Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, А. В. Малютин, Граница группы кос и нормальная форма Маркова–Ивановского, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 105–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:34:50

УДК 514.15+519.216

А. М. Вершик, А. В. Малютин

Граница группы кос и нормальная форма Маркова–Ивановского

Границы случайных блужданий (в частности, граница Пуассона–Фюрстенберга, кратко – ПФ) для обширного класса групп описываются в терминах гиперболической границы специальной нормальной свободной подгруппы рассматриваемой группы. Доказывается сходимость почти всякой траектории случайного блуждания к точке этой границы. Применение этих результатов к группам кос позволяет доказать стабильность (в смысле работы [6]) нормальной формы слов, введенной Марковым–Ивановским в [12] для любых невырожденных мер, задающих блуждание.

Библиография: 21 наименование.

Введение

0.1. Случайные блуждания на группах и их границы. Настоящая работа посвящена изучению границ случайных блужданий на группах из широкого класса, основными примерами которых служат группы кос Артина. По преимуществу нас интересует проблема *алгебраического описания границ*, оставшаяся на протяжении последних лет открытой. Мы конструируем и описываем границы блужданий для таких групп непосредственно в терминах самой группы, т. е. в терминах образующих и соотношений. Мы не доказываем, что найденные границы максимальны (хотя для групп кос это следует из сравнения наших результатов с результатами из работ [1], [2]), поэтому общая программа алгебраизации описания максимальных границ не может считаться завершенной. Однако предлагаемый метод, соединяющий подход Фюрстенберга к изучению границ и идею применения стабильных нормальных форм в группе, открывает новые возможности для описания границ.

Задача о вычислении границ блужданий на счетных группах (более общо – графах) заключается в следующем: представим себе, что мы случайно (в соответствии с некоторым распределением на группе, например на ее образующих) умножаем имеющийся элемент группы (например, справа) на образующую; как описать те характеристики растущего произведения случайных элементов, которые в пределе стабилизируются? Для группы кос это особенно наглядно: мы случайно выбираем элементарные транспозиции нитей; какие свойства¹ косы “выживают на бесконечности”, т. е. стабилизируются? А priori даже не ясно, есть ли нетривиальные стабильные свойства (т. е. нетривиальна ли граница).

¹Такие стабилизирующиеся характеристики или свойства называются *стабильными функционалами*.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-00379_а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-2460.2008.1112) и CRDF RUM-2622ST-04.

Существуют различные подходы к изучению теории границ случайного блуждания на группах. При одном подходе можно говорить о вероятностных границах, например о *границе-выход* марковского процесса, соответствующего случайному блужданию (иногда ее называют *границей Пуассона*). Эта граница определена как пространство с мерой, на ней нет канонической метрики или топологии; для случайных блужданий на группах она определяется как факторпространство пространства траекторий марковского процесса по хвостовому отношению эквивалентности, что не дает прямого способа ее описания. Особенно трудной при поиске описания границы-выход оказывается проверка того, что пространство-претендент изоморфно всей границе, а не некоторому ее факторпространству; до сих пор это сделано лишь для немногих групп, и одной из трудностей является отсутствие на искомой границе подходящей топологии.

Другой подход, основы которого заложил Х. Фюрстенберг [3]–[5], наоборот, начинается с выбора топологического или метрического G -пространства, имеющего квазиинвариантную, стационарную относительно меры на группе G меру, при этом группа действует специальным образом: действие группы удовлетворяет условию μ -проксимальности или *универсальной проксимальности* (см. § 2). Эти границы называются μ -границами Фюрстенберга. Такой подход оказался плодотворным и завоевал популярность, особенно при рассмотрении классических групп и решеток. Как пространства с мерой границы Фюрстенберга являются факторпространствами границы-выход, а те μ -границы, которые изоморфны (как пространства с мерами) границе-выход, называются *максимальными*². В обзоре [6] предлагалось называть максимальной μ -границу блуждания *границей Пуассона–Фюрстенберга* (ПФ-границей), что мы и делаем далее. В классических примерах эта граница описывается как граница некоторой естественной компактификации пространства состояний (т. е. группы). Таким образом, подход Фюрстенберга (см. [5]) дает описание границы блуждания на группе в виде некоторого G -пространства и является (теоретико-мерным) вариантом более громоздкой теории (топологических) границ Мартина. Однако слабым местом по-прежнему является недостаточная конструктивность построения μ -границ и отсутствие прямой связи с траекториями марковского процесса, в частности невозможность связать содержательную сходимостъ траекторий с топологией, имеющейся на границе.

Еще один подход (он описан в работе [6]) состоит в том, чтобы строить границу как предельное пространство для нормальных форм случайных элементов группы. Точнее, ищется в том или ином виде, например в виде слов в алфавите из образующих группы или геометрических конфигураций (“обобщенных слов”), нормальная форма элементов группы (или элементов G -пространства этой группы) такая, что для почти всякой (п. в.) траектории блуждания имеет место *сходимость* нормальных форм к некоторой предельной конфигурации или бесконечному слову. Соответствующее пространство бесконечных

²У границы-выход может быть несколько максимальных реализаций в виде метрических пространств. Примером здесь может служить как раз группа кос: с одной стороны, ПФ-граница группы $\text{kos } B_n \pmod{0}$ -изоморфна границе Терстона пространства Тайхмюллера сферы с $n + 1$ проколами (см. [1], [2]), которая гомеоморфна сфере размерности $2n - 5$, с другой – ПФ-границу блуждания на B_n можно реализовать в виде окружности, а в настоящей работе мы описываем эту же границу в виде гиперболической границы свободной группы ранга $n - 1$.

конфигураций и следует считать границей. Примерами здесь служат неабелевы свободные группы, когда стабильной нормальной формой являются приведенные слова, или локально свободные группы, когда в качестве стабильных форм рассматриваются так называемые груды [7], [8]. Более сложный пример – интерпретация границ метабелевых групп и некоторых сплетений (см. [6]), в них в качестве нормальной формы выступает определенного типа конфигурация путей на решетках; стабилизация означает сходимость почти всех последовательностей таких конфигураций к некоторым бесконечным конфигурациям. При таком подходе связь траекторий марковского процесса и топологии в пространстве слов, конфигураций, заложена в определении стабилизации. Трудность, однако, состоит в определении действия группы на предельном пространстве и установлении того, что полученное пространство есть граница (или даже вся ПФ-граница). Основной результат настоящей работы показывает, как в рассматриваемых случаях можно соединить этот подход с подходом Фюрстенберга и отождествить пространство предельных нормальных форм с ПФ-границей.

До сих пор никаких достаточно универсальных средств для доказательства максимальной заданной границы не найдено и этот вопрос остается центральным. Имеется энтропийный критерий Каймановича [9], вытекающий, в основном, из глобального энтропийного критерия тривиальности границы [10], [11], но его проверка в конкретных ситуациях представляется сложной (необходимо найти подходящую метрику и т. д.). Другой план, использующий оценки скорости стабилизации нормальной формы (см. [6]), пока остается незаконченным. Критерий Каймановича в случае групп классов отображений позволил в конце концов доказать (см. [1], [2]), что максимальная граница этих групп реализуется в виде границы Терстона пространства Тайхмюллера. Довольно сложное комбинирование, которое мы здесь не проводим, этого результата с нашими дает максимальность границы и в нашем описании, но, как сказано выше, это слишком не прямой путь, и потому требуется дальнейшая работа, чтобы сделать замкнутой всю алгебраическую теорию границ на таких группах.

0.2. Формулировка результатов работы и геометрическая иллюстрация стабилизации. Результаты статьи можно описать следующим образом. Для групп, имеющих свободную неабелеву нормальную подгруппу, доказывается, что обычная (гиперболическая) граница свободной подгруппы есть μ -граница Фюрстенберга всей группы³ (теорема 0.1). Далее, для некоторого более узкого класса групп, описанного ниже, удается доказать, что проекция почти всякой траектории случайного блуждания на нормальный делитель сходится в словарной (гиперболической) метрике к некоторой точке найденной границы (теорема 0.2). Наконец, обращаясь к группе кос и применяя эту схему к ее специальной свободной подгруппе, мы получаем из теоремы 0.2 теорему о том, что нормальная форма Маркова–Ивановского в группе кос стабильна (теорема 0.3). Подробнее и в точных формулировках эти результаты имеют следующий вид.

³На самом деле, в случае группы кос, если мера μ имеет конечный первый момент, эта μ -граница является максимальной (т. е. ПФ-границей). Однако этот факт, как уже упоминалось, следует из сравнения с соответствующими результатами работ [1], [2], имеющих совсем иной характер; мы полагаем, что наш подход приведет к прямому доказательству максимальной границы. По-видимому, это имеет место всегда, когда естественное вложение всей группы в группу автоморфизмов нормальной подгруппы мономорфно.

Описание μ -границы для групп с нормальной свободной подгруппой. Мы рассматриваем счетную группу G с нормальной свободной неабелевой подгруппой F . Поскольку произвольный автоморфизм словесно-гиперболической группы (в частности, свободной группы) продолжается до гомеоморфизма ее гиперболической компактификации, действие группы G на подгруппе F автоморфизмами сопряжения дает действие (гомеоморфизмами) группы G на гиперболической границе ∂F подгруппы F .

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть G – счетная группа, $F \subset G$ – ее нормальная свободная неабелева подгруппа. Пусть μ – допустимая мера на G . Тогда на ∂F как на G -пространстве существует единственная μ -стационарная мера ν и пара $(\partial F, \nu)$ является μ -границей по Фюрстенбергу пары (G, μ) . Мера ν является при этом непрерывной.

В терминах теории Фюрстенберга (см. § 2) теорема 0.1 утверждает, что ∂F есть универсально-проксимальное G -пространство, т. е. μ -проксимальное G -пространство для любой допустимой меры μ . То, что пара $(\partial F, \nu)$ является μ -границей пары (G, μ) , означает по определению, что для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого случайного μ -блуждания последовательность мер $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к некоторой одноточечной мере $\delta_{w(\tau)}$, где $w(\tau) \in \partial F$.

Сходимость траекторий блуждания для полупрямых произведений. В общем случае теоремы 0.1 вопрос о *поточечной сходимости*, т. е. о том, найдется ли точка $f \in F \cup \partial F$ такая, что для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ последовательность $\{\tau_i(f)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к описанной выше точке $w(\tau) \in \partial F$, остается открытым, но при определенных дополнительных условиях, налагаемых на структуру группы, установить поточечную сходимость удается.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть счетная группа H с нормальной свободной неабелевой подгруппой F представима в виде полупрямого произведения подгруппы F и некоторой подгруппы A (т. е. $H = F \rtimes A$). Пусть, кроме того, в F найдется нетривиальный элемент, неподвижный по отношению к действию подгруппы A . Тогда для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} = \{x_i \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ (где $x_i \in F$ и $\alpha_i \in A$) правого случайного блуждания с произвольным допустимым распределением μ последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ элементов из F сходится в гиперболической компактификации $F \cup \partial F$ к точке $w(\tau)$ границы ∂F .

