X^j \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$, т.е. $e_j \in \mathcal{O}_H$ для всех j и $\nu_\ell(e_j) + 1 > -j/(2\ell\delta)$ для всех $j < 0$.

Аналогичный результат верен и для $\ell = 2$, если заменить везде $T_{\langle n \rangle}$ на $T_{\langle n+1 \rangle}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\ell \neq 2$. Согласно теореме 5.3 выполняется условие $D(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$. Если $D(X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j X^j$, то

$$\gamma_p(D(\lambda_{\langle s \rangle})) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j (L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle}))^j.$$

Если $j > 0$, то, учитывая, что $L(u, \lambda) \equiv \lambda \pmod{u}$, получаем

$$\begin{aligned} d_j L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle})^j &= d_j \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i^{(s)}(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle})) \lambda_{\langle s \rangle}^i \right)^j \\ &= d_j \lambda_{\langle s \rangle}^j + d_j \sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i'(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle})) \lambda_{\langle s \rangle}^i, \end{aligned}$$

где формальные степенные ряды $l_i'(T_{\langle n \rangle})$ делятся на $T_{\langle n \rangle}$ и в силу (6.6) удовлетворяют условию

$$\nu(l_i'(u)) > -\frac{i}{2\delta} \quad \text{для всех } i < 0.$$

Если $j = 0$, то

$$d_j L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle})^j = d_j.$$

Наконец, если $j < 0$, то, учитывая, что $l_1(T_{\langle n \rangle}) \equiv 1 \pmod{T_{\langle n \rangle}}$, а следовательно, этот ряд обратим в $\mathcal{O}_H[[T_{\langle n \rangle}]]$, мы получаем

$$L^{(s)}(Y, X) = l_1(Y)X \left(1 + \sum_{\substack{\alpha=-\infty \\ \alpha \neq 0}}^{\infty} l_1(Y)^{-1} l_{\alpha+1}(Y) X^\alpha \right). \quad (6.9)$$

Из (6.6) следует, что при $\alpha \leq -2$

$$\nu(l_1(Y)^{-1} l_{\alpha+1}(Y)) > -\frac{\alpha+1}{2\delta} \geq -\frac{\alpha}{2\delta\ell}.$$

Если $\alpha = -1$, то

$$\nu(l_1(Y)^{-1} l_0(Y)) \geq 1 > \frac{1}{2\delta\ell}.$$

Другими словами, если мы положим

$$N(Y, X) = \sum_{\substack{\alpha=-\infty \\ \alpha \neq 0}}^{\infty} l_1(Y)^{-1} l_{\alpha+1}(Y) X^\alpha = \sum_{i=-\infty}^{\infty} n_i(Y) X^i,$$

то для любого $i < 0$ выполняется неравенство

$$\nu(n_i(Y)) > -\frac{i}{2\delta\ell}. \quad (6.10)$$

Тогда из (6.9) получаем

$$L^{(s)}(Y, X)^{-1} = l_1(Y)^{-1} X^{-1} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} N(Y, X)^{\nu} \right),$$

откуда следует, что при $j < 0$

$$\begin{aligned} d_j L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})^j &= d_j \lambda_{\langle s \rangle}^j + d_j [l_1(T_{\langle n \rangle})^j - 1] \lambda_{\langle s \rangle}^j \\ &\quad + d_j l_1(T_{\langle n \rangle})^j \lambda_{\langle s \rangle}^j \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} N(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})^{\nu}. \end{aligned}$$

Из этого, как и в доказательстве теоремы 5.2, следует, что ряд $d_j L^{(s)}(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})^j$ удовлетворяет условию вида (6.10). Таким образом, мы получаем

$$E(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle}) = D(\lambda_{\langle s \rangle}) + T_{\langle n \rangle} E_1(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle}),$$

где ряд $T_{\langle n \rangle} E_1(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})$ удовлетворяет условию вида (6.10). Очевидно, что тогда и ряд $\ell E_1(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})$ удовлетворяет условию вида (6.10). Учитывая, что

$$T_{\langle n \rangle} = 1 - (1 - T_{\langle s \rangle})^{\ell^{p+1}}, \quad (6.11)$$

мы можем рассматривать $E_1(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})$ как ряд от $T_{\langle s \rangle}$ и $\lambda_{\langle s \rangle}$. Далее, если $T = T(\lambda)$, то $T_{\langle s \rangle} = T^{(s)}(\lambda_{\langle s \rangle})$, поэтому существует ряд $\mathcal{E}_1(X)$ такой, что $\mathcal{E}_1(\lambda_{\langle s \rangle}) = E_1(T_{\langle n \rangle}(\lambda_{\langle s \rangle}), \lambda_{\langle s \rangle})$.

