Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 5, 77–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:09:19

УДК 512.75

Д. В. Осипов, А. Н. Паршин

Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I

Гармонический анализ развит на объектах некоторой категории C_2 бесконечномерных фильтрованных векторных пространств над конечным полем. Данная категория включает в себя двумерные локальные поля и адельные пространства алгебраических поверхностей, определенных над конечным полем. Главный результат – построение теории преобразования Фурье на этих объектах и получение двумерных формул Пуассона.

Библиография: 20 наименований.

§ 1. Введение

Локальные поля и образованные из них группы (или пространства) аделей являются общепринятым инструментом арифметики. Они были введены в 30-х годах прошлого столетия К. Шевалле и с тех пор использовались для формулировки и решения многочисленных задач как теории чисел, так и геометрии (см., например, [1], [2]). Эти конструкции связаны с полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций от одной переменной, т. е. со схемами размерности 1. Необходимость определения таких объектов для более высоких размерностей была осознана вторым автором в 1970-х годах и реализована для случая размерности 2 (а в локальной ситуации – для любой размерности). Для схем произвольной размерности адельная конструкция была построена А. А. Бейлинсоном [3].

Если X – схема размерности n и конечного типа над $\mathbb{Z}$ и $X_n \subset X_{n-1} \subset \dots \subset X_1 \subset X_0 \subset X$ – флаг неприводимых подсхем ($\text{codim}(X_i) = i$), то можно определить кольцо $K_{X_0, \dots, X_{n-1}}$, связанное с флагом. В случае, когда все подсхемы вложены регулярно, это кольцо является n -мерным локальным полем. Тогда можно определить пространство аделей

$$\mathbb{A}_X = \prod' K_{X_0, \dots, X_{n-1}},$$

где произведение берется по всем флагам, но с некоторым ограничением (условие адельности) на компоненты (см. [3]–[7]). Для схемы над конечным полем $\mathbb{F}_q$ это есть окончательное определение пространства аделей, соответствующего схеме X . В общем случае это определение следует расширить, добавляя архимедовы компоненты, до $\mathbb{A}_X \oplus \mathbb{A}_{X \otimes \mathbb{R}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00095-а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-1987.2008.1), а также INTAS (грант № 05-1000008-8118); кроме того, работа первого автора поддержана грантом Фонда содействия отечественной науке и Программой Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (грант № МК-864.2008.1).

Для размерности 1 адельные группы $\mathbb{A}_X$ и $\mathbb{A}_X^*$ локально компактны, и следовательно, применим классический гармонический анализ. Он основан на использовании теории меры Хаара на локально компактных полях, связанных с точками схем X размерности 1.

Гармонический анализ может быть применен, среди прочего, к изучению дзета- и L -функций одномерных схем X . Дж. Тейт и, независимо, К. Ивасава ввели аналитически определенные L -функции

$$L_X(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{A}_X^*} \chi(a) |a|^s f(a) d^* \mu,$$

где $d^* \mu$ – мера Хаара на $\mathbb{A}_X^*$, функция f принадлежит пространству функций Брюа–Шварца на $\mathbb{A}_X$ и χ – абелев характер, возникающий из группы Галуа $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ в силу отображения закона взаимности

$$\mathbb{A}_X^* \rightarrow \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K).$$

Они доказали аналитическое продолжение функции $L_X(s, \chi, f)$ на всю s -плоскость и функциональное уравнение

$$L(s, \chi, f) = L(1 - s, \chi^{-1}, \hat{f}),$$

используя преобразование Фурье $f \mapsto \hat{f}$ и формулу Пуассона для функций f на пространстве $\mathbb{A}_X$ [1], [2]. Если $L_X(s, \chi)$ – арифметически определенная L -функция схемы X , то $L_X(s, \chi) = L(s, \chi, f)$ для подходящей функции f .

В течение длительного времени второй автор привлекал внимание к наличию существенного пробела в арифметике, связанного с отсутствием такого подхода для схем размерности больше 1, и предполагал, что его можно заполнить. Заметим, что для схем, определенных над полем $\mathbb{F}_q$, имеется когомологический формализм, используемый единым образом во всех размерностях.

ПРОБЛЕМА 1. *Распространить аналитический метод Тейта–Ивасава на схемы высших размерностей* (см., в частности, [8], [9]).

Высшие адели были введены прежде всего для этой цели. Мы имеем тогда следующую предшествующую задачу.

ПРОБЛЕМА 2. *Построить теорию меры и гармонический анализ на n -мерных локальных полях и пространствах аделей.*

Заметим, что n -мерные локальные поля не являются локально компактными топологическими пространствами для $n > 1$ и по теореме Вейля существование меры Хаара (в обычном смысле) на топологической группе влечет локальную компактность этой группы.

В настоящей работе мы предлагаем конструкции гармонического анализа и теории меры, которые можно использовать в первом нетривиальном, после классического, случае алгебраических поверхностей X над конечным полем $k = \mathbb{F}_q$ (или двумерных схем над $\mathbb{Z}$). Соответствующие адельные объекты, к которым должен применяться такой анализ, имеют в этой ситуации следующий вид.

Пусть P – замкнутая точка на X , $C \subset X$ – неприводимая кривая и $P \in C$. Пусть X и C гладки в P , и пусть $t \in \mathcal{O}_{X,P}$ – локальное уравнение C в P и $u \in \mathcal{O}_{X,P}$ таково, что $u|_C \in \mathcal{O}_{C,P}$ – локальный параметр на кривой C в точке P . Обозначим через $\wp$ идеал, определяющий кривую C около P . Тогда двумерное локальное поле, связанное с парой P, C , определяется следующей процедурой, включающей чередующиеся пополнения и локализации:

$$K_{P,C} = \text{Frac}(\widehat{(\mathcal{O}_{X,P})_{\wp}}) \cong k(P)((u))((t)).$$

Это определение легко распространить на особую точку кривой C , и затем взять адельное произведение локальных полей по всем парам P, C . Мы получим пространство аделей $\mathbb{A}_X$ на поверхности X .

Если C – кривая, то пространство $\mathbb{A}_C$ содержит важные подпространства $\mathbb{A}_0 = K = k(C)$ главных аделей и $\mathbb{A}_1 = \prod_{x \in C} \hat{\mathcal{O}}_x$ целых аделей, из которых можно составить адельный комплекс: $\mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_C$. Для размерности 2 этому соответствует более сложная структура подпространств. Среди прочего, она включает подпространства $\mathbb{A}_{12} = \prod'_{x \in C} \hat{\mathcal{O}}_{x,C}$ и, более общё, $\mathbb{A}_{12}(D)$, где дивизор D указывает на некоторое условие регулярности вдоль D (см. [6] и краткое изложение в [9], [10]).

Для размерности 1 группа $\mathbb{A}_C$ локально компактна, а пространства $\mathbb{A}_0$ и $\mathbb{A}_1$ дискретно и компактно соответственно и построение анализа начинается с определения связанных с ними функциональных пространств. Пусть V – конечномерное векторное пространство над кольцом аделей $\mathbb{A}_C$ (или над одномерным локальным полем K с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$) либо подпространство типа $\mathbb{A}_0$ и $\mathbb{A}_1$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(V) &= \{\text{локально постоянные функции с компактным носителем}\}, \\ \tilde{\mathcal{E}}(V) &= \{\text{равномерно локально постоянные функции}\}, \\ \mathcal{E}(V) &= \{\text{все локально постоянные функции}\}, \\ \mathcal{D}'(V) &= \{\text{двойственное к } \mathcal{D}, \text{ т. е. все распределения}\}, \\ \tilde{\mathcal{E}}'(V) &= \{\text{“непрерывно” двойственное к } \tilde{\mathcal{E}}\}, \\ \mathcal{E}'(V) &= \{\text{“непрерывно” двойственное к } \mathcal{E}, \\ &\quad \text{т. е. распределения с компактным носителем}\}. \end{aligned}$$

Эти пространства восходят к классическому определению, введенному Ф. Брюа (см. [11]). Гармонический анализ включает в себя определения прямых и обратных образов в некоторой категории C_1 таких пространств, как V , а также определение преобразования Фурье $\mathbf{F}$ в качестве отображения из $\mathcal{D}'(V) \otimes \mu(V)^*$ в $\mathcal{D}'(\check{V})$ как для V , так и для пространств других типов из категории C_1 . Здесь $\mu(V)$ – пространство мер Хаара на V и $\check{V}$ – двойственный объект (“непрерывные” линейные функционалы из двойственного пространства). Основной результат гармонического анализа – следующая формула Пуассона:

$$\mathbf{F}(\delta_{W,\mu_0} \otimes \mu^{-1}) = \delta_{W^\perp \cap \check{V}, \mu^{-1}/\mu_0^{-1}}$$

для любой замкнутой подгруппы $i: W \rightarrow V$. Здесь $\mu_0 \in \mu(W)$, $\mu \in \mu(V)$, $\delta_{W,\mu_0} = i_*(\mu_0)$ (мы используем, что по определению пространства мер $\mu(W) \subset$

$\mathcal{D}'(W)$, прямой образ i_* переводит $\mathcal{D}'(W)$ в $\mathcal{D}'(V)$) и $W^\perp \cap \check{V}$ – аннулятор W в $\check{V}$.

Все эти конструкции детально проведены в § 4 (в § 3 собраны соответствующие факты для случая размерности 0, § 2 содержит основные обозначения, используемые в статье). Основной результат этого параграфа – построение теории C_0 - и C_1 -пространств (п. 4.1), определение пространств функций и распределений $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{E}}'$ (п. 4.2), инвариантных мер Хаара (п. 4.3), преобразования Фурье (п. 4.4), вывод формулы Пуассона (теорема 1 в п. 4.5), формулы Фубини и таблицы всех возможных прямых и обратных образов пространств функций и распределений для морфизмов в категории C_1 (п. 4.6), вывод правила замены базы (п. 4.7). Последнее полезно в том случае, когда мы распространяем теорию на высшие размерности. Изложение этого материала полностью не зависит от стандартных изложений.

Этот общий формализм, будучи применен к пространству аделей на кривой, непосредственно приводит к следующим фактам анализа на самодвойственной группе $\mathbb{A}_C$: $\mathbf{F}(\delta_{\mathbb{A}_1(D)}) = \text{vol}(\mathbb{A}_1(D))\delta_{\mathbb{A}_1((\omega)-D)}$ и $\mathbf{F}(\delta_K) = \text{vol}(K)^{-1}\delta_K$ для стандартных подгрупп в $\mathbb{A}_C$ (связанных соответственно с дивизором D и с главными аделями). Отсюда легко следует теорема Римана–Роха и двойственность Серра для дивизоров на кривой C (см. [9]).

Для размерности 2 пространство $\mathbb{A}_X$ имеет фильтрацию подпространствами $\mathbb{A}_{12}(D)$, где D пробегает дивизоры Картье на X . Факторы $\mathbb{A}_{12}(D)/\mathbb{A}_{12}(D')$ будут пространствами типа рассмотренных выше в одномерной ситуации. Это позволяет ввести по индукции следующие пространства функций (распределений):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{P_0}(V) &= \varprojlim_{j^*} \varprojlim_{i^*} \mathcal{D}(P/Q) \otimes \mu(P_0/Q), \\ \mathcal{D}'_{P_0}(V) &= \varinjlim_{j^*} \varinjlim_{i^*} \mathcal{D}'(P/Q) \otimes \mu(P_0/Q)^*, \\ \mathcal{E}(V) &= \varprojlim_{j^*} \varprojlim_{i^*} \mathcal{E}(P/Q), \\ \mathcal{E}'(V) &= \varinjlim_{j^*} \varinjlim_{i^*} \mathcal{E}'(P/Q), \\ \tilde{\mathcal{E}}(V) &= \varinjlim_{i^*} \varprojlim_{j^*} \tilde{\mathcal{E}}(P/Q), \\ \tilde{\mathcal{E}}'(V) &= \varprojlim_{i^*} \varinjlim_{j^*} \tilde{\mathcal{E}}'(P/Q),\end{aligned}$$

где $P \supset Q \supset R$ – элементы фильтрации в $\mathbb{A}_X$ (или, более общо, в подходящем фильтрованном пространстве V с локально компактными факторами), P_0 – фиксированное подпространство из фильтрации и $j: Q/R \rightarrow P/R$, $i: P/R \rightarrow P/Q$ – канонические отображения. Заметим, что пространства $\mathcal{D}_{P_0}(V)$, $\mathcal{D}'_{P_0}(V)$ являются $\mathcal{E}(V)$ -модулями. В отличие от одномерного случая, между этими пространствами не существует простых отношений включения одного в другое.

Как и в случае размерности 1, можно определить прямые и обратные образы в некоторой категории C_2 (см. [12]) фильтрованных пространств, таких, как V , и включающих все компоненты адельного комплекса, в частности такие, как $\mathbb{A}_{12}(D)$ и все пространство $\mathbb{A}_X$.

Мы развиваем теорию C_2 -пространств в п. 5.1. В этой категории можно определить (п. 5.2) пространства виртуальных мер $\mu(F(i) | F(j))$, которые важны для определения пространств функций и распределений, приведенного выше (п. 5.3). В п. 5.4 мы вводим преобразование Фурье $\mathbf{F}$, которое сохраняет пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, но переставляет пространства $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$. В следующем п. 5.5 изучаются центральное расширение группы автоморфизмов объекта V в категории C_2 и его действие на функциональных пространствах таких, как $\mathcal{D}_{P_0}(V)$ и $\mathcal{D}'_{P_0}(V)$. Определение центрального расширения восходит к работе В. Г. Каца и Д. Петерсона [13], а определение действия группы было введено М. М. Капрановым для случая локальных полей [14]. Затем мы изучаем прямые и обратные образы (п. 5.6), преобразование Фурье $\mathbf{F}$ (п. 5.8), которое переставляет прямые и обратные образы, и, наконец, доказываем обобщение формулы Пуассона (п. 5.9). Важно, что имеются два глубоко различных типа этой формулы (теоремы 2 и 3). Они включают характеристические функции δ_W подпространств $W \subset V$ и имеют сходство с формулой для размерности 1. Важно также, что для некоторого класса пространств V (но не для самого $\mathbb{A}_X$) существует инвариантная мера (1_μ или 1), определенная с точностью до константы, как элемент из пространства $\mathcal{D}'(V)$ или пространства $\mathcal{D}(V)$ – аналог классической меры Хаара (п. 5.9).

Существует аналитическое выражение для индекса пересечения двух дивизоров, основанное на аделном подходе к теории пересечений [6], [10]. Как следствие, можно дать аналитическое доказательство (легкой части) теоремы Римана–Роха для дивизоров на поверхности X . Эти вопросы будут рассмотрены в отдельной статье.

Основные принципы построения гармонического анализа были изложены вторым автором (см., в частности, [8], [9], [15]). Исходным пунктом для этого было наблюдение, что классические пространства Брюа можно определить (в случае локальных полей и групп аделей одномерных схем) как двойные пределы (проективные и индуктивные) пространств функций на конечных абелевых группах (в частности, на конечномерных векторных пространствах над конечным полем). Таким образом, построение гармонического анализа должно начинаться с рассмотрения случая размерности 0 (конечномерных векторных пространств над конечным полем или конечных абелевых групп, отвечающих схемам размерности 0, т.е. точкам), а затем гармонический анализ должен строиться по индукции для следующих размерностей. Эта схема полностью реализована в настоящей работе для $n = 0, 1, 2$.

Важный вклад в построение гармонического анализа был сделан М. М. Капрановым [14], который предложил использовать трюк из конструкции грасманиана Сато в теории интегрируемых систем. Трюк состоит в использовании в приведенном выше определении пространств $\mathcal{D}_{P_0}(V)$ и $\mathcal{D}'_{P_0}(V)$ пространства мер $\mu(P_0/Q)$ вместо $\mu(P/Q)$. Без этого невозможно определить функциональные пространства для *всех* векторных пространств из категории C_2 (и, в частности, для всего пространства аделей $\mathbb{A}_X$).

Второй автор пытался построить гармонический анализ для размерности 2 разными путями. Наиболее прозрачным и удобным для использования оказался вариант, когда объектам *категории* векторных пространств, возникающих из некоторых подпространств всего пространства аделей, сопоставляются

пространства функций нескольких типов (4 или 6 в окончательном варианте). Вся работа производилась ранее с конкретной категорией, возникающей из подфакторов пространства аделей, и ключевой момент этого подхода состоял в тщательном изучении условий, налагаемых на гомоморфизмы векторных пространств, позволяющие определить прямые или обратные образы для соответствующих пространств функций и распределений.

Примерно в это же время первый автор независимо ввел понятие C_n -структуры в категории фильтрованных векторных пространств [12]. С использованием этого понятия оказалось возможным развить анализ в общей ситуации, для любых объектов категории C_2 , и можно надеяться, и C_n . Основопологающим здесь служит тот факт, что C_n -структура существует для пространства аделей *любой* n -мерной нётеровой схемы [12, теорема 2.1].

Принципиальное преимущество этого подхода состоит в том, что все конструкции можно развить в максимальной общности, включающей в себя *одно-временно* как локальную, так и глобальную ситуации. Категория C_1 содержит (как полную подкатегорию) категорию линейно локально компактных векторных пространств (введенных и детально изученных С. Лефшецем [16]), и в этом случае можно использовать классический гармонический анализ.

Заметим, что предыдущие публикации [8], [9], [15] содержали досадную ошибку. В них не различались два типа локально постоянных функций: $\mathcal{E}(V)$ и $\tilde{\mathcal{E}}(V)$.

Настоящая работа, безусловно, может быть продолжена далее, например, для случая пространств аделей, возникающих из арифметических поверхностей. Соответствующая категория C_2 должна включать более общие абелевы группы, которые появляются из локальных полей неравных характеристик и полей архимедова типа. В последнем случае они являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Здесь нет принципиальных трудностей, и мы надеемся рассмотреть это в дальнейших публикациях. Более трудной¹, но отнюдь не невыполнимой, представляется задача построения анализа в высших размерностях, т. е. в категории C_n .

В настоящей работе гармонический анализ строится на векторных пространствах, определенных или над локальным полем K , или над кольцом аделей $\mathbb{A}$. В классическом случае размерности 1 анализ можно построить и на произвольных многообразиях X (также определенных или над K , или над $\mathbb{A}$), что в локальном случае было сделано уже Брюа² [11]. Для случая двумерного локального поля K такой анализ для произвольных многообразий был построен в работе Д. Гейтсгори и Д. Каждана [17] для целей теории представлений редуктивных групп над полем K . Этому предшествовала работа [18], где гармонический анализ строился на однородных пространствах типа $G(K)/G(O'_K)$, введенных в [19]. Заметим, что построение анализа (над $\mathbb{A}$) является весьма

¹В начале июля 2007 г. наша работа была размещена в сети [arXiv: 0707.1766](https://arxiv.org/abs/0707.1766) (math.AG), а затем появилась развивающая ее работа А. Дейтмара [arXiv: 0708.0322](https://arxiv.org/abs/0708.0322) (math.NT), в которой содержится попытка построить анализ для любых размерностей n . К сожалению, ее первые версии содержали серьезные ошибки, указанные нами в письмах автору, а окончательный вариант содержит лишь построение пространств типа $\mathcal{E}$, что является достаточно тривиальным обобщением нашей работы.

²См. также [arXiv: 0302.174](https://arxiv.org/abs/0302.174) (math.RT), [arXiv: 0406.282](https://arxiv.org/abs/0406.282) (math.RT), [arXiv: 0409.543](https://arxiv.org/abs/0409.543) (math.RT).

нетривиальной задачей уже для случая $X = G_m$. Этому будет посвящена отдельная работа.

Различные аспекты гармонического анализа и его возможных применений излагались вторым автором в последние годы в докладах и циклах лекций (Мюнстер 1999, 2002 гг., Париж-VI 2002, 2005 гг., Париж-XIII 2004 г., Москва, МИАН 2002, 2006 гг., Санкт-Петербург, ЛОМИ 2003 г., Саламанка 2004 г., Берлин, университет Гумбольдта 2005 г., Обервольфах 2005 г.).

§ 2. Обозначения

Для любого векторного пространства V над полем k обозначим через V^* его двойственное пространство:

$$V^* = \text{Hom}_k(V, k).$$

Для векторного k -подпространства $H \subset V$ обозначим через $H^\perp$ следующее k -подпространство в пространстве V^* :

$$H^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in V^*: u(H) = 0\}.$$

Через $\mathcal{F}(V)$ обозначим пространство всех функций на V со значениями в поле $\mathbb{C}$.

Для любого $a \in V$ и любого $f \in \mathcal{F}(V)$ через $T_a(f)$ обозначим следующую функцию из $\mathcal{F}(V)$:

$$T_a(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(v + a), \quad v \in V.$$

Для любого $f \in \mathcal{F}(V)$ через $\check{f}$ обозначим следующую функцию из $\mathcal{F}(V)$:

$$\check{f}(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(-v), \quad v \in V.$$

Для конечного множества A обозначим через $\#A$ количество элементов во множестве A . Через $\text{supp}(f)$ обозначается носитель функции f .

Мы фиксируем конечное поле $\mathbb{F}_q$ и нетривиальный характер $\psi: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^*$.

§ 3. Нульмерный случай

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда любой элемент $f \in \mathcal{F}(V)$ имеет единственное представление:

$$f = \sum_{v \in V} a_v \delta_v,$$

где $a_v \in \mathbb{C}$ и функции $\delta_v \in \mathcal{F}(V)$ определяются по следующему правилу:

$$\delta_v(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } w = v, \\ 0, & \text{если } w \neq v. \end{cases}$$

На пространстве $\mathcal{F}(V)$ имеем спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_V: \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\langle f, g \rangle_V = \sum_{v \in V} f(v)g(v).$$

Следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ является невырожденным симметрическим спариванием на конечномерном $\mathbb{C}$ -векторном пространстве $\mathcal{F}(V)$, и, следовательно, оно определяет канонический изоморфизм между векторным пространством $\mathcal{F}(V)$ и двойственным векторным пространством $\mathcal{F}(V)^*$.*

Пусть $\pi: V \rightarrow W$ – линейное отображение между конечномерными векторными пространствами над полем $\mathbb{F}_q$. Определим отображение прямого образа $\pi_*: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ как отображение

$$\pi_*(f)(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } w \notin \pi(V), \\ \sum_{\substack{v \in V \\ \pi(v)=w}} f(v), & \text{если } w \in \pi(V), \end{cases}$$

где $f \in \mathcal{F}(V)$, $w \in W$.