Стабильность формы Маркова–Ивановского для группы кос. Проиллюстрировать вышеприведенные результаты можно на примере группы кос Артина B_n (или, чуть более общо, на примере групп классов отображений поверхностей с краем). Как хорошо известно, группа крашенных кос P_n (имеющая в B_n конечный индекс) есть полупрямое произведение нормального делителя (свободной группы F_{n-1} с $n-1$ образующими) и подгруппы крашенных кос P_{n-1} . Применяя к этому разложению теоремы 0.1 и 0.2, мы получаем, что гиперболическая граница ∂F_{n-1} есть μ -граница P_n (на самом деле – максимальная) и что, проектируя траектории блуждания на группе P_n в подгруппу F_{n-1} , мы почти наверное (п. н.) получаем сходящиеся (в гиперболической метрике) к точкам из ∂F_{n-1} последовательности. Поскольку подгруппа P_n имеет в группе кос B_n конечный индекс, результат переносится на всю B_n . Если теперь вспомнить определение классической нормальной формы Маркова–Ивановского [12], которое основано на представлении P_n в виде полупрямого произведения $F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ (более подробно см. § 1), то из доказанного следует

ТЕОРЕМА 0.3. *В группе кос Артина нормальная форма Маркова–Ивановского является стабильной (по отношению к случайному блужданию с любым допустимым распределением).*

ПРИМЕР 0.1. Приведем пример начала траектории правого случайного блуждания на группе крашенных кос P_4 с равномерным распределением на (описанных в §1) образующих s_{ji} и обратных к ним: k -й элемент траектории обозначен через γ_k ; справа выписаны нормальные формы Маркова–Ивановского $\mathfrak{I}(\gamma_k)$ этих элементов. На приведенном куске траектории форма быстро стабилизируется. Вообще говоря, для п.в. траектории длина формы Маркова–Ивановского элемента траектории зависит от номера этого элемента экспоненциально; также с экспоненциальной скоростью растет и длина стабилизировавшегося куска формы:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 1, & \mathfrak{I}(\gamma_0) &= 1, \\
 \gamma_1 &= \gamma_0 \cdot s_{31}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_1) &= s_{31}^{-1}, \\
 \gamma_2 &= \gamma_1 \cdot s_{41}, & \mathfrak{I}(\gamma_2) &= s_{43}s_{41}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}, \\
 \gamma_3 &= \gamma_2 \cdot s_{43}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_3) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}, \\
 \gamma_4 &= \gamma_3 \cdot s_{32}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_4) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}^{-1}, \\
 \gamma_5 &= \gamma_4 \cdot s_{42}, & \mathfrak{I}(\gamma_5) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}^{-1}, \\
 \gamma_6 &= \gamma_5 \cdot s_{21}, & \mathfrak{I}(\gamma_6) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}^{-1}s_{21}, \\
 \gamma_7 &= \gamma_6 \cdot s_{32}, & \mathfrak{I}(\gamma_7) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}s_{31}s_{21}, \\
 \gamma_8 &= \gamma_7 \cdot s_{41}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_8) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{41}^{-1}s_{42}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{41}s_{43}^{-1}s_{31}^{-1}s_{32}^{-1} \dots, \\
 \gamma_9 &= \gamma_8 \cdot s_{42}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_9) &= s_{43}s_{41}s_{41}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{43}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}^{-1}s_{41}^{-1}s_{42}s_{41} \dots.
 \end{aligned}$$

При определении формы Маркова–Ивановского представление $P_m = F_{m-1} \rtimes P_{m-1}$ последовательно применяется к группам крашенных кос всё меньших индексов, и в результате мы получаем представление P_n в виде произведения $n - 1$ своих свободных подгрупп: любая коса γ из P_n является произведением $n - 1$ элементов из этих подгрупп, а форма Маркова–Ивановского $\mathfrak{I}(\gamma)$ косы γ состоит из $n - 1$ частей, соответствующих этим элементам. (В случае P_4 речь идет о трех частях формы: первая включает символы-образующие s_{43} , s_{42} , s_{41}

Рис. 1. Крашенная коса $s_{31}^{-1} s_{41} s_{43}^{-1} s_{32}^{-1} s_{42} s_{21} s_{32}$ из P_4 и ее нормальная форма Маркова–Ивановского в обычном геометрическом представлении

и обратные к ним, вторая – образующие s_{32} , s_{31} и обратные, третья есть степень образующей s_{21} ; см. пример 0.1.) При случайном блуждании длина каждой из этих частей (кроме последней – циклической) п. н. стремится к бесконечности, так что стабилизация формы есть стабилизация ее первой части. Интересно, что при блуждании стабилизация происходит и в остальных (кроме, конечно, последней) частях формы, но в пределе всю информацию несет в себе уже первая часть.

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 1, & \mathfrak{I}(\gamma_0) &= \begin{array}{c} 1 : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_1 &= \gamma_0 \cdot s_{31}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_1) &= \begin{array}{c} s_{31}^{-1} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_2 &= \gamma_1 \cdot s_{41}, & \mathfrak{I}(\gamma_2) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_3 &= \gamma_2 \cdot s_{43}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_3) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_4 &= \gamma_3 \cdot s_{32}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_4) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32}^{-1} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_5 &= \gamma_4 \cdot s_{42}, & \mathfrak{I}(\gamma_5) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32}^{-1} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_6 &= \gamma_5 \cdot s_{21}, & \mathfrak{I}(\gamma_6) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32}^{-1} s_{21} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_7 &= \gamma_6 \cdot s_{32}, & \mathfrak{I}(\gamma_7) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32} s_{31} s_{21} : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_8 &= \gamma_7 \cdot s_{41}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_8) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{41}^{-1} s_{42}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{41} s_{43}^{-1} s_{31}^{-1} s_{32}^{-1} \dots : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
 \gamma_9 &= \gamma_8 \cdot s_{42}^{-1}, & \mathfrak{I}(\gamma_9) &= \begin{array}{c} s_{43} s_{41} s_{41} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42} s_{43}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42}^{-1} s_{41}^{-1} s_{42}^{-1} s_{41} s_{42} s_{41} \dots : \\ \hline \hline \hline \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Нормальные формы элементов траектории в геометрическом описании

В обычном геометрическом представлении кос в виде набора из переплетающихся нитей форме Маркова–Ивановского соответствует такое переплетение нитей, когда сначала одна нить обвивается вокруг остальных, которые в это время неподвижны (первая часть формы), затем движется только вторая нить (вторая часть формы) и т. д. (рис. 1); образующей s_{ji} на геометрическом уровне соответствует двойной перехлест i -й и j -й нитей косы.

На рис. 2 приведен геометрический вид для нормальных форм элементов из примера 0.1. В такой геометрической интерпретации стабилизация формы Маркова–Ивановского наблюдаема как стабилизация положения первой нити.

0.3. Следствия о стабильности функционалов в группе кос. Группа кос обладает значительным количеством различных как алгебраических, так и геометрических представлений. Форма Маркова–Ивановского удачным образом связана с некоторыми из этих представлений, поэтому полученные нами результаты в качестве следствия дают возможность найти стабильные функционалы в терминах этих представлений. (Описывая здесь эти интерпретации стабильности, будем для краткости говорить лишь о группе крашенных кос.)

Представление Артина. Из наших результатов следует⁴, что стабилизацию при блуждании на группе кос можно наблюдать через *представление Артина* – представление кос из B_n автоморфизмами свободной группы F_n с образующими $x_1, \dots, x_n$. Как известно, в представлении Артина приведенная запись образа $\gamma(x_i)$ образующей x_i под действием автоморфизма, соответствующего крашеной косе γ , имеет вид $A_i(\gamma)x_iA_i^{-1}(\gamma)$ (здесь $A_i(\gamma)$ – приведенное слово в образующих $x_1, \dots, x_n$ и обратных к ним). Оказывается, первые (слева) символы нормальной формы Маркова–Ивановского косы γ однозначно соответствуют последним (справа) символам приведенного слова $A_n(\gamma)$, так что (при правом блуждании и левом действии P_n на F_n) стабильность формы (слева) эквивалентна стабилизации (справа) последовательности слов $A_n(\gamma_k)$ (или, что то же самое, обычной стабилизации слева слов $A_n^{-1}(\gamma_k)$) для почти всякой траектории $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. Из соображений симметрии ясно, что для п. в. траектории стабилизироваться (справа) будет и последовательность слов $A_i(\gamma_k)$ при произвольном i .

СЛЕДСТВИЕ 0.1. Пусть

$$P_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$$

– стандартное представление Артина группы крашенных кос P_n автоморфизмами свободной группы F_n с образующими $x_1, \dots, x_n$, так что для любой косы $\gamma \in P_n$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\gamma(x_i) = A_i(\gamma)x_iA_i^{-1}(\gamma).$$

Тогда для п. в. траектории $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ правого случайного блуждания на P_n с допустимым распределением μ последовательность слов $A_i^{-1}(\gamma_k)$ сходится к некоторому бесконечному вправо слову в алфавите из образующих $x_1, \dots, x_n$ и обратных к ним.

⁴Заметим, что при использованном нами разложении в полупрямое произведение $P_n = F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ действие подгруппы P_{n-1} на свободной подгруппе F_{n-1} представляет собой как раз действие Артина “на единицу меньшего ранга”.

ПРИМЕР 0.2. Приведем элементы $\gamma_k(x_4)$ для части рассматриваемой выше траектории блуждания на P_4 :

$$\begin{aligned}\gamma_0(x_4) &= x_4, \\ \gamma_1(x_4) &= x_4, \\ \gamma_2(x_4) &= x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_4, \\ \gamma_3(x_4) &= x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2, \\ \gamma_4(x_4) &= \gamma_3(s_{32}^{-1}(x_4)) = \gamma_3(x_4), \\ \gamma_5(x_4) &= \cdots x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \cdots, \\ \gamma_6(x_4) &= \cdots x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_4x_2^{-1}x_1x_2x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \cdots.\end{aligned}$$

Заметим, что в представлении Артина стабилизацию можно наблюдать и другими способами. К примеру, такой функционал, как отношение количества символов x_l к количеству символов x_m в слове $A_i(\gamma_k)$, является стабильным по отношению к случайному блужданию. Заметим также, что соответствующая траектории последовательность элементов $\gamma_k(x_i)$ в F_n , как правило, не сходится (в обычном смысле гиперболической компактификации); однако если рассмотреть факторпространство множества элементов группы F_n по левому действию элемента $x_1x_2 \cdots x_n$, то образ последовательности $\gamma_k(x_i)$ в этом пространстве для п. в. траектории уже будет сходиться.