То, что ряд $\ell E_1(T_{\langle n \rangle}, \lambda_{\langle s \rangle})$ удовлетворяет условию вида (6.10), означает, что этот ряд можно представить как сумму одночленов вида $a \ell^k T_{\langle n \rangle}^r \lambda_{\langle s \rangle}^j$, где $a \in \mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$, $k \geq 1$ и

$$k + r > -\frac{j}{2\delta\ell} \quad \text{для любого } j < 0. \quad (6.12)$$

Согласно (6.11)

$$T_{\langle n \rangle} = T_{\langle s \rangle}^{\ell^{p+1}} + \ell P(T_{\langle s \rangle}) = \lambda_{\langle s \rangle}^{\ell^{p+1}} + \ell P_1(\lambda_{\langle s \rangle})$$

для некоторых $P(X) \in \mathcal{O}_H[X]$ и $P_1(X) \in \mathcal{O}_H[[X]]$.

Из неравенств $\nu_{\ell}(\lambda_q^{\delta}) < 1/2$ и $p \geq q + 2$ следует, что

$$2\delta\ell < e\ell^{p+1}. \quad (6.13)$$

Тогда из (6.12) и (6.13) следует, что

$$a \ell^k T_{\langle n \rangle}^r \lambda_{\langle s \rangle}^j = a \ell^{k+r} P_2(\lambda_{\langle s \rangle}) \lambda_{\langle s \rangle}^j + a \ell^k P_3(\lambda_{\langle s \rangle}) \lambda_{\langle s \rangle}^{2r\delta\ell+j} \quad (6.14)$$

для некоторых $P_2(X), P_3(X) \in \mathcal{O}_H[[X]]$. Из (6.12) вытекает, что оба слагаемых в правой части (6.14) удовлетворяют неравенству вида (6.10). Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть S_j имеет тот же смысл, что и в теореме 5.4. Тогда для любого $j \geq n$

$$\begin{aligned} \gamma_p S_j &= D^{(-j)}(L^{(s-j)}(\lambda_{j-s})), \\ (\gamma_p - 1)S_j &= \pi_{j-n} \mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \quad \text{при } \ell \neq 2, \\ (\gamma_p - 1)S_j &= \pi_{j-n-1} \mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \quad \text{при } \ell = 2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя автоморфизмом φ^{-j} на коэффициенты тождества (6.8) и применяя к нему автоморфизм γ_p , мы получаем

$$F^{(s-j)}\left(L^{(s-j)}\left(\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda)\right), \gamma_p\left(T_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda)\right)\right) = 0. \quad (6.15)$$

Подставляя $\lambda = \lambda_j$ и учитывая, что при $j \geq n$ все ряды, входящие в (6.15), сходятся, учитывая также, что в доказательстве теоремы 5.3 было показано, что $\lambda_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \lambda_{j-s}$ и что $T_{\langle s \rangle}^{(-j)}(\lambda_j) = \pi_{j-s}$, мы получаем из (6.15) равенство

$$F^{(s-j)}(L^{(s-j)}(\lambda_{j-s}), \gamma_p(\pi_{j-s})) = 0.$$

С другой стороны, мы имеем равенство

$$F^{(s-j)}(\gamma_p(\lambda_{j-s}), \gamma_p(\pi_{j-s})) = 0.$$

Тогда из сравнения $L(u, \lambda) \equiv \lambda \pmod{u}$ следует, что

$$\gamma_p(\lambda_{j-s}) = L^{(s-j)}(\lambda_{j-s}).$$

Согласно теореме 5.3 $S_j = D^{(-j)}(\lambda_{j-s})$, поэтому

$$\gamma_p S_j = D^{(-j)}(\gamma_p(\lambda_{j-s})) = D^{(-j)}(L^{(s-j)}(\lambda_{j-s})),$$

что доказывает первое равенство теоремы. Вторые два равенства следуют из того, что при $T = \pi_j$ мы имеем $T_{\langle n \rangle}(T) = \pi_{j-n}$ и $T_{\langle n+1 \rangle}(T) = \pi_{j-n-1}$. Теорема доказана.