Определим отображение обратного образа $\pi^*: \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ как отображение

$$\pi^*(g)(v) = f(\pi(v)), \quad g \in \mathcal{F}(W), \quad v \in V.$$

Следующее предложение вытекает из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображения π_* и π^* являются сопряженными отображениями по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ на пространствах $\mathcal{F}(V)$ и $\mathcal{F}(W)$, т. е.*

$$\langle \pi^*(g), f \rangle_V = \langle g, \pi_*(f) \rangle_W$$

для любых $f \in \mathcal{F}(V)$, $g \in \mathcal{F}(W)$.

Следующее предложение также легко следует из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть $\pi_1: V_1 \rightarrow V_2$ и $\pi_2: V_2 \rightarrow V_3$ – линейные отображения между векторными пространствами над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда

$$\begin{aligned} (\pi_2)_*(\pi_1)_*(f) &= (\pi_2\pi_1)_*(f) \quad \text{для любого } f \in \mathcal{F}(V_1), \\ \pi_1^*\pi_2^*(g) &= (\pi_2\pi_1)^*(g) \quad \text{для любого } g \in \mathcal{F}(V_3). \end{aligned}$$

2) Пусть V, W, S – конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{F}_q$. Пусть $\pi: V \rightarrow S$, $\alpha: W \rightarrow S$ – линейные отображения между этими пространствами, и пусть

$$\begin{array}{ccc} V \times_S W & \xrightarrow{\pi_W} & W \\ \alpha_V \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

– декартова диаграмма векторных пространств. Тогда имеется следующее правило замены базы:

$$\pi^*\alpha_*(h) = (\alpha_V)_*\pi_W^*(h) \quad \text{для любого } h \in \mathcal{F}(W).$$

Для конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}_q$ определим преобразование Фурье $\mathbf{F}: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V^*)$ по следующему правилу:

$$\mathbf{F}(f)(u) = \sum_{v \in V} f(v) \overline{\psi(u(v))},$$

где $u \in V^*$, $f \in \mathcal{F}(V)$.

ПРИМЕР 1. Пусть $H \subset V$ – векторное подпространство. Рассмотрим функцию $\delta_H = \sum_{v \in H} \delta_v$ из $\mathcal{F}(V)$. Тогда легко получить прямыми вычислениями, что

$$\mathbf{F}(\delta_H) = (\sharp H) \delta_{H^\perp}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пример 1 – формула Пуассона для нульмерного случая.

В следующем предложении собраны свойства преобразования Фурье $\mathbf{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathbf{F}$ – изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств;
- 2) $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(f) = (\sharp V) \check{f}$ для любого $f \in \mathcal{F}(V)$;
- 3) $\langle \mathbf{F}(f), g \rangle_{V^*} = \langle f, \mathbf{F}(g) \rangle_V$ для любых $f \in \mathcal{F}(V)$, $g \in \mathcal{F}(V^*)$;
- 4) если $\pi: V \rightarrow W$ – линейное отображение между конечномерными векторными пространствами над полем $\mathbb{F}_q$ и $\pi': W^* \rightarrow V^*$ – двойственное отображение, то следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{F}(W) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{F}(V^*) & \xrightarrow{(\pi')^*} & \mathcal{F}(W^*) \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathcal{F}(V) \\ \frac{1}{\sharp W} \cdot \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \cdot \frac{1}{\sharp V} \\ \mathcal{F}(W^*) & \xrightarrow{(\pi')_*} & \mathcal{F}(V^*) \end{array} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 2), 3) и диаграмма (1) следуют из прямых вычислений для функций δ_v . Тогда утверждение 1) следует из утверждения 2). Диаграмма (2) следует из диаграммы (1) и утверждения 2).

§ 4. Одномерный случай

4.1. C_0 - и C_1 -пространства. Здесь мы напомним определения C_0 - и C_1 -пространств из [12].

По определению категория C_0 является категорией конечномерных векторных пространств над полем k с морфизмами, приходящими из k -линейных отображений между векторными пространствами.

По определению допустимая тройка конечномерных векторных пространств – точная тройка этих векторных пространств.

Скажем, что (I, F, V) – *фильтрованное k -векторное пространство*, если:

- (i) V – векторное пространство над полем k ;
- (ii) I – такое частично упорядоченное множество, что для любых $i, j \in I$ найдутся $k, l \in I$ такие, что $k \leq i \leq l$ и $k \leq j \leq l$;
- (iii) F – такая функция из I во множество k -векторных подпространств пространства V , что если $i \leq j$ – любые элементы из I , то $F(i) \subset F(j)$;
- (iv) $\bigcap_{i \in I} F(i) = 0$ и $\bigcup_{i \in I} F(i) = V$.

Скажем, что фильтрованное векторное пространство (I_1, F_1, V) *доминирует* другое фильтрованное векторное пространство (I_2, F_2, V) , если существует такая сохраняющая порядок функция $\phi: I_2 \rightarrow I_1$, что:

- (i) для любого элемента $i \in I_2$ имеем $F_1(\phi(i)) = F_2(i)$;
- (ii) для любого элемента $j \in I_1$ имеются такие элементы $i_1, i_2 \in I_2$, что $\phi(i_1) \leq j \leq \phi(i_2)$.

По определению объекты $\text{Ob}(C_1)$ категории C_1 суть такие фильтрованные k -векторные пространства (I, F, V) , что для любых элементов $i \leq j \in I$ k -векторное пространство $F(j)/F(i)$ конечномерно над полем k .

Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ принадлежат $\text{Ob}(C_1)$. Тогда по определению множество $\text{Mor}_{C_1}(E_1, E_2)$ состоит из элементов $A \in \text{Hom}_k(V_1, V_2)$, удовлетворяющих следующему условию: для любого $j \in I_2$ имеется такое $i \in I_1$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$.

Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ и $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ принадлежат $\text{Ob}(C_1)$. Тогда скажем, что

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (3)$$

– *допустимая тройка* из категории C_1 , если:

- (i) $0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \rightarrow 0$ – точная тройка k -векторных пространств;
- (ii) фильтрация (I_1, F_1, V_1) доминирует фильтрацию (I_2, F'_1, V_1) , где $F'_1(i) = F_2(i) \cap V_1$ для любого $i \in I_2$;
- (iii) фильтрация (I_3, F_3, V_3) доминирует фильтрацию (I_2, F'_3, V_3) , где $F'_3(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$ для любого $i \in I_2$;
- (iv) для любых $i \leq j \in I_2$

$$0 \rightarrow \frac{F'_1(j)}{F'_1(i)} \rightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \rightarrow \frac{F'_3(j)}{F'_3(i)} \rightarrow 0$$

– точная тройка конечномерных k -векторных пространств.

Назовем морфизм α из допустимой тройки (3) *допустимым мономорфизмом*, а морфизм β из допустимой тройки (3) – *допустимым эпиморфизмом*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ – C_1 -пространство над полем k . Пусть

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0 \quad (4)$$

– точная тройка k -векторных пространств. Определим на пространствах V_1 и V_3 структуры фильтрованных пространств (I_i, F_i, V_i) , $i = 1, 3$, где $I_1 = I_3 = I_2$ и $F_1(i) \stackrel{\text{def}}{=} F_2(i) \cap V_1$, $F_3(i) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(F_2(i))$ для $i \in I_2$. Тогда фильтрованное пространство $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ будет всегда C_1 -пространством, а фильтрованное

пространство $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ будет C_1 -пространством, если и только если выполнено следующее условие:

(*) для любого $x \in V_2 \setminus V_1$ существует $i \in I_2$ такое, что $(x + F_2(i)) \cap V_1 = \emptyset$.

Более того, при выполнении условия (*) точная тройка (4) задает допустимую тройку

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0,$$

т.е. α будет допустимым мономорфизмом, β – допустимым эпиморфизмом.

Например, рассмотрим $k((t))$ как C_1 -пространство с фильтрацией, заданной всеми степенями максимального идеала кольца $k[[t]]$. Тогда k -подпространство $k[t]$ с индуцированной фильтрацией будет C_1 -пространством, но вложение $k[t] \subset k((t))$ не будет допустимым мономорфизмом, а вложение $k[t^{-1}] \subset k((t))$ будет.

Пусть $E = (I, F, V)$ – C_1 -пространство. Определим C_1 -пространство $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$ по следующему правилу. Пространство $\check{V} \subset V^*$ определяется формулой

$$\check{V} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in I} F(i)^\perp. \quad (5)$$

Здесь I^0 – частично упорядоченное множество, которое как множество равно I , но имеет обратный порядок по сравнению с I . Для элемента $j \in I^0$ определено подпространство $F^0(j) \stackrel{\text{def}}{=} F(j)^\perp \subset \check{V}$.

Отметим, что

$$F(j)^\perp = (V/F(j))^* = \varprojlim_{i \geq j} (F(i)/F(j))^*.$$

Если $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_1)$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_1}(E_1, E_2)$, то имеется канонический морфизм $\check{\theta} \in \text{Mor}_{C_1}(\check{E}_2, \check{E}_1)$. Если

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка C_1 -пространств, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, то имеется допустимая тройка двойственных C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

ЛЕММА 1. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_1 -пространств. Тогда:

1) если $D \in \text{Ob}(C_1)$ и $\gamma \in \text{Mor}_{C_1}(D, E_3)$, то имеются допустимая тройка C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma\beta} D \longrightarrow 0 \quad (6)$$

и морфизм $\beta_\gamma \in \text{Mor}_{C_1}(E_2 \times_{E_3} D, E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma\beta} & D \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (7)$$

коммутативна;

2) если $A \in \text{Ob}(C_1)$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_1}(E_1, A)$, то имеются допустимая тройка C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta_\alpha} A \coprod_{E_1} E_2 \xrightarrow{\theta_\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (8)$$

и морфизм $\alpha_\theta \in \text{Mor}_{C_1}(E_2, A \coprod_{E_1} E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\ & & \theta \downarrow & & \downarrow \alpha_\theta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\theta_\alpha} & A \coprod_{E_1} E_2 & \xrightarrow{\theta_\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (9)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Пусть $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$ и $D = (K, H, T)$. Построим $E_2 \times_{E_3} D = (J, G, W) \in \text{Ob}(C_1)$ следующим способом. Определим k -векторное пространство

$$W = V_2 \times_{V_3} T \stackrel{\text{def}}{=} \{(e, d) \in V_2 \times T : \beta(e) = \gamma(d)\}$$

и частично упорядоченное множество

$$J = \{(i, j) \in I_2 \times K : \gamma(H(j)) \subset \beta(F_2(i))\},$$

где $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если и только если $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$. Теперь определим функцию G из множества J во множество k -векторных подпространств пространства W :

$$G((i, j)) = (F_2(i) \times H(j)) \cap W,$$

где пересечение берется внутри $V_2 \times T$. Тогда $E_2 \times_{E_3} D$ корректно определено как C_1 -пространство и отображения β_γ и γ_β суть проекции.

Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in J$ и $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму конечномерных k -векторных пространств:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2) \cap V_1}{F_2(i_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{G((i_2, j_2))}{G((i_1, j_1))} & \longrightarrow & \frac{H(j_2)}{H(j_1)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2) \cap V_1}{F_2(i_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2)}{F_2(i_1)} & \longrightarrow & \frac{F_2(i_2)/(F_2(i_2) \cap V_1)}{F_2(i_1)/(F_2(i_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

где

$$\frac{G((i_2, j_2))}{G((i_1, j_1))} = \frac{F_2(i_2)}{F_2(i_1)} \times_{\frac{F_2(i_2)/(F_2(i_2) \cap V_1)}{F_2(i_1)/(F_2(i_1) \cap V_1)}} \frac{H(j_2)}{H(j_1)}.$$

Из этой коммутативной диаграммы получаем, что тройка (6) – допустимая тройка C_1 -пространств, и диаграмма (7) коммутативна. Утверждение 1) доказано.

Докажем теперь утверждение 2), которое двойственно к утверждению 1). Пусть $A = (K', H', T')$. Построим $A \coprod_{E_1} E_2 = (J', G', W') \in \text{Ob}(C_1)$ следующим способом. Заметим, что $T' \Pi V_2 = T' \times V_2$, и определим k -векторное пространство

$$W' = T' \prod_{V_1} V_2 \stackrel{\text{def}}{=} (T' \times V_2)/E, \quad E = (\theta \times \alpha)V_1.$$

Определим частично упорядоченное множество

$$J' = \{(i, j) \in K' \times I_2 : \theta(F_2(j) \cap V_1) \subset H'(i)\},$$

в котором $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$, если и только если $i_1 \leq i_2$ и $j_1 \leq j_2$, и функцию G' из множества J' во множество k -векторных подпространств пространства W' :

$$G'((i, j)) = ((H'(i) \times F_2(j)) + E/E) \subset W'.$$

Тогда $A \coprod_{E_1} E_2$ корректно определено как C_1 -пространство.

Пусть $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in J'$ и $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму конечномерных k -векторных пространств:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2) \cap V_1}{F_2(j_1) \cap V_1} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)/(F_2(j_2) \cap V_1)}{F_2(j_1)/(F_2(j_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \frac{H'(i_2)}{H'(i_1)} & \longrightarrow & \frac{G'((i_2, j_2))}{G'((i_1, j_1))} & \longrightarrow & \frac{F_2(j_2)/(F_2(j_2) \cap V_1)}{F_2(j_1)/(F_2(j_1) \cap V_1)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

где

$$\frac{G'((i_2, j_2))}{G'((i_1, j_1))} = \frac{H'(i_2)}{H'(i_1)} \prod_{\substack{F_2(j_2) \cap V_1 \\ F_2(j_1) \cap V_1}} \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}.$$

Из коммутативности этой диаграммы получаем, что (8) – допустимая тройка C_1 -пространств, а диаграмма (9) коммутативна. Утверждение 2) доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(I, F, V), (J, G, V) \in \text{Ob}(C_1)$. Скажем, что имеет место *эквивалентность* $(I, F, V) \sim (J, G, V)$, если и только если имеется такой набор C_1 -пространств (I_l, F_l, V) , $1 \leq l \leq n$, что:

- (i) $I_1 = I$, $F_1 = F$, $I_n = J$, $F_n = G$;
- (ii) для любого $1 \leq l \leq n-1$ или (I_l, F_l, V) доминирует (I_{l+1}, F_{l+1}, V) , или (I_{l+1}, F_{l+1}, V) доминирует (I_l, F_l, V) .

Пусть $\theta: E \rightarrow D$ – допустимый эпиморфизм C_1 -пространств и $\beta: B \rightarrow D$ – допустимый мономорфизм C_1 -пространств. Тогда из конструкции рассмотренного произведения (см. доказательство леммы 1) имеем, что $\beta_\theta: E \times_D B \rightarrow B$ – допустимый эпиморфизм C_1 -пространств и $\theta_\beta: E \times_D B \rightarrow E$ – допустимый мономорфизм.

Более того, пусть $N = E \times_D B$. В силу конструкции имеем $D \sim B \coprod_N E$. Имеются допустимый эпиморфизм $\check{\theta}_\beta: \check{E} \rightarrow \check{N}$ и допустимый мономорфизм $\check{\beta}_\theta: \check{E} \rightarrow \check{N}$. Из конструкции (см. доказательство леммы 1) следует, что $\check{D} \sim \check{E} \times_{\check{N}} \check{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем C_1 -пространство (I_1, F_1, V_1) *компактным*, если имеется такой элемент $i \in I_1$, что $F_1(i) = V_1$, и C_1 -пространство (I_2, F_2, V_2) *дискретным*, если имеется такой элемент $j \in I_2$, что $F_2(j) = \{0\}$.

Из определения 2 следует, что если E_1 – компактное C_1 -пространство, то $\check{E}_1$ – дискретное C_1 -пространство, и если E_2 – дискретное C_1 -пространство, то $\check{E}_2$ – компактное C_1 -пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем C_1 -пространство (I, F, V) *полным* C_1 -пространством, если

$$V = \lim_{i \in I} \lim_{j \leq i} F(i)/F(j).$$

Из определения 3 и определения $\check{E}$ следует, что E – полное C_1 -пространство, если и только если $\check{E} = E$.

4.2. Пространства функций и распределений. Напомним основные определения из [9] и [15].

Пусть $E = (I, F, V)$ – C_1 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Для любых элементов $i, j, k \in I$ таких, что $i \leq j \leq k$, имеем инъективное отображение

$$\alpha_{ijk}: F(j)/F(i) \hookrightarrow F(k)/F(i)$$

и сюръективное отображение

$$\pi_{ijk}: F(k)/F(i) \twoheadrightarrow F(k)/F(j)$$

конечномерных векторных пространств над полем $\mathbb{F}_q$.

Тогда согласно § 3 имеем четыре отображения:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijk}^*: \mathcal{F}(F(k)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{F}(F(j)/F(i)), \\ (\alpha_{ijk})_*: \mathcal{F}(F(j)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{F}(F(k)/F(i)), \\ \pi_{ijk}^*: \mathcal{F}(F(k)/F(j)) &\rightarrow \mathcal{F}(F(k)/F(i)), \\ (\pi_{ijk})_*: \mathcal{F}(F(k)/F(i)) &\rightarrow \mathcal{F}(F(k)/F(j)). \end{aligned}$$

Используя описанные отображения, рассмотрим теперь все возможные комбинации проективных и индуктивных пределов пространств $\mathcal{F}(F(j)/F(i))$ по отношению к индексам $i, j \in I$, $i \leq j$. Определим:

$$\mathcal{D}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\rightarrow \\ j}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} \mathcal{F}(F(j)/F(i)) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ j}} \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (10)$$

по отношению к отображениям π_{ijk}^* и $(\alpha_{ijk})_*$;

$$\mathcal{D}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\leftarrow \\ j}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \mathcal{F}(F(j)/F(i)) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ j}} \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (11)$$

по отношению к отображениям $(\pi_{ijk})_*$ и α_{ijk}^* ;

$$\mathcal{E}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\leftarrow \\ j}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ i}} \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (12)$$

по отношению к отображениям α_{ijk}^* и π_{ijk}^* ;

$$\tilde{\mathcal{E}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_i \varprojlim_j \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (13)$$

по отношению к отображениям π_{ijk}^* и α_{ijk}^* ;

$$\mathcal{E}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_j \varinjlim_i \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (14)$$

по отношению к отображениям $(\alpha_{ijk})_*$ и $(\pi_{ijk})_*$;

$$\tilde{\mathcal{E}}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_i \varinjlim_j \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \quad (15)$$

по отношению к отображениям $(\pi_{ijk})_*$ и $(\alpha_{ijk})_*$.

Согласно предложению 3 $\mathbb{C}$ -векторные пространства $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}'(E)$, $\mathcal{E}(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}(E)$, $\mathcal{E}'(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}'(E)$ корректно определены.

Поскольку отображение $\alpha_{ijk}^* \circ (\alpha_{ijk})_*$ тождественно для любых элементов $i \leq j \leq k \in I$, то имеются следующие канонические вложения:

$$\mathcal{D}(E) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}(E), \quad (16)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}'(E) \hookrightarrow \mathcal{D}'(E). \quad (17)$$

Имеются также канонические вложения

$$\tilde{\mathcal{E}}(E) \hookrightarrow \mathcal{E}(E), \quad (18)$$

$$\mathcal{E}'(E) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E). \quad (19)$$

Проясним теперь функциональный смысл пространств $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}'(E)$, $\mathcal{E}(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}(E)$, $\mathcal{E}'(E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) пространство $\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{F}(V)$ таково, что $f \in \mathcal{D}(E)$, если и только если имеются такие элементы $i \leq j \in I$, что $f(v) = 0$ для любого $v \notin F(j)$ и $T_w(f) = f$ для любого $w \in F(i)$, т.е. пространство $\mathcal{D}(E)$ состоит из всех локально постоянных функций с компактным носителем на пространстве V ;

2) пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_1 -пространство; тогда пространство $\mathcal{E}(E) \subset \mathcal{F}(V)$ таково, что $f \in \mathcal{E}(E)$, если и только если для любого $v \in V$ существует такой элемент $i \in I$ (который зависит от v), что $f(v + w) = f(v)$ для любого $w \in F(i)$, т.е. пространство $\mathcal{E}(E)$ состоит из всех локально постоянных функций на пространстве V ;

3) пространство $\tilde{\mathcal{E}}(E) \subset \mathcal{F}(V)$ таково, что $f \in \tilde{\mathcal{E}}(E)$, если и только если существует такой элемент $i \in I$, что $T_w(f) = f$ для любого $w \in F(i)$;

4) имеем $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}(E)^*$, т.е. пространство $\mathcal{D}'(E)$ состоит из всех распределений (обобщенных функций) на пространстве V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1)–3) являются лишь переформулировкой формул (10), (12), (13). Для доказательства утверждения 2) требуем полноту C_1 -пространства E , так как в этом случае для любой локально постоянной функции $f \in \mathcal{F}(V)$ и любого $j \in I$ существует такой элемент $i \in I$, что $f(v + w) = f(v)$ для любых $v \in F(j)$, $w \in F(i)$.

Для доказательства утверждения 4) заметим, что

$$\mathcal{D}(E)^* = \varprojlim_j \varprojlim_i \mathcal{F}(F(j)/F(i))^*,$$

потому что двойственное пространство к пространству, заданному индуктивным пределом векторных пространств, – это проективный предел двойственных векторных пространств. Теперь применим предложения 1 и 2, чтобы получить, что $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}(E)^*$.

Мы не можем говорить о значении распределения $G \in \mathcal{D}'(E)$ в точке $v \in V$, но можем сказать, равно или не равно G нулю в точке $v \in V$. Имеем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $G \in \mathcal{D}'(E)$. Тогда:

- 1) для $v \in V$ скажем, что $G(v) = 0$, если и только если существует $i \in I$ такое, что $G(f) = 0$ для любого $f \in \mathcal{D}(E)$ с $\text{supp } f \subset \{v + F(i)\}$;
- 2) $\text{supp } G \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : G(v) \neq 0\}$.