Представление группы кос в виде группы классов отображений диска. Следующая интерпретация – представление группы кос как группы классов отображений проколотого диска. В этой интерпретации действие группы кос на фундаментальной группе диска дает как раз представление Артина, а элементы свободной фундаментальной группы вида $\gamma(x_i) = A_i(\gamma)x_iA_i^{-1}(\gamma)$ удобно представлять в форме гомотопических классов (незамкнутых) кривых, один конец которых закреплён на границе диска, а второй уходит в прокол. Удобно также ввести на проколотом диске гиперболическую метрику, чтобы каждый такой гомотопический класс кривых был представлен выходящей из прокола геодезической (рис. 3), и рассматривать действие группы кос на множестве таких геодезических. Здесь вышеописанная стабилизация слева последовательности слов $A_n^{-1}(\gamma_k)$ для траектории $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ трансформируется в стабилизацию последовательности геодезических (стабилизируется поведение геодезической при выходе из прокола – см. рис. 3).

Мы установили, что, изучая представление группы кос в виде группы классов отображений диска, можно в конце концов получить $(\text{mod } 0)$ -изоморфизм между ПФ-границей группы кос в нашем описании (граница свободной группы) и ПФ-границей группы кос в описании из [1], [2] (граница Терстона пространства Тайхмюллера проколотой сферы).

Представление группы кос в виде группы автоморфизмов окружности. Продолжая предыдущую конструкцию, где мы рассматривали снабженный гиперболической метрикой проколотый диск, можно определить и рассмотреть действие группы крашенных кос на множестве всех ориентированных геодезических, выходящих из выбранного на диске прокола. Это множество геодезических естественным образом снабжено топологией окружности. Таким образом, группа кос превращается в группу, действующую на окружности, а наши результаты о стабильности дают соответствующие следствия о том, что эта

 Рис. 3. Действие кос на геодезической $\dot{x}_4$

окружность является μ -границей группы крашенных кос⁵ (в силу теоремы 0.1), и о том, что под действием элементов п. в. траектории блуждания всякая точка окружности, соответствующая оканчивающейся на крае геодезической, будет давать сходящуюся последовательность (в силу теоремы 0.2).

Используя проколотый диск с гиперболической метрикой, действие на окружности можно определить не только для группы крашенных кос, но и для всей группы кос, для этого достаточно рассмотреть действие группы кос на

⁵Соответствующая стационарная мера будет сосредоточена на подмножестве окружности, состоящем из тех точек, которым соответствуют бесконечные простые (т. е. не имеющие самопересечений) геодезические.

(обладающем топологией окружности) множестве тех ориентированных геодезических, которые начинаются на крае проколотого диска, образуя с ним прямой угол. Для этого действия теоремы 0.1 и 0.2 дают следствия, аналогичные приведенным выше.

0.4. Другие нормальные формы в группе кос. Кроме формы Маркова–Ивановского в группе кос существуют и другие стабильные нормальные формы, а также давно известные формы, вопрос о стабильности для которых остается открытым. Обширное семейство нормальных форм геометрического характера описано для группы кос в [13]; из стабильности формы Маркова–Ивановского следует, что и эти формы стабильны. Нормальная форма, геометрически родственная формам из [13], была найдена Г. Брессо [14]. Форма Брессо не является стабильной слева при правом блуждании, но ее можно преобразовать в стабильную, переместив слева направо ту ее часть, которая отвечает за центр группы (можно показать, что эта часть оказывается в левом конце формы Брессо). Стабильность такой преобразованной формы Брессо также можно вывести из результатов настоящей работы.

Были попытки найти стабильную форму в записи⁶ Деорнуа (т. е. нормальную форму, все слова которой были бы σ -положительны или σ -отрицательны в смысле Деорнуа [15]). По просьбе авторов профессор П. Деорнуа проверил, что приведение посредством алгоритма “сокращения ручек” случайной последовательности слов в образующих Артина к последовательности слов в записи Деорнуа дает нестабильную последовательность. Более того, не так давно нам удалось показать, что никакая нормальная форма в записи Деорнуа при блуждании с симметричным распределением стабильной быть не может (доказательство этого факта выходит за рамки настоящей работы). Вместе с тем, нам известны стабильные формы со словами, состоящими из двух частей, одна из которых находится в записи Деорнуа, а вторая в некотором смысле элементарна.

Для таких нормальных форм группы кос, как форма Терстона [16], форма Бирман–Ко–Ли [17], форма Гарсайда и прочие (см. [18]), вопрос о стабильности если не самой формы, то близких к ней форм, получающихся перестановкой ее частей или другими простыми трансформациями, остается открытым.

§ 1. Группа кос и нормальная форма Маркова–Ивановского. Определения

В фундаментальной работе А. А. Маркова [12] приводится нормальная форма для элементов группы кос. Она основана на нормальном ряде группы крашенных кос, последовательные факторы в котором есть свободные группы убывающих рангов. Первая свободная группа есть *специальная* свободная подгруппа группы кос, а вся группа крашенных кос есть полупрямое произведение этой группы и группы крашенных кос на единицу меньшего ранга. Таким образом, по индукции мы получаем нормальную форму в группе крашенных кос, состоящую из последовательности элементов свободных групп с убывающими рангами. Теорему об этой нормальной форме, как и теорему о нормальном ряде, А. А. Марков снабжает в скобках фамилией А. Ивановского. К сожалению, никаких ссылок и указаний в работе [12] и других обзорах А. А. Маркова

⁶Запись Деорнуа не является нормальной формой, поскольку коса может быть представлена несколькими различными (скажем, σ -положительными) словами.

на А. Ивановского нет⁷. Этот нормальный ряд фигурирует и в последующих работах по группам кос, но, по-видимому, впервые он появился в работе [12], и поэтому мы предпочли термин “нормальная форма Маркова–Ивановского”.

Для целого числа $n \geq 2$ группа кос Артина ранга n определяется копредставлением

$$B_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

Рассмотрим в B_n семейство элементов $\{s_{ji}, 1 \leq i < j \leq n\}$, где

$$s_{ji} := \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

При $m \in \{2, \dots, n\}$ элементы набора $\{s_{ji}, 1 \leq i < j \leq m\}$ порождают в B_n подгруппу крашенных кос P_m . Множество $\{s_{mi}, 1 \leq i < m\}$ порождает подгруппу F_{m-1} , изоморфную свободной группе ранга $m - 1$, которая является нормальной подгруппой в P_m . Подгруппа $P_2 = F_1$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Для каждого $k \in \{3, \dots, n\}$ подгруппа P_k является полупрямым произведением подгрупп F_{k-1} и P_{k-1} :

$$P_k = F_{k-1} \rtimes P_{k-1}.$$

Таким образом,

$$P_n = F_{n-1} \rtimes (F_{n-2} \rtimes (F_{n-3} \rtimes (F_{n-4} \rtimes \cdots \rtimes F_1))),$$

и произвольный элемент γ группы крашенных кос P_n единственным способом записывается в виде

$$\gamma = \gamma_{n-1} \gamma_{n-2} \cdots \gamma_2 \gamma_1, \quad \gamma_i \in F_i.$$

Нормальной формой Маркова–Ивановского в группе крашенных кос P_n мы называем отображение

$$\mathfrak{I}_P: \gamma \mapsto V_{n-1} \cdots V_1,$$

где V_i – приведенная запись элемента $\gamma_i \in F_i$ в образующих $\{s_{i+1,j}, 1 \leq j < i + 1\}$ и обратных к ним.

Группа P_n является в B_n нормальной подгруппой индекса $n!$. Пусть $\Pi_n \subset B_n$ – произвольный набор представителей классов смежности нормальной подгруппы P_n в B_n . Тогда произвольный элемент $\beta \in B_n$ единственным способом записывается в виде $\gamma_\beta \pi_\beta$, где $\gamma_\beta \in P_n$ и $\pi_\beta \in \Pi_n$. Нормальной формой Маркова–Ивановского в группе кос B_n мы называем отображение⁸

$$\mathfrak{I}_B: \beta \mapsto \mathfrak{I}_P(\gamma_\beta) \pi_\beta.$$

⁷А. Ивановский – аспирант А. А. Маркова, погибший во время Великой Отечественной войны.

⁸В работе [12] при определении нормальной формы А. А. Марков фиксирует некоторый специальный набор представителей классов смежности подгруппы P_n в B_n . В нашем случае выбор представителей классов смежности значения не имеет. Кроме того, в [12] используется отличный от принятого выше порядок для “компонент” нормальной формы: рассматривается запись косы $\beta \in B_n$ в виде

$$\mathfrak{I}'_B(\beta) = \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta'_{n-2} \beta'_{n-1} \pi'_\beta, \quad \beta'_i \in F_i, \quad \pi'_\beta \in \Pi'_n.$$

Выбор порядка следования компонент в нормальной форме Маркова–Ивановского во многих вопросах, очевидно, не имеет сколь-нибудь существенного значения, в [12] порядок устанавливается, по-видимому, из соображений удобства записи, а, скажем, в [19] форма Маркова–Ивановского описывается с использованием именно выбранного нами порядка. В контексте стабильности выбор порядка имеет значение: нормальная форма $\mathfrak{I}_B$ является стабильной при правом блуждании; нормальная форма $\mathfrak{I}'_B$ стабильной не является (ни при правом, ни при левом блуждании).

§ 2. Случайные блуждания на группе. Определения

2.1. Случайные блуждания на группе. Пусть G – счетная группа, μ – вероятностная мера на G . Мера μ называется *допустимой*, если ее носитель порождает G как полугруппу. *Правым случайным блужданием на группе G с распределением μ* (или, короче, *μ -блужданием*) называется марковский процесс с пространством состояний G , переходной вероятностью $P(g, h) = \mu(g^{-1}h)$ и начальным состоянием в единице группы. Реализации этого процесса называются *траекториями* блуждания. Соответствующую процессу марковскую меру на пространстве траекторий $G^{\mathbb{Z}_+}$ будем обозначать через P_μ .

2.2. Стабильные нормальные формы [6]. Пусть S – некоторое множество элементов группы G , порождающее G как полугруппу. Пусть S^* – множество всех конечных слов в алфавите, символами которого являются элементы множества S . *Нормальной формой* в группе G называют отображение $\mathfrak{N}: G \rightarrow S^*$ такое, что $\text{pr} \circ \mathfrak{N} = \text{id}_G$, где pr – отображение естественной проекции из S^* в G , переводящее слово $w_1 w_2 \dots w_k \in S^*$ в элемент $w_1 \cdot w_2 \cdots w_k \in G$. Говорят, что последовательность $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ слов из S^* *сходится на бесконечности*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для каждого $j > N$ длина слова V_j превышает k и начальные подслова длины k у слов V_j и V_N совпадают. Говорят, что нормальная форма $\mathfrak{N}: G \rightarrow S^*$ *стабильна по отношению к μ -блужданию* (или *μ -стабильна*), если для P_μ -п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ последовательность слов $\{\mathfrak{N}(\tau_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится на бесконечности⁹. Нормальная форма называется *стабильной*, если она μ -стабильна для каждой допустимой меры μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Понимание нормальных форм как слов и стабилизации как сходимости слов в словарной метрике слишком ограничительно. Более общий подход к стабильным нормальным формам состоит в расширении понятия слова. Обычное (линейное) слово длины n есть отображение $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ в S . Однако можно рассмотреть вместо $\mathbb{N}$ объединение нескольких экземпляров $\mathbb{N}$ (“векторные слова”); такое расширение понятия нормальной формы необходимо, например, если группа G есть произведение нескольких экземпляров свободных групп или групп кос. Соответственно, в этом случае стабильные нормальные формы будут наборами из нескольких бесконечных слов того или иного вида.