§ 7. Доказательство основной теоремы

Пусть элементы $\eta_{n,1} = \eta_n(\alpha_1, a_1), \dots, \eta_{n,t} = \eta_n(\alpha_t, a_t)$ вида (2.1) порождают $\mathbb{Z}_\ell$ -модуль $\log(U(K_n))$ для заданного n . Тогда произвольный элемент $\eta_n \in \log(U(K_n))$ может быть записан в виде

$$\eta_n = \sum_{i=1}^t c_i \eta_{n,i}$$

с некоторыми $c_i \in \mathbb{Z}_\ell$.

Согласно теореме 6.3 для каждого $i = 1, \dots, t$ существует ряд Лорана $\mathcal{E}_i(X)$ такой, что $\ell\mathcal{E}_i(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$ и

$$(\gamma_p - 1)\mathcal{F}_j^{(s)}(\eta_{j,i}) = \pi_{j-n}\mathcal{E}_i^{(-j)}(\lambda_{j-s}), \quad s = n - p - 1,$$

где $\eta_{j,i} = \eta_j(\varphi^{n-j}(\alpha_i), a_i)$. Тогда, полагая для любого $j \geq n$

$$\eta_j = \sum_{i=1}^t c_i \eta_{j,i}, \quad \mathcal{E}(X) = \sum_{i=1}^t c_i \mathcal{E}_i(X),$$

мы получаем для любого $j \geq n$

$$(\gamma_p - 1)\mathcal{F}_j^{(s)}(\eta_j) = \pi_{j-n}\mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}), \quad (7.1)$$

причем $\ell\mathcal{E}(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$.

Если e_ν – коэффициент ряда $\mathcal{E}(X)$ при X^ν и $e_{i,\nu}$ – коэффициент при X^ν ряда $\mathcal{E}_i(X)$ для $i = 1, \dots, t$, то

$$e_\nu = \sum_{i=1}^t c_i e_{i,\nu}. \quad (7.2)$$

Обозначим через M $\mathbb{Z}_\ell$ -подмодуль в $\log(U(K_n))$, состоящий из тех η_n , для которых ряд $\mathcal{E}(X)$ имеет нулевые коэффициенты e_ν для всех ν таких, что $|\nu| \leq 4(n-p+2)\ell\delta$. Тогда в $\mathcal{E}(X)$ должны быть равны нулю $8(n-p+2)\ell\delta + 1$ коэффициент e_ν , т.е. M задается в $\log(U(K_n))$ $8(n-p+2)\ell\delta + 1$ линейным уравнением относительно $c_1, \dots, c_t$:

$$e_\nu = \sum_{i=1}^t c_i e_{i,\nu} = 0, \quad |\nu| \leq 2(n-p+2). \quad (7.3)$$

Поскольку коэффициенты e_ν и $e_{i,\nu}$ принадлежат $\mathcal{O}_H$, любое из уравнений (7.3) эквивалентно $f = [H: \mathbb{Q}_\ell]$ линейным уравнениям с коэффициентами в $\mathbb{Z}_\ell$. Следовательно, M можно определить в $\mathbb{Z}_\ell$ -модуле $\log(U(K_n))$ не более чем $8(n-p+2)\ell\delta f + f$ линейными уравнениями.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть η_n – произвольный элемент из M и $\eta_{n,i}$ – любой из элементов $\eta_{n,1}, \dots, \eta_{n,t}$. Пусть, как и в (2.2),

$$A' = A(\eta_n, \eta_{n,i}) = \text{Sp}_{K_n/\mathbb{Q}_\ell}(\Theta_n(p)(\eta_n) \eta_{n,i}).$$

Тогда $A' \in \mathbb{Z}_\ell$. Другими словами,

$$(\gamma_p - 1)M \subseteq (U(K_n))^\perp.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_{n,i}$ – один из элементов $\eta_{n,1}, \dots, \eta_{n,t}$ и $D(X)$ – ряд, соответствующий элементу $\eta_{n,i}$ согласно теореме 5.3, т.е. такой, что для любого $j \geq n$

$$\mathcal{F}_j^{(s)}(\eta_{j,i}) = D^{(-j)}(\lambda_{j-s}). \quad (7.4)$$

Тогда согласно теореме 2.1 и формулам (7.1), (7.4) мы имеем

$$A' \equiv \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \text{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} (\pi_{j-n} \mathcal{E}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) D^{(-j)}(\lambda_{j-s})) \pmod{\mathbb{Z}_\ell},$$

где m связано с n соотношением (1.1), и при $\ell = 2$ π_{j-n} нужно заменить на π_{j-n-1} .