Согласно определению 4 можно получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_1 -пространство. Для $G \in \mathcal{D}'(E)$ имеем, что $G \in \mathcal{E}'(E)$, если и только если существует такой элемент $j \in I$, что $\text{supp } G \subset F(j)$, т. е. пространство $\mathcal{E}'(E)$ состоит из всех распределений с компактным носителем на пространстве V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4) предложения 5 и формулы (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используя формулы (10)–(15), получим

$$\mathcal{E}(E) = \tilde{\mathcal{E}}(E) = \mathcal{D}(E), \quad \mathcal{E}'(E) = \tilde{\mathcal{E}}'(E) = \mathcal{D}'(E)$$

для любого компактного C_1 -пространства $E = (I, F, V)$. Используя снова формулы (10)–(15), получим

$$\tilde{\mathcal{E}}'(E) = \mathcal{E}'(E) = \mathcal{D}(E), \quad \tilde{\mathcal{E}}(E) = \mathcal{E}(E) = \mathcal{D}'(E)$$

для любого дискретного C_1 -пространства $E = (I, F, V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\{B_k\}$ – проективная система векторных пространств с сюръективными отображениями перехода. Тогда имеем каноническое невырожденное спаривание между векторными пространствами

$$\varprojlim_k B_k \quad \text{и} \quad \varinjlim_k B_k^*.$$

Используя это и формулы (12), (14), (15), (13), имеем канонические невырожденные спаривания

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}(E)} : \mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}'(E) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)}: \tilde{\mathcal{E}}'(E) \times \tilde{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Эти спаривания, ограниченные на $\mathcal{D}(E) \times \mathcal{E}'(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}'(E) \times \mathcal{D}(E)$ соответственно, совпадают со спариваниями, ограниченными из спаривания между $\mathcal{D}(E)$ и $\mathcal{D}'(E)$ (см. утверждение 4) предложения 5).

4.3. Инвариантные меры и интеграл. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_1 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Для любого $G \in \mathcal{D}'(E)$ и любого $a \in V$ обозначим через $T_a(G)$ следующее распределение из $\mathcal{D}'(E)$:

$$T_a(G)(f) \stackrel{\text{def}}{=} G(T_{-a}(f)), \quad f \in \mathcal{D}(E).$$

Определим

$$\mathcal{D}'(E)^V \stackrel{\text{def}}{=} \{G \in \mathcal{D}'(E), \text{ если } T_a(G) = G \text{ для любого } a \in V\}.$$

Тогда справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пространство $\mathcal{D}'(E)^V$ является одномерным векторным пространством над полем $\mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пространство $\mathcal{D}(E)$ порождается функциями $T_a(\delta_{F(i)})$, $a \in V$, $i \in I$, где

$$\delta_{F(i)}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } v \in F(i), \\ 0, & \text{если } v \notin F(i). \end{cases}$$

Кроме того, для любых $i \leq j \in I$

$$\delta_{F(j)} = \sum_{b \in F(j)/F(i)} T_{ab}(\delta_{F(i)}),$$

где $a_b \in F(j)$ – какой-либо подъем элемента $b \in F(j)/F(i)$.

Следовательно, для фиксированного $i \in I$ достаточно определить $G \in \mathcal{D}'(E)^V$ лишь на функции $\delta_{F(i)} \in \mathcal{D}(E)$. Пространство этих значений – одномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Обозначим одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{D}'(E)^V$ через $\mu(E)$ и назовем его *пространством инвариантных мер* или *мер Хаара* на E . Для любого $\mu \in \mu(E)$ и любого $f \in \mathcal{D}(E)$ введем обозначение

$$\int_V f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f).$$

Для $i \in I$ обозначим

$$\mu(F(i)) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\delta_{F(i)}) = \int_V \delta_{F(i)} d\mu.$$

Заметим, что $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{F}(V)$ является $\mathbb{C}$ -алгеброй, т. е. для любых $f, g \in \mathcal{F}(V)$ имеем $fg(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(v)g(v)$, где $v \in V$. Из определения подпространств $\mathcal{E}(E) \subset \mathcal{F}(V)$ и $\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{F}(V)$ находим, что

$$\mathcal{E}(E)\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{D}(E). \quad (20)$$

Поэтому для фиксированного $\mu \in \mu(E)$ отображение

$$\mathbf{I}_\mu: \mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{D}'(E),$$

$$\mathbf{I}_\mu(f)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V fg \, d\mu, \quad f \in \mathcal{E}(E), \quad g \in \mathcal{D}(E),$$

корректно определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$. Существует шестиугольная коммутативная диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D}'(E) & & \\ & \nearrow \mathbf{I}_\mu & & \nwarrow & \\ \mathcal{E}(E) & & & & \tilde{\mathcal{E}}'(E) \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \tilde{\mathcal{E}}(E) & & & & \mathcal{E}'(E) \\ & \nwarrow & & \nearrow \mathbf{I}_\mu & \\ & & \mathcal{D}(E) & & \end{array} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Большая часть ребер будут вложениями, задаваемыми формулами (16)–(19). Докажем, что отображение $\mathbf{I}_\mu: \mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{D}'(E)$ – вложение. Действительно, пусть $f \in \mathcal{E}(E)$, $f \neq 0$. Тогда существует такое $v \in V$, что $f(v) \neq 0$. По определению пространства $\mathcal{E}(E)$ существует такое $i \in I$, что $f(v+w) = f(v)$ для всех $w \in F(i)$. Тогда $\mathbf{I}_\mu(f)(T_v(\delta_{F(i)})) = f(v)\mu(F(i)) \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{I}_\mu(f) \neq 0$.

Докажем теперь, что $\mathbf{I}_\mu(\mathcal{D}(E)) \subset \mathcal{E}'(E)$. В самом деле, пусть $f \in \mathcal{D}(E)$, $\text{supp } f \subset F(j)$ для какого-то $j \in I$. Тогда

$$\mathbf{I}_\mu(f) \in \varprojlim_{i \leq j} \mathcal{F}(F(j)/F(i)),$$

поскольку $\mathbf{I}_\mu(f)(g) = \mathbf{I}_\mu(f)(g|_{F(j)})$ для всех $g \in \mathcal{D}(E)$. (Здесь $g|_{F(j)}$ – функция g , ограниченная на $F(j)$ и продолженная затем нулем на все V .) Итак, $\mathbf{I}_\mu(f) \in \mathcal{E}'(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $f \in \mathcal{E}(E)$, $G \in \mathcal{D}'(E)$. Тогда определим $fG \in \mathcal{D}'(E)$ следующим правилом:

$$fG(g) \stackrel{\text{def}}{=} G(fg), \quad g \in \mathcal{D}(E).$$

Из определений находим, что для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(E)$

$$\mathbf{I}_\mu(f_1 f_2) = f_1 \mathbf{I}_\mu(f_2) = f_2 \mathbf{I}_\mu(f_1).$$

Также из определений для любого $a \in V$ и любого $f \in \mathcal{E}(E)$ имеем

$$\mathbf{I}_\mu(T_a(f)) = T_a(\mathbf{I}_\mu(f)).$$

4.4. Преобразование Фурье. Пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_1 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда $\check{E} = E$.

Для любого $a \in V$ определена функция $\psi_a \in \check{\mathcal{E}}(\check{E})$:

$$\psi_a(w) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(a(w)), \quad w \in \check{V}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Выберем $\mu \in \mu(E)$ и определим преобразование Фурье $\mathbf{F}_\mu: \mathcal{D}(E) \rightarrow \mathcal{F}(\check{V})$ по формуле

$$\mathbf{F}_\mu(f)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f \overline{\psi_w} d\mu, \quad f \in \mathcal{D}(E), \quad w \in \check{V}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $i \in I$. Легко показать, что $\mathbf{F}_\mu(\delta_{F(i)}) = \mu(F(i))\delta_{F(i)^\perp}$.

ЛЕММА 2. Пусть $a \in V$, $b \in \check{V}$, $f \in \mathcal{D}(E)$. Тогда:

- 1) $\mathbf{F}_\mu(T_a(f)) = \psi_a \mathbf{F}_\mu(f)$;
- 2) $\mathbf{F}_\mu(\psi_b f) = T_{-b} \mathbf{F}_\mu(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения преобразования Фурье при непосредственном вычислении.

Из примера 2 и леммы 2 вытекает, что $\mathbf{F}_\mu(T_a(\delta_{F(i)})) \in \mathcal{D}(\check{E})$ для всех $a \in V$, $i \in I$. Поскольку пространство $\mathcal{D}(E)$ порождено функциями $T_a(\delta_{F(i)})$ при $a \in V$, $i \in I$, получаем, что $\mathbf{F}_\mu(\mathcal{D}(E)) \subset \mathcal{D}(\check{E})$.

Преобразование Фурье зависит линейно от $\mu \in \mu(E)$. Следовательно, отображение

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathcal{D}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E) &\rightarrow \mathcal{D}(\check{E}), \\ \mathbf{F}(f \otimes \mu) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_\mu(f), \quad f \in \mathcal{D}(E), \quad \mu \in \mu(E), \end{aligned} \quad (22)$$

корректно определено.

Для любого полного C_1 -пространства $E = (I, F, V)$ имеется канонический изоморфизм

$$\mu(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (23)$$

где если $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$, то $\mu \otimes \mu^{-1} \mapsto 1$ и $\mu^{-1} \in \mu(\check{E}) = \mu(V)^*$, $\mu^{-1}(F(i)^\perp) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(F(i))^{-1}$ для любого $i \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$. Тогда:

- 1) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}} \circ \mathbf{F}_\mu(f) = \check{f}$ для любого $f \in \mathcal{D}(E)$;
- 2) $\mathbf{F}_\mu$ – изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{D}(E)$ и $\mathcal{D}(\check{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из прямых вычислений для функций $T_a(\delta_{F(i)})$, $a \in V$, $i \in I$. При этом мы используем пример 2 и лемму 2, так как пространство $\mathcal{D}(E)$ порождено функциями $T_a(\delta_{F(i)})$, $a \in V$, $i \in I$.

Утверждение 2) следует из утверждения 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Зафиксируем такое $\mu \in \mu(E)$, что $\mu \neq 0$. Определим преобразование Фурье $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}: \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(\check{E})$ следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G)(f) \stackrel{\text{def}}{=} G(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(f)), \quad G \in \mathcal{D}'(E), \quad f \in \mathcal{D}(\check{E}).$$

Из определений 5 и 6 находим, что

$$\mathbf{F}_{\mu^{-1}} \circ \mathbf{I}_{\mu}(f) = \mathbf{I}_{\mu^{-1}} \circ \mathbf{F}_{\mu}(f), \quad f \in \mathcal{D}(E).$$

Из определения 6 и формулы (22) имеем, что отображение

$$\mathbf{F}: \mathcal{D}'(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}) \rightarrow \mathcal{D}'(\check{E}),$$

$$\mathbf{F}(G \otimes \mu^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G), \quad G \in \mathcal{D}(E), \quad \mu \in \mu(E), \quad \mu \neq 0,$$

определено корректно.

ЛЕММА 3. Пусть $G \in \mathcal{D}'(E)$, $a \in V$, $b \in \check{V}$. Тогда:

- 1) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(T_a(G)) = \psi_a \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G)$;
- 2) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(\psi_b G) = T_{-b}(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 2, для любого $f \in \mathcal{D}(\check{E})$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(T_a(G))(f) &= (T_a(G))(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(f)) = G(T_{-a}(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(f))) \\ &= G(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(\psi_a f)) = \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G)(\psi_a f) = (\psi_a \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G))(f), \\ \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(\psi_b G)(f) &= (\psi_b G)(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(f)) = G(\psi_b \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(f)) \\ &= G(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(T_b(f))) = \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G)(T_b(f)) = T_{-b}(\mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G(f))). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для любого $G \in \mathcal{D}'(E)$ определим $\check{G} \in \mathcal{D}'(E)$:

$$\check{G}(f) \stackrel{\text{def}}{=} G(\check{f}), \quad f \in \mathcal{D}(E).$$

Заметим, что $\mathbf{I}_{\mu}(\check{g}) = \mathbf{I}_{\mu}(g)$ для каждого $g \in \mathcal{E}(E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$. Тогда:

- 1) $\mathbf{F}_{\mu} \circ \mathbf{F}_{\mu^{-1}}(G) = \check{G}$ для любого $G \in \mathcal{D}'(E)$;
- 2) $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}$ – изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{D}'(E)$ и $\mathcal{D}'(\check{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 9.

Теперь определим преобразование Фурье $\mathbf{F}: \mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{D}'(\check{E})$ по следующему правилу:

$$\mathbf{F}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_{\mu^{-1}} \circ \mathbf{I}_{\mu}(g), \quad g \in \mathcal{E}(E). \quad (24)$$

Заметим, что это отображение $\mathbf{F}$ не зависит от выбора $\mu \in \mu(E)$, хотя мы используем $\mu \in \mu(E)$, $\mu \neq 0$, для определения этого отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $i \leq j \in I$; для этого случая в § 3 определено преобразование Фурье

$$\mathbf{F}: \mathcal{F}(F(j)/F(i)) \rightarrow \mathcal{F}((F(j)/F(i))^*).$$

Теперь, используя последовательно проективные и индуктивные пределы из формул (10)–(15) и явное описание пространства $\check{E}$ из п. 4.1, при помощи утверждения 4) предложения 4 переопределим преобразование Фурье $\mathbf{F}_{\mu^{-1}}: \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(\check{E})$.

Это новое определение преобразования Фурье совпадает с определением 6 преобразования Фурье.

Используя это определение преобразования Фурье, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\mathbf{F}$ задает изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{E}(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}'(\check{E})$;
- 2) $\mathbf{F}|_{\tilde{\mathcal{E}}(E)}$ задает изоморфизм $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ и $\mathcal{E}'(\check{E})$;
- 3) для любого $f \in \mathcal{E}(E)$ и любого $g \in \tilde{\mathcal{E}}(\check{E})$

$$\langle \mathbf{F}(f), g \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(\check{E})} = \langle f, \mathbf{F}(g) \rangle_{\mathcal{E}(E)}; \quad (25)$$

- 4) для любого $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E})$ и любого $v \in V$

$$\mathbf{F}^{-1}(G)(v) = \langle G, \psi_v \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(\check{E})}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1), 2) следуют из замечания 6 и формул (12)–(15). Утверждение 3) следует из утверждения 3) предложения 4, утверждений 1), 2) и замечания 4.

Утверждение 4) следует из утверждения 3) следующим способом. Для любого $v \in V$

$$\delta_v \in \mathcal{E}'(E) : \quad \delta_v(g) \stackrel{\text{def}}{=} g(v), \quad g \in \mathcal{D}(E).$$

Имеем $\langle f, \delta_v \rangle_{\mathcal{E}(E)} = f(v)$ для любого $f \in \mathcal{E}(E)$. Имеем также $\mathbf{F}(\psi_v) = T_{-v}(\mathbf{F}(1)) = T_{-v}(\delta_0)\delta_v$. Теперь формула (26) следует из формулы (25).

4.5. Формула Пуассона для одномерного случая. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка полных C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда получаем допустимую тройку полных C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

Кроме того, имеется канонический изоморфизм

$$\mu(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) \rightarrow \mu(E_2), \quad (27)$$

где $(\mu_1 \otimes \mu_3)(F_2(j)) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1(F_2(j) \cap V_1) \mu_3(\beta(F_2(j)))$, $j \in I_2$, $\mu_1 \in \mu(E_1)$, $\mu_3 \in \mu(E_3)$.

Определим отображение

$$\alpha^*: \mathcal{D}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}(E_1), \quad (28)$$

где $\alpha^*(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha(v))$, $f \in \mathcal{D}(E_2)$, $v \in V_1$. Оно определено корректно. Определим отображение

$$\alpha_*: \mathcal{D}'(E_1) \rightarrow \mathcal{D}'(E_2) \quad (29)$$

как сопряженное отображение к отображению α^* .

Заметим, что если зафиксировать $\mu_1 \in \mu(E_1)$, $\mu_1 \neq 0$, и $\mu_2 \in \mu(E_2)$, $\mu_2 \neq 0$, то из формул (23) и (27) получаем корректно определенный элемент $\mu_1 \otimes \mu_2^{-1} \in \mu(\check{E}_3)$.

Определим *характеристическую функцию* подпространства E_1 как распределение $\delta_{E_1, \mu_1} \in \mathcal{D}'(E_2)$, где для любого $f \in \mathcal{D}(E_2)$

$$\delta_{E_1, \mu_1}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{V_1} \alpha^*(f) d\mu_1.$$

Аналогично можно определить $\delta_{\check{E}_3, \mu_1 \otimes \mu_2^{-1}} \in \mathcal{D}'(\check{E}_2)$.

ТЕОРЕМА 1 (формула Пуассона). *Для любого $f \in \mathcal{D}(E_2)$ и любых $\mu_1 \in \mu(E_1)$, $\mu_1 \neq 0$, и $\mu_2 \in \mu(E_2)$, $\mu_2 \neq 0$, справедливы следующие эквивалентные утверждения:*

1) *имеет место равенство*

$$\int_{V_1} \alpha^*(f) d\mu_1 = \int_{\check{V}_3} \check{\beta}^*(\mathbf{F}_{\mu_2}(f)) d(\mu_1 \otimes \mu_2^{-1}); \quad (30)$$

2) *имеет место равенство*

$$\mathbf{F}_{\mu_2^{-1}}(\delta_{E_1, \mu_1}) = \delta_{\check{E}_3, \mu_1 \otimes \mu_2^{-1}}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполняются следующие очевидные свойства:

$$T_a(\delta_{E_1, \mu_1}) = \delta_{E_1, \mu_1} \quad \text{для любого} \quad a \in V_1, \quad (32)$$

$$\psi_b \delta_{E_1, \mu_1} = \delta_{E_1, \mu_1} \quad \text{для любого} \quad b \in \check{V}_3. \quad (33)$$

Существуют аналогичные свойства и для $\delta_{\check{E}_3, \mu_1 \otimes \mu_2^{-1}}$.

По лемме 3 находим, что свойства из формул (32), (33) под действием преобразования Фурье переходят одно в другое. Покажем, что δ_{E_1, μ_1} определяется этими свойствами однозначно с точностью до константы. (Это же верно и для $\delta_{\check{E}_3, \mu_1 \otimes \mu_2^{-1}}$.) В самом деле, из формулы (33) следует, что $\delta_{E_1, \mu_1} = \alpha_*(G)$ для некоторого $G \in \mathcal{D}'(E_1)$. Тогда из формулы (32) и предложения 7 находим, что $G(g) = c \int_{V_1} g d\mu_1$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$ и любого $g \in \mathcal{D}(E_1)$.

Следовательно, мы доказали формулу (31) с точностью до какой-то константы $d \in \mathbb{C}$. Чтобы получить, что $d = 1$, достаточно проверить формулу (31) для $\delta_{F_2(j)} \in \mathcal{D}(E_2)$ при каком-то $j \in I_2$, используя для этого явный пример 2.

4.6. Прямые и обратные образы. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Определим отображение

$$\beta_*: \mathcal{D}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{D}(E_3), \quad (34)$$

где

$$\beta_*(f \otimes \mu_1)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\beta^{-1}(w)} f|_{\beta^{-1}(w)} d\mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{V_1} T_{w'}(f) d\mu_1 = \mu_1(T_{w'}(f)|_{V_1}). \quad (35)$$

Здесь $f \in \mathcal{D}(E_2)$, $\mu_1 \in \mu(E_1)$, $w' \in \beta^{-1}(w)$, и тогда $\beta^{-1}(w) = w' + V_1$. Результат не зависит от выбора w' .

Отображение

$$\beta^*: \mathcal{D}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{D}'(E_2) \quad (36)$$

определим как отображение, сопряженное к отображению β_* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12 (формула Фубини). Пусть $f \in \mathcal{D}(E_2)$, $\mu_i \in \mu(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Пусть $\mu_1 \otimes \mu_3 = \mu_2$ относительно отображения (27). Тогда

$$\int_{V_3} \beta_*(f \otimes \mu_1) d\mu_3 = \int_{V_2} f d\mu_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что пространство $\mathcal{D}(E_2)$ порождается функциями $T_a(\delta_{F_2(i)})$, где $a \in V_2$, $i \in I_2$. Следовательно, необходимо проверить формулу Фубини на таких функциях.

Теперь расширим прямые и обратные образы для допустимых мономорфизмов и эпиморфизмов (см. формулы (28), (29), (34), (36)) на другие типы функций и распределений из диаграммы (21). Проблема состоит в том, что эти отображения определены не для всех допустимых мономорфизмов и эпиморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Следующие отображения пространств функций, определенных на C_1 -пространствах, корректно определены:

- 1) $\alpha^*: \mathcal{D}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}(E_1)$;
- 2) $\beta^*: \mathcal{D}(E_3) \rightarrow \mathcal{D}(E_2)$, где E_1 компактно, $V_1 = \text{Ker}(\beta)$;
- 3) $\alpha_*: \mathcal{D}(E_1) \rightarrow \mathcal{D}(E_2)$, где E_3 дискретно, $V_3 = \text{Coker}(\alpha)$;
- 4) $\beta_*: \mathcal{D}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{D}(E_3)$;
- 5) $\alpha^*: \mathcal{E}(E_2) \rightarrow \mathcal{E}(E_1)$ и $\alpha^*(\tilde{\mathcal{E}}(E_2)) \subset \tilde{\mathcal{E}}(E_1)$;
- 6) $\beta^*: \mathcal{E}(E_3) \rightarrow \mathcal{E}(E_2)$ и $\beta^*(\tilde{\mathcal{E}}(E_3)) \subset \tilde{\mathcal{E}}(E_2)$;
- 7) $\alpha_*: \mathcal{E}(E_1) \rightarrow \mathcal{E}(E_2)$, где E_3 дискретно; $V_3 = \text{Coker}(\alpha)$ и $\alpha_*(\tilde{\mathcal{E}}(E_1)) \subset \tilde{\mathcal{E}}(E_2)$;
- 8) $\beta_*: \mathcal{E}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{E}(E_3)$, где E_1 компактно, $V_1 = \text{Ker}(\beta)$ и $\beta_*(\tilde{\mathcal{E}}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1)) \subset \tilde{\mathcal{E}}(E_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого отображения $\gamma: V \rightarrow W$ имеем отображение $\gamma^*: \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, определенное правилом $\gamma^*(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(\gamma(v))$, где $f \in \mathcal{F}(W)$, $v \in V$.

Для любого вложения $\lambda: Y \rightarrow Z$ имеем отображение $\lambda_*: \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$, определенное правилом

$$\lambda_*(f)(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \notin \lambda(Y), \\ f(y), & \text{если } z = \lambda(y), \end{cases}$$

где $f \in \mathcal{F}(Y)$, $z \in Z$, $y \in Y$.

Согласно замечанию 3 выполнено равенство $\mathcal{E}(E) = \mathcal{D}(E)$ для любого компактного C_1 -пространства (I, F, V) . Следовательно, для компактного C_1 -пространства E_1 формулой (35) корректно определено отображение

$$\beta_*: \mathcal{E}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{E}(E_3).$$

Теперь, используя предложение 5, проверяем утверждения нашего предложения. Предложение доказано.