Однако и такое понимание должно быть расширено. Например, для свободной метабелевой группы (см. [6]) удобно представлять нормальную форму элементов группы как конфигурацию путей определенного вида на решетке с операцией конкатенации, а их пределы – как бесконечные конфигурации. Такое понимание нормальных форм особенно полезно, если группа реализована как фундаментальная группа некоторого комплекса. Это приводит нас к понятию *геометрической границы случайного блуждания на группе*, что будет рассмотрено отдельно.

2.3. μ -границы Фюрстенберга. Действием группы G на топологическом пространстве M называется гомоморфизм из G в группу $\text{Homeo}(M)$ всех гомеоморфизмов пространства M . Пространство с заданным на нем действием

⁹Имеет смысл изучить также феномен *слабой стабильности* нормальной формы, когда сходимость п. н. заменяется на сходимость по вероятности.

группы G называют G -пространством. Мы обозначаем через $\mathcal{P}(G)$ пространство всех вероятностных мер на G . Через $\mathcal{P}(M)$ обозначается пространство всех регулярных борелевских вероятностных мер на M , снабженное слабой топологией (в двойственности по отношению к пространству ограниченных непрерывных функций на M). Меру, сосредоточенную в одной точке, мы называем *одноточечной*. Действие группы G на пространстве M индуцирует действие G на $\mathcal{P}(M)$, $g\theta(E) = \theta(g^{-1}E)$.

Пусть $\mu \in \mathcal{P}(G)$. Меру $\nu \in \mathcal{P}(M)$ называют μ -стационарной, если

$$\mu * \nu = \int_G g\nu d\mu(g) = \nu.$$

Пусть M – G -пространство, $\nu \in \mathcal{P}(M)$ – μ -стационарная мера, $\mu \in \mathcal{P}(G)$. Пара (M, ν) называется μ -границей для G , если для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого случайного μ -блуждания последовательность мер $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к некоторой одноточечной мере $\delta_{w(\tau)}$, где $w(\tau) \in M$. G -пространство M называется μ -проксимальным, $\mu \in \mathcal{P}(G)$, если для любой μ -стационарной меры $\nu \in \mathcal{P}(M)$ пара (M, ν) является μ -границей. G -пространство M называется универсально-проксимальным, если оно является μ -проксимальным для любой допустимой меры μ .

Для пары (G, μ) μ -граница (M, ν) называется *границей Пуассона–Фюрстенберга* (ПФ-границей), если она *максимальна*, т.е. если всякая μ -граница (M_1, ν_1) пары (G, μ) является фактором границы (M, ν) (как пространство с мерой, на котором действует группа G , без учета топологии).

§ 3. Случайные блуждания на группе. Леммы

В настоящий параграф вынесены некоторые утверждения о случайных блужданиях, имеющие общий характер.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1 [5]. Пусть счетная группа G действует на компактном метрическом пространстве M . Тогда для произвольной меры $\mu \in \mathcal{P}(G)$ множество μ -стационарных мер в $\mathcal{P}(M)$ непусто.

ТЕОРЕМА 3.1 [5]. Пусть счетная группа G действует на компактном метрическом пространстве M . Пусть $\mu \in \mathcal{P}(G)$, и пусть $\nu \in \mathcal{P}(M)$ – μ -стационарная мера. Тогда для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого случайного μ -блуждания последовательность $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к некоторой мере $\lambda(\tau) \in \mathcal{P}(M)$. При этом имеет место следующее равенство:

$$\int \lambda(\tau) dP_\mu(\tau) = \nu.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть счетная группа G действует на компактном метрическом пространстве M . Пусть $\mu \in \mathcal{P}(G)$. Тогда если M является μ -проксимальным пространством, то μ -стационарная мера на M единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_1, ν_2 – две произвольные μ -стационарные меры на M . Тогда в силу определения μ -стационарной меры мера $\nu_0 := \frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2$ также является μ -стационарной. Отсюда в силу μ -проксимальности G -пространства M следует, что для п. в. траектории $\tau := \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого μ -блуждания

последовательность мер $\{\tau_i \nu_0\}_{i \in \mathbb{Z}_+} = \left\{ \frac{\tau_i \nu_1}{2} + \frac{\tau_i \nu_2}{2} \right\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к одноточечной мере δ_w , где $w = w(\tau) \in M$. Ясно, что при этом последовательности $\left\{ \frac{\tau_i \nu_1}{2} \right\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ и $\left\{ \frac{\tau_i \nu_2}{2} \right\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ должны сходиться к мере $\frac{\delta_w}{2}$. Отсюда в силу теоремы 3.1 получаем

$$\nu_0 = \int \delta_{w(\tau)} dP_\mu(\tau) = \nu_1 = \nu_2.$$

ЛЕММА 3.2 [1]. Пусть счетная группа G действует на пространстве M . Пусть μ – допустимая мера на G и $\nu \in \mathcal{P}(M)$ – μ -стационарная мера. Пусть $E \subset M$ – измеримое подмножество такое, что для любого элемента $g \in G$ либо $g(E) = E$, либо $g(E) \cap E = \emptyset$, и, кроме того, найдется бесконечный набор попарно непересекающихся множеств вида $g(E)$, где $g \in G$. Тогда $\nu(E) = 0$.

В частности, если орбита $G(x)$ каждой точки $x \in M$ бесконечна, то μ -стационарная мера ν непрерывна.

ЛЕММА 3.3 (об абсолютной непрерывности). Пусть счетная группа G действует на пространстве M . Пусть μ – допустимая мера на G и $\nu \in \mathcal{P}(M)$ – μ -стационарная мера. Тогда для любого $g \in G$ мера $g\nu$ абсолютно непрерывна по отношению к мере ν . Более того:

- 1) для любого $g \in G$ найдется такая константа C'_g , что для всякого измеримого множества $E \subset M$ верно $C'_g \nu(E) \geq g\nu(E)$;
- 2) для любого $g \in G$ найдется константа $C''_g > 0$ такая, что если $E \cup gE = M$, то $\nu(E) \geq C''_g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку мера μ допустима, для произвольного $g \in G$ найдется такое $s \in \mathbb{N}$, что $\mu_s(g) > 0$, где μ_s – s -кратная свертка меры μ . Из μ -стационарности меры ν следует, что

$$\nu(E) = \sum_{h \in G} h\nu(E) \mu_s(h) \geq g\nu(E) \mu_s(g).$$

Остается положить $C'_g := \frac{1}{\mu_s(g)}$.

2) Из условия $E \cup gE = M$ следует, что $g^{-1}E \cup E = g^{-1}M = M$. Отсюда получаем

$$\nu(E) + g\nu(E) = \nu(E) + \nu(g^{-1}E) \geq \nu(E \cup g^{-1}E) = \nu(M) = 1.$$

Однако в силу п. 1) имеем $C'_g \nu(E) \geq g\nu(E)$, следовательно,

$$(1 + C'_g) \nu(E) \geq \nu(E) + g\nu(E) \geq 1.$$

Остается положить $C''_g := \frac{1}{1+C'_g}$.

Будем говорить, что подмножество $H \subset G$ группы G является *кофинитным* (справа), если найдется конечное множество $J \subset G$ такое, что $HJ = G$. Из стандартных фактов теории мартингалов легко выводится следующая лемма.

ЛЕММА 3.4 (о кофинитных подмножествах). Пусть G – счетная группа, $H \subset G$ – произвольное кофинитное подмножество, $\mu \in \mathcal{P}(G)$ – некоторая допустимая мера. Тогда п.в. траектория μ -блуждания бесконечное число раз

проходит через точки подмножества H . Более того, для произвольного элемента $g_0 \in G$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что для п.в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого μ -блуждания множество

$$L(\tau) := \{l \in \mathbb{N} \mid \tau_l \in H, \tau_{l+k} = \tau_l g_0\}$$

бесконечно.

§ 4. Достаточный признак μ -проксимальности

В настоящем параграфе описывается одно достаточное условие μ -проксимальности метрического G -пространства. Это условие используется для доказательства теоремы 0.1.

Пусть M – метрическое пространство с метрикой d , и пусть группа G действует на M гомеоморфизмами. Будем говорить, что элемент $g \in G$ является ε -сжимающим для меры $\lambda \in \mathcal{P}(M)$, если для некоторого шара $B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ верно

$$g\lambda(B_\varepsilon(x)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Назовем набор $K_1 \subset G$ вполне ε -сжимающим (для G -пространства (M, d)), если для любой меры $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ найдется элемент $g \in K_1$, являющийся ε -сжимающим для λ .

Набор $K_2 \subset G$ будем называть универсальным ε -сжимающим (для (M, d)), если для любого $h \in G$ набор hK_2 является вполне ε -сжимающим.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если набор $K_1 \subset G$ является вполне ε -сжимающим, то для любого $h \in G$ набор $K_1 h$ также является вполне ε -сжимающим. Действительно, пусть $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ – произвольная мера. Тогда в K_1 найдется элемент g , являющийся ε -сжимающим для меры $h\lambda$, но это значит, что элемент $gh \in K_1 h$ является ε -сжимающим для λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Из замечания 4.1 прямо следует, что набор $K_2 \subset G$ является универсальным ε -сжимающим тогда и только тогда, когда для произвольного $h \in G$ набор $hK_2 h^{-1}$ является вполне ε -сжимающим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (достаточный признак μ -проксимальности). Пусть на компактном метрическом пространстве M действует счетная группа G . Пусть для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в группе G найдется конечный универсальный ε -сжимающий набор для M . Тогда пространство M является μ -проксимальным по отношению к любой допустимой мере μ на группе G .

Доказательство предложения 4.1 базируется на следующей лемме.