Если $\mathcal{E}(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e_\nu X^\nu$, то положим

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_1(X) + \mathcal{E}_2(X),$$

где

$$\mathcal{E}_1(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{-4(n-p+2)-1} e_\nu X^\nu, \quad \mathcal{E}_2(X) = \sum_{\nu=4(n-p+2)+1}^{\infty} e_\nu X^\nu. \quad (7.5)$$

Если $D(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} d_\nu X^\nu$, то мы положим

$$D(X) = D_1(X) + D_2(X),$$

где

$$D_1(X) = \sum_{\nu=-\infty}^{-4(n-p+2)-2} d_\nu X^\nu, \quad D_2(X) = \sum_{\nu=-4(n-p+2)-1}^{\infty} d_\nu X^\nu. \quad (7.6)$$

Тогда

$$A' = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} A'_{\alpha, \beta},$$

где

$$A'_{\alpha, \beta} \equiv \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \text{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell} (\pi_{j-n} C_{\alpha, \beta}^{(-j)}(\lambda_{j-s})) \pmod{\mathbb{Z}_\ell}, \quad (7.7)$$

$$C_{\alpha, \beta}(X) = \mathcal{E}_\alpha(X) D_\beta(X), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2.$$

Поскольку $\nu_\ell(\lambda_q^{2\delta}) < 1$ и $p > q + 2$, мы имеем $\nu_\ell(\lambda_{p+1}^{2\ell\delta}) < 1/\ell^2$. Если $j \geq n$, то $j - s \geq p + 1$, поэтому

$$\nu_\ell(\lambda_{j-s}^{2\ell\delta}) < \frac{1}{\ell^2} \text{ при любом } j \geq n. \quad (7.8)$$

Рассмотрим произвольный одночлен $e_\nu \lambda_{j-s}^\nu$, входящий в $\mathcal{E}_1(X)$. Пусть $0 > \nu = \nu_0 + \nu_1 2\ell\delta$, где $-2\ell\delta < \nu_0 \leq 0$.

Если $\nu_0 = 0$, то из (7.8) следует, что $\nu_\ell(\lambda_{j-s}^\nu) > \nu_1/\ell^2$ и $\nu_\ell(e_\nu) + 1 > -\nu/(2\ell\delta) = -\nu_1$, т.е. $\nu_\ell(e_\nu) \geq -\nu_1$. Тогда $\nu_\ell(e_\nu \lambda_{j-s}^\nu) > -(1/2)\nu_1 = -\nu/(4\ell\delta)$. В частности,

$$\nu_\ell(e_\nu \lambda_{j-s}^\nu) \geq n - p + 2. \quad (7.9)$$

Если $\nu_0 \neq 0$, то $\nu_\ell(\lambda_{j-s}^\nu) > (\nu_1 - 1)/\ell^2$ и $\nu_\ell(e_\nu) + 1 > -\nu/(2\ell\delta) > -\nu_1$, т.е. $\nu_\ell(e_\nu) > -\nu_1$. Тогда $\nu_\ell(e_\nu \lambda_{j-s}^\nu) > -\nu_1(\ell^2 - 1)/\ell^2 - 1/\ell^2$. Учитывая, что $\nu_1 \leq -2(n - p + 2)$, мы получаем, что и в этом случае справедлива оценка (7.9). Отметим, что из неравенства $p \geq q + 3$ можно вывести, что оценка (7.9) справедлива и для $\ell = 2$.

Итак, мы доказали, что

$$\mathcal{E}_1^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv 0 \pmod{\ell^{n-p+2}}. \quad (7.10)$$

Аналогичные оценки, проведенные для $D_1(X)$, показывают, что для любого $j \geq n$

$$D_1^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv 0 \pmod{\ell^{n-p+2}}. \quad (7.11)$$

Поскольку $\mathcal{E}_2(X) \in \mathcal{O}_H[[X]]$ и $D_2(X) \in \mathcal{O}_H\{\{X\}\}_1^{(0)}$, мы имеем

$$\mathcal{E}_2^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv D_2^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Следовательно,

$$C_{1,1}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv C_{1,2}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv C_{2,1}^{(-j)}(\lambda_{j-s}) \equiv 0 \pmod{\ell^{n-p+2}}.$$

Учитывая, что $\mathrm{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}(\ell^{1-m}\mathcal{O}_{K_j}) \subseteq \mathbb{Z}_\ell$ для всех $j \geq n$, получаем

$$A'_{1,1} \equiv A'_{1,2} \equiv A'_{2,1} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Следовательно,

$$A' \equiv A'_{2,2} \equiv \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^{\infty} \mathrm{Sp}_{K_j/\mathbb{Q}_\ell}(\pi_{j-n} C_{2,2}^{(-j)}(\lambda_{j-s})) \pmod{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Непосредственно из определения $\mathcal{E}_2(X)$ и $D_2(X)$ следует, что $C_{2,2}(X)$ является формальным степенным рядом, т.е. $C_{2,2}(X)$ не содержит отрицательных степеней X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *При $\ell \neq 2$ существует формальный степенной ряд $P(X) \in \mathcal{O}_H[[X]]$ такой, что для любого $j \geq n$*

$$\pi_{j-n} \mathrm{Sp}_{K_j/k_j}(C_{2,2}^{(-j)}(\lambda_{j-s})) = 1 - (1 - \pi_{j-s})^{\ell^{n-s}} P^{(-j)}(\pi_{j-s}).$$

Этот результат остается верен и при $\ell = 2$, если заменить π_{j-n} на π_{j-n-1} , а показатель ℓ^{n-s} на ℓ^{n-s+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\pi_{j-n} = 1 - (1 - \pi_{j-s})^{\ell^{n-s}}$ для любого $j \geq n$. Согласно предложению 1.2 для любого $j - s \geq q$ выполняется равенство $F^{(s-j)}(\lambda_{j-s}, \pi_{j-s}) = 0$. Пусть $\lambda_{j-s} = \lambda_{j-s}^{(1)}, \lambda_{j-s}^{(2)}, \dots, \lambda_{j-s}^{(e)}$ — все корни многочлена $F^{(s-j)}(X, \pi_{j-s})$. Тогда для любого ν величина

$$\mathrm{Sp}_{K_j/k_j}(\lambda_{j-s}^\nu) = \sum_{i=1}^e (\lambda_{j-s}^{(i)})^\nu$$

является симметрической функцией от $\lambda_{j-s}^{(i)}$, $i = 1, \dots, e$, и, следовательно, выражается через элементарные симметрические функции, т.е. существует многочлен $Q_\nu(X_1, \dots, X_e) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_e]$ такой, что для любого $j \geq n$

$$\mathrm{Sp}_{K_j/k_j}(\lambda_{j-s}^\nu) = Q_\nu(f_{e-1}^{(s-j)}(\pi_{j-s}), \dots, f_0^{(s-j)}(\pi_{j-s})),$$

где $f_{e-1}(T), \dots, f_0(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$ – коэффициенты многочлена $F(X, T)$. Таким образом, полагая $\tilde{Q}_\nu(T) = Q_\nu(f_{e-1}^{(s)}(T), \dots, f_0^{(s)}(T))$, получаем

$$\mathrm{Sp}_{K_j/k_j}(\lambda_{j-s}^\nu) = \tilde{Q}_\nu^{(-j)}(\pi_{j-s}).$$

Если $C_{2,2}(X) = \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu X^\nu$, где $c_\nu \in \mathcal{O}_H$, то

$$\pi_{j-n} \mathrm{Sp}_{K_j/k_j}(C_{2,2}^{(-j)}(\lambda_{j-s})) = 1 - (1 - \pi_{j-s})^{\ell^{n-s}} P^{(-j)}(\pi_{j-s}),$$

где $P(X) = \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu \tilde{Q}_\nu(X)$. Предложение доказано.

Таким образом, полагая

$$P_1(X) = [1 - (1 - X)^{\ell^{n-s}}] P(X), \quad (7.12)$$

мы получаем

$$A' \equiv A'_{2,2} \equiv \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^\infty \mathrm{Sp}_{k_j/\mathbb{Q}_\ell}(P_1^{(-j)}(\pi_{j-s})). \quad (7.13)$$

При $\ell = 2$ показатель ℓ^{n-s} в (7.12) следует заменить на ℓ^{n-s+1} .

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение [7, лемма 6].

ЛЕММА 7.1. Пусть $f(T) \in \mathcal{O}_H[[T]]$ и $\pi_{-1} = 0$. Тогда

$$s_\infty(f) := \delta + \sum_{i=-1}^\infty \mathrm{Sp}_{k_i/\mathbb{Q}_\ell}(f^{(-i)}(\pi_i)) = 0,$$

где $k_{-1} = H$ и $\delta = 0$ при $\ell \neq 2$, $\delta = \mathrm{Sp}_{H/\mathbb{Q}_\ell}(f^{(1)}(2))$ при $\ell = 2$.

ЛЕММА 7.2. Пусть $P_1(X)$ – степенной ряд из (7.12). Тогда для всех $-1 \leq i < n - s$ $P_1(\pi_i) = 0$. Если $\ell = 2$, то, кроме того, $P_1(2) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell \neq 2$. Тогда $n - s = p + 1$, поэтому, учитывая, что $1 - \pi_i = \zeta_i$ и $\zeta_i^{\ell^{p+1}} = 1$, мы получаем, что множитель $1 - (1 - \pi_i)^{\ell^{p+1}}$ в (7.12) равен нулю для любого $-1 \leq i < n - s$. Тогда и $P_1(\pi_i) = 0$ для этих значений i .

Если $\ell = 2$, то ζ_i имеет порядок ℓ^{i+2} , откуда снова следует, что $1 - (1 - \pi_i)^{\ell^{p+2}} = 0$ для $-1 \leq i < n - s$. Если $X = 2$, то снова $1 - (1 - 2)^{2^{p+2}} = 0$. Лемма доказана.

Теперь мы легко можем закончить доказательство теоремы 7.1. В силу леммы 7.1 мы имеем $s_\infty(P_1) = 0$, а лемма 7.2 показывает, что $P_1(\pi_i) = 0$ для $-1 \leq i < n - s$. Причем при $\ell = 2$ мы имеем $P_1(2) = 0$. Тогда из (7.13) следует, что

$$\begin{aligned} A' &\equiv \ell^{-m-n+p-1} \sum_{j=n}^\infty \mathrm{Sp}_{k_j/\mathbb{Q}_\ell}(P_1^{(-j)}(\pi_{j-s})) \\ &\equiv \ell^{-m-n+p-1} s_\infty(P_1) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_\ell}. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему 7.1, а вместе с ней и основную теорему.

Список литературы

1. *Iwasawa K.* On some modules in the theory of cyclotomic fields // J. Math. Soc. Japan. 1964. V. 20. P. 42–82.
2. *Кузьмин Л. В.* Некоторые замечания о l -адической теореме Дирихле и l -адическом регуляторе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 6. С. 1203–1240.
3. *Кузьмин Л. В.* Некоторые замечания о l -адическом регуляторе. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 782–813.
4. *Кузьмин Л. В.* Аналог формулы Римана–Гурвица для одного типа l -расширений полей алгебраических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 2. С. 316–338.
5. *Кузьмин Л. В.* Новые явные формулы для символа норменного вычета и их приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 6. С. 1196–1228.
6. *Кузьмин Л. В.* Некоторые явные вычисления в локальных и глобальных круговых полях // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1995. Т. 208. С. 202–223.
7. *Кузьмин Л. В.* Новое доказательство одной теоремы двойственности о ℓ -адических логарифмах локальных единиц // Итоги науки и техники. Совр. мат. и ее приложения. 1997. Т. 45. С. 72–81.
8. *Tate J.* p -divisible groups // Proc. of Conference on local Fields. Berlin: Springer, 1967. 158–183 // Русский перев.: Математика. 1969. Т. 13. № 2. С. 3–25.
9. *Wintenberger J.-P.* Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; application // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. IV. Ser. 16. 1983. P. 59–89.

Поступило в редакцию
13.I.1998