Определим прямые и обратные образы для допустимых мономорфизмов и эпиморфизмов и для пространств всех распределений $\mathcal{D}'(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$, как сопряженные отображения к отображениям, описанным в предложении 13 (когда

последние отображения определены). Чтобы вычислить соответствующие прямые и обратные образы для других типов распределений из диаграммы (21), необходимо ввести топологию на пространствах функций $\mathcal{E}(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ для C_1 -пространства $E = (I, F, V)$.

Пусть $\{B_l\}$ – проективная система топологических k -векторных пространств с сюръективными отображениями перехода (над дискретным полем k). Тогда $\varprojlim_l B_l$ – топологическое k -векторное пространство с базисом окрестностей нуля, заданных подпространствами $\phi_l^{-1}(V)$ для всех l и всех открытых k -подпространств V пространства B_l , где $\phi_l: \varprojlim_l B_l \rightarrow B_l$ – естественное отображение. Через $\text{Hom}_k^{\text{cont}}(\cdot, \cdot)$ обозначим k -пространство всех k -линейных непрерывных отображений между топологическими k -векторными пространствами. Тогда имеем канонический изоморфизм

$$\text{Hom}_k^{\text{cont}}\left(\varprojlim_l B_l, k\right) = \varinjlim_l \text{Hom}_k^{\text{cont}}(B_l, k). \quad (37)$$

Пусть $\{A_m\}$ – индуктивная система топологических k -векторных пространств с инъективными отображениями перехода (над дискретным полем k). Тогда $\varinjlim_m A_m$ – топологическое k -векторное пространство с базисом окрестностей нуля, состоящих из всех таких k -подпространств $U \subset \varinjlim_m A_m$, что $U \cap A_m$ – открытое k -подпространство в пространстве A_m для любого m . Тогда имеем канонический изоморфизм

$$\text{Hom}_k^{\text{cont}}\left(\varinjlim_m A_m, k\right) = \varprojlim_m \text{Hom}_k^{\text{cont}}(A_m, k). \quad (38)$$

Применим теперь эти рассуждения к полю $k = \mathbb{C}$ (с дискретной топологией) и $\mathbb{C}$ -векторным пространствам $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ и $\mathcal{E}(E)$. Используем формулы (13) и (12) и рассмотрим дискретную топологию на каждом конечномерном $\mathbb{C}$ -векторном пространстве $\mathcal{F}(F(i)/F(j))$ для любых $j \leq i \in I$. Тогда $\mathcal{E}(E)$ – топологическое $\mathbb{C}$ -векторное пространство с базисом окрестностей нуля, задаваемых следующими $\mathbb{C}$ -подпространствами $\mathcal{E}(E)_i$ (для всех $i \in I$):

$$\mathcal{E}(E)_i \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{E}(E): f|_{F(i)} = 0\}.$$

Пусть для каждого $j \in I$

$$\tilde{\mathcal{E}}(E)_j \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \tilde{\mathcal{E}}(E): T_w f = f \text{ для любого } w \in F(j)\}.$$

Тогда $\tilde{\mathcal{E}}(E) = \bigcup_{j \in I} \tilde{\mathcal{E}}(E)_j$ и $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ – топологическое $\mathbb{C}$ -векторное пространство с базисом окрестностей нуля, задаваемых такими $\mathbb{C}$ -подпространствами $U \subset \tilde{\mathcal{E}}(E)$, что для любого $j \in I$ существует такое $i \in I$, $i \geq j$, что

$$U \cap \tilde{\mathcal{E}}(E)_j \supset \mathcal{E}(E)_i \cap \tilde{\mathcal{E}}(E)_j.$$

Отметим, что каноническое вложение $\tilde{\mathcal{E}}(E) \subset \mathcal{E}(E)$ будет непрерывным по отношению к этим топологиям, но ограничение топологии пространства $\mathcal{E}(E)$ на пространство $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ не будет совпадать с топологией последнего пространства.

Используя формулы (14) и (15) для $\mathbb{C}$ -пространств $\mathcal{E}'(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}'(E)$, а также изоморфизмы (37) и (38), получаем следующие канонические изоморфизмы:

$$\mathcal{E}'(E) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{cont}}(\mathcal{E}(E), \mathbb{C}), \quad \tilde{\mathcal{E}}'(E) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{cont}}(\tilde{\mathcal{E}}(E), \mathbb{C}). \quad (39)$$

Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Предположим, что выполнены условия предложения 13. Тогда:*

- 1) α_* , α^* , β_* , β^* (если они определены) – непрерывные отображения топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\mathcal{E}(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$;
- 2) α_* , α^* , β_* , β^* (если они определены) – непрерывные отображения топологических $\mathbb{C}$ -векторных пространств $\tilde{\mathcal{E}}(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы воспользуемся явным описанием открытых подмножеств в $\mathcal{E}(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}(E)$, данным выше. Например, чтобы доказать, что β_* – непрерывное отображение из $\mathbb{C}$ -векторного пространства $\mathcal{E}(E_2)$ в $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{E}(E_3)$ (или из $\mathbb{C}$ -векторного пространства $\tilde{\mathcal{E}}(E_2)$ в $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\tilde{\mathcal{E}}(E_3)$), когда E_1 – компактное C_1 -пространство, используем, что

$$\beta_* \left(\mathcal{E}(E_2)_i \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \right) \subset \mathcal{E}(E_3)_{i'},$$

когда $i \in I_2$, $F_2(i) \supset V_1$, и $i' \in I_3$, $F_3(i') = \beta(F_2(i))$. Кроме того, используем, что

$$\beta_* \left(\tilde{\mathcal{E}}(E_2)_j \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \right) \subset \tilde{\mathcal{E}}(E_3)_{j'},$$

когда $j \in I_2$, $j' \in I_3$, $F_3(j') = \beta(F_2(j))$. Лемма доказана.

Используя лемму 4 и формулы 39, рассмотрим прямые и обратные образы как сопряженные отображения к отображениям, представленным в предложении 13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Следующие отображения пространств распределений на C_1 -пространствах корректно определены:*

- 1) $\alpha_*: \mathcal{D}'(E_1) \rightarrow \mathcal{D}'(E_2)$;
- 2) $\beta_*: \mathcal{D}'(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'(E_3)$, где E_1 компактно, $V_1 = \text{Ker}(\beta)$;
- 3) $\alpha^*: \mathcal{D}'(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'(E_1)$, где E_3 дискретно, $V_3 = \text{Coker}(\alpha)$;
- 4) $\beta^*: \mathcal{D}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \mathcal{D}'(E_2)$;
- 5) $\alpha_*: \tilde{\mathcal{E}}'(E_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E_2)$ и $\alpha_*(\mathcal{E}'(E_1)) \subset \mathcal{E}'(E_2)$;
- 6) $\beta_*: \tilde{\mathcal{E}}'(E_2) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E_3)$ и $\beta_*(\mathcal{E}'(E_2)) \subset \mathcal{E}'(E_3)$;
- 7) $\alpha^*: \tilde{\mathcal{E}}'(E_2) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E_1)$, где E_3 дискретно, $V_3 = \text{Coker}(\alpha)$ и $\alpha^*(\mathcal{E}'(E_2)) \subset \mathcal{E}'(E_1)$;
- 8) $\beta^*: \tilde{\mathcal{E}}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E_2)$, где E_1 компактно, $V_1 = \text{Ker}(\beta)$ и $\beta^*(\mathcal{E}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1)) \subset \mathcal{E}'(E_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем предложение 13, лемму 4 и формулы (39).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Используя замечание 4, находим, что сопряженные отображения, определенные в предложении 14, совместимы с каноническими вложениями

$$\mathcal{E}'(E_i) \subset \tilde{\mathcal{E}}'(E_i) \subset \mathcal{D}'(E_i), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Из определения отображений α^* , α_* , β^* , β_* получаем следующие формулы проекции. Зафиксируем $\mu_1 \in \mu(E_1)$.

Для всех $f \in \mathcal{D}(E_2)$ и $g \in \mathcal{E}(E_3)$

$$\beta_*(f\beta^*(g) \otimes \mu_1) = \beta_*(f \otimes \mu_1)g. \quad (40)$$

Для всех $f \in \mathcal{E}(E_2)$, $g \in \mathcal{E}(E_3)$ и компактного C_1 -пространства E_1

$$\beta_*(f\beta^*(g) \otimes \mu_1) = \beta_*(f \otimes \mu_1)g. \quad (41)$$

Для любых $f \in \mathcal{E}(E_1)$, $g \in \mathcal{E}(E_2)$ и дискретного C_1 -пространства E_3

$$\alpha_*(f\alpha^*(g)) = \alpha_*(f)g. \quad (42)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть $\mu_i \in \mu(E_i)$, $1 \leq i \leq 3$, таковы, что $\mu_1 \otimes \mu_3 = \mu_2$ относительно отображения (27). Тогда верны следующие формулы:

1) $\mathbf{I}_{\mu_2}(\beta^*(g)) = \beta^*(\mathbf{I}_{\mu_3}(g))$ для любого $g \in \mathcal{E}(E_3)$;

2) если E_1 – компактное C_1 -пространство, то $\mathbf{I}_{\mu_3}(\beta_*(f \otimes \mu_1)) = \beta_*(\mathbf{I}_{\mu_2}(f))$ для всех $f \in \mathcal{E}(E_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы Фубини (предложение 12) и формул проекции (40) и (41).

4.7. Композиция отображений и правила замены базы. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и пусть

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha'} H \xrightarrow{\beta'} E_2 \longrightarrow 0$$

– другая допустимая тройка C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $L = (J_1, T_1, U)$, $H = (J_2, T_2, W)$. Тогда имеем допустимую тройку C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow H \times_{E_2} E_1 \xrightarrow{\beta'_\alpha} H \xrightarrow{\beta\beta'} E_3 \longrightarrow 0.$$

Пусть $H' = H \times_{E_2} E_1 = (K, P, Z)$ как C_1 -пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Справедливы следующие формулы:

1) для любых $f \in \mathcal{D}(H)$, $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$(\beta\beta')_*(f \otimes (\nu \otimes \mu)) = \beta_*(\beta'_*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (43)$$

2) для любых $G \in \mathcal{D}'(E_3)$, $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$(\beta\beta')^*(G \otimes (\nu \otimes \mu)) = (\beta')^*(\beta^*(G \otimes \mu) \otimes \nu); \quad (44)$$

3) для любого $f \in \mathcal{E}(E_3)$

$$(\beta\beta')^*(f) = (\beta')^*\beta^*(f); \quad (45)$$

4) для любого $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(H)$

$$(\beta\beta')_*(G) = \beta_*\beta'_*(G). \quad (46)$$

Предположим, что E_1 и L – компактные C_1 -пространства. Тогда $H \times_{E_2} E_1$ – компактное C_1 -пространство и справедливы следующие формулы:

5) для любого $f \in \mathcal{D}(E_3)$

$$(\beta\beta')^*(f) = (\beta')^*\beta^*(f); \quad (47)$$

6) для любого $G \in \mathcal{D}'(H)$

$$(\beta\beta')_*(G) = \beta_*(\beta')_*(G); \quad (48)$$

7) для любых $f \in \mathcal{E}(H)$, $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$(\beta\beta')_*(f \otimes (\nu \otimes \mu)) = \beta_*(\beta'_*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (49)$$

8) для любых $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(E_3)$, $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$(\beta\beta')^*(G \otimes (\nu \otimes \mu)) = (\beta')^*(\beta^*(G \otimes \mu) \otimes \nu). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (27) находим, что канонически выполняются равенства

$$\begin{aligned} \mu(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) &= \mu(E_2), & \mu(L) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) &= \mu(H), \\ \mu(H') \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) &= \mu(H). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mu(L) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) = \mu(H').$$

Последняя формула также следует из допустимой тройки C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha'} H \times_{E_2} E_1 \xrightarrow{\alpha_{\beta'}} E_1 \longrightarrow 0. \quad (51)$$

Поэтому для $\nu \in \mu(L)$, $\mu \in \mu(E_1)$ имеем канонически $\nu \otimes \mu \in \mu(H \times_{E_2} E_1)$.

Теперь (43) следует из формулы Фубини (предложение 12), (44) – сопряженная формула к формуле (43). Формула (45) очевидна. Ограничим отображение (45) на подпространство $\tilde{\mathcal{E}}(E_3)$; тогда формула (46) сопряжена к полученной формуле.

Из тройки (51) получаем, что если E_1 и L – компактные C_1 -пространства, то $H \times_{E_2} E_1$ – также компактное C_1 -пространство.

Теперь формула (47) следует из определения обратных образов, (48) сопряжена к формуле (47). Формула (49) следует из формулы Фубини (предложение 12), а (50) следует из формулы (44). Доказательство закончено.

Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Пусть $\alpha': E_2 \rightarrow H'$ – допустимый мономорфизм, где $H' = (J', T', W')$, т. е. имеется допустимая тройка C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\alpha'} H' \xrightarrow{\beta'} L' \longrightarrow 0.$$

Имеем следующую допустимую тройку C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha' \alpha} H' \xrightarrow{\alpha' \beta} E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Справедливы следующие формулы:*

1) для любого $f \in \mathcal{D}(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(f) = \alpha^*(\alpha')^*(f); \quad (52)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(G) = (\alpha')_* \alpha_*(G); \quad (53)$$

3) для любого $f \in \mathcal{E}(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(f) = \alpha^*(\alpha')^*(f); \quad (54)$$

4) для любого $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(G) = (\alpha')_* \alpha_*(G). \quad (55)$$

Предположим, что E_3 и L' – дискретные C_1 -пространства. Тогда $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – дискретное C_1 -пространство и справедливы следующие формулы:

5) для любого $f \in \mathcal{D}(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(f) = (\alpha')_* \alpha_*(f); \quad (56)$$

6) для любого $G \in \mathcal{D}'(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(G) = \alpha^*(\alpha')^*(G); \quad (57)$$

7) для любого $f \in \mathcal{E}(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(f) = (\alpha')_* \alpha_*(f); \quad (58)$$

8) для любого $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(G) = \alpha^*(\alpha')^*(G). \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (52) следует из определений соответствующих отображений. Формула (53) сопряжена к формуле (52). Формула (54) также следует из определений соответствующих отображений. Ограничим отображение (54) на подпространство $\tilde{\mathcal{E}}(H')$. Тогда формула (55) будет сопряжена к последнему выражению.

Из допустимой тройки C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow E_3 \xrightarrow{\beta \alpha'} E_3 \coprod_{E_2} H' \xrightarrow{\beta \beta'} L' \longrightarrow 0$$

получаем, что если E_3 и L' – дискретные C_1 -пространства, то $E_3 \coprod_{E_2} H'$ – также дискретное C_1 -пространство.

Теперь формулы (56) и (58) следуют из определений. Формула (57) сопряжена к формуле (56). Формула (59) следует из (57). Предложение доказано.

Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и пусть $\gamma: D \rightarrow E_3$ – допустимый мономорфизм и $D = (R, S, Y)$, т. е. имеется допустимая тройка C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\gamma} E_3 \xrightarrow{\delta} B \longrightarrow 0.$$

Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму (см. п. 4.1):

$$\begin{array}{ccc} E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma\beta} & D \\ \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \end{array}$$

где γ_β – допустимый эпиморфизм, а β_γ – допустимый мономорфизм. Пусть $X' = E_2 \times_{E_3} D = (N, Q, X)$ как C_1 -пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18 (правила замены базы). *Справедливы следующие утверждения:*

1) для любых $f \in \mathcal{D}(E_2)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\gamma^* \beta_*(f \otimes \mu) = (\gamma_\beta)_*(\beta_\gamma^*(f) \otimes \mu); \quad (60)$$

2) для любых $G \in \mathcal{D}'(D)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\beta^*(\gamma_*(G) \otimes \mu) = (\beta_\gamma)_* \gamma_\beta^*(G \otimes \mu); \quad (61)$$

3) для любого $f' \in \mathcal{E}(E_3)$

$$\gamma_\beta^* \gamma^*(f') = \beta_\gamma^* \beta^*(f'); \quad (62)$$

4) для любого $G' \in \tilde{\mathcal{E}}'(X')$

$$\beta_*(\beta_\gamma)_*(G') = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(G'); \quad (63)$$

5) для любого $f' \in \mathcal{D}(E_3)$ и компактного C_1 -пространства E_1

$$\gamma_\beta^* \gamma^*(f') = \beta_\gamma^* \beta^*(f'); \quad (64)$$

6) для любого $G' \in \mathcal{D}'(X')$ и компактного C_1 -пространства E_1

$$\beta_*(\beta_\gamma)_*(G') = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(G'); \quad (65)$$

7) для любых $f \in \mathcal{D}(X')$, $\mu \in \mu(E_1)$ и дискретного C_1 -пространства B

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(f) \otimes \mu) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(f \otimes \mu); \quad (66)$$

8) для любых $G \in \mathcal{D}'(E_3)$, $\mu \in \mu(E_1)$ и дискретного C_1 -пространства B

$$\gamma_\beta^*(\gamma^*(G) \otimes \mu) = \beta_\gamma^* \beta^*(G \otimes \mu). \quad (67)$$

Предположим, что E_1 – компактное C_1 -пространство, а B – дискретное C_1 -пространство. Тогда справедливы следующие формулы:

9) для любого $f \in \mathcal{D}(D)$

$$\beta^* \gamma_*(f) = (\beta_\gamma)_* \gamma_\beta^*(f); \quad (68)$$

10) для любого $G \in \mathcal{D}'(E_2)$

$$\gamma^* \beta_*(G) = (\gamma_\beta)_* \beta_\gamma^*(G); \quad (69)$$

11) для любых $f \in \mathcal{E}(X')$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(f) \otimes \mu) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(f \otimes \mu); \quad (70)$$

12) для любых $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(E_3)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\gamma_\beta^*(\gamma^*(G) \otimes \mu) = \beta_\gamma^* \beta^*(G \otimes \mu). \quad (71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (60) следует из соответствующих определений. Формула (61) сопряжена к формуле (60). Формула (62) также следует из соответствующих определений. Чтобы получить (63), ограничим формулу (62) на подпространство $\mathcal{E}(E_3)$ и построим сопряженное выражение. Формулы (64) и (66) следуют из соответствующих определений. Формула (65) сопряжена к формуле (64), а (67) – к формуле (66). Формулы (68) и (70) следуют из соответствующих определений. Формула (69) сопряжена к (68). Формула (71) следует из (67).

4.8. Прямые и обратные образы и преобразование Фурье. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка полных C_1 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Тогда имеем следующую допустимую тройку полных C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. Имеем следующие коммутативные диаграммы³:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2) & \xrightarrow{\beta_* \otimes \mu(E_3)} & \mathcal{D}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}(\check{E}_2) & \xrightarrow{\check{\beta}^*} & \mathcal{D}(\check{E}_3) \end{array} \quad (72)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(E_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{D}(E_1) \\ \mu(\check{E}_2) \otimes \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \otimes \mu(\check{E}_1) \\ \mathcal{D}(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}_2) & \xrightarrow{\check{\alpha}_* \otimes \mu(\check{E}_1)} & \mathcal{D}(\check{E}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}_1) \end{array} \quad (73)$$

³Здесь и далее выражения типа $\beta_* \otimes \mu(E_3)$ являются сокращениями более правильного выражения $\beta_* \otimes \text{Id}_{\mu(E_3)}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}'(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3)^* & \xrightarrow{\beta^* \otimes \mu(E_2)^*} & \mathcal{D}'(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2)^* \\
 \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
 \mathcal{D}'(\check{E}_3) & \xrightarrow{\check{\beta}_*} & \mathcal{D}'(\check{E}_2)
 \end{array} \quad (74)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}'(E_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{D}'(E_2) \\
 \mu(E_1) \otimes \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \otimes \mu(E_2) \\
 \mathcal{D}'(\check{E}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_1) & \xrightarrow{\check{\alpha}^* \otimes \mu(E_1)} & \mathcal{D}'(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_2)
 \end{array} \quad (75)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем формулы, аналогичные (23) и (27):

$$\begin{aligned}
 \mu(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(E_3) &= \mu(E_2), & \mu(\check{E}_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}_1) &= \mu(\check{E}_2), \\
 \mu(E_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\check{E}_i) &= \mathbb{C}, & 1 \leq i \leq 3.
 \end{aligned}$$

Тогда диаграмма (72) эквивалентна формуле

$$\int_{V_3} \beta_*(f) \overline{\psi_w} d\mu_3 = \int_{V_2} f \overline{\psi_{\check{\beta}(w)}} d\mu_2, \quad (76)$$

которая должна выполняться для любого $f \in \mathcal{D}(E_2)$, любого $w \in \check{V}_3$ и $\mu_3 = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Теперь, используя $\overline{\psi_{\check{\beta}(w)}} = \beta^*(\overline{\psi_w})$, формулу проекции (40) и формулу Фубини (предложение 12), получаем (76).

Диаграмма (73) следует из диаграммы (72) и предложения 9. Диаграмма (74) сопряжена к диаграмме (73), диаграмма (75) – к диаграмме (72).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. *Имеем следующие коммутативные диаграммы:*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(E_3) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{E}(E_2) \\
 \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
 \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}_3) & \xrightarrow{\check{\beta}_*} & \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}_2)
 \end{array} \quad (77)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{E}}'(E_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \tilde{\mathcal{E}}'(E_2) \\
 \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
 \mathcal{E}(\check{E}_1) & \xrightarrow{\check{\alpha}^*} & \mathcal{E}(\check{E}_2)
 \end{array} \quad (78)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(E_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{E}(E_1) \\
 \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
 \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}_2) & \xrightarrow{\check{\alpha}_*} & \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}_1)
 \end{array} \quad (79)$$

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{E}}'(E_2) & \xrightarrow{\beta_*} & \tilde{\mathcal{E}}'(E_3) \\
\mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\
\mathcal{E}(\check{E}_2) & \xrightarrow{\check{\beta}_*} & \mathcal{E}(\check{E}_3)
\end{array} \tag{80}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диаграмма (77) следует из диаграммы (74), предложения 15, формулы (24) и предложения 11.

Диаграмма (78) следует из диаграммы (77), предложения 11 и формулы $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(g) = \check{g}$ для любого $g \in \mathcal{E}(E_i)$ (которая следует из предложения 10).

Заменим в диаграмме (77) пространства $\mathcal{E}(E_i)$ на их подпространства $\tilde{\mathcal{E}}(E_i)$, $i = 2, 3$, и пространства $\tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}_i)$ на их подпространства $\mathcal{E}'(\check{E}_i)$, $i = 2, 3$, соответственно. Тогда по предложению 11 эта новая диаграмма коммутативна и сопряжение к этой диаграмме дает диаграмму (79). (Использовано замечание 4.)