ЛЕММА 4.1. Пусть группа G действует на метрическом пространстве M , $\varepsilon > 0$ и в G найдется некоторый конечный универсальный ε -сжимающий набор для M . Тогда для произвольной меры $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ множество ε -сжимающих элементов для λ образует кофinitное подмножество в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \subset G$ – конечный универсальный ε -сжимающий набор для M , $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ и $H := H(\varepsilon, \lambda)$ – множество всех ε -сжимающих меру λ элементов из G . Далее, пусть $g \in G$ – произвольный элемент. В силу определения универсального ε -сжимающего набора набор gK является вполне

ε -сжимающим. Иными словами, множество gK пересекается с множеством H . Значит, $g \in HK^{-1}$. Отсюда следует (поскольку элемент g выбран произвольно), что $G = HK^{-1}$. Таким образом, поскольку множество K^{-1} конечно, множество H является кофинитным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Пусть $\mu \in \mathcal{P}(G)$ – произвольная допустимая мера, и пусть ν – некоторая μ -стационарная мера в $\mathcal{P}(M)$. В силу леммы 4.1 для всякого $\varepsilon > 0$ множество ε -сжимающих элементов для меры ν кофинитно в G . Отсюда в силу леммы 3.4 следует, что для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого μ -блуждания найдется последовательность $\{i_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{N}$ такая, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ элемент τ_{i_k} является $(1/k)$ -сжимающим для меры ν . В силу компактности пространства M из последовательности $\{\tau_{i_k}(\nu)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к одноточечной мере. Таким образом, для п. в. траектории τ последовательность $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к одноточечной мере, а по теореме 3.1 последовательность $\tau_i(\nu)$ п. н. сходится к некоторой мере. Следовательно, $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ п. н. сходится к одноточечной мере, т. е. пространство (M, ν) является μ -границей пары (G, μ) . Таким образом, поскольку μ -стационарная мера ν была выбрана произвольно, пространство M является μ -проксимальным.

§ 5. Свободная группа. Определения

В настоящем параграфе даны некоторые определения и приведены известные факты, касающиеся свободной группы, ее границы, а также действия свободной группы на этой границе. Мы используем терминологию комбинаторной теории групп и теории гиперболических групп (см. [20], [21]).

5.1. Свободная группа. Пусть F – свободная группа ранга $n \geq 2$ с системой образующих $U := (u_1, \dots, u_n)$. Пусть U^* – множество всех конечных и U^∞ – множество всех бесконечных вправо слов в алфавите, символами которого являются элементы из U и обратные к ним. Для слова $W = w_1 w_2 \dots w_j \in U^*$ мы обозначаем через W^{-1} слово $w_j^{-1} \dots w_2^{-1} w_1^{-1} \in U^*$ и через W^k , $k \in \mathbb{Z}$, – слово, получающееся в результате $|k|$ -кратного повторения слова $W^{\text{sign}(k)}$; через $W^{+\infty}$ и $W^{-\infty}$ обозначаются бесконечные вправо слова, являющиеся пределами последовательностей слов $\{W^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{W^{-k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ соответственно.

Слово называется *приведенным*, если никакие два его соседних символа не представляют взаимно обратных элементов группы. Как известно, каждому элементу $x \in F$ соответствует единственное представляющее его приведенное слово в U^* , которое мы обозначаем через $[x]$. Как нетрудно видеть, отображение $x \mapsto [x]$ является нормальной формой. Для элемента $x \in F$ положим $|x| := |x|_U := |[x]|$. В группе F функция $d(x, y) := |x^{-1}y|$ является метрикой. Эта метрика называется *словарной метрикой* системы образующих U .

Слово $V \in U^*$ называется *циклически приведенным*, если слово VV является приведенным. Несложно проверить, что для произвольного элемента $a \in F$ найдутся единственные циклически приведенное слово $A_a \in U^*$ и приведенное слово $X_a \in U^*$ такие, что $[a] = X_a A_a X_a^{-1}$. Слова X_a и A_a будем называть *шлейфом* и *основой* элемента a (в системе образующих U) и обозначать через $\text{shl}[a]$ и $\text{osn}[a]$ соответственно. Нетрудно проверить, что основы сопряженных

элементов совпадают с точностью до циклической перестановки, так что *длины основ сопряженных элементов равны*.

5.2. Граница свободной группы. Границу свободной группы F будем, как это принято, обозначать через ∂F . Эта граница, как хорошо известно, гомеоморфна канторову множеству, и ее удобно понимать как пространство концов графа Кэли системы образующих U , который является деревом. Напомним, что существует взаимно однозначное соответствие между точками границы ∂F и множеством всех приведенных слов в U^∞ . Бесконечное приведенное слово, соответствующее точке $w \in \partial F$, будем обозначать через $[w]$. Таким образом, правило $x \mapsto [x]$ задает биекцию между множеством точек *гиперболической компактификации* $F \cup \partial F$ и множеством всех приведенных слов в $U^* \cup U^\infty$.

Как известно, для каждого нетривиального элемента $a \in F$ последовательность $\{a^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ сходится в $F \cup \partial F$ к некоторой точке границы. Пределы последовательностей $\{a^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{a^{-i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ будем обозначать через $a^{+\infty}$ и $a^{-\infty}$ соответственно. Ясно, что если $[a] = XAX^{-1}$, где X – приведенное слово, а A – циклически приведенное слово, то точки $a^{+\infty}$ и $a^{-\infty}$ представлены словами $XA^{+\infty}$ и $XA^{-\infty}$ соответственно.

5.3. О действии на границе. Для произвольного элемента $a \in F$ левый сдвиг $x \mapsto ax$ в F продолжается до гомеоморфизма компакта $F \cup \partial F$. Образ подмножества $E \subset \partial F$ под действием левого сдвига на a будем обозначать через aE . Как известно, любой автоморфизм $\psi \in \text{Aut}(F)$ продолжается до гомеоморфизма $\bar{\psi}: F \cup \partial F \rightarrow F \cup \partial F$. Пусть $a \in F$, и пусть $\psi_a \in \text{Inn}(F)$ – автоморфизм сопряжения на a , т. е. $\psi_a(x) = axa^{-1}$. Тогда, как нетрудно показать, для произвольной точки $w \in \partial F$ имеет место равенство $\bar{\psi}_a(w) = aw$.

5.4. Произведение Громова. Для двух различных (конечных или бесконечных вправо) слов $W = w_1w_2 \dots$ и $V = v_1v_2 \dots$ положим $(W \mid V) := r - 1$, где r – наименьшее натуральное число, для которого $v_r \neq w_r$ (мы подразумеваем, что неравенство $v_r \neq w_r$ выполняется, в частности, в случае, когда одна из букв v_r, w_r не определена). Для конечного слова V положим $(V \mid V) = |V|$.

Для точек w и v из $F \cup \partial F$ (не являющихся одной и той же точкой границы ∂F) положим $(w \mid v) := ([w] \mid [v])$. Нетрудно проверить, что для x и y из F выполняется равенство

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - |x^{-1}y|).$$

Величину $(x \mid y)$ называют *произведением Громова* элементов x и y .

Для двух различных точек w и v из $F \cup \partial F$ положим $\rho(w, v) := ((w \mid v) + 1)^{-1}$. Для $v \in F \cup \partial F$ положим $\rho(v, v) := 0$; ρ является метрикой на $F \cup \partial F$, эта метрика задает на $F \cup \partial F$ топологию, совпадающую с топологией рассматриваемой гиперболической компактификации. Как нетрудно проверить, для любых $x, y, z \in F \cup \partial F$ в тройке $\rho(x, y), \rho(x, z), \rho(y, z)$ либо все три числа совпадают, либо два наибольших совпадают.

В метрическом пространстве $(\partial F, \rho)$ будем обозначать через $B_\varepsilon(v)$ замкнутый шар $\{w \in \partial F \mid \rho(v, w) \leq \varepsilon\}$. В силу определений для любых $k \in \mathbb{N}$ и $w \in \partial F$ шар $B_{1/k}(w)$ соответствует множеству всех бесконечных приведенных слов, начинающихся с одного и того же подслова длины $k - 1$. Отсюда следует, что

пересечение любых двух шаров в $(\partial F, \rho)$ либо пусто, либо совпадает с одним из этих шаров. Кроме того, если $v, w \in \partial F$ и $\rho(v, w) \leq 1/k$, то $B_{1/k}(v) = B_{1/k}(w)$.

ЛЕММА 5.1. *Для произвольного нетривиального элемента $a \in F$ имеют место следующие соотношения:*

$$\rho(a^{+\infty}, a^{-\infty}) = \frac{1}{|\text{shl}[a]| + 1}, \quad (5.1)$$

$$(a \mid a^{+\infty}) > \frac{|a|}{2}, \quad (5.2)$$

$$\rho(a, a^{+\infty}) < \frac{2}{|a|}. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X := \text{shl}[a]$ и $A := \text{osn}[a]$. Тогда $[a] = XAX^{-1}$, $[a^{+\infty}] = XA^{+\infty}$ и $[a^{-\infty}] = XA^{-\infty}$. Следовательно, $(a^{+\infty} \mid a^{-\infty}) = |X| \stackrel{\text{def}}{=} |\text{shl}[a]|$, и выполняется равенство

$$\rho(a^{+\infty}, a^{-\infty}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(a^{+\infty} \mid a^{-\infty}) + 1} = \frac{1}{|\text{shl}[a]| + 1}.$$

Далее, заметим, что $|a| = 2|X| + |A|$. Отсюда получаем

$$(a \mid a^{+\infty}) = (XAX^{-1} \mid XA^{+\infty}) = |XA| = |X| + |A| > \frac{2|X| + |A|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

Следовательно,

$$\rho(a, a^{+\infty}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(a \mid a^{+\infty}) + 1} < \frac{2}{|a|}.$$

Лемма доказана.

§ 6. Свободная группа. Леммы

В настоящем параграфе доказаны несколько утверждений о действии свободной группы на ее границе. Мы полагаем, что F – свободная неабелева группа, в которой фиксирована некоторая система образующих и действуют обозначения из предыдущего параграфа.

ЛЕММА 6.1. *Пусть $a \in F$, пусть $k \in \mathbb{N}$, и пусть $|a| \geq 2k$. Тогда*

$$aB_{1/k}(a^{-\infty}) \cup B_{1/k}(a^{+\infty}) = \partial F.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для произвольной точки $w \in \partial F$ верно либо $w \in B_{1/k}(a^{+\infty})$, либо $a^{-1}w \in B_{1/k}(a^{-\infty})$.

Из условия $|a| \geq 2k$ в силу (5.2) получаем следующие два неравенства:

$$(a^{+\infty} \mid a) > \frac{|a|}{2} \geq k, \quad (6.1)$$

$$(a^{-\infty} \mid a^{-1}) > \frac{|a^{-1}|}{2} = \frac{|a|}{2} \geq k. \quad (6.2)$$

Ясно, что мы можем выбрать такой элемент $w' \in F$, достаточно близкий к w , что $(a^{-1}w \mid a^{-1}) = (a^{-1}w' \mid a^{-1})$ и $(w \mid a) = (w' \mid a)$. При этом получается, что

$$\begin{aligned} (a^{-1}w \mid a^{-1}) + (w \mid a) &= (a^{-1}w' \mid a^{-1}) + (w' \mid a) \\ &= \frac{1}{2}(|a^{-1}w'| + |a^{-1}| - |w'|) + \frac{1}{2}(|w'| + |a| - |a^{-1}w'|) \\ &= \frac{1}{2}(|a^{-1}| + |a|) = |a|. \end{aligned}$$

Последнее означает, что либо $(a^{-1}w \mid a^{-1}) \geq |a|/2 \geq k$, либо $(w \mid a) \geq |a|/2 \geq k$. Заметим, что для произвольных $x, y, z \in F \cup \partial F$ из условий $(x \mid y) \geq k$ и $(x \mid z) \geq k$ вытекает условие $(y \mid z) \geq k$ (см. п. 5.4). Следовательно, если $(a^{-1}w \mid a^{-1}) \geq k$, то в силу неравенства (6.2) получаем $(a^{-1}w \mid a^{-\infty}) \geq k$, т.е. $a^{-1}w \in B_{1/(k+1)}(a^{-\infty}) \subset B_{1/k}(a^{-\infty})$. Если же $(w \mid a) \geq k$, то в силу неравенства (6.1) получаем $(w \mid a^{+\infty}) \geq k$ и $w \in B_{1/k}(a^{+\infty})$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $a \in F$, и пусть $|\text{shl}(a)| \geq k \in \mathbb{N}$. Тогда набор из k элементов $\{a, a^2, \dots, a^k\} \subset F$ является вполне $(1/k)$ -сжимающим для метрического F -пространства $(\partial F, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо (и достаточно) показать, что для произвольной меры $\lambda \in \mathcal{P}(\partial F)$ найдутся элемент $g \in \{a, a^2, \dots, a^k\}$ и точка $w \in \partial F$ такие, что

$$g\lambda(B_{1/k}(w)) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Из условия $|\text{shl}(a)| \geq k$ в силу (5.1) следует, что $\rho(a^{-\infty}, a^{+\infty}) < 1/k$. Отсюда заключаем, что $B_{1/k}(a^{-\infty}) = B_{1/k}(a^{+\infty})$ (см. п. 5.4). Обозначим шар $B_{1/k}(a^{-\infty}) = B_{1/k}(a^{+\infty})$ через $B_{1/k}$. Заметим, что $|a| > 2|\text{shl}(a)| \geq 2k$. Отсюда, применив лемму 6.1, получаем, что для любых $i \neq j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$a^{|i-j|}B_{1/k} \cup B_{1/k} = \partial F,$$

которое, очевидно, эквивалентно равенству

$$a^iB_{1/k} \cup a^jB_{1/k} = \partial F.$$

Таким образом, множества из семейства $\{\partial F \setminus a^zB_{1/k}\}_{z \in \mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются. Отсюда следует, что в множестве $\{1, \dots, k\}$ найдется число (скажем, i_0) такое, что

$$\lambda(\partial F \setminus a^{-i_0}B_{1/k}) \leq \frac{1}{k}.$$

Однако

$$\lambda(\partial F \setminus a^{-i_0}B_{1/k}) = 1 - \lambda(a^{-i_0}B_{1/k}) = 1 - a^{i_0}\lambda(B_{1/k}).$$

Из двух последних формул получаем

$$a^{i_0}\lambda(B_{1/k}) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Итак, для элемента $g := a^{i_0} \in \{a, a^2, \dots, a^k\}$ и точки $a^{+\infty}$ имеем

$$g\lambda(B_{1/k}(a^{+\infty})) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3 (ср. [21, предложение 2.27]). Пусть элементы a и b свободной группы F не коммутируют. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда в множестве $\{a, b, a^{20k}ba^{-20k}, b^{20k}ab^{-20k}\}$ найдется элемент, длина шлейфа которого больше либо равна k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что через $[x]$ обозначается приведенная запись элемента $x \in F$. Через $\widehat{W}$ обозначим элемент группы F , представленный словом W (так что $[\widehat{x}] = x$).

Пусть $[a] = XAX^{-1}$ и $[b] = YBY^{-1}$, где X и Y – приведенные, а A и B – циклически приведенные слова. Не теряя общности, положим $|A| \leq |B|$. Покажем, что (при этом предположении) хотя бы один из трех элементов a , b , $b^{20k}ab^{-20k}$ имеет шлейф длины, большей либо равной k .

Предположим противное: пусть шлейфы всех трех указанных элементов короче k , т. е.

$$|X| < k, \quad |Y| < k, \quad |\text{shl}[b^{20k}ab^{-20k}]| < k.$$

Заметим, что

$$b^{20k}ab^{-20k} = \widehat{Y}\widehat{B}^{20k}\widehat{Y}^{-1}\widehat{X}\widehat{A}\widehat{X}^{-1}\widehat{Y}\widehat{B}^{-20k}\widehat{Y}^{-1}.$$

Обозначим через $\mathbf{q}$ элемент $\widehat{Y}^{-1}\widehat{X}\widehat{A}\widehat{X}^{-1}\widehat{Y}$, так что

$$b^{20k}ab^{-20k} = \widehat{Y}\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}\widehat{Y}^{-1}.$$

Теперь сконцентрируемся на свойствах элемента $\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}$ и слова $[\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}]$. Докажем несколько неравенств.

Поскольку $\mathbf{q} = \widehat{Y}^{-1}\widehat{X}\widehat{A}\widehat{X}^{-1}\widehat{Y}$, в силу условий $|Y| < k \leq k|B|$, $|X| < k \leq k|B|$ и $|A| \leq |B| \leq k|B|$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{q}| < 5k|B|. \quad (6.3)$$

Отсюда, так как $|\widehat{B}^{20k}| = 20k|B|$, получаем

$$|\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}| < 25k|B|. \quad (6.4)$$

Далее, поскольку, как указывается в п. 5.1, длины основ сопряженных элементов равны, имеет место равенство $|\text{osn}[b^{20k}ab^{-20k}]| = |A|$. В силу же сделанного предположения $|\text{shl}[b^{20k}ab^{-20k}]| < k$. Отсюда имеем

$$|\widehat{Y}\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}\widehat{Y}^{-1}| = |b^{20k}ab^{-20k}| < |A| + 2k.$$

Следовательно, поскольку $|Y| < k$, выполнено неравенство

$$|\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}| < |A| + 2k + 2k \leq 5k|B|. \quad (6.5)$$

Теперь оценим произведение Громова элементов $(\widehat{B}^{20k}\mathbf{q})^{-1}$ и $\widehat{B}^{-20k}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} ((\widehat{B}^{20k}\mathbf{q})^{-1} \mid \widehat{B}^{-20k}) &= \frac{1}{2}(|\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}| + |\widehat{B}^{20k}| - |\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}|) \\ &\geq \frac{1}{2}(|\widehat{B}^{20k}| - |\mathbf{q}| + |\widehat{B}^{20k}| - |\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}|) \\ &= 20k|B| - \frac{1}{2}(|\mathbf{q}| + |\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}\widehat{B}^{-20k}|), \end{aligned}$$

откуда в силу (6.3) и (6.5) получаем

$$((\widehat{B}^{20k}\mathbf{q})^{-1} \mid \widehat{B}^{-20k}) > 15k|B|.$$

Это означает (см. п. 5.4), что начальные подслова длины $15k|B|$ у слов $[\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}]^{-1}$ и B^{-20k} совпадают, т.е. оба этих подслова равны слову B^{-15k} . Это равносильно тому, что слово $[\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}]$ оканчивается словом B^{15k} .

Кроме того, поскольку слово B^{20k} приведенное и имеет длину $20k|B|$, из (6.3) следует, что слово $[\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}]$ начинается словом B^{15k} .

Итак, мы показали, что слово $[\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}]$ оканчивается словом B^{15k} , начинается словом B^{15k} и имеет длину, не большую $25k|B|$ (см. (6.4)). Следовательно, так как слово B циклически приведенное, каждое из слов $B[B^{20k}\mathbf{q}]$ и $[B^{20k}\mathbf{q}]B$:

- (i) является приведенным;
- (ii) начинается словом B^{15k} длины $15k|B|$;
- (iii) оканчивается словом B^{15k} длины $15k|B|$;
- (iv) имеет длину, не большую $25k|B| + |B| \leq 26k|B|$.

Таким образом, поскольку $|B^{15k}| + |B^{15k}| > 26k|B|$, слова $B[B^{20k}\mathbf{q}]$ и $[B^{20k}\mathbf{q}]B$ совпадают, но это означает, что элементы $\widehat{B}^{20k}\mathbf{q}$ и $\widehat{B}$ группы F коммутируют. Значит, коммутируют и элементы $\mathbf{q}$ и $\widehat{B}$. Следовательно, элементы $\widehat{Y}\mathbf{q}\widehat{Y}^{-1}$ и $\widehat{Y}\widehat{B}\widehat{Y}^{-1}$ коммутируют, но $\widehat{Y}\mathbf{q}\widehat{Y}^{-1} = \widehat{X}\widehat{A}\widehat{X}^{-1} = a$ и $\widehat{Y}\widehat{B}\widehat{Y}^{-1} = b$, т.е. a и b коммутируют. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть элементы a и b свободной группы F не коммутируют. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда набор Q^{50k^2} элементов группы F , где

$$Q := \{a, b, a^{-1}, b^{-1}, e\},$$

является вполне $(1/k)$ -сжимающим для метрического F -пространства $(\partial F, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку единица группы лежит в Q , то для любых $r, s \in \mathbb{N}$ при $r \leq s$ имеем $Q^r \subset Q^s$. Отсюда ясно, что элементы $a, b, a^{20k}ba^{-20k}$ и $b^{20k}ab^{-20k}$ лежат во множестве Q^{40k+1} . Таким образом, поскольку элементы a и b не коммутируют, в силу леммы 6.3 во множестве Q^{40k+1} найдется элемент (скажем, h), длина шлейфа которого больше либо равна k . Тогда в силу леммы 6.2 набор $\{h, h^2, \dots, h^k\}$ является вполне $(1/k)$ -сжимающим для $(\partial F, \rho)$. Однако если $h \in Q^{40k+1}$, то

$$\{h, h^2, \dots, h^k\} \subset (Q^{40k+1})^k \subset Q^{50k^2}.$$

Таким образом, набор Q^{50k^2} содержит вполне $(1/k)$ -сжимающий поднабор и, следовательно, является вполне $(1/k)$ -сжимающим.

§ 7. Доказательство теоремы 0.1

Схема настоящего доказательства имеет следующий вид. Пользуясь доказанными в § 6 утверждениями о свободной группе и ее границе, мы показываем, что для действия группы G на границе ∂F выполняется достаточное условие μ -проксимальности, описанное в § 4.

Мы полагаем, что в F фиксирована система образующих и действуют обозначения § 5 и § 6.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *Для сколь угодно большого $k \in \mathbb{N}$ в группе G найдется конечный универсальный $(1/k)$ -сжимающий набор для метрического G -пространства $(\partial F, \rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in F \subset G$ – произвольная пара некоммутирующих элементов. Покажем, что конечный набор

$$R := \{x, y, x^{-1}, y^{-1}, e\}^{50k^2} \subset F \subset G$$

является универсальным $(1/k)$ -сжимающим для $(\partial F, \rho)$. В силу замечания 4.2 для этого достаточно показать, что для произвольного $g \in G$ набор gRg^{-1} является вполне $(1/k)$ -сжимающим. Обозначим $a := gxg^{-1}$ и $b := gyg^{-1}$. Поскольку F является нормальной подгруппой в G , элементы a и b лежат в F . При этом a и b (как и x с y) не коммутируют. Кроме того, очевидно, что

$$gRg^{-1} = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}, e\}^{50k^2}.$$

Таким образом, набор gRg^{-1} является вполне $(1/k)$ -сжимающим в силу следствия 6.1. Утверждение доказано.