Диаграмма (80) следует из диаграммы (79) и формулы $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(g) = \check{g}$ для любого $g \in \mathcal{E}(E_i)$.

4.9. Свойство инвариантности. Для любого C_1 -пространства $E = (I, F, V)$ мы определили пространства $\mu(E)$, $\mathcal{D}(E)$, $\mathcal{D}'(E)$, $\mathcal{E}(E)$, $\mathcal{E}'(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}'(E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Пусть E' – другое C_1 -пространство, при этом $E \sim E'$. Тогда существуют следующие канонические отождествления:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu(E'), \\
\mathcal{D}(E) &= \mathcal{D}(E'), \quad \mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}'(E'), \quad \mathcal{E}(E) = \mathcal{E}(E'), \\
\mathcal{E}'(E) &= \mathcal{E}'(E'), \quad \tilde{\mathcal{E}}(E) = \tilde{\mathcal{E}}(E'), \quad \tilde{\mathcal{E}}'(E) = \tilde{\mathcal{E}}'(E').
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из соответствующих определений.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отождествления из предложения 21 корректно определены по отношению к изоморфизмам (23) и (27), прямым и обратным образам и преобразованию Фурье.

§ 5. Двумерный случай

5.1. C_2 -пространства. Напомним определение C_2 -пространства из [12].

Фиксируем поле k . По определению объекты $\text{Ob}(C_2)$ категории C_2 – это фильтрованные k -векторные пространства (I, F, V) со следующими дополнительными структурами:

- (i) для любых $i \leq j \in I$ на k -векторном пространстве $F(j)/F(i)$ задана структура $E_{i,j} \in \text{Ob}(C_1)$;
- (ii) для любых $i \leq j \leq k \in I$

$$0 \rightarrow E_{i,j} \rightarrow E_{i,k} \rightarrow E_{j,k} \rightarrow 0$$

– допустимая тройка из C_1 .

Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ и $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ принадлежат $\text{Ob}(C_2)$. Тогда по определению множество $\text{Mog}_{C_2}(E_1, E_2)$ состоит из элементов $A \in \text{Hom}_k(V_1, V_2)$ таких, что выполнены следующие условия:

- (i) для любого $i \in I_1$ существует $j \in I_2$ такое, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- (ii) для любого $j \in I_2$ существует $i \in I_1$ такое, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$;
- (iii) для любых $i_1 \leq i_2 \in I_1$ и $j_1 \leq j_2 \in I_2$ таких, что $A(F_1(i_1)) \subset F_2(j_1)$ и $A(F_1(i_2)) \subset F_2(j_2)$, индуцированное k -линейное отображение

$$\bar{A}: \frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)} \rightarrow \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$$

принадлежит $\text{Mog}_{C_1}(\frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)}, \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)})$.

Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ и $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ – объекты C_2 . Тогда скажем, что

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (81)$$

– допустимая тройка из C_2 , если выполнены следующие условия:

- (i) $0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \rightarrow 0$ – точная тройка k -векторных пространств;
- (ii) фильтрация (I_1, F_1, V_1) доминирует фильтрацию (I_2, F'_1, V_1) , где $F'_1(i) = F_2(i) \cap V_1$ для любого $i \in I_2$;
- (iii) фильтрация (I_3, F_3, V_3) доминирует фильтрацию (I_2, F'_3, V_3) , где $F'_3(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$;
- (iv) для любых $i \leq j \in I_2$

$$0 \rightarrow \frac{F'_1(j)}{F'_1(i)} \rightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \rightarrow \frac{F'_3(j)}{F'_3(i)} \rightarrow 0 \quad (82)$$

– допустимая тройка из C_1 (по определению множества $\text{Ob}(C_2)$ на каждом векторном пространстве из тройки (82) задана структура объекта категории C_1).

Назовем α из допустимой тройки (81) *допустимым мономорфизмом* и β из допустимой тройки (81) *допустимым эпиморфизмом*.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ – C_2 -пространство над полем k . Пусть

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0 \quad (83)$$

– точная тройка k -векторных пространств. Определим на пространствах V_1 и V_3 структуры фильтрованных пространств (I_i, F_i, V_i) , $i = 1, 3$, где $I_1 = I_3 = I_2$ и $F_1(i) \stackrel{\text{def}}{=} F_2(i) \cap V_1$, $F_3(i) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(F_2(i))$ для $i \in I_2$.

По определению для любых $i \leq j \in I_2$ на пространстве $F_2(j)/F_2(i)$ задана структура C_1 -пространства и имеется точная тройка k -векторных пространств:

$$0 \rightarrow F_1(j)/F_1(i) \rightarrow F_2(j)/F_2(i) \rightarrow F_3(j)/F_3(i) \rightarrow 0. \quad (84)$$

Поэтому, как в замечании 2, рассмотрим индуцированную фильтрацию на k -пространстве $F_1(j)/F_1(i)$ и факторфильтрацию на k -пространстве $F_3(j)/F_3(i)$.

Таким образом определенные фильтрации всегда задают структуру C_2 -пространства $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$. При этом факторфильтрации, определенные выше,

будут задавать структуру C_2 -пространства $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$, если и только если выполняются следующие условия:

(**) для любого $x \in V_2 \setminus V_1$ существует $l \in I_2$ такое, что $(x + F_2(l)) \cap V_1 = \emptyset$;

(***) при любых $i \leq j \in I_2$ для точной тройки (84) выполнено условие (*) из замечания 2.

Более того, при выполнении условий (**), (***) точная тройка (83) задает допустимую тройку

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0,$$

т. е. α будет допустимым мономорфизмом, а β – допустимым эпиморфизмом.

Мы скажем, что C_2 -пространство $E_1 = (I_1, F_1, V)$ доминирует другое C_2 -пространство $E_2 = (I_2, F_2, V)$, если выполнены следующие условия:

(i) фильтрация (I_1, F_1, V) доминирует фильтрацию (I_2, F_2, V) ;

(ii) для любых $i \leq j \in I_2$ C_1 -пространство $(E_1)_{i,j} = F_2(j)/F_2(i)$ с фильтрацией, индуцированной C_2 -структурой на E_1 , доминирует C_1 -пространство $(E_2)_{i,j} = F_2(j)/F_2(i)$ с фильтрацией, индуцированной C_2 -структурой на E_2 .

Рассмотрим группу $\text{Aut}_{C_2}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Mor}_{C_2}(E, E)^*$ (т. е. обратимые элементы в k -алгебре $\text{Mor}_{C_2}(E, E)$) для любого C_2 -пространства E . Из [12, предложение 2.1] имеем, что если C_2 -пространство E_1 доминирует C_2 -пространство E_2 , то канонически $\text{Aut}_{C_2}(E_1) = \text{Aut}_{C_2}(E_2)$.

Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство. Определим C_2 -пространство $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$ следующим образом. Пространство $\check{V} \subset V^*$ определяется по формуле

$$\check{V} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{j \in I} \varprojlim_{i \geq j} \check{E}_{j,i}, \quad (85)$$

где C_1 -пространство $\check{E}_{j,i}$ построено по C_1 -пространству $E_{j,i} = F(i)/F(j)$ (см. п. 4.1). Множество I^0 является частично упорядоченным множеством, которое как множество совпадает с I , но имеет обратный порядок по сравнению с I . Для $j \in I^0$ подпространства

$$F^0(j) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{i \leq j \in I^0} \check{E}_{j,i} \subset \check{V} \quad (86)$$

задают фильтрацию в $\check{V}$.

Если $E_1, E_2 \in \text{Ob}(C_2)$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_2}(E_1, E_2)$, то существует канонический морфизм $\check{\theta} \in \text{Mor}_{C_2}(\check{E}_2, \check{E}_1)$. Если

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

– допустимая тройка C_2 -пространств, то каноническим образом строится следующая допустимая тройка C_2 -пространств:

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0.$$

ЛЕММА 5. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств. Тогда:

1) если $D \in \text{Ob}(C_2)$ и $\gamma \in \text{Mor}_{C_2}(D, E_3)$, то имеются допустимая тройка C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma_\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma_\beta} D \longrightarrow 0 \quad (87)$$

и морфизм $\beta_\gamma \in \text{Mor}_{C_2}(E_2 \times_{E_3} D, E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma_\beta} & D \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (88)$$

коммутативна;

2) если $A \in \text{Ob}(C_2)$ и $\theta \in \text{Mor}_{C_2}(E_1, A)$, то имеются допустимая тройка C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\theta_\alpha} A \coprod_{E_1} E_2 \xrightarrow{\theta_\beta} E_3 \longrightarrow 0 \quad (89)$$

и морфизм $\alpha_\theta \in \text{Mor}_{C_2}(E_2, A \coprod_{E_1} E_2)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\ & & \theta \downarrow & & \downarrow \alpha_\theta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\theta_\alpha} & A \coprod_{E_1} E_2 & \xrightarrow{\theta_\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (90)$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается повторением рассуждений, используемых в доказательстве леммы 1, если в них понимать расслоенное произведение (сумму) факторов фильтрации как расслоенное произведение (сумму) C_1 -пространств, построенное в лемме 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Назовем C_2 -пространство (I_1, F_1, V_1) (cC_2) -пространством, если существует такое $i \in I_1$, что $F_1(i) = V_1$, и назовем C_2 -пространство (I_2, F_2, V_2) (dC_2) -пространством, если существует такое $j \in I_2$, что $F_2(j) = \{0\}$.

Из определения 7 следует, что если E_1 – (cC_2) -пространство, то $\check{E}_1$ – (dC_2) -пространство. Если E_2 – (dC_2) -пространство, то $\check{E}_2$ – (cC_2) -пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Назовем C_2 -пространство (I_1, F_1, V_1) (cfC_2) -пространством, если для любых $i_1 \geq j_1 \in I_1$ C_1 -пространство $F(i_1)/F(j_1)$ – компактное C_1 -пространство. Назовем C_2 -пространство (I_2, F_2, V_2) (dfC_2) -пространством, если для любых $i_2 \geq j_2 \in I_2$ C_1 -пространство $F(i_2)/F(j_2)$ – дискретное C_1 -пространство.

Из определения 8 следует, что если E_1 – (cfC_2) -пространство, то $\check{E}_1$ – (dfC_2) -пространство. Если E_2 – (dfC_2) -пространство, то $\check{E}_2$ – (cfC_2) -пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Назовем C_2 -пространство (I, F, V) *полным C_2 -пространством*, если выполнены следующие условия:

- 1) для любых $i \geq j \in I$ C_1 -пространства $E_{j,i} = F(i)/F(j)$ – полные C_1 -пространства;
- 2) $V = \varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \leq i} F(i)/F(j)$.

Из определения 9 следует, что E – полное C_2 -пространство, если и только если $\check{E} = E$.

5.2. Виртуальные меры. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Для любых $i, j \in I$ определим одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство виртуальных мер

$$\mu(F(i) | F(j)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{l \in I \\ l \leq i, l \leq j}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l)), \mu(F(j)/F(l))), \quad (91)$$

где для перехода к прямому пределу нам нужны тождества, которые следуют из формулы (27): для $l' \leq l \in I$

$$\begin{aligned} \mu(F(i)/F(l')) &= \mu(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l)/F(l')), \\ \mu(F(j)/F(l')) &= \mu(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l)/F(l')). \end{aligned}$$

Имеем также

$$\begin{aligned} f &\in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l)), \mu(F(j)/F(l))) \mapsto \\ &\mapsto f' \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(j)/F(l'))), \end{aligned}$$

где $f'(a \otimes c) \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \otimes c$, a – любой элемент из $\mu(F(i)/F(l))$, c – любой элемент из $\mu(F(l)/F(l'))$. Это отображение – изоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Для любых $i, j, l \in I$ существует такой канонический изоморфизм

$$\gamma: \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(l)) \rightarrow \mu(F(i) | F(l)),$$

что диаграмма ассоциативности

$$\begin{array}{ccc} \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(n)) & \longrightarrow & \mu(F(i) | F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu(F(i) | F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(n)) & \longrightarrow & \mu(F(i) | F(n)) \end{array}$$

коммутативна для всех $i, j, l, n \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем каноническое отображение

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(j)/F(l'))) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(j)/F(l')), \mu(F(l)/F(l'))) \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l')), \mu(F(l)/F(l'))) \end{aligned} \quad (92)$$

которое удовлетворяет диаграмме ассоциативности, и это отображение коммутирует с прямым пределом из определения $\mu(\cdot | \cdot)$. Мы получаем отображение γ после перехода к прямому пределу в (92).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Имеем следующие канонические изоморфизмы. Для любых $i, j \in I$

$$\mu(F(i) | F(i)) = \mathbb{C}, \quad \mu(F(i) | F(j)) = \mu(F(j) | F(i))^*.$$

Пусть $i \leq j \in I$. Тогда

$$\mu(F(i) | F(j)) = \mu(F(j)/F(i)), \quad \mu(F(j) | F(i)) = \mu(F(j)/F(i))^*.$$

5.3. Основные пространства. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Пусть $i \geq j \geq l \geq n \in I$. Тогда $F(i) \supset F(j) \supset F(l) \supset F(n)$ и из определения C_2 -пространства имеем, что

$$\begin{aligned} F(j)/F(n) &\sim (F(i)/F(n)) \times_{F(i)/F(l)} (F(j)/F(l)), \\ F(i)/F(l) &\sim (F(i)/F(n)) \prod_{F(j)/F(n)} (F(j)/F(l)) \end{aligned}$$

как C_1 -пространства.

Для любых $i \geq j \geq l \in I$ имеется допустимая тройка C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow F(j)/F(l) \xrightarrow{\alpha_{lj}i} F(i)/F(l) \xrightarrow{\beta_{lj}i} F(i)/F(j) \longrightarrow 0.$$

Зафиксируем некоторое $o \in I$. Тогда из п. 4.7 получаем, что корректно определены следующие пространства над полем $\mathbb{C}$:

1) пространство

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{F(o)}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_i \varprojlim_l \mathcal{D}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \\ &= \varprojlim_l \varprojlim_i \mathcal{D}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \end{aligned} \quad (93)$$

по отношению к отображениям

$$\begin{aligned} (\beta_{lji})_* \otimes \mu(F(j) | F(o)) : \mathcal{D}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \\ \rightarrow \mathcal{D}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) \end{aligned}$$

и отображениям

$$\begin{aligned} \alpha_{lji}^* \otimes \mu(F(l) | F(o)) : \mathcal{D}(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)) \\ \rightarrow \mathcal{D}(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(l) | F(o)); \end{aligned}$$

2) пространство

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{F(o)}(E) &\stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_i \varinjlim_l \mathcal{D}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)) \\ &= \varinjlim_l \varinjlim_i \mathcal{D}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)) \end{aligned} \quad (94)$$

по отношению к отображениям

$$\begin{aligned} \beta_{lji}^* \otimes \mu(F(o) | F(l)) : \mathcal{D}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \\ \rightarrow \mathcal{D}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)) \end{aligned}$$

и отображениям

$$\begin{aligned} (\alpha_{lji})_* \otimes \mu(F(o) | F(l)) : \mathcal{D}'(F(j)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)) \\ \rightarrow \mathcal{D}'(F(i)/F(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(l)); \end{aligned}$$

3) пространство

$$\mathcal{E}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_i \varinjlim_l \mathcal{E}(F(i)/F(l)) \quad (95)$$

по отношению к отображениям α_{lji}^* и β_{lji}^* ;

4) пространство

$$\tilde{\mathcal{E}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_l \varprojlim_i \tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(l)) \quad (96)$$

по отношению к отображениям β_{lji}^* и α_{lji}^* ;

5) пространство

$$\mathcal{E}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_i \varprojlim_l \mathcal{E}'(F(i)/F(l)) \quad (97)$$

по отношению к отображениям $(\alpha_{lji})_*$ и $(\beta_{lji})_*$;

6) пространство

$$\tilde{\mathcal{E}}'(E) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_l \varinjlim_i \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(l)) \quad (98)$$

по отношению к отображениям $(\beta_{lji})_*$ и $(\alpha_{lji})_*$.

Из определений этих пространств вытекает для любого $o_1 \in I$ такой канонический изоморфизм

$$\mathcal{D}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_1)) \rightarrow \mathcal{D}_{F(o_1)}(E),$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o_2)) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{F(o_1)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(o_2)) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{F(o_2)}(E) \end{array}$$

коммутативна для любого $o_2 \in I$.

Двойственно, для любого $o_1 \in I$ имеем такой канонический изоморфизм

$$\mu(F(o_1) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{D}'_{F(o_1)}(E)$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mu(F(o_2) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o_1) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}'_{F(o)}(E) & \longrightarrow & \mu(F(o_2) | F(o_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}'_{F(o_1)}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu(F(o_2) | F(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}'_{F(o)}(E) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{F(o_2)}(E) \end{array}$$

коммутативна для любого $o_2 \in I$.

Поскольку для любого $i \geq l \in I$ существуют канонические вложения

$$\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(l)) \hookrightarrow \mathcal{E}(F(i)/F(l)), \quad \mathcal{E}'(F(i)/F(l)) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(l)),$$

то существуют и канонические вложения

$$\tilde{\mathcal{E}}(E) \hookrightarrow \mathcal{E}(E), \quad \mathcal{E}'(E) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(E).$$

Более того, имеется такое вложение $\mathcal{E}(E) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, что $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ и $\mathcal{E}(E)$ будут $\mathbb{C}$ -подалгебрами $\mathbb{C}$ -алгебры $\mathcal{F}(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$ является модулем над $\mathbb{C}$ -алгеброй $\mathcal{E}(E)$;
- 2) $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ является модулем над $\mathbb{C}$ -алгеброй $\mathcal{E}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение

$$\mathcal{E}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{D}_{F(o)}(E). \quad (99)$$

Для любых $i_1 \geq j_1 \in I$ имеем следующее отображение умножения:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(F(i_1)/F(j_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(F(i_1)/F(j_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j_1) | F(o)) &\xrightarrow{\lambda} \\ &\xrightarrow{\lambda} \mathcal{D}(F(i_1)/F(j_1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j_1) | F(o)). \end{aligned} \quad (100)$$

Из формулы проекции (40) получаем теперь для любых $i \geq j \geq l \in I$ и любых $g \in \mathcal{E}(F(i)/F(j))$, $f \in \mathcal{D}(F(i)/F(l))$, $\mu \in \mu(F(l) | F(o))$ следующую формулу:

$$\begin{aligned} ((\beta_{lji})_* \otimes \mu(F(j)/F(o))) (\lambda(\beta_{lji}^*(g) \otimes f \otimes \mu)) \\ = \lambda(g \otimes ((\beta_{lji})_* \otimes \mu(F(j)/F(o)))(f \otimes \mu)). \end{aligned} \quad (101)$$

Используя формулы (95) и (93), построим отображение (99), исходя из отображения (100). Благодаря формуле (101) оно корректно определено. Это доказывает утверждение 1).

Для любых $i_1 \geq j_1 \in I$ и любого $f \in \mathcal{E}(F(i_1)/F(j_1))$ в замечании 5 определено действие f на $\mathcal{D}'(F(i_1)/F(j_1))$ как сопряженное к действию f на $\mathcal{D}(F(i_1)/F(j_1))$. Применяя, следовательно, сопряженные формулы к упомянутым выше формулам, из (95) и (94) находим сопряженное действие $\mathcal{E}(E)$ на $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть $\{B_l\}$, $l \in J$, – проективная система векторных пространств над полем k с сюръективными отображениями перехода $\phi_{l_1, l_2} : B_{l_1} \rightarrow B_{l_2}$ для всех $l_1 \geq l_2 \in J$. Пусть J^0 – частично упорядоченное множество как множество, равное J , но с обратным порядком, чем на J . Пусть $\{A_l\}$, $l \in J^0$, – индуктивная система k -векторных пространств с инъективными отображениями перехода $\psi_{l_2, l_1} : A_{l_2} \rightarrow A_{l_1}$. Предположим, что для любого $l \in J$ имеется такое невырожденное k -линейное спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_l : B_l \times A_l \rightarrow k,$$

что для любых $l_1 \geq l_2 \in I$, $x \in B_{l_1}$, $y \in A_{l_2}$ выполняется

$$\langle \phi_{l_1, l_2}(x), y \rangle_{l_2} = \langle x, \psi_{l_2, l_1}(y) \rangle_{l_1}.$$

Тогда имеется каноническое невырожденное k -линейное спаривание между k -векторными пространствами $\varprojlim_{l \in J} B_l$ и $\varinjlim_{l \in J^0} A_l$, которое индуцировано спариваниями $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$, $l \in J$.

Для C_2 -пространства $E = (I, F, V)$ над полем $\mathbb{F}_q$ и для любых $i \geq j \in I$ существуют невырожденные $\mathbb{C}$ -линейные спаривания между $\mathcal{D}(F(i)/F(j))$ и $\mathcal{D}'(F(i)/F(j))$, между $\mathcal{E}(F(i)/F(j))$ и $\mathcal{E}'(F(i)/F(j))$, между $\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(j))$ и $\tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j))$ (см. замечание 4).

Применяя, следовательно, два раза замечание 11 к (93)–(98), получаем, что существуют невырожденные спаривания

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} &: \mathcal{D}_{F(o)}(E) \times \mathcal{D}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}(E)} &: \mathcal{E}(E) \times \mathcal{E}'(E) \rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)} &: \tilde{\mathcal{E}}'(E) \times \tilde{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Теперь в силу конструкции умножений из предложения 23 имеем, что для любых $g \in \mathcal{E}(E)$, $f \in \mathcal{D}_{F(o)}(E)$, $G \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ выполняется

$$\langle f, gG \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} = \langle gf, G \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)}. \quad (102)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Пусть $E = (I, F, V)$ – (cfC_2) -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда для любых $i \geq j \in I$ имеется канонический элемент

$$1_{ij} \in \mu(F(i)/F(j)): 1_{ij}(\delta_{(F(i)/F(j))}) \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Следовательно, для любых $k, l \in I$ имеется такой канонический элемент $1_{kl} \in \mu(F(k) | F(l))$, что для любых $k, l, n \in I$ согласно предложению 22 выполняется

$$\gamma(1_{kl} \otimes 1_{ln}) = 1_{kn}.$$

При использовании элементов 1_{lo} и 1_{ol} для $l, o \in I$ можно не выписывать одномерные $\mathbb{C}$ -пространства $\mu(F(l) | F(o))$ и $\mu(F(o) | F(l))$ в формулах (93) и (94), которые определяют $\mathbb{C}$ -пространства $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$. Эти $\mathbb{C}$ -пространства не зависят от выбора $o \in I$.

Аналогично, пусть $E = (I, F, V)$ – (dfC_2) -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда для любых $i \geq j \in I$ имеется канонический элемент

$$\delta_{ij} \in \mu(F(i)/F(j)): \delta_{ij}(\{0\}) \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Следовательно, для любых $k, l \in I$ найдется такой канонический элемент $\delta_{kl} \in \mu(F(k) | F(l))$, что для любых $k, l, n \in I$ в силу предложения 22 выполняется

$$\gamma(\delta_{kl} \otimes \delta_{ln}) = \delta_{kn}.$$

При использовании элементов δ_{lo} и δ_{ol} для $l, o \in I$ можно не выписывать одномерные $\mathbb{C}$ -пространства $\mu(F(l) | F(o))$ и $\mu(F(o) | F(l))$ в формулах (93) и (94), которые определяют $\mathbb{C}$ -пространства $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$. Эти $\mathbb{C}$ -пространства также не зависят от выбора $o \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Исходя из C_2 -пространства $E = (I, F, V)$ над полем $\mathbb{F}_q$, мы построили шесть $\mathbb{C}$ -пространств: $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$, $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ (для любого $o \in I$), $\mathcal{E}(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}(E)$, $\mathcal{E}'(E)$, $\tilde{\mathcal{E}}'(E)$ согласно формулам (93)–(98).

Однако можно построить и десять $\mathbb{C}$ -пространств, где дополнительные $\mathbb{C}$ -пространства появятся, если для любых $i \geq l \in I$ положить $\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(l))$ вместо $\mathcal{E}(F(i)/F(l))$ в формуле (95), $\mathcal{E}(F(i)/F(l))$ вместо $\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(l))$ в формуле (96), $\mathcal{E}'(F(i)/F(l))$ вместо $\tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(l))$ в формуле (98), $\tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(l))$ вместо $\mathcal{E}'(F(i)/F(l))$ в формуле (97).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением шести $\mathbb{C}$ -пространств, которые заданы формулами (93)–(98).

5.4. Преобразование Фурье. Пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда $\check{E} = E$. Зафиксируем некоторое $o \in I$.

5.4.1. Пусть $i \geq j \in I$ произвольны. В силу п. 4.4 существуют следующие $\mathbb{C}$ -линейные отображения:

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{E}(F(i)/F(j)) \mapsto \check{f} \in \mathcal{E}(F(i)/F(j)), \\ G &\in \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j)) \mapsto \check{G} \in \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j)), \\ f \otimes \mu &\in \mathcal{D}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) \\ &\mapsto \check{f} \otimes \mu \in \mathcal{D}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)), \\ G \otimes \mu' &\in \mathcal{D}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \\ &\mapsto \check{G} \otimes \mu' \in \mathcal{D}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)). \end{aligned}$$

Эти отображения переводят $\mathbb{C}$ -подпространства $\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(j)) \subset \mathcal{E}(F(i)/F(j))$ и $\mathcal{E}'(F(i)/F(j)) \subset \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j))$ в себя.

Эти отображения перестановочны с прямыми и обратными образами, если заменить $i, j \in I$ на $i', j' \in I$, $i' \geq i$, $j' \leq j$. Следовательно, используя формулы (93)–(98), видим, что следующие $\mathbb{C}$ -линейные отображения определены корректно:

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{D}_{F(o)}(E) \mapsto \check{f} \in \mathcal{D}_{F(o)}(E), \\ G &\in \mathcal{D}'_{F(o)}(E) \mapsto \check{G} \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E), \\ f &\in \mathcal{E}(E) \mapsto \check{f} \in \mathcal{E}(E), \\ G &\in \tilde{\mathcal{E}}'(E) \mapsto \check{G} \in \tilde{\mathcal{E}}'(E). \end{aligned}$$

Они отображают $\mathbb{C}$ -подпространства $\tilde{\mathcal{E}}(E) \subset \mathcal{E}(E)$ и $\mathcal{E}'(E) \subset \tilde{\mathcal{E}}'(E)$ в себя.

Квадрат любого из этих отображений будет тождественным отображением. Из соответствующих формул в одномерном случае находим, что

$$\begin{aligned} \langle \check{f}, G \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} &= \langle f, \check{G} \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} \quad \text{для любых} \quad f \in \mathcal{D}_{F(o)}(E), \quad G \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E), \\ \langle \check{f}, G \rangle_{\mathcal{E}(E)} &= \langle f, \check{G} \rangle_{\mathcal{E}(E)} \quad \text{для любых} \quad f \in \mathcal{E}(E), \quad G \in \mathcal{E}'(E), \\ \langle \check{G}, f \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)} &= \langle G, \check{f} \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)} \quad \text{для любых} \quad G \in \tilde{\mathcal{E}}'(E), \quad f \in \tilde{\mathcal{E}}(E). \end{aligned}$$

5.4.2. Согласно п. 5.1 имеется C_2 -пространство $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$. Для любых $i \geq j \in I$ и C_1 -пространства $E_{j,i} = F(i)/F(j)$ имеем C_1 -пространство $\check{E}_{j,i} = F^0(j)/F^0(i)$.

Для любых $l, n \in I$ имеем

$$\mu(F(l) | F(n)) = \mu(F^0(l) | F^0(n)). \quad (103)$$

В самом деле, пусть $k \in I$ таково, что $k \leq l$, $k \leq n$. Тогда согласно предложению 22, замечанию 10 и формуле (23) находим, что

$$\begin{aligned} \mu(F(l) | F(n)) &= \mu(F(l) | F(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(k) | F(n)) \\ &= \mu(F(l)/F(k))^* \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(n)/F(k)) = \mu(F^0(k)/F^0(l)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(k)/F^0(n))^* \\ &= \mu(F^0(l) | F^0(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(k) | F^0(n)) = \mu(F^0(l) | F^0(n)). \end{aligned}$$

Следовательно, для любых $i \geq j \in I$ можно построить отображения

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \otimes \mu(F(i) | F(o)) &: \mathcal{D}(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) | F(o)) \\ &\rightarrow \mathcal{D}(F^0(j)/F^0(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(i) | F^0(o)), \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \otimes \mu(F(o) | F(i)) &: \mathcal{D}'(F(i)/F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | F(j)) \\ &\rightarrow \mathcal{D}'(F^0(j)/F^0(i)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F^0(o) | F^0(i)), \end{aligned} \quad (105)$$

$$\mathbf{F}: \mathcal{E}(F(i)/F(j)) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(F^0(j)/F^0(i)), \quad (106)$$

$$\mathbf{F}: \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j)) \rightarrow \mathcal{E}(F^0(j)/F^0(i)), \quad (107)$$

$$\mathbf{F}: \tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(j)) \rightarrow \mathcal{E}'(F^0(j)/F^0(i)), \quad (108)$$

$$\mathbf{F}: \mathcal{E}'(F(i)/F(j)) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(F^0(j)/F^0(i)). \quad (109)$$

Заметим, что отображение $\mathbf{F}$ из (106), ограниченное на $\mathbb{C}$ -подпространство $\tilde{\mathcal{E}}(F(i)/F(j)) \subset \mathcal{E}(F(i)/F(j))$, совпадает с отображением $\mathbf{F}$ из (108). Отображение $\mathbf{F}$ из (107), ограниченное на $\mathbb{C}$ -подпространство $\mathcal{E}'(F(i)/F(j)) \subset \tilde{\mathcal{E}}'(F(i)/F(j))$, совпадает с отображением $\mathbf{F}$ из (109).

Теперь используем диаграммы (72)–(75), (77)–(80), которые связывают преобразование Фурье с прямыми и обратными образами. Мы пользуемся этими диаграммами, когда меняем $i, j \in I$ на $i', j' \in I$, $i' \geq i$, $j' \leq j$, и переходим к пределам согласно формулам (93)–(98). Получаем, что следующие $\mathbb{C}$ -линейные отображения (*двумерные преобразования Фурье*) определены корректно:

$$\mathbf{F}: \mathcal{D}_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{D}_{F^0(o)}(\check{E}), \quad (110)$$

$$\mathbf{F}: \mathcal{D}'_{F(o)}(E) \rightarrow \mathcal{D}'_{F^0(o)}(\check{E}), \quad (111)$$

$$\mathbf{F}: \mathcal{E}(E) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(\check{E}), \quad (112)$$

$$\mathbf{F}: \tilde{\mathcal{E}}'(E) \rightarrow \mathcal{E}(\check{E}), \quad (113)$$

$$\mathbf{F}: \tilde{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \mathcal{E}'(\check{E}), \quad (114)$$

$$\mathbf{F}: \mathcal{E}'(E) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(\check{E}). \quad (115)$$

Заметим, что из конструкции и соответствующего одномерного свойства следует, что отображение $\mathbf{F}$ из (112), ограниченное на $\mathbb{C}$ -подпространство $\tilde{\mathcal{E}}(E) \subset \mathcal{E}(E)$, совпадает с отображением $\mathbf{F}$ из (114). Отображение $\mathbf{F}$ из (113), ограниченное на $\mathbb{C}$ -подпространство $\mathcal{E}'(E) \subset \tilde{\mathcal{E}}'(E)$, совпадает с отображением $\mathbf{F}$ из (115).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) отображения $\mathbf{F}$ – изоморфизмы $\mathbb{C}$ -векторных пространств из формул (110)–(115);
- 2) для любых $f \in \mathcal{D}_{F(o)}(E)$ и $G \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E)$

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(f) = \check{f}, \quad \mathbf{F} \circ \mathbf{F}(G) = \check{G},$$

для любых $f \in \mathcal{E}(E)$ и $G \in \tilde{\mathcal{E}}'(E)$

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}(f) = \check{f}, \quad \mathbf{F} \circ \mathbf{F}(G) = \check{G};$$

- 3) для любых $f \in \mathcal{D}_{F(o)}(E)$ и $G \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E)$

$$\langle \mathbf{F}(f), G \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} = \langle f, \mathbf{F}(G) \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)},$$

для любых $f \in \mathcal{E}(E)$ и $g \in \tilde{\mathcal{E}}(E)$

$$\langle \mathbf{F}(f), g \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)} = \langle f, \mathbf{F}(g) \rangle_{\mathcal{E}(E)},$$

для любых $H \in \tilde{\mathcal{E}}'(E)$ и $G \in \mathcal{E}'(E)$

$$\langle \mathbf{F}(H), G \rangle_{\mathcal{E}(E)} = \langle H, \mathbf{F}(G) \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкции двумерного преобразования Фурье, данной в настоящем подпункте, и свойств одномерного преобразования Фурье (см. п. 4.4), примененных к функциям и распределениям на C_1 -пространствах $F(i)/F(j)$ для любых $i \geq j \in I$.

5.5. Центральное расширение и его представления. В этом пункте мы построим центральное расширение группы автоморфизмов объекта категории C_2 и рассмотрим представления этой группы на пространствах функций и распределений данного объекта.

5.5.1. Пусть C_2 -пространство $E_1 = (I_1, F_1, V)$ доминирует C_2 -пространство $E_2 = (I_2, F_2, V)$ (над полем $\mathbb{F}_q$). Зафиксируем некоторое $o \in I_2$. Тогда имеются канонические отождествления

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{F(o)}(E_1) &= \mathcal{D}_{F(o)}(E_2), & \mathcal{D}'_{F(o)}(E_1) &= \mathcal{D}'_{F(o)}(E_2), \\ \mathcal{E}(E_1) &= \mathcal{E}(E_2), & \mathcal{E}'(E_1) &= \mathcal{E}'(E_2), \\ \tilde{\mathcal{E}}(E_1) &= \tilde{\mathcal{E}}(E_2), & \tilde{\mathcal{E}}'(E_1) &= \tilde{\mathcal{E}}'(E_2). \end{aligned}$$

В самом деле, из формул (93)–(98) получаем, что прямые и обратные образы, использованные в определениях этих пространств, будут одними и теми же на множествах индексов, зависящих от I_1 или I_2 . Более того, по тем же причинам двумерное преобразование Фурье совпадает для пространств, зависящих от E_1 или E_2 (ср. это с п. 4.9).

5.5.2. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над полем k . Построим максимальное C_2 -пространство $\tilde{E}$ над полем k , которое доминирует C_2 -пространство E . Через $G(E)$ обозначим множество всех таких k -подпространств $W \subset V$, что существуют некоторые $i \geq j \in I$ со свойствами:

- (i) $F(i) \supset W \supset F(j)$;
- (ii) для любого $x \in F(i)/F(j)$, $x \notin W/F(j)$, существует такое $l \in I_{ij}$, что $(x + F_{ij}(l)) \cap (W/F(j)) = \emptyset$ (это пересечение внутри $F(i)/F(j)$), где $(I_{ij}, F_{ij}, F(i)/F(j))$ – структура C_1 -пространства на k -пространстве $F(i)/F(j)$.

Тогда $G(E)$ – частично упорядоченное множество, которое упорядочено включениями подпространств. Отметим, что для любых $k, l \in G(E)$ существуют такие $p_1 \geq p_2 \in G(E)$, что $p_1 \geq k \geq p_2$, $p_1 \geq l \geq p_2$. Следовательно, V – фильтрованное k -векторное пространство с фильтрацией, заданной множеством $G(E)$ (см. п. 4.1).

Для любых $W_1, W_2 \in G(E)$, $W_1 \supset W_2$, можно следующим способом ввести структуру C_1 -пространства на k -векторном пространстве W_1/W_2 . Существуют такие элементы $i \geq j \in I$, что

$$F(i) \supset W_1 \supset W_2 \supset F(j);$$

k -пространство $F(i)/F(j)$ – C_1 -пространство, следовательно, оно фильтровано. Ограничим фильтрацию из k -пространства $F(i)/F(j)$ на k -пространство $W_1/F(j)$. После этого возьмем факторфильтрацию на k -пространстве W_1/W_2 . Через $G_{i,j}(W_1/W_2)$ обозначим множество k -подпространств пространства W_1/W_2 , входящих в эту фильтрацию. Теперь через $\text{Gr}(W_1/W_2)$ обозначим множество всех таких k -подпространств $U \subset W_1/W_2$, что существуют некоторые $P, Q \in G_{i,j}(W_1/W_2)$ со свойством

$$P \supset U \supset Q.$$

Тогда $\text{Gr}(W_1/W_2)$ – частично упорядоченное множество, которое упорядочено включениями подпространств. Фильтрация на W_1/W_2 , заданная элементами из $\text{Gr}(W_1/W_2)$, задает корректно определенное C_1 -пространство на W_1/W_2 .

Таким образом, мы построили C_2 -пространство $\tilde{E}$, которое фильтровано множеством $G(E)$. Обозначим это C_2 -пространство через $(\tilde{I}, \tilde{F}, V)$.

5.5.3. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда для любых $i_1, i_2 \in \tilde{I}$ определено пространство виртуальных мер $\mu(\tilde{F}(i_1) | \tilde{F}(i_2))$. Имеем $\text{Aut}_{C_2}(E) = \text{Aut}_{C_2}(\tilde{E})$. Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и любого $i \in I$ из определения группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$ получаем, что $gF(i) = \tilde{F}(p)$ для некоторого $p \in \tilde{I}$. Следовательно, для любых $g, h \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и $i_1, i_2 \in I$ имеем корректно определенное одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство $\mu(gF(i_1) | hF(i_2))$.

Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и любых $p \geq q \in \tilde{I}$ имеется $\mathbb{C}$ -изоморфизм

$$n_g: \mu(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \mu(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)),$$

где для каждого $U \in \text{Gr}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q))$ и $\mu \in \mu(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q))$ выполняется

$$n_g(\mu)(\delta_U) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\delta_{g^{-1}U}).$$

Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и для любых $p, q, s \in \tilde{I}$, $s \leq p$, $s \leq q$, существует $\mathbb{C}$ -изоморфизм

$$\begin{aligned} m_g: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(s)), \mu(\tilde{F}(q)/\tilde{F}(s))) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(s)), \mu(g\tilde{F}(q)/g\tilde{F}(s))), \end{aligned}$$

где для всех $f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(s)), \mu(\tilde{F}(q)/\tilde{F}(s)))$ положим

$$m_g(f) \stackrel{\text{def}}{=} n_g \circ f \circ n_{g^{-1}}.$$

Применяя изоморфизм m_g к прямому пределу в формуле (91), для всех $p, q \in \tilde{I}$ получаем $\mathbb{C}$ -линейный изоморфизм

$$l_g: \mu(\tilde{F}(p) | \tilde{F}(q)) \rightarrow \mu(g\tilde{F}(p) | g\tilde{F}(q)).$$

Для любых $g_1, g_2 \in G$ верно, что $l_{g_1 g_2} = l_{g_1} l_{g_2}$. Кроме того, $\gamma(l_g(a) \otimes l_g(b)) = l_g \gamma(a \otimes b)$ (см. предложение 22) для любых $a \in \mu(\tilde{F}(p) | \tilde{F}(q))$, $b \in \mu(\tilde{F}(q) | \tilde{F}(s))$ и любых $p, q, s \in \tilde{I}$.

Пусть $p, q \in \tilde{I}$. Тогда для всех $\mu \in \mu(\tilde{F}(p) | \tilde{F}(q))$, $\mu \neq 0$, определим канонический элемент $\mu^{-1} \in \mu(\tilde{F}(q) | \tilde{F}(p))$ так, чтобы $\mu \otimes \mu^{-1} = 1$ по отношению к каноническому изоморфизму

$$\mu(\tilde{F}(p) | \tilde{F}(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\tilde{F}(q) | \tilde{F}(p)) = \mathbb{C}.$$

Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Зафиксируем некоторое $o \in I$. Тогда существует центральное расширение групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}} \xrightarrow{\Lambda} \text{Aut}_{C_2}(E) \longrightarrow 1, \quad (116)$$

где

$$\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(g, \mu): g \in \text{Aut}_{C_2}(E), \mu \in \mu(F(o) | gF(o)), \mu \neq 0\}.$$

Здесь $\Lambda((g, \mu)) = g$. Операции $(g_1, \mu_1)(g_2, \mu_2) = (g_1 g_2, \gamma(\mu_1 \otimes l_{g_1}(\mu_2)))$ и $(g, \mu)^{-1} = (g^{-1}, l_{g^{-1}}(\mu^{-1}))$ задают структуру группы на множестве $\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$. (Единичным элементом этой группы будет $(e, 1)$, где e – единичный элемент группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Для любого $o_1 \in I$ существует канонический изоморфизм

$$\alpha_{o, o_1}: \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}} \rightarrow \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o_1)}}.$$

В самом деле, зафиксируем какой-то $\nu \in \mu(F(o_1) | F(o))$, $\nu \neq 0$. Тогда

$$\alpha_{o, o_1}((g, \mu)) \stackrel{\text{def}}{=} (g, \gamma(\gamma(\nu \otimes \mu) \otimes l_g(\nu^{-1}))).$$

Отображение α_{o, o_1} не зависит от выбора $\nu \in \mu(F(o_1) | F(o))$, $\nu \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Для любого C_2 -пространства $E = (I, F, V)$ над полем k и любого $o \in I$ можно построить центральное расширение

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}} \rightarrow \text{Aut}_{C_2}(E) \rightarrow 1. \quad (117)$$

Если $k = \mathbb{F}_q$, то при применении отображения

$$a \in \mathbb{Z} \mapsto q^a \in \mathbb{C}^*$$

к ядру центрального расширения (117) центральное расширение (117) переходит в центральное расширение (116).

В случае, когда C_2 -пространство E получается из двумерного локального поля $k((t_1))((t_2))$, центральное расширение (117) было построено в [20].

5.5.4. Пусть $E = (I, F, V)$ – C_2 -пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$. В пп. 5.5.2 было построено максимальное C_2 -пространство $\tilde{E} = (\tilde{I}, \tilde{F}, V)$, которое доминирует C_2 -пространство E . Напомним, что $G(E)$ является множеством всех таких k -подпространств $W \subset V$, что $W = \tilde{F}(p)$ для какого-либо $p \in \tilde{I}$. Тогда каждый автоморфизм $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ индуцирует изоморфизм множества $G(E)$.

Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и любых $p \geq q \in \tilde{I}$ имеем отображения

$$r_g: \mathcal{D}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \mathcal{D}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)), \quad (118)$$

$$r_g: \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)), \quad (119)$$

$$r_g: \mathcal{E}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \mathcal{E}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)), \quad (120)$$

где $r_g(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}v)$ для любого $v \in g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)$ и любого f из $\mathcal{D}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q))$, или любого f из $\tilde{\mathcal{E}}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q))$, или любого f из $\mathcal{E}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q))$.

Применяя формулы (119), (120) к (96) и (95), получаем для всех $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ отображения

$$r_g: \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{E}), \quad r_g: \mathcal{E}(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{E}(\tilde{E})$$

такие, что $r_g r_h = r_{gh}$ для всех $g, h \in \text{Aut}_{C_2}(E)$.

Таким образом, используя пп. 5.5.1, строим такие два представления группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$ отображениями r_g на $\mathbb{C}$ -пространствах $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ и $\mathcal{E}(E)$, что первое из них будет подпредставлением второго.

Зафиксируем теперь некоторое $o \in I$. Используя формулу (118), для каждого $\tilde{g} = (g, \mu) \in \widetilde{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ и любых $p \geq q \in \tilde{I}$ построим отображение

$$R_{\tilde{g}}: \mathcal{D}(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\tilde{F}(q) | F(o)) \rightarrow \mathcal{D}(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(g\tilde{F}(q) | F(o)) \quad (121)$$

как композицию отображения $r_g \otimes l_g$ с умножением на $\mu^{-1} \in \mu(gF(o) | F(o))$.

Применяя формулу (121) к формуле (93), получим для каждого $\tilde{g} \in \widetilde{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ отображение

$$R_{\tilde{g}}: \mathcal{D}_{F(o)}(\tilde{E}) \rightarrow \mathcal{D}_{F(o)}(\tilde{E})$$

такое, что $R_{\tilde{g}}R_{\tilde{h}} = R_{\tilde{g}\tilde{h}}$.

Следовательно, используя шп. 5.5.1, получаем представление группы

$\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ отображениями $R_{\tilde{g}}$ на $\mathbb{C}$ -пространстве $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$.

Из конструкций имеем формулу

$$R_{\tilde{g}}(fH) = r_{\Lambda(\tilde{g})}(f)R_{\tilde{g}}(H) \quad (122)$$

для всех $\tilde{g} \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$, $f \in \mathcal{E}(E)$, $H \in \mathcal{D}(E)$.