В силу утверждения 7.1 действие группы G на границе ∂F подпадает под условия признака μ -проксимальности (предложение 4.1). Таким образом, ∂F является μ -проксимальным пространством по отношению к любой допустимой мере μ на группе G . Отсюда в силу леммы 3.1 следует, что для каждой допустимой меры μ на G существует единственная μ -стационарная мера ν на ∂F . Утверждение о непрерывности μ -стационарной меры вытекает из леммы 3.2 в силу того очевидного факта, что орбита $G(w) \supset F(w)$ любой точки $w \in \partial F$ бесконечна. Теорема 0.1 доказана.

§ 8. Теорема о выборочной сходимости

Пусть T – некоторое топологическое пространство. Будем говорить, что последовательность $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, состоящая из пар точек пространства T , *выборочно сходится* к точке $t \in T$, если найдется сходящаяся к t последовательность $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ такая, что $c_i \in \{a_i, b_i\}$ для каждого i . Очевидно, что последовательность пар точек хаусдорфова пространства может выборочно сходиться не более чем к двум различным точкам.

В настоящем параграфе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.1 (о выборочной сходимости). *Пусть G – счетная группа и $F \subset G$ – ее нормальная свободная неабелева подгруппа. Пусть μ – допустимая мера на группе G . Тогда для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого случайного μ -блуждания и для произвольного нетривиального элемента $a \in F$ последовательность пар $\{(\tau_i a \tau_i^{-1}, \tau_i a^{-1} \tau_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к точке $w(\tau) \in \partial F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим, что в F фиксирована система образующих, и рассмотрим соответствующие ей словарную метрику, произведение Громова, метрику ρ в $F \cup \partial F$ и шары $B_\varepsilon(v) := \{w \in \partial F \mid \rho(v, w) \leq \varepsilon\}$ (см. обозначения в § 5).

Образ точки $v \in \partial F$ под действием элемента $g \in G$ обозначим через gv . Заметим, что для произвольных нетривиального элемента $x \in F$ и элемента $g \in G$ точка $gx^{+\infty}$ совпадает с точкой $(gxg^{-1})^{+\infty}$.

Ясно, что в условиях теоремы о выборочной сходимости применима теорема 0.1. В силу этой теоремы на ∂F существует единственная μ -стационарная мера ν .

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.1. *Для произвольного натурального k и нетривиального $b \in F$ найдется такая константа $C(b, k) > 0$, что, каков бы ни был элемент $g \in G$, имеет место неравенство*

$$g\nu(B_{1/k}(gb^{+\infty}) \cup B_{1/k}(gb^{-\infty})) \geq C(b, k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Утверждение 8.1 не является очевидным, поскольку в общем случае $B_{1/k}(gb^{\pm\infty}) \neq gB_{1/k}(b^{\pm\infty})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 8.1. Итак, пусть $g \in G$ – произвольный элемент. Обозначим для краткости

$$E := B_{1/k}(gb^{+\infty}) \cup B_{1/k}(gb^{-\infty}).$$

Как нетрудно видеть, для произвольного элемента $x \in F$ и каждого натурального r слово $\text{osn}[x^r]$ совпадает со словом $(\text{osn}[x])^r$. Отсюда, поскольку элемент $gbg^{-1} \in F$ не является тривиальным, получаем

$$|(gbg^{-1})^{2k}| \geq 2k|\text{osn}(gbg^{-1})| \geq 2k.$$

Ясно, что для любого $r \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(gb^r g^{-1})^{\pm\infty} = g(b^r)^{\pm\infty} = gb^{\pm\infty}$ и, следовательно, $B_{1/k}(gb^{\pm\infty}) = B_{1/k}((gb^r g^{-1})^{\pm\infty})$. Отсюда в силу леммы 6.1 имеем

$$(gbg^{-1})^{2k} E \cup E = \partial F.$$

Следовательно, $b^{2k} g^{-1} E \cup g^{-1} E = g^{-1} \partial F = \partial F$. Применив п. 2) леммы 3.3 об абсолютной непрерывности, получаем

$$g\nu(E) = \nu(g^{-1} E) \geq C''_{b^{2k}}.$$

Остается положить $C(b, k) = C''_{b^{2k}}$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. *Если последовательность мер $\{g_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, где $g_i \in G$, сходится к некоторой одноточечной мере δ_v , где $v \in \partial F$, то для любого нетривиального элемента $b \in F$ последовательность пар $\{(g_i b^{+\infty}, g_i b^{-\infty})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к точке v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$ найдется такое $N_{1/k} \in \mathbb{N}$, что для каждого $j \geq N_{1/k}$ одна из точек пары $(g_j b^{+\infty}, g_j b^{-\infty})$ находится от точки v на расстоянии, не большем, чем $1/k$ (в метрике ρ). Покажем это. Пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу утверждения 8.1 найдется такое $C(b, k) > 0$, что для любого $g \in G$ выполнено неравенство

$$g\nu(B_{1/k}(gb^{+\infty}) \cup B_{1/k}(gb^{-\infty})) \geq C(b, k).$$

Так как последовательность мер $\{g_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к одноточечной мере δ_v , найдется $N_{1/k} \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $j \geq N_{1/k}$ верно

$$g_j \nu(B_{1/k}(v)) > 1 - C(b, k).$$

Таким образом,

$$g_j \nu(B_{1/k}(g_j b^{+\infty}) \cup B_{1/k}(g_j b^{-\infty})) + g_j \nu(B_{1/k}(v)) > 1.$$

Следовательно, шар $B_{1/k}(v)$ должен пересекаться хотя бы с одним из шаров $B_{1/k}(g_j b^{+\infty})$, $B_{1/k}(g_j b^{-\infty})$. Но это означает, что хотя бы одна из точек $g_j b^{+\infty}$, $g_j b^{-\infty}$ находится от точки v на расстоянии, не большем, чем $1/k$ (см. п. 5.4). Тем самым утверждение доказано.

Обозначим через $\partial_r F$ множество “рациональных” точек границы ∂F :

$$\partial_r F := \{x^{+\infty} \mid x \in F \setminus e\} \subset \partial F.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.3. *Если последовательность мер $\{g_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, где $g_i \in G$, сходится к некоторой одноточечной мере δ_v , где $v \in \partial F \setminus \partial_r F$, то для каждого нетривиального $b \in F$ последовательность чисел $\{|g_i b g_i^{-1}|\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ стремится к бесконечности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{|g_i b g_i^{-1}|\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ не стремится к бесконечности. Тогда из последовательности $\{g_i b g_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ можно выбрать постоянную подпоследовательность $\{g_{i_k} b g_{i_k}^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}} = (y, y, y, \dots)$. В силу утверждения 8.2 последовательность пар $\{(g_i b^{+\infty}, g_i b^{-\infty})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к точке v . Отсюда следует, что подпоследовательность $\{(g_{i_k} b^{+\infty}, g_{i_k} b^{-\infty})\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, состоящая из одинаковых пар $(y^{+\infty}, y^{-\infty})$, также выборочно сходится к v . Но это означает, что $v \in \{y^{+\infty}, y^{-\infty}\} \subset \partial_r F$. Последнее противоречит предположению о том, что $v \in \partial F \setminus \partial_r F$. Итак, утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.4. *Если последовательность мер $\{g_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, где $g_i \in G$, сходится к некоторой одноточечной мере δ_v , где $v \in \partial F \setminus \partial_r F$, то для каждого нетривиального $b \in F$ последовательность пар $\{(g_i b g_i^{-1}, g_i b^{-1} g_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к точке v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 8.2 найдется такая последовательность $\{\delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, где $\delta_i \in \{+1, -1\}$, что последовательность $\{g_i(b^{\delta_i})^{+\infty}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к v . Согласно (5.3) для каждого i имеет место неравенство

$$\rho(g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}, g_i(b^{\delta_i})^{+\infty}) < \frac{2}{|g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}|}.$$

При этом в силу утверждения 8.3 имеем $|g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}| \rightarrow +\infty$. Отсюда получаем, что

$$\rho(g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}, g_i(b^{\delta_i})^{+\infty}) \rightarrow 0,$$

но это означает, что последовательность $\{g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, как и последовательность $\{g_i(b^{\delta_i})^{+\infty}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, сходится к v . Сходимость же последовательности $\{g_i b^{\delta_i} g_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ по определению означает выборочную сходимость последовательности пар $\{(g_i b g_i^{-1}, g_i b^{-1} g_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$. Итак, утверждение доказано.

Теперь заметим, что в силу теоремы 0.1 μ -стационарная мера ν непрерывна, а пара $(\partial F, \nu)$ является μ -границей пары (G, μ) . Последнее означает, что для п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ правого μ -блуждания последовательность мер $\{\tau_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к некоторой одноточечной мере $\delta_{w(\tau)}$, где $w(\tau) \in \partial F$.

Кроме того, поскольку множество $\partial_r F$ счетно, а мера ν непрерывна, выполняется условие $\nu(\partial_r F) = 0$. Отсюда, применив теорему 3.1, заключаем, что для п.в. траектории τ выполнено условие $w(\tau) \in \partial F \setminus \partial_r F$. Таким образом, утверждение теоремы верно в силу утверждения 8.4.

§ 9. Доказательство теоремы 0.2

Обозначим через $\mathbf{u}$ элемент в $F \setminus e$, коммутирующий со всеми элементами подгруппы A . Заметим, что в условиях теоремы 0.2 применима теорема 8.1, в силу которой для п.в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} = \{(x_i, \alpha_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ последовательность пар точек $\{(\tau_i \mathbf{u} \tau_i^{-1}, \tau_i \mathbf{u}^{-1} \tau_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к точке $w(\tau) \in \partial F$. Но поскольку $\mathbf{u}$ коммутирует с элементами подгруппы A , имеют место равенства

$$\tau_i \mathbf{u} \tau_i^{-1} = x_i \mathbf{u} x_i^{-1}, \quad \tau_i \mathbf{u}^{-1} \tau_i^{-1} = x_i \mathbf{u}^{-1} x_i^{-1}.$$

Таким образом, последовательность пар $\{(x_i \mathbf{u} x_i^{-1}, x_i \mathbf{u}^{-1} x_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ выборочно сходится к $w(\tau)$. Это означает, что найдется такая последовательность $\{\delta_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, где $\delta_i \in \{+1, -1\}$, что последовательность $\{x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к $w(\tau)$. В частности, выбрав некоторую систему образующих в группе F и рассматривая соответствующую словарную метрику, мы получаем, что $|x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}| \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Заметим, что при этом для произведений Громова $(x_i \mid x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1})$ выполняется неравенство

$$(x_i \mid x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}) = \frac{1}{2}(|x_i| + |x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}| - |x_i \mathbf{u}^{-\delta_i}|) \geq \frac{1}{2}(|x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}| - |\mathbf{u}|).$$

Таким образом, последовательность $\{(x_i \mid x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1})\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ стремится к бесконечности. Однако это означает, что последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, как и последовательность $\{x_i \mathbf{u}^{\delta_i} x_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, сходится к $w(\tau)$. Теорема 0.2 доказана.