Двойственно к формулам (119), (120), для всех $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ и любых $p \geq q \in \tilde{I}$ имеем следующие отображения:

$$r'_g: \mathcal{E}'(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \mathcal{E}'(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)), \quad (123)$$

$$r'_g: \tilde{\mathcal{E}}'(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}'(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)). \quad (124)$$

Применяя формулы (123), (124) к (97), (98) и используя шп. 5.5.1, получаем представления группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$ на $\mathbb{C}$ -пространствах $\tilde{\mathcal{E}}'(E)$ и $\mathcal{E}'(E)$ отображениями r'_g , так что первое представление есть снова подпредставление второго представления. По конструкции для всех $f_1 \in \mathcal{E}(E)$, $H_1 \in \mathcal{E}'(E)$ и $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ имеем

$$\langle r_g f_1, r'_g H_1 \rangle_{\mathcal{E}(E)} = \langle f_1, H_1 \rangle_{\mathcal{E}(E)}.$$

Кроме того, для любых $f_2 \in \tilde{\mathcal{E}}(E)$, $H_2 \in \tilde{\mathcal{E}}'(E)$ и $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ имеем

$$\langle r'_g H_2, r_g f_2 \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)} = \langle H_2, f_2 \rangle_{\tilde{\mathcal{E}}(E)}.$$

Пусть $o \in I$. Двойственно к формуле (121), для каждого $\tilde{g} = (g, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ и любых $p \geq q \in \tilde{I}$ построим отображение

$$R'_{\tilde{g}}: \mathcal{D}'(\tilde{F}(p)/\tilde{F}(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | \tilde{F}(q)) \rightarrow \mathcal{D}'(g\tilde{F}(p)/g\tilde{F}(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) | g\tilde{F}(q)). \quad (125)$$

Применяя формулу (125) к (94) и используя шп. 5.5.1, получим представление группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ на $\mathbb{C}$ -пространстве $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ отображениями $R'_{\tilde{g}}$. По конструкции имеем следующую формулу для любых $H \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E)$, $f \in \mathcal{D}_{F(o)}(E)$

и $\tilde{g} \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$:

$$\langle R'_{\tilde{g}}(H), R_{\tilde{g}}(f) \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)} = \langle H, f \rangle_{\mathcal{D}_{F(o)}(E)}. \quad (126)$$

Из формул (126), (122) и (102) для любых $f \in \mathcal{E}(E)$, $H \in \mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ и $\tilde{g} \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ получим формулу

$$R'_{\tilde{g}}(fH) = R_{\Lambda(\tilde{g})}(f)R'_{\tilde{g}}(H).$$

5.5.5. Пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$ и $\check{\check{E}} = E$. Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ имеется канонический автоморфизм $\check{g} \in \text{Aut}_{C_2}(\check{E})$, что дает изоморфизм групп

$$g \in \text{Aut}_{C_2}(E) \longmapsto \check{g}^{-1} \in \text{Aut}_{C_2}(\check{E}). \quad (127)$$

Также для любого $o \in I$ имеем изоморфизм групп

$$(g, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}} \longmapsto (\check{g}^{-1}, \mu) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(\check{E})_{F^0(o)}},$$

где используем изоморфизм (103), чтобы получить, что для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E)$ канонически

$$\mu(F(o) | gF(o)) = \mu(F^0(o) | \check{g}^{-1}F^0(o)). \quad (128)$$

Используя изоморфизм (127), получаем представления группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$ на $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{E}(\check{E})$, $\tilde{\mathcal{E}}(\check{E})$, $\mathcal{E}'(\check{E})$, $\tilde{\mathcal{E}}'(\check{E})$.

Используя изоморфизм (128), получаем представления группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ на $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{D}_{F^0(o)}(\check{E})$ и $\mathcal{D}'_{F^0(o)}(\check{E})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. Пусть $E = (I, F, V)$ – полное C_2 -пространство над полем $\mathbb{F}_q$. Зафиксируем некоторое $o \in I$. Тогда:

1) преобразование Фурье $\mathbf{F}$ задает изоморфизм между представлениями группы $\text{Aut}_{C_2}(E)$ на $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{E}(E)$ и $\tilde{\mathcal{E}}'(\check{E})$ и на $\mathbb{C}$ -пространствах $\tilde{\mathcal{E}}(E)$ и $\mathcal{E}'(\check{E})$;

2) преобразование Фурье $\mathbf{F}$ задает изоморфизм между представлениями группы $\widehat{\text{Aut}_{C_2}(E)_{F(o)}}$ на $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{D}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{D}_{F^0(o)}(\check{E})$ и на $\mathbb{C}$ -пространствах $\mathcal{D}'_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{D}'_{F^0(o)}(\check{E})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение двумерного преобразования Фурье $\mathbf{F}$ из пп. 5.4.2 и формулы (93)–(98), сведем утверждения этого предложения к соответствующим утверждениям об изоморфизмах C_1 -пространств и одномерных преобразованиях Фурье между ними. Последние утверждения следуют из определения и свойств одномерного преобразования Фурье или могут быть снова сведены к нульмерному случаю по формулам (10)–(15) согласно замечанию 6. Соответствующее утверждение в нульмерном случае имеет следующий вид. Для любого конечномерного векторного пространства W над полем $\mathbb{F}_q$ и любых $f \in \mathcal{F}(W)$, $u \in W^*$ и $g \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_q}(W)$ имеем

$$\sum_{w \in W} f(g^{-1}w) \overline{\psi(u(w))} = \sum_{w \in W} f(w) \overline{\psi(u(gw))}.$$

5.6. Прямые и обратные образы. В этом пункте мы построим прямые и обратные образы пространств функций и распределений на C_2 -пространствах.

5.6.1. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют следующие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. *Предположим, что E_1 – (cC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда существует морфизм прямого образа*

$$\beta_*: \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \rightarrow \mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $i, j \in I_2$ имеем канонически

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (129)$$

Пусть $k \in I_2$ такое, что $F_1(\varepsilon(k)) = V_1$. Пусть $i \geq j \in I_2$ таковы, что $i \geq k \geq j$. Тогда имеем допустимую тройку C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow V_1/F_1(\varepsilon(j)) \longrightarrow F_2(i)/F_2(j) \xrightarrow{\beta_{ij}} F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j)) \longrightarrow 0.$$

Корректно определено отображение

$$(\beta_{ij})_*: \mathcal{D}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \rightarrow \mathcal{D}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))),$$

где используем, что $\mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) = \mu(V_1/F_1(\varepsilon(j)))$.

Следовательно, имеется корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & (\beta_{ij})_* \otimes \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))): \\ & \mathcal{D}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) \rightarrow \\ & \rightarrow \mathcal{D}(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))). \end{aligned}$$

Из (129) вытекает, что

$$\mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | F_1(\varepsilon(j))).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mu(F_1(\varepsilon(j)) | V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) \\ & = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1). \end{aligned}$$

Таким образом, построено корректно определенное отображение

$$\begin{aligned} & (\beta_{ij})_* \otimes \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))): \mathcal{D}(F_2(i)/F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)) \\ & \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \rightarrow \mathcal{D}(F_3(\gamma(i))/F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))). \end{aligned}$$

Теперь, переходя к проективным пределам, которые использовались для построения пространств $\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$ и $\mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$, получим корректно определенное отображение β_* .

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Двойственно к отображениям, рассмотренным выше, можно получить корректно определенное отображение

$$\beta^*: \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\varepsilon(o)) | V_1) \rightarrow \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2),$$

так что отображения β_* и β^* сопряжены по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)}$.

5.6.2. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют следующие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. *Предположим, что E_3 – (dC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда существует морфизм обратного образа*

$$\alpha^*: \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \rightarrow \mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1),$$

где $\{0\}$ – нулевое подпространство пространства V_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $i, j \in I_2$ имеем канонически

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (130)$$

Поскольку β – допустимый эпиморфизм и E_3 – это (dC_2) -пространство, существует такое $k \in I_2$, что $F_3(\gamma(k)) = \{0\}$. Пусть $i \geq j \in I_2$ таковы, что $i \geq k \geq j$. Тогда имеется допустимая тройка C_1 -пространств

$$0 \longrightarrow F_1(\varepsilon(i)) / F_1(\varepsilon(j)) \xrightarrow{\alpha_{ij}} F_2(i) / F_2(j) \longrightarrow F_3(\gamma(i)) \longrightarrow 0 \quad (131)$$

и корректно определено отображение

$$\alpha_{ij}^*: \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)) \rightarrow \mathcal{D}(F_1(\varepsilon(i)) / F_1(\varepsilon(j))).$$

Следовательно, корректно определено и отображение

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^* \otimes \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) &: \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathcal{D}(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))). \end{aligned}$$

Из (130) и (131) получаем, что

$$\mu(F_2(o) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(o)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Поэтому

$$\mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) = \mu(F_2(j) | F_2(o)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Следовательно, определено корректно и отображение

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^* \otimes \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) &: \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) / F_2(o)) \\ &\otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \rightarrow \mathcal{D}(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \\ &\otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))). \end{aligned}$$

Переходя теперь к проективным пределам (по отношению к $i \geq k \geq j$), которые были использованы для построения пространств $\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$ и $\mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$, получаем корректно определенное отображение α^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Двойственно к этим отображениям можно построить отображение

$$\alpha_*: \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \rightarrow \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2),$$

так что отображения α^* и α_* сопряжены друг другу по отношению к спариваниям $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)}$.

5.6.3. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют следующие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$ такая, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$ такая, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. *Предположим, что E_1 – это $(cf C_2)$ -пространство, и пусть $o \in I_2$. Тогда существует морфизм обратного образа*

$$\beta^*: \mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \rightarrow \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $i, j \in I_2$ имеем

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (132)$$

Поскольку E_1 – $(cf C_2)$ -пространство, то для любых $i \geq j \in I_2$ имеется такой канонический элемент $1_{ij} \in \mu(F_1(\varepsilon(i)) / F_1(\varepsilon(j)))$, что $1_{ij}(\delta_{F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))}) = 1$.

Следовательно, для любых $i, j \in I_2$ имеется такой элемент $1_{ij} \in \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j)))$, что $1_{ij} \otimes 1_{jk} = 1_{ik}$ для любых $i, j, k \in I_2$. Таким образом, канонически $\mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) = \mathbb{C}$ для всех $i, j \in I_2$ (см. также замечание 12).

Итак, из формулы (132) получаем, что для любых $i, j \in I_2$

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (133)$$

Для всех $i \geq j \in I_2$ имеется допустимая тройка C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \longrightarrow \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \xrightarrow{\beta_{ij}} \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \longrightarrow 0.$$

Существует отображение

$$\beta_{ij}^*: \mathcal{D}(F_3(\gamma(i)) / F_3(\gamma(j))) \rightarrow \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)),$$

и из (133) получаем, что

$$\mu(F_2(j) | F_2(o)) = \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))).$$

Следовательно, имеем отображение

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^* \otimes \mu(F_2(j) | F_2(o)): \mathcal{D}(F_3(\gamma(i)) / F_3(\gamma(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(j)) | F_3(\gamma(o))) &\rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)). \end{aligned}$$

Эти отображения (для переменных $i \geq j \in I_2$) совместимы в том случае, когда совершается переход к проективным пределам согласно формулам, определяющим $\mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$ и $\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$. Следовательно, получаем отображение β^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Двойственно к рассмотренным выше отображениям имеем отображение

$$\beta_*: \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$$

такое, что отображения β^* и β_* будут сопряжены относительно спариваний $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3)}$.

5.6.4. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют такие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. *Предположим, что E_3 – $(df C_2)$ -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда существует морфизм прямого образа*

$$\alpha_*: \mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \rightarrow \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $i, j \in I_2$ имеем канонически

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))). \quad (134)$$

Поскольку E_3 – это $(df C_2)$ -пространство, для любых $i \geq j \in I_2$ имеется такой канонический элемент $\delta_{ij} \in \mu(F_3(\gamma(i)) / F_3(\gamma(j)))$, что $\delta_{ij}(\{0\}) = 1$. Следовательно, для любых $i, j \in I_2$ имеется такой канонический элемент $\delta_{ij} \in \mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j)))$, что $\delta_{ij} \otimes \delta_{jk} = \delta_{ik}$ для всех $i, j, k \in I_2$. Значит, канонически $\mu(F_3(\gamma(i)) | F_3(\gamma(j))) = \mathbb{C}$ для всех $i, j \in I_2$ (см. также замечание 12).

Таким образом, из (134) получаем, что для всех $i, j \in I_2$

$$\mu(F_2(i) | F_2(j)) = \mu(F_1(\varepsilon(i)) | F_1(\varepsilon(j))). \quad (135)$$

Для любых $i \geq j \in I_2$ имеется допустимая тройка C_1 -пространств:

$$0 \longrightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \longrightarrow \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \longrightarrow 0.$$

Поскольку $\frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))}$ – дискретное C_1 -пространство, то корректно определено отображение

$$(\alpha_{ij})_*: \mathcal{D}(F_1(\varepsilon(i)) / F_1(\varepsilon(j))) \rightarrow \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j))$$

и из (135) получаем

$$\mu(F_2(j) | F_2(o)) = \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))).$$

Следовательно, имеем отображение

$$(\alpha_{ij})_* \otimes \mu(F_2(j) | F_2(o)): \mathcal{D}(F_1(\varepsilon(i)) / F_1(\varepsilon(j))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(j)) | F_1(\varepsilon(o))) \rightarrow \mathcal{D}(F_2(i) / F_2(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_2(j) | F_2(o)).$$

Эти отображения (для переменных $i \geq j \in I_2$) совместимы, если перейти к проективным пределам согласно формулам, определяющим пространства $\mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ и $\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$. Следовательно, получаем отображение α_* .

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Двойственно к отображениям, рассмотренным выше, имеем корректно определенное отображение

$$\alpha^*: \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) \rightarrow \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1),$$

так что отображения α_* и α^* будут сопряжены относительно спариваний $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)}$.

5.7. Композиция отображений и правила замены базы. В этом пункте мы рассмотрим правила замены базы (ш. 5.7.1) и правила композиции отображений (ш. 5.7.2).

5.7.1. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$.

Пусть $0 \rightarrow D \xrightarrow{\gamma} E_3 \xrightarrow{\delta} B \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$, где $D = (R, S, Y)$, $B = (T, U, W)$. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму C_2 -пространств:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & E_2 \times_{E_3} D & \xrightarrow{\gamma_\beta} & D \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \beta_\gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \beta_\delta \downarrow & & \downarrow \delta \\
 & & & & B & \equiv & B \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (136)$$

Пусть $X' = E_2 \times_{E_3} D = (N, Q, X)$ как C_2 -пространство. В диаграмме (136) две горизонтальные тройки и две вертикальные тройки – допустимые тройки C_2 -пространств.

Выберем любые $i \leq j \in I_2$. Тогда диаграмма (136) индуцирует следующую коммутативную диаграмму C_1 -пространств (см. конструкцию расслоенного произведения из леммы 5):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1} & \xrightarrow{(\gamma_\alpha)_{ji}} & \frac{F_2(j) \cap X}{F_2(i) \cap X} & \xrightarrow{(\gamma_\beta)_{ji}} & \frac{\beta(F_2(j)) \cap Y}{\beta(F_2(i)) \cap Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & (\beta_\gamma)_{ji} \downarrow & & \downarrow \gamma_{ji} \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_2(j) \cap V_1}{F_2(i) \cap V_1} & \xrightarrow{\alpha_{ji}} & \frac{F_2(j)}{F_2(i)} & \xrightarrow{\beta_{ji}} & \frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))} \longrightarrow 0 \\
 & & & & (\beta_\delta)_{ji} \downarrow & & \downarrow \delta_{ji} \\
 & & & & \frac{\delta\beta(F_2(j))}{\delta\beta(F_2(i))} & \equiv & \frac{\delta\beta(F_2(j))}{\delta\beta(F_2(i))} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (137)$$

Здесь две горизонтальные тройки и две вертикальные тройки являются допустимыми тройками C_1 -пространств. При этом

$$\frac{F_2(j) \cap X}{F_2(i) \cap X} = \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \times_{\frac{\beta(F_2(j))}{\beta(F_2(i))}} \frac{\beta(F_2(j)) \cap Y}{\beta(F_2(i)) \cap Y}$$

как C_1 -пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 – (cC_2) -пространство, B – (dC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 | V_1)$, $\nu \in \mu(\delta\beta(F_2(o)) | \{0\})$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$

$$\gamma^*(\beta_*(f \otimes \mu) \otimes \nu) = (\gamma_\beta)_*(\beta_\gamma^*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (138)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{\beta(F_2(o)) \cap Y}(D)$

$$\beta^*(\gamma_*(G \otimes \nu) \otimes \mu) = (\beta_\gamma)_*(\gamma_\beta^*(G \otimes \mu) \otimes \nu). \quad (139)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Формулировка предложения 30 корректна (по отношению к определениям прямых и обратных образов), так как $\alpha = \beta_\gamma \circ \gamma_\alpha$, $\beta_\delta = \delta \circ \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 30. Докажем сначала формулу (138). Пусть $j_0 \in I_2$ такое, что $F_2(j_0) \cap V_1 = V_1$. (Такое j_0 можно выбрать, так как E_1 – (cC_2) -пространство.) Пусть $i_0 \in I_2$ такое, что $\beta\delta(F_2(i_0)) = \{0\}$. (Такое i_0 можно выбрать, так как B – (dC_2) -пространство.) Рассмотрим произвольные $j \geq i \in I_2$ такие, что $j \geq j_0$, $i \leq i_0$. Тогда для отображений β_{ji} , γ_{ji} , $(\gamma_\beta)_{ji}$, $(\beta_\gamma)_{ji}$ из декартова квадрата диаграммы (137) верна формула замены базы на C_1 -пространствах (см. формулу (60) из предложения 18). Домножив эту формулу на соответствующие пространства мер, перейдем к проективному пределу по всем таким $j \geq i \in I_2$, $j \geq j_0$, $i \leq i_0$. Используя конструкцию отображений β_* и γ^* из предложений 26 и 27, получаем формулу замены базы (138).

Формула (139) двойственна к формуле (138) и получается аналогичными рассуждениями, как при доказательстве формулы (138), однако необходимо переходить к индуктивному пределу по $j, i \in I_2$ и использовать формулу (61) вместо формулы (60).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 31. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 – (cfC_2) -пространство, B – (dfC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{\beta(F_2(o)) \cap Y}(D)$

$$\beta^*\gamma_*(f) = (\beta_\gamma)_*\gamma_\beta^*(f); \quad (140)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2)$

$$\gamma^*\beta_*(G) = (\gamma_\beta)_*\beta_\gamma^*(G). \quad (141)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (140). Рассмотрим произвольные $j \geq i \in I_2$. Тогда для отображений β_{ji} , γ_{ji} , $(\gamma_\beta)_{ji}$, $(\beta_\gamma)_{ji}$ из декартова квадрата диаграммы (137) верна формула замены базы на C_1 -пространствах (см. формулу (68) из предложения 18). Перейдем к проективному пределу по таким $j \geq i \in I_2$. Используя конструкции отображений β^* и γ_* из предложений 28 и 29, получим формулу замены базы (140).

Формула (141) получается аналогичными рассуждениями, однако необходимо переходить к индуктивному пределу по $i, j \in I_2$ и использовать формулу (69) вместо формулы (68).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 32. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 – (cC_2) -пространство, B – (dfC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 \mid V_1)$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любых $f \in \mathcal{D}_{F_2(o) \cap X}(X')$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\beta_*((\beta_\gamma)_*(f) \otimes \mu) = \gamma_*(\gamma_\beta)_*(f \otimes \mu); \quad (142)$$

2) для любых $G \in \mathcal{D}'_{\beta(F_2(o))}(E_3)$, $\mu \in \mu(E_1)$

$$\gamma_\beta^*(\gamma^*(G) \otimes \mu) = \beta_\gamma^*\beta^*(G \otimes \mu). \quad (143)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложений 30 и 31 и сводится к соответствующей формуле (66) для C_1 -пространств (для доказательства формулы (142)) и к соответствующей формуле (67) для C_1 -пространств (для доказательства формулы (143)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 33. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 – (cfC_2) -пространство, B – (dC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$, $\nu \in \mu(\delta\beta(F_2(o)) \mid \{0\})$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{\beta(F_2(o))}(E_3)$

$$\gamma_\beta^*\gamma^*(f \otimes \nu) = \beta_\gamma^*(\beta^*(f) \otimes \nu); \quad (144)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{F_2(o) \cap X}(X')$

$$\beta_*(\beta_\gamma)_*(G \otimes \nu) = \gamma_*((\gamma_\beta)_*(G) \otimes \nu). \quad (145)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложений 30 и 31 и сводится к соответствующей формуле (64) для C_1 -пространств (для доказательства формулы (144)) и к соответствующей формуле (65) для C_1 -пространств (для доказательства формулы (145)).

5.7.2. Рассмотрим снова диаграмму (136). Если E_1 и D – (cC_2) -пространства, то $E_2 \times_{E_3} D$ – (cC_2) -пространство. В самом деле, это следует из допустимой тройки C_2 -пространств:

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma_\alpha} E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\gamma_\beta} D \longrightarrow 0. \quad (146)$$

Пусть $o \in I_2$. Тогда из (146) получаем канонический изоморфизм

$$\mu(F_2(o) \cap X \mid X) = \mu(F_2(o) \cap V_1 \mid V_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\beta(F_2(o)) \cap Y \mid Y). \quad (147)$$

(Подпространства, возникающие в формуле (147), являются элементами фильтрации соответствующих C_2 -пространств, поэтому пространства виртуальных мер корректно определены; см. п. 5.2.)

Из диаграммы (136) имеем следующую допустимую тройку C_2 -пространств:

$$0 \longrightarrow E_2 \times_{E_3} D \xrightarrow{\beta_\gamma} E_2 \xrightarrow{\delta\beta} B \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 34. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 и D – (cC_2) -пространства. Пусть $o \in I_2$, $\mu \in \mu(F_2(o) \cap V_1 | V_1)$, $\nu \in \mu(\beta(F_2(o)) \cap Y | Y)$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2)$

$$(\delta\beta)_*(f \otimes (\mu \otimes \nu)) = \delta_*(\beta_*(f \otimes \mu) \otimes \nu); \quad (148)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{\delta\beta(F_2(o))}(B)$

$$(\delta\beta)^*(G \otimes (\mu \otimes \nu)) = \beta^*(\delta^*(G \otimes \nu) \otimes \mu). \quad (149)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Благодаря (147) считаем, что $\mu \otimes \nu \in \mu(F_2(o) \cap X | X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 34. Пусть $j_0 \in I_2$ такое, что $F_2(j_0) \cap V_1 = V_1$ и $\beta(F_2(j_0)) \cap Y = Y$. Рассмотрим произвольные $j \geq i \in I_2$, $j \geq j_0$. Тогда для отображений β_{ji} , δ_{ji} и $(\beta_\delta)_{ji} = \delta_{ji}\beta_{ji}$ (см. диаграмму (137)) выполняется формула (43). Домножая эту формулу на соответствующие пространства мер и переходя к пределу по $j \geq i \in I_2$, $j \geq j_0$, получим, используя явную конструкцию прямого образа из предложения 26, формулу (148).

Формула (149) получается при аналогичных рассуждениях, но с использованием формулы (44).

В обозначениях диаграммы (136) предположим, что E_1 и D – (cfC_2) -пространства. Тогда из допустимой тройки C_2 -пространств (146) следует, что $E_2 \times_{E_3} D$ – также (cfC_2) -пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 35. В обозначениях диаграммы (136) пусть E_1 и D – (cfC_2) -пространства. Пусть $o \in I_2$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{\delta\beta(F_2(o))}(B)$

$$(\delta\beta)^*(f) = \beta^*\delta^*(f); \quad (150)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2)$

$$(\delta\beta)_*(G) = \delta_*\beta_*(G). \quad (151)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольные $j \geq i \in I_2$. Тогда для отображений β_{ji} , δ_{ji} и $(\beta_\delta)_{ji} = \delta_{ji}\beta_{ji}$ (см. диаграмму (137)) выполняется формула (47). Домножая эту формулу на соответствующие пространства мер и переходя к пределу по $j \geq i \in I_2$, получим, используя явную конструкцию обратного образа из предложения 28, формулу (150).

Формула (151) получается при аналогичных рассуждениях, но с использованием формулы (48).

Немного изменяя (и переобозначая) диаграмму (136), мы получаем следующую коммутативную диаграмму C_2 -пространств над полем $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \alpha' \downarrow & & \downarrow \beta_{\alpha'} \\
 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha' \alpha} & H' & \xrightarrow{\alpha' \beta} & E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \theta \downarrow & & \downarrow \theta' \\
 & & & & L' & = & L' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (152)$$

В диаграмме (152) две горизонтальные и две вертикальные тройки являются допустимыми тройками C_2 -пространств.

Пусть $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$, и $H' = (J', T', W')$ как C_2 -пространства. Из допустимой тройки C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow E_3 \xrightarrow{\beta_{\alpha'}} E_3 \coprod_{E_2} H' \xrightarrow{\theta'} L' \longrightarrow 0 \quad (153)$$

получаем, что если E_3 и L' — (dC_2) -пространства, то $E_3 \coprod_{E_2} H'$ — также (dC_2) -пространство.

Пусть $o \in J'$; тогда из (153) канонически имеем

$$\mu(\alpha'_{\beta}(T'(o)) \mid \{0\}) = \mu(\beta(T'(o) \cap V_2) \mid \{0\}) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(\theta(T'(o)) \mid \{0\}). \quad (154)$$

(Подпространства, возникающие в формуле (154), являются элементами фильтрации соответствующих C_2 -пространств, поэтому пространства виртуальных мер корректно определены; см. п. 5.2.)

Из диаграммы (152) мы имеем допустимую тройку

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha' \alpha} H' \xrightarrow{\alpha' \beta} E_3 \coprod_{E_2} H' \longrightarrow 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 36. В обозначениях диаграммы (152) пусть E_3 и L' — (dC_2) -пространства. Пусть $o \in J'$, $\mu \in \mu(\beta(T'(o) \cap V_2) \mid \{0\})$, $\nu \in \mu(\theta(T'(o)) \mid \{0\})$. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{T'(o)}(H')$

$$(\alpha' \alpha)^*(f \otimes (\mu \otimes \nu)) = \alpha^*((\alpha')^*(f \otimes \nu) \otimes \mu); \quad (155)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{T'(o) \cap V_1}(E_1)$

$$(\alpha' \alpha)_*(G \otimes (\mu \otimes \nu)) = (\alpha')_*(\alpha_*(G \otimes \mu) \otimes \nu). \quad (156)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Благодаря (154) считаем, что $\mu \otimes \nu \in \mu(\alpha'_\beta(T'(o)) \mid \{0\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 36. Формула (155) сводится к формуле (52) после перехода к проективному пределу по $j \geq i \in J'$, где $i \leq i_0$ и i_0 выбрано так, что $\theta(T'(i_0)) = \{0\}$ и $\beta(T'(i_0) \cap V_2) = \{0\}$. При этом используется явная конструкция обратного образа из предложения 27 (ср. с доказательством предложения 35).

Формула (156) доказывается аналогично, но надо использовать формулу (53) и переходить к индуктивному пределу.

В обозначениях диаграммы (152) предположим, что E_3 и $L' - (dfC_2)$ -пространства. Тогда из допустимой тройки C_2 -пространств (153) следует, что $E_3 \coprod_{E_2} H' -$ также (dfC_2) -пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 37. В обозначениях диаграммы (152) пусть E_3 и $L' - (dfC_2)$ -пространства. Пусть $o \in J'$ любое. Тогда верны следующие формулы:

1) для любого $f \in \mathcal{D}_{T'(o) \cap V_1}(E_1)$

$$(\alpha'\alpha)_*(f) = (\alpha')_*\alpha_*(f); \quad (157)$$

2) для любого $G \in \mathcal{D}'_{T'(o)}(H')$

$$(\alpha'\alpha)^*(G) = \alpha^*(\alpha')^*(G). \quad (158)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО формулы (157) сводится к формуле (56) после выбора $j \geq i \in J'$ и перехода к проективному пределу по этим $j \geq i \in J'$. Используем при этом явную конструкцию прямого образа из предложения 29.

Доказательство формулы (158) аналогично, но надо переходить к индуктивному пределу по $j \geq i \in J'$ и использовать формулу (57) вместо формулы (56).

5.8. Преобразование Фурье и прямые и обратные образы. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Предположим, что E_i , $1 \leq i \leq 3$, – это полное C_2 -пространство. Тогда $\check{E}_i = E_i$, $1 \leq i \leq 3$.

По определению существуют такие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Рассмотрим допустимую тройку

$$0 \longrightarrow \check{E}_3 \xrightarrow{\check{\beta}} \check{E}_2 \xrightarrow{\check{\alpha}} \check{E}_1 \longrightarrow 0,$$

где $\check{E}_i = (I_i^0, F_i^0, \check{V}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Напомним, что частично упорядоченное множество I_i^0 , $1 \leq i \leq 3$, равно I_i как множество, но имеет обратный порядок по сравнению с I_i , $1 \leq i \leq 3$. Для любых $i, j \in I_2$ имеем

$$\check{\alpha}(F_2^0(i)) = F_1^0(\varepsilon(i)), \quad F_2^0(i) \cap \check{V}_3 = F_3^0(\gamma(i)). \quad (159)$$

Для всех $i, j \in I_2$ из (103) находим, что

$$\begin{aligned} \mu(F_1(\varepsilon(i)) \mid F_1(\varepsilon(j))) &= \mu(F_1^0(\varepsilon(i)) \mid F_1^0(\varepsilon(j))), \\ \mu(F_3(\gamma(i)) \mid F_3(\gamma(j))) &= \mu(F_3^0(\gamma(i)) \mid F_3^0(\gamma(j))). \end{aligned} \quad (160)$$

Тогда справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 38. Пусть $o \in I_2$. Следующие диаграммы коммутативны:

1) если $E_1 - (cC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \\ \mathbf{F} \otimes \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{D}_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \end{array}$$

2) если $E_3 - (dC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \\ \mathbf{F} \otimes \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{D}_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \end{array}$$

3) если $E_1 - (cC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \otimes \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{D}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

4) если $E_3 - (dC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \otimes \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{D}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

5) если $E_1 - (cfC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F_3(\gamma(o))}(E_3) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{D}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

6) если $E_3 - (dfC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{D}_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) \end{array}$$

7) если $E_1 - (cfC_2)$ -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) & \xrightarrow{(\check{\beta})^*} & \mathcal{D}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3) \end{array}$$

8) если E_3 – (dfC_2) -пространство, то

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2) & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) \\ \mathbf{F} \downarrow & & \downarrow \mathbf{F} \\ \mathcal{D}'_{F_2^0(o)}(\check{E}_2) & \xrightarrow{(\check{\alpha})^*} & \mathcal{D}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1) \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формул (159) и (160), конструкций двумерных прямых и обратных образов из п. 5.6, двумерного преобразования Фурье и соответствующих свойств прямых и обратных образов и преобразования Фурье на C_1 -пространствах из п. 4.8.

5.9. Двумерные формулы Пуассона. В этом пункте мы получим двумерные формулы Пуассона: формулу Пуассона I (пп. 5.9.1) и формулу Пуассона II (пп. 5.9.2).

5.9.1. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка полных C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют такие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Пусть $o \in I_2$. Если предположить, что E_1 – (cC_2) -пространство, то исходя из любого $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$ можно канонически построить $\mathbf{1}_\mu \in \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ следующим образом. По определению имеем

$$\mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) = \varinjlim_{k \in I_1} \mathcal{D}'(V_1/F_1(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_1(\varepsilon(o)) | k). \quad (161)$$

Также по определению имеем $\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) \subset \mathcal{D}'(V_1/F_1(\varepsilon(o)))$. Следовательно, $\mu \in \mathcal{D}'(V_1/F_1(\varepsilon(o)))$. В формуле (161) положим $k = \varepsilon(o)$. Тогда $\mu(F_1(\varepsilon(o)) | k) = \mathbb{C}$ и можно положить $\mathbf{1} \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | \varepsilon(o))$. Следовательно, μ определяет $\mathbf{1}_\mu \in \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1)$ согласно формуле (161).

Пусть $o \in I_2$. Если предположить, что E_3 – (dC_2) -пространство, то из любого $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ канонически строится $\delta_\nu \in \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$. По определению имеем

$$\mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) = \varinjlim_{k \in I_2} \mathcal{D}'(F_3(k)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}). \quad (162)$$

В (162) возьмем $k = \gamma(o)$. Тогда положим $\delta_0 \in \mathcal{D}'(F_3(\gamma(o)))$, где $\delta_0(f) = f(0)$, $f \in \mathcal{D}(F_3(\gamma(o)))$. В формуле (162) положим также $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$. Итак, мы построили $\delta_\nu \in \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3)$.

Заметим, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{1}_\mu) = \delta_\mu, \quad \mathbf{F}(\delta_\nu) = \mathbf{1}_\nu \quad (163)$$

относительно отображений

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \mathcal{D}'_{F_1(\varepsilon(o))}(E_1) &\rightarrow \mathcal{D}'_{F_1^0(\varepsilon(o))}(\check{E}_1), \\ \mathbf{F}: \mathcal{D}'_{F_3(\gamma(o))}(E_3) &\rightarrow \mathcal{D}'_{F_3^0(\gamma(o))}(\check{E}_3). \end{aligned}$$

(Мы использовали то, что

$$\mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1) = \mu(F_1^0(\varepsilon(o)) | \{0\}), \quad \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\}) = \mu(F_3^0(\gamma(o)) | \check{V}_3).$$

Предположим теперь, что одновременно E_1 – (cC_2) -пространство, а E_3 – (dC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда для любых $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$, $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$ корректно определена *характеристическая функция*

$$\delta_{E_1, \mu \otimes \nu} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_*(\mathbf{1}_\mu \otimes \nu) \in \mathcal{D}'_{F_2(o)}(E_2). \quad (164)$$

Верно следующее утверждение.

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство $\delta_{E_1, \mu \otimes \nu} = \beta^*(\delta_\nu \otimes \mu)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкций и соответствующих утверждений для допустимой тройки C_1 -пространств:

$$0 \rightarrow \frac{V_1}{F_1(\varepsilon(k_2))} \rightarrow \frac{F_2(k_1)}{F_2(k_2)} \rightarrow F_3(\gamma(k_1)) \rightarrow 0,$$

где $k_1 \geq o \geq k_2 \in I_2$ и $F_1(\varepsilon(k_1)) = V_1$, $F_3(\gamma(k_2)) = \{0\}$.

Теперь получаем первую формулу Пуассона.

ТЕОРЕМА 2 (формула Пуассона I). *Пусть E_1 – (cC_2) -пространство и E_3 – (dC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда для любых $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) | V_1)$, $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) | \{0\})$*

$$\mathbf{F}(\delta_{E_1, \mu \otimes \nu}) = \delta_{\check{E}_3, \nu \otimes \mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 6, из формул (163) и предложения 38 о связи прямых и обратных образов и двумерного преобразования Фурье.

Для любой допустимой тройки C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

и для любого автоморфизма $g \in \text{Aut}_{C_2}(E_2)$ имеем следующую допустимую тройку C_2 -пространств:

$$0 \longrightarrow g\widetilde{E}_1 \xrightarrow{g(\alpha)} g\widetilde{E}_2 \xrightarrow{g(\beta)} g\widetilde{E}_3 \longrightarrow 0, \quad (165)$$

где $\widetilde{E}_i$ – максимальное C_2 -пространство, которое доминирует E_i , $1 \leq i \leq 3$ (см. пп. 5.5.2), $g\widetilde{E}_2 = \widetilde{E}_2$, $g\widetilde{E}_3 = \widetilde{E}_2/g\widetilde{E}_1$.

Из (165) получаем каноническое разложение

$$\mu(F_2(o) | gF_2(o)) = \mu(F_2(o) \cap gV_1 | gF_1(\varepsilon(o))) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(g(\beta)(F_2(o)) | gF_3(\gamma(o))).$$

Тогда для любого $a \in \mu(F_2(0) | gF_2(0))$ рассмотрим $a = b \otimes c$, где

$$b \in \mu(F_2(o) \cap gV_1 | gF_1(\varepsilon(o))), \quad c \in \mu(g(\beta)(F_2(o)) | gF_3(\gamma(o))).$$

В условиях и обозначениях теоремы 2 для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E_2)$ имеем

$$g\mu \in \mu(gF_1(\varepsilon(o)) | gV_1), \quad g\nu \in \mu(gF_3(\gamma(o)) | \{0\}).$$

Пусть $\tilde{g} = (g, a) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E_2)_{F_2(o)}}$. Тогда

$$R'_{\tilde{g}}(\delta_{E_1, \mu \otimes \nu}) = \delta_{gE_1, (g\mu \otimes b) \otimes (g\nu \otimes c)} = \delta_{gE_1, g\mu \otimes g\nu \otimes a}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $(g, a) \in \widehat{\text{Aut}_{C_2}(E_2)_{F_2(o)}}$

$$\mathbf{F}(\delta_{gE_1, g\mu \otimes g\nu \otimes a}) = \delta_{\tilde{g}^{-1}(E_3), \tilde{g}^{-1}(\nu) \otimes \tilde{g}^{-1}(\mu) \otimes a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2 (формула Пуассона I) и пп. 5.5.5.

5.9.2. Пусть $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \rightarrow 0$ – допустимая тройка полных C_2 -пространств над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $E_i = (I_i, F_i, V_i)$, $1 \leq i \leq 3$. По определению существуют такие сохраняющие порядок функции:

- (i) $\gamma: I_2 \rightarrow I_3$, что $\beta(F_2(i)) = F_3(\gamma(i))$ для любого $i \in I_2$;
- (ii) $\varepsilon: I_2 \rightarrow I_1$, что $F_2(i) \cap V_1 = F_1(\varepsilon(i))$ для любого $i \in I_2$.

Если E_1 – (cfC_2) -пространство, то, используя замечание 12, имеем

$$\mathcal{D}(E_1) = \varprojlim_{i \geq j \in I_1} \mathcal{D}(F_1(i)/F_1(j));$$

$F_1(i)/F_1(j)$ – компактное C_1 -пространство (для любых $i \geq j \in I_1$). Следовательно, $1 \in \mathcal{D}(F_1(i)/F_1(j))$. Переходя к проективным пределам, получаем, что в этом случае корректно определен элемент

$$1 \in \mathcal{D}(E_1). \quad (166)$$

Если E_3 – (dfC_2) -пространство, то, используя замечание 12, имеем

$$\mathcal{D}(E_3) = \varprojlim_{i \geq j \in I_3} \mathcal{D}(F_3(i)/F_3(j));$$

$F_3(i)/F_3(j)$ – дискретное C_1 -пространство (для любых $i \geq j \in I_3$). Следовательно, $\delta_0 \in \mathcal{D}(F_3(i)/F_3(j))$, где $\delta_0(0) = 1$. Переходя к проективным пределам, получаем в этом случае корректно определенный элемент

$$\delta_0 \in \mathcal{D}(E_3). \quad (167)$$

Заметим, что

$$\mathbf{F}(1) = \delta_0, \quad \mathbf{F}(\delta_0) = 1 \quad (168)$$

при отображениях

$$\mathbf{F}: \mathcal{D}(E_1) \rightarrow \mathcal{D}(\check{E}_1), \quad \mathbf{F}: \mathcal{D}(E_3) \rightarrow \mathcal{D}(\check{E}_3).$$

Предположим теперь, что одновременно E_1 – (cfC_2) -пространство, а E_3 – (dfC_2) -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда элемент

$$\delta_{E_1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_*(1) \in \mathcal{D}_{F_2(o)}(E_2) \quad (169)$$

корректно определен и верно следующее утверждение.

ЛЕММА 7. *Имеет место равенство $\delta_{E_1} = \beta^*(\delta_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из конструкций и соответствующих утверждений для следующих допустимых троек C_1 -пространств (для любых $i \geq j \in I_2$):

$$0 \rightarrow \frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))} \rightarrow \frac{F_2(i)}{F_2(j)} \rightarrow \frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))} \rightarrow 0,$$

где $\frac{F_1(\varepsilon(i))}{F_1(\varepsilon(j))}$ – компактное C_1 -пространство, а $\frac{F_3(\gamma(i))}{F_3(\gamma(j))}$ – дискретное C_1 -пространство.

Теперь мы можем получить вторую двумерную формулу Пуассона.

ТЕОРЕМА 3 (формула Пуассона II). *Пусть E_1 – $(cf C_2)$ -пространство и E_3 – $(df C_2)$ -пространство. Пусть $o \in I_2$. Тогда*

$$\mathbf{F}(\delta_{E_1}) = \delta_{\check{E}_3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 7, формул (168) и предложения 38 о связи прямых и обратных образов и двумерного преобразования Фурье.

Для любой допустимой тройки C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha} E_2 \xrightarrow{\beta} E_3 \longrightarrow 0$$

и для любого автоморфизма $g \in \text{Aut}_{C_2}(E_2)$ имеем допустимую тройку C_2 -пространств

$$0 \longrightarrow g\widetilde{E}_1 \xrightarrow{g(\alpha)} g\widetilde{E}_2 \xrightarrow{g(\beta)} g\widetilde{E}_3 \longrightarrow 0,$$

где $\widetilde{E}_i$ – максимальное C_2 -пространство, которое доминирует C_2 -пространство E_i , $1 \leq i \leq 3$ (см. шп. 5.5.2), $g\widetilde{E}_2 = \widetilde{E}_2$, $g\widetilde{E}_3 = \widetilde{E}_3/g\widetilde{E}_1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любого $g \in \text{Aut}_{C_2}(E_2)$*

$$\mathbf{F}(\delta_{gE_1}) = \delta_{\check{g}^{-1}(\check{E}_3)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 3 (формула Пуассона II) и шп. 5.5.5.

Список литературы

1. *Алгебраическая теория чисел*, Сб. статей, Мир, М., 1969; пер. с англ.: *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society with the support of the International Mathematical Union, eds. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Academic Press, London, 1967.
2. А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: A. Weil, *Basic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **144**, Springer-Verlag, New York, 1967.
3. А. А. Бейлинсон, “Вычеты и адели”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 44–45; англ. пер.: A. A. Beilinson, “Residues and adeles”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 34–35.
4. A. Huber, “On the Parshin–Beilinson adèles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61** (1991), 249–273.

5. А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:4 (1976), 736–773; англ. пер.: А. Н. Parshin, “On the arithmetic of two-dimensional schemes I. Distributions and residues”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:4 (1976), 695–729.
6. Т. Fimmel, А. N. Parshin, *Introduction to the higher adelic theory*, Preprint, 1999.
7. D. V. Osipov, “ n -dimensional local fields and adèles on n -dimensional schemes”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **347**, eds. N. Young et al., Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 131–164.
8. А. N. Parshin, *Lectures in University Paris-Nord*, 1995–96.
9. А. N. Parshin, “Higher-dimensional local fields and L -functions”, *Invitation to higher local fields* (Münster, 1999), *Geom. Topol. Monogr.*, **3**, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 2000, 199–213; [arXiv:math.AG/0012151](#).
10. А. N. Parshin, “Chern classes, adèles and L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 174–192.
11. F. Bruhat, “Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes p -adiques”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 43–75.
12. D. Osipov, “Adèles on n -dimensional schemes and categories C_n ”, *Internat. J. Math.*, **18**:3 (2007), 269–279; [arXiv:math.AG/0509189](#).
13. V. G. Kac, D. H. Peterson, “Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **78**:6 (1981), 3308–3312.
14. M. M. Kapranov, *Semiinfinite symmetric powers*, [arXiv:math.QA/0107089](#).
15. А. N. Parshin, *Harmonic analysis on adelic spaces and local fields*, Mathematisches forschungsinstitut Oberwolfach, Report No. 43/2005, Arakelov Geometry, 2471–2474.
16. S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **27**, Amer. Math. Soc., New York, 1942.
17. D. Gaitsgory, D. Kazhdan, “Representations of algebraic groups over a 2-dimensional local field”, *Geom. Funct. Anal.*, **14**:3 (2004), 535–574; [arXiv:math.RT/0302.174](#).
18. M. M. Kapranov, “Double affine Hecke algebras and 2-dimensional local fields”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:1 (2001), 239–262; [arXiv:math.AG/9812021](#).
19. А. Н. Паршин, “Векторные расслоения и арифметические группы. I”, Тр. МИАН, **208**, Наука, М., 1995, 240–265; англ. пер.: А. N. Parshin, “Vector bundles and arithmetical groups. I”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **208**:10 (1995), 212–233; [arXiv:math.AG/9605001](#).
20. Д. В. Осипов, “Центральные расширения и законы взаимности на алгебраических поверхностях”, *Матем. сб.*, **196**:10 (2005), 111–136; англ. пер.: D. V. Osipov, “Central extensions and reciprocity laws on algebraic surfaces”, *Sb. Math.*, **196**:10 (2005), 1503–1527; [arXiv:math.NT/0501155](#).

Д. В. Осипов (D. V. OSIPOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

20.06.2007

А. Н. Паршин (A. N. PARSHIN)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: parshin@mi.ras.ru