§ 10. Стабильность нормальной формы Маркова–Ивановского

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Будем использовать обозначения, введенные в § 1 при определении нормальной формы Маркова–Ивановского. Напомним, что группа крашенных кос P_n является полупрямым произведением своей нормальной свободной подгруппы F_{n-1} и подгруппы P_{n-1} , так что произвольный элемент $\gamma \in P_n$ единственным способом записывается в виде $\gamma = x\alpha$, где $x \in F_{n-1}$ и $\alpha \in P_{n-1}$. Как нетрудно проверить, элемент

$$\mathbf{u} = s_{n1}s_{n2} \cdots s_{n(n-1)} = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \in F_{n-1}$$

коммутирует со всеми элементами подгруппы P_{n-1} . Таким образом, в случае группы крашенных кос $P_n = F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ применима теорема 0.2, в силу которой для любой допустимой меры $\mu \in \mathcal{P}(P_n)$ у п.в. траектории μ -блуждания $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} = \{x_i \alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ (где $x_i \in F_{n-1}$, $\alpha_i \in P_{n-1}$) последовательность $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится к некоторой точке границы ∂F_{n-1} свободной группы F_{n-1} . В силу же определения нормальной формы Маркова–Ивановского приведенная запись элемента x_i (в образующих $\{s_{nj}, 1 \leq j < n\}$ и обратных к ним) является начальным подсловом нормальной формы $\mathcal{I}_P(\tau_i)$. Это означает в точности, что нормальная форма $\mathcal{I}_P$ в группе крашенных кос стабильна.

Группа крашенных кос P_n является в группе кос B_n подгруппой конечного индекса, так что стабильность нормальной формы Маркова–Ивановского $\mathfrak{I}_B$ в группе кос B_n вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 10.1. *Пусть G – счетная группа, Q – подгруппа конечного индекса в G и $\Pi \subset G$ – произвольный набор представителей левых классов смежности подгруппы Q . Пусть $\mathfrak{N}_Q$ – нормальная форма в группе Q . Пусть $\mathfrak{N}_G$ – нормальная форма в группе G , ставящая в соответствие элементу $g \in G$ слово $\mathfrak{N}_Q(gp_g^{-1})\pi_g$, где $\pi_g := \Pi \cap Qg$ – представитель класса смежности элемента g . Тогда если нормальная форма $\mathfrak{N}_Q$ стабильна, то и нормальная форма $\mathfrak{N}_G$ стабильна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹⁰. В силу определения стабильной нормальной формы нам необходимо и достаточно показать, что $\mathfrak{N}_G$ является μ -стабильной для произвольной допустимой меры μ на G .

Для траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ и подмножества $H \subset G$ будем обозначать через τ^H подпоследовательность последовательности τ , включающую все те элементы, которые лежат в H . Заметим, что если H кофинитно, то в силу леммы 3.4 для P_μ -п. в. траектории τ подпоследовательность τ^H бесконечна. В частности, поскольку Q является подгруппой конечного индекса, то для произвольного $g \in G$ подмножество Qg кофинитно в G и, следовательно, подпоследовательность τ^{Qg} бесконечна для P_μ -п. в. траектории τ .

Покажем сначала, что для P_μ -п. в. траектории τ последовательность слов $\mathfrak{N}_Q(\tau^Q)$ сходится (здесь и далее для формы $\mathbf{N}$ и последовательности $\mathbf{s} := \{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ через $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ обозначается последовательность $\{\mathbf{N}(s_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$). Определим на группе Q меру μ' , положив величину $\mu'(q)$ для $q \in Q$ равной вероятности того, что для μ -блуждания на группе G первый момент возвращения в подгруппу Q (после выхода из единицы группы) придется на элемент q . Из леммы 3.4 следует, что μ' есть вероятностная мера, а из допустимости меры μ (для группы G) легко следует допустимость меры μ' (для группы Q). Рассмотрим правое случайное блуждание на группе Q с распределением μ' и соответствующую меру $P_{\mu'}$ на пространстве траекторий $Q^{\mathbb{Z}_+}$. Как нетрудно видеть, определенное P_μ -п. в. отображение из $G^{\mathbb{Z}_+}$ в $Q^{\mathbb{Z}_+}$, задаваемое формулой $\tau \mapsto \tau^Q$, переводит меру P_μ в меру $P_{\mu'}$. Поскольку нормальная форма $\mathfrak{N}_Q$ стабильна (на группе Q), а мера μ' является допустимой (на Q), для $P_{\mu'}$ -п. в. траектории $\varkappa = \{\varkappa_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ случайного μ' -блуждания на Q последовательность слов $\mathfrak{N}_Q(\varkappa_i)$ сходится. Следовательно, для P_μ -п. в. траектории τ последовательность $\mathfrak{N}_Q(\tau^Q)$ сходится.

Путем стандартного рассуждения из доказанного заключаем, что для P_μ -п. в. траектории τ и любого элемента $g \in G$ последовательность слов $\mathfrak{N}_Q(\tau^{Qg}g^{-1})$ сходится.

Теперь заметим, что для любых элементов g и h из G и для P_μ -п. в. траектории τ последовательности $\mathfrak{N}_Q(\tau^{Qg}g^{-1})$ и $\mathfrak{N}_Q(\tau^{Qh}h^{-1})$ сходятся к одному и тому же пределу. (Это следует из леммы 3.4, в силу которой для P_μ -п. в. траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ найдутся такое $k \in \mathbb{N}$ и такое бесконечное множество $L \subset \mathbb{N}$, что для каждого $l \in L$ верно $\tau_l \in Qg$ и $\tau_{l+k} = \tau_l g^{-1}h \in Qh$, так что последовательности $\tau^{Qg}g^{-1}$ и $\tau^{Qh}h^{-1}$ имеют бесконечные совпадающие подпоследовательности.)

¹⁰Эта лемма является интерпретацией в терминах стабильных нормальных форм того известного факта, что границы-выход группы и ее подгруппы конечного индекса совпадают.

Остается заметить, что всякая траектория τ распадается на конечное число подпоследовательностей вида τ^{Qp} , где $p \in \Pi$. Соответственно, последовательность слов $\{\mathfrak{N}_G(\tau_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, которая по определению формы $\mathfrak{N}_G$ есть последовательность $\{\mathfrak{N}_Q(\tau_i \pi_{\tau_i}^{-1}) \pi_{\tau_i}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, распадается на последовательности $\mathfrak{N}_Q(\tau^{Qp} p^{-1}) p$, $p \in \Pi$. В силу изложенного выше для P_μ -п. в. траектории τ эти последовательности слов сходятся, причем к одному и тому же (бесконечному) пределу. Это означает, что для P_μ -п. в. траектории τ последовательность слов $\{\mathfrak{N}_G(\tau_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ сходится, т. е. форма $\mathfrak{N}_G$ является μ -стабильной.

Список литературы

1. V. A. Kaimanovich, H. Masur, “The Poisson boundary of the mapping class group”, *Invent. Math.*, **125**:2 (1996), 221–264.
2. B. Farb, H. Masur, “Superregidity and mapping class groups”, *Topology*, **37**:6 (1998), 1169–1176.
3. H. Furstenberg, “A Poisson formula for semi-simple Lie groups”, *Ann. of Math.* (2), **77**:2 (1963), 335–386.
4. H. Furstenberg, “Random walks and discrete subgroups of Lie groups”, *Adv. Probab. Related Topics*, vol. 1, Dekker, New York, 1971, 1–63.
5. H. Furstenberg, “Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces”, *Harmonic analysis on homogeneous spaces* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williamstown, MA, 1972), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 193–229.
6. А. М. Вершик, “Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры”, *УМН*, **55**:4 (2000), 59–128; англ. пер.: A. M. Vershik, “Dynamic theory of growth in groups: Entropy, boundaries, examples”, *Russian Math. Surveys*, **55**:4 (2000), 667–733.
7. A. M. Vershik, S. Nechaev, R. Bikbov, “Statistical properties of locally free groups with applications to braid groups and growth of random heaps”, *Comm. Math. Phys.*, **212**:2 (2000), 469–501.
8. А. В. Малютин, “Граница Пуассона–Фюрстенберга локально-свободной группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. IX, Записки науч. сем. ПОМИ, **301**, ПОМИ, СПб., 2003, 195–211; англ. пер.: A. V. Maljutin, “The Poisson–Furstenberg boundary of the locally free group”, *J. Math. Sci.* (N. Y.), **129**:2 (2005), 3787–3795.
9. В. А. Кайманович, “Энтропийный критерий максимальности границ случайных блужданий на дискретных группах”, *Докл. АН СССР*, **280**:5 (1985), 1051–1054; англ. пер.: V. A. Kaimanovich, “An entropy criterion of maximality for the boundary of random walks on discrete groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **31**:1 (1985), 193–197.
10. V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, “Random walks on discrete groups: boundary and entropy”, *Ann. Probab.*, **11**:3 (1983), 457–490.
11. Y. Derriennic, “Entropie, théorèmes limites et marches aléatoires”, *Probability measures on groups*, vol. VIII (Oberwolfach, 1985), Lecture Notes in Math., **1210**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 241–284.
12. А. А. Марков, “Основы алгебраической теории кос”, Тр. МИАН, **16**, Наука, М., 1945, 3–54.
13. А. В. Малютин, “Быстрые алгоритмы распознавания и сравнения кос”, *Геометрия и топология*. 6, Записки науч. сем. ПОМИ, **279**, ПОМИ, СПб., 2001, 197–217; англ. пер.: A. V. Maljutin, “Fast algorithms for identification and comparison of braids”, *J. Math. Sci.* (N. Y.), **119**:1 (2004), 101–111.
14. X. Bressaud, “A normal form for braid groups”, *J. Knot Theory Ramifications*, **17**:6 (2008), 697–732.

15. P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, “Why are braids orderable?”, *Panoramas et Synthèses*, **14**, Soc. Mathématique de France, Paris, 2002.
16. D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publ., Boston, MA, 1992.
17. J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, “A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups”, *Adv. Math.*, **139**:2 (1998), 322–353.
18. P. Dehornoy, “Alternating normal forms for braids and locally Garside monoids”, *J. Pure Appl. Algebra*, **212**:11 (2008), 2413–2439.
19. V. V. Vershinin, “Braids, their properties and generalizations”, *Handbook of algebra*, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 2006, 427–465.
20. M. Gromov, “Hyperbolic groups”, *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer-Verlag, New York, 1987, 75–263.
21. Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **89**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

А. М. ВЕРШИК (A. M. VERSHIK)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию

21.06.2007

А. В. МАЛЮТИН (A. V. MALYUTIN)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru