Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Статистика периодов цепных дробей
квадратичных иррациональностей, *Изв. РАН. Сер. ма-
тем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:23:17

УДК 511.36+511.37

В. И. Арнольд

Статистика периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей

Распределение частот различных неполных частных цепных дробей случайных вещественных чисел было получено в 1928 г. Р. О. Кузьминым и называется поэтому статистикой Гаусса–Кузьмина. Автор давно высказал гипотезу, что неполные частные периодических цепных дробей квадратичных иррациональностей подчиняются в среднем такой же статистике. За последние годы эта гипотеза Арнольда была доказана В. А. Быковским и его учениками. В настоящей работе эти результаты дополнены исследованием статистики длин периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей. В частности, из этой теории следует, что составляющие периоды цепных дробей чисел x , удовлетворяющих уравнению $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами, – вовсе не все случайные последовательности, элементы которых удовлетворяют статистике Гаусса–Кузьмина. Например, эти последовательности являются палиндромами, т. е. переходят в себя, если их читать задом наперед.

Библиография: 18 наименований.

§ 1. Описание наблюдений

Цепные дроби квадратичных иррациональностей (и только их) периодичны. Но период хаотически меняется с изменением иррационального числа, поэтому возникает вопрос об эргодических свойствах этой “случайной функции”.

В настоящей работе приведены результаты эмпирического исследования этого вопроса для корней целочисленных квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$. Длина периода $T(p, q)$ такой иррациональности вычислена в статье для не слишком больших целочисленных значений коэффициентов, $p^2 + q^2 \leq R^2$.

Обозначим через $\hat{T}(R)$ среднее арифметическое значение длин периодов $T(p, q)$ по тем целым точкам круга $p^2 + q^2 \leq R^2$, для которых корни вещественны (т. е. $p^2 - 4q \geq 0$). Проведенные вычисления дали для значений

$$R = 4, 8, 12, 16$$

(вида $R = 4r$, где $r \leq 4$ в наших вычислениях) следующие (растущие примерно как арифметическая прогрессия) средние значения длин периодов:

r	1	2	3	4
$\hat{T}$	0.657	1.597	2.449	3.173

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00104).

При больших значениях r , соответствующих $R \leq 100$, эти средние были посчитаны Ф. Аикарди (при помощи компьютера). Приведем полученные ею результаты (также указывающие на приближенно линейную зависимость, $\hat{T}(R) \sim cR$, где $c \approx 0.15$):

r	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{T}$	3.818	4.511	5.159	5.710	6.354	6.939	7.521	7.996

r	13	14	15	16	17	18	19	20
$\hat{T}$	8.642	9.261	9.764	10.345	10.860	11.410	11.944	12.502

r	21	22	23	24	25
$\hat{T}$	13.107	13.640	14.078	14.614	15.141

В этих вычислениях точкам (p, q) , для которых корни рациональны (целочисленны), приписывается “период” длиной $T = 0$.

Приведенные значения указывают на приблизительную пропорциональность средней длины периода $\hat{T}$ радиусу R круга усреднения (т. е. величине коэффициентов уравнения $x^2 + px + q = 0$).

Линейная неоднородная зависимость $\hat{T} = kR + l$ дает несколько лучшее согласие с наблюдениями, а степенные аппроксимации вида $\hat{T} = CR^\alpha$ приводят на плоскости $(\ln R, \ln \hat{T})$ к хорошо укладывающимся на прямую точкам $(\ln \hat{T} = \ln C + \alpha \ln R)$, причем для коэффициента α наши наблюдения дают значения, отличающиеся от 1 примерно на 0.1 (возможно, из-за не достаточно большого радиуса усреднения).

Линейный рост средней длины периода $\hat{T}$ с ростом коэффициентов уравнения устанавливается лишь за счет усреднения различных скоростей роста, наблюдаемых в разных секторах круга, при удалении от центра ($p = q = 0$) по разным направлениям.

Например, я проделал вычисления аналогичных средних (при $r \leq 8$) для удаления вдоль оси q , а именно, учитывая лишь те точки (p, q) , для которых $|p| \leq 12$, $q \leq 0$. В этом случае получилась следующая таблица средних значений $\hat{T}'$:

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{T}'$	0.724	1.83	2.57	2.56	2.80	3.15	3.33	3.51

На двойной логарифмической бумаге эти значения (особенно при $r \geq 3$) довольно хорошо укладываются на прямую линию, но для наклона $(\ln \hat{T}' = \ln C' + \alpha' \ln R)$ получается значение, значительно меньшее 1 (примерно 0.7).

Аналогичные вычисления с учетом удаления вдоль оси q в обе стороны (без учета ограничения $q \leq 0$) дали таблицу средних значений $\hat{T}''$:

r	1	2	3	4	5	6
$\hat{T}''$	0.66	1.71	2.49	2.53	2.69	2.90

Эти значения дают еще более медленный рост (с показателем $\alpha'' \sim 0.4$).

Поэтому я предполагаю, что при уходе точки (p, q) в направлении оси q в среднем наблюдается скорее поведение $T(p, q)$, пропорциональное квадратному корню из величины коэффициентов: $T \sim C\sqrt{R}$.

При этом я вовсе не утверждаю, что такой рост здесь, как и при предыдущих осреднениях, равномерен по всем лучам изучаемого сектора.

Например, встречаются точки, где $T(p, q)$ принимает гораздо меньшее значение (в частности, $T(p = 0, q = -a^2)$ есть 0 при любом целом a). Дело, однако, в том, что такие точки встречаются (по мере удаления от $p = q = 0$) все реже при больших R , а потому оказывают малое влияние на рост средних арифметических.

Например, $T(p, q) = 0$ лишь для тех значений $-p$, которые являются суммами делителей числа q , дающих в произведении q . Число таких делителей с ростом целого числа q растет в среднем, как $\ln |q|$, поэтому доля всех таких точек (p, q) в круге большого радиуса R будет мала при больших R .

Проведенные вычисления приводят к большому количеству разнообразных наблюдений над цепными дробями корней квадратных уравнений, из которых я здесь упомяну только немногие.

НАБЛЮДЕНИЕ 1. *Все вычисленные периоды цепных дробей оказались палиндромными, т. е. имеют симметрию неполных частных:*

$$a_j = a_k \quad \text{при} \quad k + j = T + 2.$$

ПРИМЕР. Для уравнения $x^2 + x - 60 = 0$ длина периода, $T(-15, -4)$, имеет значение 19 и период состоит из 19 неполных частных [3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 7, 7, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1, 3, 15]:

$$x \approx 7.262087 \dots = 7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}} + \frac{1}{15 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Известно, что таким же свойством палиндромности обладают цепные дроби квадратных корней из всех рациональных чисел [1], удовлетворяющих квадратным уравнениям

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{при} \quad b = 0.$$

Вероятно, тем же методом можно доказать и палиндромность цепных дробей и всех квадратичных иррациональностей, удовлетворяющих квадратным уравнениям при $a = 1$ или $c = 1$.

Но во всяком случае это новый класс квадратичных иррациональностей. Например, уже корень уравнения золотого сечения $x^2 + x - 1 = 0$ не эквивалентен квадратному корню ни из какого рационального числа (при сохраняющих период $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -преобразованиях $x = (ux + v)/(wx + t)$ с $ut - vw = 1$).

Между тем, общие квадратичные иррациональности могут иметь вовсе не палиндромный, а любой период $(a_1, a_2, \dots, a_T)$ (по теореме Лагранжа). Поэтому наши специальные целые квадратичные иррациональности, удовлетворяющие квадратным уравнениям $x^2 + px + q = 0$, обладают особым свойством (общим с квадратными корнями из рациональных чисел).

Это обстоятельство могло бы сказываться и на статистике свойств цепных дробей наших специальных чисел. Например, теорема Кузьмина [2] о частотах неполных частных и их последовательностей распространена (Быковским и Авдеевой; см. [3] и [7]) на усредненные статистики элементов периодов цепных дробей наших квадратичных иррациональностей, хотя их последовательности неполных частных вовсе не столь случайны (хотя бы из-за палиндромности), как у общих цепных дробей.

Вероятно, эти специальные свойства составляющих период неполных частных рассматриваемых цепных дробей замедляют сходимость средних по кругам $p^2 + q^2 \leq R^2$ для частот различных комбинаций неполных частных из периодов к универсальной статистике Гаусса–Кузьмина. Эта сходимость, предположенная мной в работах [4] и [11], теперь доказана, но я допускаю, что из-за палиндромности для достижения заданной точности статистики комбинаций большей длины придется брать средние по кругам большего радиуса R , чем для статистики отдельных неполных частных.

С этой точки зрения было бы интересно рассмотреть средние значения по трехмерным шарам уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, где $a^2 + b^2 + c^2 \leq R^2$, как для длин периодов $T(a, b, c)$, так и для неполных частных a_k (и их конечных комбинаций): будет ли в трехмерных шарах сходимость к эргодическим пределам более быстрой, чем в кругах рассматриваемого случая $a = 1$?

Интересно было бы также рассмотреть с этой точки зрения усреднение статистик цепных дробей собственных чисел матриц $A \in \text{End}(\mathbb{Z}^n)$ и $A \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$ (усредняя по шару $|A| \leq R$). Даже при $n = 2$ эти усреднения не те же, что и по кругам $p^2 + q^2 \leq R^2$. При $n > 2$ следовало бы изучать характеристики как обычных, так и многомерных цепных дробей (см. [4]–[6], [11]).

Для многомерных цепных дробей вместо длины периода T при $n > 2$ было бы интересно рассмотреть целый ряд геометрических объектов “периодической многомерной цепной дроби”. Например, достойны исследования следующие инварианты разбиения тора на многогранники, описываемого как фактор бесконечного $(n - 1)$ -мерного многогранника-паруса, по действию его группы симметрий $\mathbb{Z}^{n-1}$:

- число вершин фактора;
- число его граней (разных многоугольников для $n = 3$);
- суммарное число целых точек граней (разных размерностей);
- сумма целочисленных объемов этих граней (разных размерностей);
- и много других интересных кандидатов.

Роль суммарного числа целых точек (а также суммы длин граней) фактор-многогранника играет при $n = 2$ сумма неполных частных в пределах одного периода, $\Sigma = a_{k+1} + \dots + a_{k+T}$ (с возможным различием четных и нечетных номеров).

Статистика Кузьмина указывает асимптотическое среднее распределение вероятностей значений неполных частных. Для средних $\widehat{\Sigma}(R)$ по кругу $p^2 + q^2 \leq R^2$ сумм, входящих в период неполных частных, было бы естественно ожидать пропорциональной средней длине периода величины $\widehat{\Sigma}(R) \sim \gamma \widehat{T}(R) \sim \gamma CR$, где γ – универсальное среднее значение неполного частного (равное, впрочем, бесконечности).

Приведенные выше примеры показывают некоторый рост отношения $\gamma(R) = \widehat{\Sigma}(R)/\widehat{T}(R)$ с ростом сложности R уравнения, задающего иррациональное число. По-видимому этот рост означает, что при фиксированном радиусе R входящие в период неполные частные еще не достигают своей универсальной статистики Гаусса–Кузьмина (к которой они стремятся при $R \rightarrow \infty$), отклоняясь от нее почему-то к преимущественной частоте меньших значений частных.

Было бы полезно получить (хотя бы экспериментально) информацию о поведении $\gamma(R)$ при больших значениях R , а также объяснить возрастание этого “среднего неполного частного” с ростом R и оценить его скорость.

Было бы интересно понять, какие из перечисленных особенностей статистик периодов цепных дробей иррациональностей вида $x^2 + px + q = 0$ наблюдаются для каких-либо других подклассов квадратичных иррациональностей, хотя бы вида $ax^2 + c = 0$: для других плоскостей в трехмерном пространстве квадратных уравнений могут наблюдаться другие особенности, и их также интересно было бы описать.

Например, из наших таблиц видно, что четные длины периодов ($\widehat{T} = 0, 2, 4, 6, \dots$) встречаются чаще нечетных ($\widehat{T} = 1, 3, 5, 7, \dots$), хотя причины этого явления неясны. Характер убывания частоты встречаемости средней длины периода $\widehat{T}$ с ростом величины $\widehat{T}$ (при заданном значении R) тоже неясен.

Возвращаясь к анализу разного типа роста длин периодов $T(p, q)$ по разным направлениям плоскости с координатами (p, q) , замечу, что со скоростью R в среднем и скоростью $\sqrt{R}$ вдоль оси q растет не только длина периода T , но и квадратный корень из дискриминанта: $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Сдвиг по горизонтали на четное расстояние переводит вертикальную прямую $p = \text{const}$ на этой плоскости в другую такую прямую, вдоль которой зависящая от q последовательность длин периодов $T(p, \cdot)$ остается той же самой (так как значение x изменяется на целое слагаемое).

Только указанная последовательность сдвигается в вертикальном направлении. А именно, вертикальная последовательность чисел $T(p - 1, \cdot)$, занимающая вертикаль с номером $p - 1$, сдвигается по вертикали на p при переходе через p -ю вертикаль к последовательности чисел $T(p + 1, \cdot)$.

Это видно из того, что сдвиг корня $x \mapsto X = (x + s)$ на целое расстояние s действует на коэффициенты уравнения следующим образом:

$$P = p - 2s, \quad Q = q + (s^2 - ps).$$

Поэтому $T(p - 2s, q + (s^2 - ps)) = T(p, q)$, что при $s = 1$ дает $T(p - 2, q - (p - 1)) = T(p, q)$.

Эта формула заставляет длину периода T зависеть лишь от значения дискриминанта $\Delta = p^2 - 4q = P^2 - 4Q$.

Однако в круге $p^2 + q^2 \leq R^2$ дискриминант ведет себя в среднем, как R^2 , так как величина q порядка R мало влияет на $p^2 - 4q$ при p порядка R .

Напротив, вдоль оси q (при ограниченных p^2) дискриминант ведет себя в среднем, как $-4q$, т. е. как R .

Поэтому корень из дискриминанта в среднем ведет себя как R в больших кругах $p^2 + q^2 \leq R^2$ и как $\sqrt{R}$ в высоких узких областях $p^2 + q^2 \leq R^2$, $p^2 \leq \text{const}$ – это именно тот рост, который наблюдается в наших вычислениях длины периода $T(p, q)$.

Разумеется, отношение $T/\sqrt{\Delta}$ вряд ли стремится к постоянной при $R \rightarrow \infty$ вдоль, например, параболы $q = -2p^2$ нулевого значения T в точках, соответствующих уравнениям с целыми корнями, где значения T никак не связаны с величиной дискриминанта Δ , если эти корни не кратные. Функция T обращается в нуль во всех точках, где значение дискриминанта – квадрат целого числа, но я не сумел найти выражение для $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -инвариантной функции T через соответствующее бесконечное произведение.

Речь идет только о том, что это отношение сильно отличается от своего среднего значения лишь в редких специальных точках (p, q) . Насколько часты такие отклонения, было бы интересно исследовать хотя бы экспериментально (подобно исследованиям турбулентной перемежаемости для уклонений от средних других “случайных величин”, проведенным в статьях [8]–[17]).

Указанное замечание особенно интересно для получения обобщений на многомерные цепные дроби, где, например для кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, придется исследовать целый ряд функций от p, q, r (число вершин, число целых точек, число треугольников, сумму целочисленных площадей граней и т. д.). Все эти величины имеют разные асимптотики в разных областях трехмерного пространства с координатами (p, q, r) , а хорошо было бы понять, ведут ли они себя как функции от инвариантов действия соответствующей группы преобразований оси x на трехмерное пространство уравнений.

В заключение отмечу еще одну особенность цепных дробей наших квадратных иррациональностей.

Из сказанного выше ясно, что целочисленными сдвигами уравнения сводятся к двум однопараметрическим сериям:

$$x^2 + q = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + x + q = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим, для примера, вторую серию.

Наблюдения показывают, что для интервала между последовательными нечетными значениями корня из дискриминанта Δ ,

$$(2r + 1)^2 < \Delta < (2r + 3)^2,$$

т. е. для уравнения (2), где $-q$ принимает значения

$$r(r + 1) < -q < (r + 1)(r + 2),$$

период из T неполных частных $(a_2, a_3, \dots, a_{T+1})$ числа $x = \frac{\sqrt{1-4q}-1}{2}$ заканчивается числом $a_{T+1} = 2r + 1$:

$$x = [(a_1 = r), [a_2, a_3, \dots, a_{T+1}], [a_2, a_3, \dots, a_{T+1}], \dots].$$

ПРИМЕР. При $r = 2$ для интервала из пяти значений $6 < -q < 12$ получаются следующие периодические цепные дроби $x = \frac{\sqrt{1-4q}-1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{29}-1}{2} &= [2, [5]], & T &= 1, \quad \Sigma = 5; \\ \frac{\sqrt{33}-1}{2} &= [2, [2, 1, 2, 5]], & T &= 4, \quad \Sigma = 10; \\ \frac{\sqrt{37}-1}{2} &= [2, [1, 1, 5]], & T &= 3, \quad \Sigma = 7; \\ \frac{\sqrt{41}-1}{2} &= [2, [1, 2, 2, 1, 5]], & T &= 5, \quad \Sigma = 11; \\ \frac{\sqrt{45}-1}{2} &= [2, [1, 5]], & T &= 2, \quad \Sigma = 6.\end{aligned}$$

Для этого интервала сумма пяти значений величины T есть 15, а сумма пяти значений величины Σ есть 39. Мы получаем в качестве “среднего неполного частного”

$$\gamma = \frac{\text{сумма } \Sigma}{\text{сумма } T} = \frac{39}{15} = 2.6.$$

Для интервала $12 < -q < 20$ мы находим семь точек:

$-q$	13	14	15	16	17	18	19	Сумма
T	1	6	3	3	4	9	2	28
Σ	7	16	11	9	10	21	8	82

Итак, “следующее среднее” есть

$$\gamma = \frac{\text{сумма } \Sigma}{\text{сумма } T} = \frac{82}{28} = 2.93.$$

Последовательные средние при $1 \leq r \leq 6$ суть

r	1	2	3	4	5	6
Сумма T	6	15	28	44	56	89
Сумма Σ	12	32	82	144	220	356
γ	2	2.6	2.93	3.27	3.93	4.0

Разглядывание (приведенных ниже) таблиц статистик периодических цепных дробей приводит ко многим другим гипотезам. Например, неясно, почему период неполных частных всегда начинается с a_2 и почему $a_2 = 1$ для последних $r + 1$ из $2r + 1$ значений $-q$ между $r(r + 1)$ и $(r + 1)(r + 2)$, и только для них.

§ 2. Таблица длин периодов цепных дробей

Описанные ниже вычисления доставляют цепные дроби квадратичных иррациональностей x , определяемых квадратными уравнениями $x^2 + px + q = 0$ с целыми p и q . Эти периодические дроби имеют периоды длин $T(p, q) = T(-p, q)$

ТАБЛИЦА 2. Длины $T(p, q)$ периодов цепных дробей для корней уравнений $x^2 + px + q = 0$ при $0 \leq p \leq 16$, $-4 \leq q \leq 25$

	$p^2 + q^2 \leq 64$						$p^2 + q^2 \leq 144$					$p^2 + q^2 \leq 256$						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$p \Rightarrow$
-4	0	3	1	0	2	5	5	3	2	9	5	7	2	3	5	19	2	
-3	2	1	0	2	4	3	2	3	6	2	4	4	2	5	6	2	10	
-2	1	0	2	3	2	4	2	6	2	7	2	10	2	12	2	9	2	
-1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1			0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
2	$p^2 + q^2 \leq 16$					0	1	3	4	5	4	9	4	7	4	10	4	4
3					0	1	2	3	5	4	6	7	4	5	12	4	11	
4					0	0	1	4	2	3	6	6	4	8	6	12	4	
5						1	0	1	2	3	2	3	8	5	8	4	6	
6	$p^2 + q^2 \leq 64$					0	2	0	1	6	6	9	2	3	10	14	7	
7							1	2	0	1	2	2	5	4	2	3	6	$p^2 + q^2 \leq 400$
8							0	3	2	0	1	7	4	7	3	15	2	
9							0	1	4	2	0	1	2	4	2	4	4	
10	$p^2 + q^2 \leq 144$						0	2	5	2	0	1	10	2	3	6		
11							1	1	3	4	2	0	1	2	5	5		
12							0	0	4	5	9	2	0	1	12	6		
13								2	1	2	4	4	2	0	1	2		
14	$p^2 + q^2 \leq 256$							1	0	2	3	6	7	2	0	1	$p^2 + q^2 \leq 576$	
15								0	2	1	3	6	7	4	2	0		
16								0	3	0	6	2	6	4	10	2		
17									1	2	1	6	3	4	5	4		
18	$p^2 + q^2 \leq 400$								0	4	0	2	9	8	8	12		
19									1	2	2	1	2	2	5	6		
20									0	1	5	0	7	5	3	8		
21										0	3	2	1	4	4	10	$p^2 + q^2 \leq 784$	
22	$p^2 + q^2 \leq 576$									2	4	4	0	2	7	2		
23										1	1	5	2	1	4	3		
24										0	0	2	9	0	10	2		
25						$p^2 < 4q$						0	2	2	4	2	1	2
q																		
$\downarrow$																		

для бесконечных серий квадратичных иррациональностей, из которых в табл. 1 и табл. 2 участвуют только первые члены. Эти обобщающие теоремы могут иметь много других приложений, кроме приведенного здесь исследования статистик периодических цепных дробей (доставляя, например, информацию о решениях диофантовых уравнений Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$, средний рост которых

при возрастании параметра D тесно связан с нашим исследованием длин $T(p, q)$ периодов).

Читатель может с пользой рассматривать приведенные эмпирические данные, подсказывающие многие закономерности, некоторые из которых обосновываются без труда, другие же приводят к нетривиальным гипотезам, вроде обсуждавшихся выше свойств роста $T(p, q)$ в среднем.

Приведем примеры легких свойств:

$$T(p, q = -p - 1) = 0, \quad T(p, q = -2p - 4) = 0, \quad T(p, q = -3p - 9) = 0.$$

Вообще, $T(p, q = -rp - r^2) = 0$ для любого целого r . Эти свойства доказываются следующим образом: при $q = -r(p + r)$ уравнение $x^2 + px + q = (x - r)(x + p + r) = 0$ имеет целые корни. Поэтому места, занимаемые в табл. 1 и табл. 2 нулями, понятны: они образуют систему арифметических прогрессий разных наклонов r .

Напротив, заполнение таблиц другими числами $T(p, q)$ кажется весьма хаотическим, и я решился бы даже высказать гипотезу, что отличия величин $T(p, q)$ от их (растущих с $R^2 = p^2 + q^2$) средних значений $\hat{T}$ реализуют много квазислучайных свойств (аналогичных свойствам флуктуаций около средних в других задачах теории чисел, включая статистику периодов Ферма–Эйлера и геометрических прогрессий вычетов, рассмотренную в [9], [10], таблицы полей Галуа, где вопрос о псевдослучайности обсуждался в [11], [12], статистику флуктуаций чисел Фробениуса, изученную в статьях [13], [14] методами теории арифметической турбулентности, доставляющей также автомодельные законы чисел больших диаграмм Юнга по их длинам и высотам [15], [16], а также распределение периодов случайных перестановок и автоморфизмов конечных торов [17], [18]).

Обе приведенные таблицы показывают сходный средний рост длин периодов $T(p, q)$ для квадратичных иррациональностей из четных и нечетных столбцов (где p четно или нечетно), которые целочисленным сдвигом корня x приводят уравнение к виду $x^2 + q = 0$ (случай четных p) или к виду $x^2 + x + q = 0$ (случай нечетных p).

Например, для кругов $p^2 + q^2 \leq (4r)^2$ суммы $\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1$ длин периодов из четных столбцов (Σ_0) и из нечетных (Σ_1) получаются следующие:

r	1	2	3	4
$\Sigma_0(r)$	9	108	371	866
$\Sigma_1(r)$	14	120	464	1140
$\Sigma(r)$	23	228	835	2006
$N_0(r)$	17	73	173	317
$N_1(r)$	18	76	172	326
$N(r)$	35	149	345	643
$\hat{T}_0(r)$	0.53	1.48	2.14	2.73
$\hat{T}_1(r)$	0.77	1.58	2.70	3.50
$\hat{T}(r)$	0.66	1.53	2.42	3.20

Средние значения длин периодов по четным столбцам $\hat{T}_0(r) = \Sigma_0(r)/N_0(r)$ получаются делением сумм длин периодов четных столбцов на число N элементов четных столбцов, и аналогично для нечетных столбцов (или без различения четности). Странным образом средние по нечетным столбцам несколько выше, но различие не очень велико и приблизительная пропорция средней длины периода по кругу радиусу круга достаточно хорошо выполняется во всех случаях.

Рис. 1. Распределение длин периодов периодических цепных дробей: количество K_r появлений длины периода $T(p, q) = t$ в круге $p^2 + q^2 = (4r)^2$ (для цепных дробей корней квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$)

Я составил ещё таблицы встречаемости различных значений длины периода для кругов разных радиусов $R = 4r$, $r = 1, 2, 3, 4$. С ростом значения r распределение сдвигается, естественно, в сторону большей распространенности больших периодов. Но общий характер убывания количества $K_r(P)$ появлений длины периода $T(p, q) = t$ в круге $p^2 + q^2 = (4r)^2$ (вроде $K_r \leq \kappa_r - \lambda_r t$) и загадочное превышение частот появления четных длин периодов над частотами нечетных сохраняются во всех случаях (рис. 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Вероятно, аналогичные явления можно было бы получить и для однопараметрического семейства иррациональностей, рассматривая, например, уравнения $x^2 + q = 0$ и $x^2 + x + q = 0$, зависящие от параметра q .

Поскольку столбцы нашей таблицы $\{T(p, q) : p = \text{const}\}$ заполнены (с надлежащим сдвигом) этими стандартными наборами периодов, асимптотическое поведение средних $\tau(R)$ при $|q| \leq R$ от длин периодов для выписанных стандартных иррациональностей связано с асимптотическим поведением наших средних по кругам, $\hat{T}(R)$, простым интегральным преобразованием, так что, например, линейный рост средних $\hat{T}$ по R означает вполне определенное асимптотическое поведение средних $\tau(R)$ при больших R .

Было бы интересно проверить, действительно ли это поведение одинаково для обоих стандартных уравнений (где $p = 0$ и где $p = 1$). Поведение распределений K_r различных длин периодов t для корней стандартных однопараметрических семейств уравнений ($T(0, q) = t$ и $T(1, q) = t$) тоже связано достаточно

ясным образом с поведением распределений K_r длин периодов по большим кругам, но эти однопараметрические задачи заслуживают и самостоятельного исследования.

С другой стороны, аналогичные распределения возникают для цепных дробей собственных чисел (ограниченных) матриц из $\text{End}(\mathbb{Z}^2)$ или из $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, их исследование особенно интересно в связи с переходом к $(n-1)$ -мерным цепным дробям в случае матриц n -го порядка (из $\text{End}(\mathbb{Z}^n)$ или из $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$). Эти распределения не совпадут с описанными выше уже при $n = 2$, но они заслуживают специального исследования.

§ 3. Цепные дроби квадратных корней из целых чисел

Приведенные ниже вычисления дают следующую (довольно странную) таблицу длин периодов $T_0(q) = T(0, q)$ квадратичных иррациональностей $x = \sqrt{-q}$. Если $-q = 10A + B$ – двузначное число с цифрами A и B , то длина периода $T_0(q)$ имеет значения, указанные в табл. 3.

Таблица 3. Длины периодов цепных дробей квадратных корней из двузначных чисел $10A + B$

$A \setminus B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	0	1	2	4	2	0
1	1	2	2	5	4	2	0	1	2	6
2	2	6	6	4	2	0	1	2	4	5
3	2	8	4	4	4	2	0	1	2	2
4	2	3	2	10	8	6	12	4	2	0
5	1	2	6	5	6	4	2	6	7	6
6	4	11	4	2	0	1	2	10	2	8
7	6	8	2	7	5	4	12	6	4	4
8	2	0	1	2	2	5	10	2	6	5
9	2	8	8	10	16	4	4	11	4	2

Интересно, что период длиной 9 не встретился ни разу, а период длиной 3 – только однажды (а из 100 длин периодов в табл. 3 нечетных всего двадцать, включая девять появлений периода длиной 1).

Степень “хаотичности” табл. 3 заслуживает изучения: распределение значений T кажется на вид случайным.

Для второй сотни целых чисел $-q = 100 + 10A + B$ длины $T_0(q)$ периодов цепных дробей квадратных корней из целых чисел $-q$ указаны в табл. 3’.

Глядя на табл. 3 и табл. 3’, легко заметить, что длина периода T_0 разложения в цепную дробь корня квадратного из целого числа $-q$ в среднем растет с этим числом (хотя малые значения, вроде даже $T = 0$ и $T = 1, 2$, встречаются изредка и для больших чисел $-q$).

ТАБЛИЦА 3'. Длины периодов цепных дробей квадратных корней из целых чисел $100 + 10A + B$

$A \backslash B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	12	2	5	9	6	8	15
1	2	6	6	9	6	10	10	6	10	4
2	2	0	1	2	16	5	4	12	4	10
3	3	6	2	16	14	8	4	9	4	18
4	4	4	4	2	0	1	2	2	2	9
5	2	20	2	8	10	4	2	17	8	10
6	8	10	10	18	6	6	22	4	2	0
7	1	2	16	5	4	6	4	8	6	14
8	4	21	2	6	12	5	10	6	8	4
9	14	16	4	13	4	2	0	1	2	20

Чтобы оценить среднюю скорость роста, я составил

$$\text{суммы } S(r) = \sum_{0 < -q \leq 40r} T_0(q) \quad \text{и средние значения } \hat{T}_0(r) = \frac{S(r)}{40r}.$$

Из предыдущих таблиц получаются следующие значения этих величин:

r	1	2	3	4	5
S	98	293	526	779	1085
$\hat{T}_0$	2.45	3.66	4.38	4.87	5.42

Далее, предполагая степенной рост $S(r) \approx Cr^\alpha$, я применил для вычисления показателя степени α двойную логарифмическую бумагу: в случае степенного роста логарифм функции будет линейной неоднородной функцией

$$\lg S(r) \approx \lg C + \alpha \lg r$$

от логарифма аргумента, поэтому на плоскости $(\lg r, \lg S)$ точки должны лежать на прямой, наклон α которой и определяет степень зависимости:

$$\alpha \approx \frac{\lg S(r_2) - \lg S(r_1)}{\lg r_2 - \lg r_1}.$$

Предыдущая таблица дает для десятичных логарифмов график, представленный на рис. 2, откуда видно, что эти точки хорошо ложатся на прямую, и мы получаем

$$\alpha \approx \frac{3.035 - 1.991}{0.699 - 0} \approx \frac{1.044}{0.699} \approx 1.494.$$

Я полагаю, что эти данные подтверждают гипотезу, согласно которой $\alpha = 3/2$. Для усредненных длин периодов $\hat{T}_0$ средний рост величины $S(r)$ порядка $r^{3/2}$ означает рост $\hat{T}_0 \sim C_1 \sqrt{r}$, т. е. от длин периодов порядка $\sqrt{100} = 10$ для

Рис. 2. Вычисление показателя степенного роста функции S при помощи двойной логарифмической бумаги

квадратных корней из первой сотни до длин периодов порядка $\sqrt{200} \sim 14$ – для второй. Согласие кажется вполне убедительным, хотя, конечно, никакого доказательства предложенное асимптотическое поведение средних длин периодов пока не имеет.

При переходе к двухпараметрическому семейству длин периодов $T(p, q)$ разложения в цепную дробь корней квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ из четных столбцов $p = 2s$ усредняемые по кругам $p^2 + q^2 \leq R^2$ числа $T(p, q)$ совпадают с соответствующими сдвигами указанных выше последовательностей чисел T_0 , и (как уже было объяснено выше) рост T_0 порядка $\sqrt{|q|}$ соответствует росту средних $\hat{T}_0(R)$ порядка R (что и наблюдалось выше экспериментально).

Причем для нечетных столбцов также получаются подобные результаты: средняя скорость роста их элементов близка к таковой для четных столбцов.

Доказательство приведенных выше результатов о длинах периодов $T_0(q)$ можно получить прямыми, хотя и длинными, вычислениями.

Особенно просто проверить уже найденные со своими неполными частными периоды (таблицы которых приведены ниже).

ПРИМЕР. Период длиной $T = 1$, состоящий из одного элемента a (и обозначаемый $[a]$), достигается для цепной дроби, имеющей начиная с некоторого места вид

$$t = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}} = \frac{1}{a + t}.$$

Из уравнения $t = \frac{1}{a+t}$ находим $t^2 + at - 1 = 0$.

Если $a = 2A$ – четное число, то сдвиг аргумента приводит это уравнение к уравнению $x^2 = A^2 + 1$ для $x = t + A$:

$$t^2 + 2At - 1 = (t + A)^2 - (1 + A^2) = 0.$$

Поэтому *цепная дробь для корня квадратного x из числа $-q = A^2 + 1$ имеет вид*

$$x = A + t = A + \frac{1}{2A + \frac{1}{2A + \dots}} = [A + [2A]].$$

Полагая $A = 1, 2, 3, 4, \dots$, мы получаем цепные дроби

$$\begin{array}{ll} [1; 2, 2, 2, \dots] & \text{для } \sqrt{2}, \quad [2; 4, 4, 4, \dots] \text{ для } \sqrt{5}, \\ [3; 6, 6, 6, \dots] & \text{для } \sqrt{10}, \quad [4; 8, 8, 8, \dots] \text{ для } \sqrt{17} \end{array}$$

и так далее, причем длина периода $T(A^2 + 1)$ цепных дробей равна единице во всех этих случаях.

Аналогичными выкладками я нашел много других интересных серий цепных дробей. Практически я сперва кустарно вычислял десятки примеров, а уже потом находил общие формулы, подобные приведенным выше, для всех членов серии.

Вот несколько примеров таких серий:

1) $T(\sqrt{A^2 - 1}) = 2$, $x = [A - 1 + [1, (2A - 2)]]$. Эта серия включает квадратные корни x из чисел 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168, 195 (см. таблицы, приведенные выше).

2) $T(\sqrt{A^2 + 2}) = 2$, $x = [A + [A, 2A]]$. Эта серия доставляет цепные дроби квадратных корней x из чисел 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, 123, 146, 171, 198 (см. таблицы, приведенные выше).

3) $T(\sqrt{A^2 + A}) = 2$, $x = [A + [2, 2A]]$. Примеры: $x^2 = 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182$.

4) $T(\sqrt{9A^2 + 16A + 7}) = 4$, период $t = [1, 1, 1, (6A + 4)]$. Примеры: $x^2 = 7, 32, 75, 136$.

5) $T(\sqrt{25A^2 + 36A + 13}) = 5$, период $t = [1, 1, 1, 1, (10A + 6)]$. Примеры: $x^2 = 13, 74, 185$.

6) $T(\sqrt{4A^2 + 7A + 3}) = 4$, период $t = [1, 2, 1, (4A + 2)]$. Примеры: $x^2 = 14, 33, 60, 95, 138, 189$.

7) $T(\sqrt{A^2 - 2}) = 4$, период $t = [1, (A - 2), 1, (2A - 2)]$. Примеры: $x^2 = 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98, 119, 142, 167, 194$.

8) $T(\sqrt{4A^2 + A}) = 2$, период $t = [4, 4A]$. Примеры: $x^2 = 18, 39, 68, 105, 150$.

9) $T(\sqrt{4A^2 + 4}) = 2$, период $t = [A, 4A]$. Примеры: $x^2 = 20, 40, 68, 104, 148$.

Читатель легко может продолжить отыскание подобных серий. Значение $T = 3$ достигается (из-за палиндромности периода) только в случаях периода $t = [A, A, B]$. Соотношения между A и B нетрудно явно найти из тождества

$$t = \frac{1}{A + \frac{1}{A + \frac{1}{B + t}}},$$

которое должно для этого принимать вид $t^2 + pt + q = 0$ с четным p и целым q .

Простейший пример доставляет цепная дробь

$$\sqrt{41} = [6 + [2, 2, 12]],$$

но другие примеры получаются для квадратных корней из довольно больших чисел (в наших таблицах только $\sqrt{41}$ и $\sqrt{130}$).

Самый быстрый из использованных мною приемов вычисления периодов цепных дробей квадратичных иррациональностей доставляет следующий алгоритм.

Пусть исследуемое число имеет вид $x_k = \frac{\sqrt{Q}+u_k}{v_k}$ с целыми u_k и v_k (например, $u_1 = 0$ и $v_1 = 1$ для $x_1 = \sqrt{Q}$).

Обозначим через a_k целую и через t_k дробную части исследуемого числа:

$$x_k = a_k + t_k, \quad 0 < t_k < 1.$$

Тогда

$$t_k = x_k - a_k = \frac{\sqrt{Q} - w_k}{v_k},$$

где $w_k = a_k v_k - u_k$ — целое число. Разложение x_k в цепную дробь начнем с шага

$$x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}};$$

тогда

$$x_{k+1} = \frac{1}{t_k} = \frac{v_k(\sqrt{Q} + w_k)}{Q - w_k^2}.$$

По каким-то непонятным мне причинам знаменатель во всех примерах делится на v_k :

$$Q - w_k^2 = v_k v_{k+1}.$$

Мы приходим к прежней задаче для числа

$$x_{k+1} = \frac{\sqrt{Q} + u_{k+1}}{v_{k+1}},$$

где

$$u_{k+1} = a_k v_k - u_k, \quad v_{k+1} = \frac{Q - (a_k v_k - u_k)^2}{v_k}.$$

Я так и не понял, почему число v_{k+1} всегда получается целым, да и геометрический смысл связанных с цепной дробью для $\sqrt{Q}$ векторов (u_k, v_k) остается неясным.

Рассмотрим пример работы описанного алгоритма: вычислим цепную дробь для числа $x_1 = \sqrt{187} \approx 13.7$. Ясно, что $a_1 = 13$, поэтому $t_1 = \sqrt{187} - 13$. Значит, $x_2 = 1/t_1 = (\sqrt{187} + 13)/(187 - 169) = (\sqrt{187} + 13)/18 \approx 26.7/18 \approx 1.5$. Поэтому $a_2 = 1$, $t_2 = x_2 - a_2 = (\sqrt{187} - 5)/18$. Значит, $x_3 = 1/t_2 = 18(\sqrt{187} + 5)/(187 - 25)$.

Чудесным образом разность $187 - 25 = 162$ делится на 18, так что мы находим $x_3 = (\sqrt{187} + 5)/9$. Стало быть, $x_3 \approx 18.7/9 \approx 2.08$, $a_3 = 2$ и $t_3 = x_3 - a_3 = (\sqrt{187} - 13)/9$. Следовательно, $x_4 = 1/t_3 = 9(\sqrt{187} + 13)/(187 - 169)$.

Чудесным образом разность $187 - 169 = 18$ делится на 9, так что $x_4 = (\sqrt{187} + 13)/2 \approx 13.3$. Продолжая таким же образом, мы находим $a_4 = 13$, $t_4 = (\sqrt{187} - 13)/2$, $x_5 = (\sqrt{187} + 13)/9 \approx 2.3$. Отсюда $a_5 = 2$, $t_5 = (\sqrt{187} - 5)/9$, $x_6 = (\sqrt{187} + 5)/18 \approx 1.1$. Следовательно, $a_6 = 1$, $t_6 = (\sqrt{187} - 13)/18$, $x_7 = \sqrt{187} + 13 \approx 26$. Итак, $a_7 = 26$, $t_7 = x_7 - 26 = \sqrt{187} - 13 = t_1$.

Из этого следует, что вся процедура повторится (с периодом длиной $T = 7 - 1 = 6$): $t_1 = t_7 = t_{13} = t_{19} = \dots$, так что вычисленная нами цепная дробь $x_1 = [13 + [1, 2, 13, 2, 1, 26]]$ имеет длину периода $T(\sqrt{187}) = 6$.

Хотя я и не доказал соотношений делимости, благодаря которым приведенный алгоритм так быстро работает, они выполняются для всех двухсот примеров, указанных в приведенных выше таблицах. Моя уверенность во всегдашней делимости числа $Q - (a_k v_k - u_k)^2$ на v_k , нужной для вычисления v_{k+1} , основана на том, что во всех примерах, где делимость нарушалась, удавалось быстро найти ошибку в предыдущих вычислениях чисел u_k и v_k .

Кроме того, интересно отметить, что свойство палиндромной симметрии $a_k = a_l$ при $k + l = T + 2$, $1 < k < T + 1$, дополняется удивительной симметрией встречающихся в наших вычислениях векторов (u_k, v_k) . А именно, в приведенных выше обозначениях равенство $t_k = (\sqrt{Q} - w_k)/v_k$ сопровождается симметричным ему равенством $x_l = (\sqrt{Q} + w_k)/v_k$ (и, конечно, в то же время $x_k = (\sqrt{Q} + w_l)/v_l$, $t_l = (\sqrt{Q} - w_l)/v_l$).

В предыдущем примере, где $Q = 187$, $T(\sqrt{187}) = 6$, имеем, например,

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{\sqrt{187} - 13}{9}, & x_5 &= \frac{\sqrt{187} + 13}{9}, \\ t_5 &= \frac{\sqrt{187} - 5}{9}, & x_3 &= \frac{\sqrt{187} + 5}{9}, \end{aligned}$$

хотя двойственные числа $u_3 = 13$ и $u_5 = 5$ связаны между собой совсем не просто.

Я надеюсь, что эта двойственность между t_k и x_l при $k + l = T + 2$ (как и симметрии $v_k = v_l$, $w_k = w_l$ при $k + l = T + 2$, $u_k = u_l$ при $k + l = T + 1$) поможет понять геометрический смысл векторов (w_k, v_k) .

Неполные частные, составляющие периоды наших цепных дробей, выписаны ниже в таблицах, составленных отдельно для каждой длины периода $T > 1$ цепной дроби числа $\sqrt{Q}$.

Период длиной $T = 2$ составляют неполные частные $[a, b]$. При $Q < 225$ реализуются следующие 52 случая:

Q	3	6	8	11	12	15	18	20	24	27	30	35	38	39	40
a	1	2	1	3	2	1	4	2	1	5	2	1	6	4	3
b	2	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	10	12	12	12

Q	42	48	51	56	63	66	68	72	80	83	84	87	90	99
a	2	1	7	2	1	8	4	2	1	9	6	3	2	1
b	12	12	14	14	14	16	16	16	16	18	18	18	18	18

Q	102	104	105	110	120	123	132	143	146	147	148	150	152
a	10	5	4	2	1	11	2	1	12	8	6	4	3
b	20	20	20	20	20	22	22	22	24	24	24	24	24

Q	156	168	171	182	195	198	200	203	210	224
a	2	1	13	2	1	14	7	4	2	1
b	24	24	26	26	26	28	28	28	28	28

Период длиной $T = 3$ составляют неполные частные $[a, a, b]$. При $Q < 200$ это всего два случая:

$$\sqrt{41} = [6 + [2, 2, 12]], \quad \sqrt{130} = [11 + [2, 2, 22]].$$

Период длиной $T = 4$ составляют неполные частные $[a, b, a, c]$. При $Q < 200$ реализуются всего 32 случая:

Q	7	14	23	28	32	33	34	47	55	60	62	75	78	79
a	1	1	1	3	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1
b	1	2	3	2	1	2	4	5	1	2	6	1	4	7
c	4	6	8	10	10	10	10	12	14	14	14	16	16	16

Q	95	96	98	119	126	128	136	138	141	142	155	167
a	1	1	1	1	4	3	1	1	1	1	2	1
b	2	3	8	9	2	5	1	2	6	10	4	11
c	18	18	18	20	22	22	22	22	22	22	24	24

Q	174	176	180	189	192	194	215	220	222	223
a	5	3	2	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	2	2	5	12	1	4	8	13
c	26	26	26	26	26	26	28	28	28	28

Период длиной $T = 5$ встречается при $Q < 200$ лишь в следующих девяти случаях:

$$\begin{aligned} \sqrt{13} &= [3 + [1, 1, 1, 1, 6]], & \sqrt{85} &= [9 + [4, 1, 1, 4, 18]], \\ \sqrt{29} &= [5 + [2, 1, 1, 2, 10]], & \sqrt{89} &= [9 + [2, 3, 3, 2, 18]], \\ \sqrt{53} &= [7 + [3, 1, 1, 3, 14]], & \sqrt{125} &= [11 + [5, 1, 1, 5, 22]], \\ \sqrt{74} &= [8 + [1, 1, 1, 1, 16]], & \sqrt{173} &= [13 + [6, 1, 1, 6, 26]], \\ \sqrt{185} &= [13 + [1, 1, 1, 1, 26]]. \end{aligned}$$

Период длиной $T = 6$ с неполными частными $[a, b, c, b, a, d]$ встречается при $Q < 200$ лишь в следующих 23 случаях:

Q	19	21	22	45	52	54	57	59	70	77	88
a	2	1	1	1	4	2	1	1	2	1	2
b	1	1	2	2	1	1	1	2	1	3	1
c	3	2	4	2	2	6	4	7	2	2	1
d	8	8	8	12	14	14	14	14	16	16	18

Q	107	111	112	114	117	131	164	165	175	178	183	188
a	2	1	1	1	1	2	1	1	4	2	1	1
b	1	1	1	2	4	4	4	5	2	1	1	2
c	9	6	2	10	2	11	6	2	1	12	8	13
d	20	20	20	20	20	22	24	24	26	26	26	26

Период длиной $T = 7$ встречается у цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ при $Q < 200$ только в двух случаях:

$$\sqrt{58} = [7 + [1, 1, 1, 1, 1, 1, 14]],$$

$$\sqrt{73} = [8 + [1, 1, 5, 5, 1, 1, 16]].$$

Период длиной $T = 8$ состоит из неполных частных $[a, b, c, d, c, b, a, e]$ и при $Q < 200$ встречается у цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ в следующих 13 случаях:

Q	31	44	69	71	91	92	108	135	153	158	160	177	188
a	1	1	3	2	1	1	2	1	2	1	1	3	1
b	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1	1	3	2
c	3	1	1	1	5	2	1	1	2	3	1	2	2
d	5	2	4	7	1	4	4	1	2	12	5	8	6
e	10	12	16	16	18	18	20	22	24	24	24	26	26

Период длиной $T = 9$ при $Q < 200$ встречается у цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ только в следующих четырех случаях:

$$\sqrt{106} = [10 + [3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20]],$$

$$\sqrt{113} = [10 + [1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 20]],$$

$$\sqrt{137} = [11 + [1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 22]],$$

$$\sqrt{149} = [12 + [4, 1, 5, 3, 3, 5, 1, 4, 24]].$$

В большинстве случаев нечетной длины периода T цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ само число Q тоже нечетно, и уж во всяком случае во всех примерах нечетной длины периода, приведенных выше ($Q = 106, 58, 74$), число Q не делится на 4.

Период длиной $T = 10$ в цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ состоит из неполных частных $[a, b, c, d, e, d, c, b, a, f]$ и при $Q < 200$ встречается в 10 случаях:

Q	43	67	86	93	115	116	129	154	161	186
a	1	5	3	1	1	1	2	2	1	1
b	1	2	1	1	2	3	1	2	2	1
c	3	1	1	1	1	2	3	3	4	1
d	1	1	1	4	1	1	1	1	2	3
e	5	7	8	6	1	4	6	2	1	4
f	12	16	18	18	20	20	22	24	24	26

Периоды длиной $T > 10$ встречаются реже, и я выпишу ответы при $Q < 200$ так: если длина периода T четна, то он состоит из неполных частных $[a, \dots, d,$

$e, d, \dots, a, f]$ и выписывается только набор $\{a, \dots, d, e; f\}$ из $T/2 + 1$ частных, если же длина периода T нечетна, то он состоит из неполных частных $[a, \dots, d, d, \dots, a, f]$ и выписывается набор $\{a, \dots, d; f\}$ из $(T + 1)/2$ частных.

Приведем эти ответы (период везде начинается почему-то уже с неполного частного a_2 , целая часть числа $\sqrt{Q}$ ниже не указана).

Случай $T = 11$:

$$\sqrt{61} \sim \{1, 4, 3, 1, 2; 14\}, \quad \sqrt{76} \sim \{1, 2, 1, 1, 5; 16\}, \\ \sqrt{97} \sim \{1, 5, 1, 1, 1; 18\}.$$

Случай $T = 12$:

$$\sqrt{46} \sim \{1, 3, 1, 1, 2, 6; 12\}, \quad \sqrt{127} \sim \{3, 1, 2, 2, 7, 11; 22\}, \\ \sqrt{103} \sim \{6, 1, 2, 1, 1, 9; 20\}, \quad \sqrt{184} \sim \{1, 1, 3, 2, 1, 2; 26\}.$$

Случай $T = 13$:

$$\sqrt{193} \sim \{1, 8, 3, 2, 1, 3; 26\}.$$

Случай $T = 14$:

$$\sqrt{134} \sim \{1, 1, 2, 1, 3, 1, 10; 22\}, \quad \sqrt{179} \sim \{2, 1, 1, 1, 3, 5, 13; 26\}, \\ \sqrt{190} \sim \{1, 3, 1, 1, 1, 2, 2; 26\}.$$

Случай $T = 15$:

$$\sqrt{109} \sim \{2, 3, 1, 2, 4, 1, 6; 20\}.$$

Случай $T = 16$:

$$\sqrt{94} \sim \{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8; 18\}, \quad \sqrt{133} \sim \{1, 1, 7, 5, 1, 1, 1, 2; 22\}, \\ \sqrt{124} \sim \{7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4; 22\}, \quad \sqrt{172} \sim \{8, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 6; 26\}, \\ \sqrt{191} \sim \{1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 13; 26\}.$$

Случай $T = 17$:

$$\sqrt{157} \sim \{1, 1, 7, 1, 5, 2, 1, 1; 24\}.$$

Случай $T = 18$:

$$\sqrt{139} \sim \{1, 3, 1, 7, 7, 1, 1, 2, 11; 22\}, \quad \sqrt{163} \sim \{1, 3, 3, 2, 1, 1, 7, 1, 11; 24\}.$$

Случай $T = 20$:

$$\sqrt{151} \sim \{3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 11; 24\}, \quad \sqrt{199} \sim \{9, 2, 1, 2, 2, 5, 4, 1, 1, 13; 28\}.$$

Случай $T = 21$:

$$\sqrt{181} \sim \{2, 4, 1, 8, 6, 1, 1, 1, 1, 2; 26\}.$$

Случай $T = 22$:

$$\sqrt{166} \sim \{1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12; 24\}.$$

Бóльшие длины периодов T при $Q < 200$ не наблюдаются.

Рассматривая приведенные цепные дроби, можно сделать много наблюдений, еще ожидающих доказательства в более общем случае. Например, первый период цепной дроби для числа $\sqrt{Q}$ составляют неполные частные $[a_2, a_3, \dots, a_{T+1}]$ (для второго корня $-\sqrt{Q}$ квадратного уравнения $x^2 = Q$ период такой же, но предпериод часто оказывается более длинным). И если целое число Q заключено между квадратами двух последовательных целых чисел:

$$A^2 < Q < (A + 1)^2,$$

то последнее неполное частное a_{T+1} периода цепной дроби числа $\sqrt{Q}$ всегда одинаково: оно всюду равно $2A$ в этом интервале значений числа Q (хотя ни этот факт, ни хотя бы четность числа a_{T+1} не доказаны для значений Q , больших 200).

Приведенные выше таблицы позволяют дополнить значение длины периода $T_0(Q)$ суммой $\Sigma(Q)$ неполных частных, составляющих этот период. Отношение $\lambda(Q) = \Sigma(Q)/T_0(Q)$ определяет среднее по периоду значение неполного частного (для данной иррациональности $\sqrt{Q}$).

Асимптотическая справедливость универсального распределения (Гаусса–Кузьмина) неполных частных цепных дробей случайных вещественных чисел (согласно исследованиям Быковского и его учеников она выполняется в среднем и для квадратичных иррациональностей) наводит на мысль, что при больших Q указанное среднее по периоду неполное частное $\lambda(Q) = \Sigma(Q)/T_0(Q)$ должно стремиться к универсальному, не зависящему от Q пределу (такому же, как для случайных чисел, т. е. равному бесконечности).

Приведенные выше таблицы показывают заметный рост среднего по периоду неполного частного $\lambda(Q)$ иррациональности $\sqrt{Q}$ с ростом Q (по меньшей мере в смысле роста чезаровских средних по все более длинным интервалам оси Q). Но этот рост (асимптотику которого при $Q \rightarrow \infty$ следовало бы подробнее исследовать хотя бы экспериментально, перейдя от Q порядка 200 к Q порядка 1000) – недоказанное в общем виде наблюдение.

Не объяснено также, почему нечетные значения длины периода $T_0(Q)$ встречаются настолько реже четных (и, например, отсутствуют для делящихся на 4 значений $Q < 200$).

Характер убывания с ростом значения t частот разных значений t длины периода $T_0(Q)$, встречающихся в фиксированном интервале $Q \leq R$, также не имеет пока никакого теоретического объяснения. Впрочем, наряду с общим убыванием частот при росте t интересны и флуктуации, связанные с арифметическими свойствами числа t : некоторые значения t (как 2, 4, 8, 16) встречаются заметно чаще соседей, а некоторые (как 3, 9, 11, 13, 15, 17) – заметно реже.

§ 4. Цепные дроби корней уравнений $x^2 + x = Q$

Приведенный выше анализ уравнения $x^2 = Q$ переносится на (соответствующий нечетным столбцам таблиц периодов длиной $T(p, q)$) случай уравнения $x^2 + x = Q$ почти дословно, но результаты доставляют другие ответы, которые и собраны в настоящем параграфе.

Длины периодов цепных дробей одинаковы для обоих корней $x_{\pm} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ уравнения $x^2 + px + q = 0$, и в случае уравнения $x^2 - px + q = 0$ получаются такие же длины. При этом корни второго уравнения – это противоположные корням первого уравнения числа $-x_{\pm}$.

Поэтому каждый из корней второго уравнения $x'_{\pm} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ получается из соответствующего корня первого целочисленным сдвигом ($x'_+ = -x_- = x_+ + p$, $x'_- = -x_+ = x_- + p$). Это доказывает, что пара периодов разложений обоих корней уравнения в цепные дроби не меняется при изменении знака коэффициента p . Но нетрудно доказать и совпадение обоих членов этой пары, $T_+ = T_-$. Дело в том, что нетрудно выразить x_- через x_+ дробно-линейным преобразованием (из $SL(2, \mathbb{Z})$), а при таком преобразовании числа в его цепной дроби меняется только конечное число неполных частных (так что период периодической цепной дроби сохраняется и даже состоит из одинаковых неполных частных для исходного и измененного числа).

В соответствии со сказанным мы приводили выше (для уравнения $x^2 = Q$) и будем приводить ниже (для уравнения $x^2 + x = Q$) только цепные дроби для корня x_+ . Предпериоды для второго корня x_- (и матрицы преобразований из $SL(2, \mathbb{Z})$, переводящих x_+ в x_-) довольно интересным образом зависят от параметров p и q уравнения $x^2 + px + q = 0$, но я не включаю эти ответы в статью (хотя и посчитал их).

При $Q = 10A + B < 100$ цепные дроби корней уравнения $x^2 + x = Q$ имеют следующие длины периодов $T_1(Q)$:

$A \backslash B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	1	3	2	0	1	4	3
1	5	2	0	1	6	3	3	4	9	2
2	0	1	7	2	9	3	6	7	7	2
3	0	4	10	4	7	4	3	5	8	5
4	10	2	0	1	12	5	3	4	15	3
5	14	4	12	4	16	2	0	1	9	2
6	19	2	16	6	3	8	11	5	6	9
7	15	2	0	1	10	10	4	6	19	3
8	4	3	16	6	21	6	10	9	9	2
9	0	1	16	7	4	6	12	7	16	5

Эти значения длин периодов хорошо укладываются в линейный относительно $\sqrt{Q}$ в среднем рост функции $T_1(Q)$ по Q . А именно, суммы $S(s) = \sum_{Q \leq 20s} T_1(Q)$ имеют при $s = 1, 2, \dots, 5$ значения 50, 141, 257, 411, 571. На плоскости $(\lg s, \lg S)$ получаются мало отклоняющиеся от прямой пять точек (рис. 3).

Наклон этой прямой $(2.76 - 1.78)/0.70 \approx 1.40$ близок к росту сумм $S(s)$ порядка $s^{3/2}$, т. е. к росту слагаемых (а значит, и средних длин периодов), пропорциональному $s^{1/2}$, так что $\hat{T}_1(Q) \approx \text{const } \sqrt{Q}$ (как и для длин периодов $\hat{T}_0(Q)$ цепных дробей квадратных корней).

Рис. 3. Вычисление показателя степенного роста функции S при помощи двойной логарифмической бумаги для корней уравнения $x^2 + x = Q$

Вычисления периодов доставляют также и составляющие период неполные частные. Для $Q = 10A + B$ суммы Σ неполных частных, составляющих период цепной дроби корня x уравнения $x^2 + x = Q$, зависят от Q следующим образом:

$A \setminus B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	3	5	4	0	5	10	7
1	11	6	0	7	16	11	9	10	21	8
2	0	9	21	12	27	11	14	17	23	10
3	0	11	32	18	27	18	13	15	28	19
4	32	12	0	13	38	25	19	18	47	15
5	44	16	38	18	50	14	0	15	39	20
6	59	18	54	28	17	24	31	21	28	29
7	49	16	0	17	44	36	28	32	65	21
8	26	19	54	22	71	24	34	37	47	18
9	0	19	60	37	28	32	42	31	66	35

Скорость роста этих чисел $\Sigma(Q)$ с ростом Q я исследовал тем же билוגарифмическим анализом, нарисовав точки с координатами $\lg s$ и $\lg \sigma$ для $\sigma(s) = \Sigma(0) + \Sigma(1) + \dots + \Sigma(20s)$. Эти точки тоже довольно хорошо укладываются на прямую (рис. 4).

Наклон этой "прямой" в среднем равен $\frac{3.35-2.13}{0.699-0} \approx 1.74$. Этот рост соответствует росту средних значений сумм неполных частных порядка $Q^{0.74}$. А поскольку число этих частных $\hat{T}_1(Q)$ растёт, как мы видели, в среднем примерно как $Q^{0.5}$, то среднее по периоду неполное частное периодической цепной дроби корня x уравнения $x^2 + x = Q$ проявляет тенденцию роста с Q примерно, в среднем, как $Q^{0.24}$.

Для этого роста не видно явных оснований, так как согласно Быковскому и его ученикам средние значения неполных частных периодических цепных дробей корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ устанавливаются асимптотически на том же уровне, что и для цепных дробей случайных вещественных чисел.

Если понимать это асимптотическое утверждение как справедливое хотя бы приблизительно и до предельного перехода, то из него следует, что средние по периодам значения неполных частных корня уравнения $x^2 + px + q = 0$ (или,

Рис. 4. Вычисление показателя степенного роста функции σ при помощи двойной логарифмической бумаги для корней уравнения $x^2 + x = Q$

например, уравнения $x^2 + x = Q$) не должны сильно меняться при росте коэффициентов уравнений, так как они должны быть близки к своим значениям для случайных вещественных чисел, доставляемых статистикой Гаусса–Кузьмина.

Я думаю, однако, что этот парадокс может быть объяснен следующим образом.

Дело в том, что сходимость к пределу частот появления различных неполных частных или их комбинаций, доказанная Быковским и его сотрудниками, очень неравномерная: она имеет место для каждой фиксированной комбинации частных, а не для всех этих комбинаций сразу.

Если бы универсальную статистику можно было применять к периодам наших квадратичных иррациональностей, то необходимые в проведенных выше экспериментах порядки величин и описанный выше средний рост длины периода $T(p, q)$ с ростом чисел $(p$ и $q)$ были бы невозможны.

Дело в том, что если обозначить через h энтропию динамической системы Гаусса, порождающей цепные дроби ($u \mapsto \frac{1}{u} - [\frac{1}{u}]$), то число слов длины m , составленных из неполных частных, росло бы с m асимптотически экспоненциально, как e^{hm} . Но число точек круга $p^2 + q^2 \leq R^2$ растет вместе с R как R^2 , и если бы они кодировались периодами именно длины T , то мы получили бы R^2 порядка e^{hT} , откуда T должно было бы расти не как (наблюдаемая у нас) степень ограничивающего числа R , а только как его логарифм.

Более быстрый рост длины периода T вместе с R означает, что периоды – не произвольные комбинации неполных частных, составленные из них с выполнением частотных характеристик статистики Гаусса–Кузьмина (учитывающей и частоты каждого неполного частного $a = 1, 2, 3, \dots$, и частоты каждой пары $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)$, и т. д.), но что для составляющих периоды неполных частных выполняются какие-то другие соотношения.

Например, даже без учета частот, уже на теоретико-множественном уровне, набор неполных частных, составляющих период нашей квадратичной иррациональности, вовсе не произволен: он удовлетворяет каким-то (неизвестным мне) соотношениям, которые, несомненно, заслуживают внимательного изучения.

Например, всегда наблюдаемое у нас соотношение палиндромности нарушается даже для более общих квадратичных иррациональностей (период которых

может быть совершенно произвольным конечным набором неполных частных по теореме Лагранжа).

Все такие соотношения, выделяющие наши периоды, следовало бы дополнить соответствующими статистическими закономерностями, отличающими статистику наших неполных частных периодов наших квадратичных иррациональностей $x^2 + px + q = 0$ при $p^2 + q^2 \leq R^2$ от универсальной.

Дело в том, что, хотя для каждого конечного набора неполных частных его встречаемость в качестве поднабора периодов при $R \rightarrow \infty$ стремится к универсальной частоте Гаусса–Кузьмина, этот набор может даже вовсе не встречаться в качестве полного периода наших иррациональностей (например, если он не палиндромен) или может встречаться у нас гораздо реже, чем при $R \rightarrow \infty$.

Вследствие этого статистика встречаемостей всевозможных наборов при фиксированном, даже очень большом, значении R может быть похожей на универсальную только для достаточно коротких наборов, тогда как распределение длинных наборов по частотам может сильно зависеть от R .

Это различие объяснило бы наблюдаемый нелогарифмически быстрый рост средних длин периодов $\hat{T}(R)$ с радиусом R круга усреднения: он указывает на значительно большую зависимость между собой неполных частных, составляющих периоды наших квадратичных иррациональностей, чем зависимости, имеющиеся в универсальной статистике Гаусса–Кузьмина. Энтропия этой статистики, вероятно, сильно отличается от формулы

$$h = - \sum p_k \log p_k,$$

соответствующей независимости неполных частных k частот p_k . Но я, к сожалению, не видел работ, где была бы вычислена или оценена энтропия динамической системы Гаусса–Кузьмина.

Аналогом палиндромности для этой общей статистики цепных дробей вещественных чисел является такое свойство: одинаковы ли частоты, с которыми встречаются конечные наборы неполных частных $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$?

Я думаю, что в статистике Гаусса–Кузьмина это так, но доказательства не видел.

С точки зрения статистики периодов было бы, пожалуй, полезно рассмотреть статистику цепных дробей рациональных чисел u/v , так как в этом случае ограничения типа палиндромности отпадают, так что на теоретико-множественном уровне любой конечный набор реализуется. Вместо длины периода $T(p, q)$ я рассмотрел бы длину $L(u, v)$, определяемую как число сложений в записи цепной дроби

$$\frac{u}{v} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{L+1}}}.$$

Например, $L(1, v) = L(u, 1) = L(u, u) = 0$, а $L(5, 8) = 3$.

Таблица чисел $L(u, v)$ при $1 \leq u \leq 20$, $1 \leq v \leq 20$ напоминает таблицы длин периодов $T(p, q)$ и своей хаотичностью, и ростом средних $\widehat{L}(R)$ по кругам $u^2 + v^2 \leq R^2$ при росте радиуса R круга.

Из табл. 4 получается средний рост $\widehat{L}(R) \sim R/25$ при $R \leq 32$, и можно предположить, что он соответствует энтропии динамической системы Гаусса–Кузьмина, так что отличие от этого роста средней длины периода $\widehat{T}(R)$ свидетельствует о существенном отличии статистики неполных частных наших специальных квадратичных иррациональностей, когда R , хотя бы и большое, фиксировано, от универсальной статистики Гаусса–Кузьмина.

Таблица 4. Длины цепных дробей рациональных чисел

$v \backslash u$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
4	0	0	1	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2	0
5	0	1	2	1	0	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0	1	2	3	2	0
6	0	0	0	1	1	0	1	1	1	2	2	0	1	1	1	2	2	0	1	1
7	0	1	1	2	2	1	0	1	2	2	3	3	2	0	1	2	2	3	3	2
8	0	0	2	0	3	1	1	0	1	1	3	1	4	2	2	0	1	1	3	1
9	0	1	0	1	2	1	2	1	0	1	2	1	2	3	2	3	2	0	1	2
10	0	0	1	1	0	2	2	1	1	0	1	1	2	2	1	3	3	2	2	0
11	0	1	2	2	1	2	3	3	2	1	0	1	2	3	3	2	3	4	4	3
12	0	0	0	0	2	0	3	1	1	1	1	0	1	1	1	1	3	1	4	2
13	0	1	1	1	3	1	2	4	2	2	2	1	0	1	2	2	2	4	2	3
14	0	0	2	1	2	1	0	2	3	2	3	1	1	0	1	1	3	2	3	2
15	0	1	0	2	0	1	1	2	2	1	3	1	2	1	0	1	2	1	3	1
16	0	0	1	0	1	2	2	0	3	3	2	1	2	1	1	0	1	1	2	1
17	0	1	2	1	2	2	2	1	2	3	3	3	2	3	2	1	0	1	2	3
18	0	0	0	1	3	0	3	1	0	2	4	1	4	2	1	1	1	0	1	1
19	0	1	1	2	2	1	3	3	1	2	4	4	2	3	3	2	2	1	0	1
20	0	0	2	0	0	1	2	1	2	0	3	2	3	2	1	1	3	1	1	0

Доля нулей в табл. 4 асимптотически стремится к нулю, когда размер R табл. 4 растет.

Действительно, нули соответствуют сократимым дробям $u/v = w$ (или $v/u = w$). При фиксированном номере строки количество делящихся на v чисел $u \in v\mathbb{Z}$ равно примерно R/v , поэтому во всех R строках число нулей

этого вида будет порядка

$$\frac{R}{1} + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \cdots + \frac{R}{R} = R \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{R} \right) \sim R \ln R.$$

Это число мало по сравнению со всей (равной R^2) площадью табл. 4 при больших R , так что асимптотически при $R \rightarrow \infty$ доля нулей исчезает.

Интересно, что периоды длиной $T(p, q) = 0$ встречаются с такой же асимптотически исчезающей частотой (уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет целые корни, в точности когда $-p$ представляет собой сумму делителя числа q с дополнительным делителем, а число всех делителей числа q в среднем растет с q как $\ln q$, так что при $0 < p < R$, $0 < q < R$ число точек (p, q) , где $T = 0$, получается порядка $\sum_q \ln q$, т. е. порядка $R \ln R$, как и число нулей длины $L(u, v)$ в квадрате такой же величины).

Средние значения $\hat{L}(r)$ длины L по кругам $u^2 + v^2 \leq R^2$, вычисленные по таким таблицам при $R = 4r$, $r = 1, 2, 4, 8$, получились следующими:

r	1	2	4	8
$\hat{L}$	0.25	0.49	0.95	1.33

Рост средней длины непрерывной дроби с ростом числителей и знаменателей рациональных чисел наблюдается, но, по-видимому, он замедляется с ростом радиуса R круга усреднения, не знаю, степенным (с меньшим единицы показателем) или логарифмическим образом.

В случае степенного роста отношения $\hat{L}(2r)/\hat{L}(r)$ не зависели бы от r , тогда как $\hat{L}(2)/\hat{L}(1) \approx 2$, а $\hat{L}(8)/\hat{L}(4) \approx 1.4$ — значительно меньшее число.

Вычислялись приведенные в таблицах цепные дроби таким же способом, как указано в предыдущем параграфе для квадратных корней. При этом наблюдаются те же удивительные делимости знаменателей на числители и такие же симметрии палиндромного типа, что и для квадратных корней (с тем же отсутствием доказательства того, что эти наблюдения будут сохраняться и при больших значениях параметра Q квадратного уравнения

$$x^2 + x = Q,$$

чем значения Q , изменяющиеся от 1 до 100, рассмотрением которых мы здесь ограничиваемся).

Например, получаются следующие серии ответов.

1. Серия $Q = r(r + 3) + 1$. Получаемая для корня $x = \frac{\sqrt{1+4Q}-1}{2}$ нашего уравнения цепная дробь периода с $T = 2$ имеет вид $x = [r + [1, (2r + 1)]]$. При $r = 1, 2, \dots, 10$ находим $Q = 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71, 89, 108, 131$. В этих случаях наши цепные дроби суть

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{21}-1}{2} &= [1 + [1, 3]], & \frac{\sqrt{45}-1}{2} &= [2 + [1, 5]], \\ \frac{\sqrt{77}-1}{2} &= [3 + [1, 7]], & \frac{\sqrt{117}-1}{2} &= [3 + [1, 9]], \\ \frac{\sqrt{165}-1}{2} &= [5 + [1, 11]], & \frac{\sqrt{221}-1}{2} &= [6 + [1, 13]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{285}-1}{2} &= [7 + [1, 15]], & \frac{\sqrt{357}-1}{2} &= [8 + [1, 17]], \\ \frac{\sqrt{433}-1}{2} &= [9 + [1, 19]], & \frac{\sqrt{525}-1}{2} &= [10 + [1, 21]].\end{aligned}$$

В этой серии длина периода есть $T = 2$, сумма неполных частных периода есть $\Sigma = 2r + 2$.

2. Серия $Q = r(r + 1) + 1$. Получаемая для корня $x = \frac{\sqrt{1+4Q}-1}{2}$ нашего уравнения цепная дробь периода с $T = 1$ имеет вид $x = [r + [2r + 1]]$. При $r = 1, 2, \dots, 10$ находим $Q = 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57, 73, 91, 111$. В этих случаях наши цепные дроби имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-1}{2} &= [0 + [1]] & (\text{это "золотое сечение"}), & \frac{\sqrt{13}-1}{2} &= [1 + [3]], \\ \frac{\sqrt{29}-1}{2} &= [2 + [5]], & \frac{\sqrt{53}-1}{2} &= [3 + [7]], & \frac{\sqrt{85}-1}{2} &= [4 + [9]], \\ \frac{\sqrt{125}-1}{2} &= [5 + [11]], & \frac{\sqrt{173}-1}{2} &= [6 + [13]], & \frac{\sqrt{229}-1}{2} &= [7 + [15]], \\ \frac{\sqrt{293}-1}{2} &= [8 + [17]], & \frac{\sqrt{365}-1}{2} &= [9 + [19]], & \frac{\sqrt{445}-1}{2} &= [10 + [21]].\end{aligned}$$

В этой серии длина периода есть $T = 1$, сумма неполных частных периода есть $\Sigma = 2r + 1$.

Серия с периодом длиной $T = 3$. Начнем с дробной доли $t = [a, a, b]$ (повторение неполного частного a диктуется условием палиндромности, но можно считать, что мы просто ограничиваемся этим подслучаем, на самом деле других случаев периода длиной 3 нет, но мы сейчас доказывать это не будем).

Условие 3-периодичности дроби

$$t = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$$

имеет вид

$$t = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{b + t}}}$$

Поскольку $a + \frac{1}{b+t} = \frac{(ab+1)+at}{b+t}$, мы находим

$$\frac{1}{t} = \frac{a(ab+1) + a^2t + b + t}{(ab+1) + at}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{t} = \frac{(a^2b + a + b) + (a^2 + 1)t}{(ab+1) + at}.$$

Для числа t получается квадратное уравнение

$$(a^2 + 1)t^2 + (a^2b + a + b)t = (ab + 1) + at,$$

или, после деления на коэффициент при t^2 ,

$$t^2 + bt = c, \quad \text{где } c = \frac{ab + 1}{a^2 + 1}. \quad (3)$$

Чтобы получилось уравнение из нашего класса $\{x^2 + px + q = 0$ с нечетным $p\}$, нужно, чтобы число c было целым, а b нечетным. Для целого числа c мы находим $(a^2 + 1)c = ab + 1$, так что число c при делении на a должно давать в остатке 1:

$$c = 1 + \beta a, \quad \text{где } \beta \text{ целое.} \quad (4)$$

В этом случае мы находим

$$(1 + a^2)(1 + \beta a) = 1 + ab,$$

откуда следует вывод:

$$ab = a^2 + \beta a + \beta a^3.$$

Поскольку a отлично от нуля (как неполное частное цепной дроби), мы приходим к заключению, что

$$b = a + \beta + a^2\beta, \quad (5)$$

доставляющему вместе с соотношением (4) полную классификацию уравнений (3) с цепной дробью корня x периода длиной $T(p, q) = 3$ (в терминах свободных пока целочисленных параметров a и β , доставляющих цепные дроби $t = [a, a, b]$).

Соответствующее значение коэффициента Q стандартного уравнения $x^2 + x = Q$ выражается через наши параметры a и β условием совпадения дискриминантов стандартного уравнения и уравнения (3). При этом условии уравнение (3) сводится к стандартному целочисленным сдвигом аргумента, если коэффициент b нечетен. Явный вид этого условия совпадения дискриминантов следующий:

$$1 + 4Q = b^2 + 4c. \quad (6)$$

Если коэффициент a четен, то, как видно из формулы (5), коэффициент b нечетен, если и только если нечетно значение параметра β .

Если же коэффициент a нечетен, то $a^2\beta \equiv \beta \pmod{2}$ и по формуле (5) имеем $b \equiv a + 2\beta \pmod{2}$, так что коэффициент b нечетен для всякого значения целого параметра β .

Подставляя в формулы (4)–(6) по очереди разные пары (a, β) , мы исчерпаем все случаи периода длиной $T(1, q) = 3$ для цепной дроби корня стандартного уравнения $x^2 + x + q = 0$ (где $q = -Q$).

Случай $a = 1$. Формулы (4) и (5) принимают вид

$$b = 2\beta + 1, \quad c = \beta + 1.$$

Из формулы (6) находим для коэффициента Q стандартного уравнения

$$x^2 + x = Q$$

выражение

$$Q = \frac{b^2 + 4c - 1}{4} = \beta^2 + 2\beta + 1 = (\beta + 1)^2.$$

Следовательно, для $Q = r^2$ мы получаем $b = 2r - 1$, $c = r$, так что $x = [(r - 1) + [1, 1, (2r - 1)]]$.

При $r = 2, 3, 4, 5, \dots, 10$ мы получаем серию стандартных уравнений с $Q = 4, 9, 16, 25, \dots, 100$, для которых имеем цепные дроби с длиной периода $T = 3$, $x = \frac{\sqrt{4Q+1}-1}{2} = [(r - 1) + [1, 1, (2r - 1)]]$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{17}-1}{2} &= [1 + [1, 1, 3]], & \frac{\sqrt{37}-1}{2} &= [2 + [1, 1, 5]], \\ \frac{\sqrt{65}-1}{2} &= [3 + [1, 1, 7]], & \frac{\sqrt{101}-1}{2} &= [3 + [1, 1, 9]], \\ \frac{\sqrt{145}-1}{2} &= [5 + [1, 1, 11]], & \frac{\sqrt{197}-1}{2} &= [6 + [1, 1, 13]], \\ \frac{\sqrt{257}-1}{2} &= [7 + [1, 1, 15]], & \frac{\sqrt{325}-1}{2} &= [8 + [1, 1, 17]], \\ \frac{\sqrt{401}-1}{2} &= [9 + [1, 1, 19]], & & \dots \end{aligned}$$

Для всей этой серии (при $r > 1$) период цепной дроби имеет длину $T(1, -Q) = 3$, а сумма составляющих период неполных частных есть $\Sigma = 2r + 1$.

При $r = 1$ наши формулы вырождаются в цепную дробь “золотого сечения” ($\beta = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $Q = 1$)

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [1]$$

с длиной периода $T(1, 1) = 1$ и суммой неполных частных $\Sigma(1, 1) = 1$.

Случай $a = 2$. Формулы (4) и (5) в этом случае имеют вид

$$b = 5\beta + 2, \quad c = 2\beta + 1.$$

Чтобы коэффициент в уравнении (3) получался нечетным, даем параметру β нечетные значения: $\beta = 1, 3, 5, 7, \dots$. Мы находим соответственно

$$b = 7, 17, 27, 37, \dots, \quad c = 3, 7, 11, 15, \dots$$

Найденное из формулы (6) число $Q = \frac{b^2+4c-1}{4}$ принимает в этих случаях значения

$$Q = 15, 79, 193, 357, \dots$$

Цепные дроби корней стандартных уравнений $x^2 + x = Q$ имеют периоды из трех неполных частных:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{61}-1}{2} &= [3 + [2, 2, 7]], & \frac{\sqrt{317}-1}{2} &= [8 + [2, 2, 17]], \\ \frac{\sqrt{773}-1}{2} &= [13 + [2, 2, 27]], & \frac{\sqrt{1429}-1}{2} &= [18 + [2, 2, 37]]. \end{aligned}$$

В общем случае $\beta = 2\gamma + 1$ получаем $Q = 25\gamma^2 + 39\gamma + 15$ и

$$\frac{\sqrt{100\gamma^2 + 156\gamma + 61} - 1}{2} = [(3 + 5\gamma) + [2, 2, (7 + 10\gamma)]]].$$

Для этой серии период цепной дроби имеет длину $T(2, -Q) = 3$, а сумма составляющих период неполных частных $[2, 2, b]$ есть $\Sigma = b + 4 = 11 + 10\gamma$ (так как $b = 5\beta + 2$, $c = 2\gamma + 1$).

Случай $a = 3$. Здесь общие формулы имеют вид

$$b = 10\beta + 3, \quad c = 3\beta + 1,$$

откуда $Q = 25\beta^2 + 18\beta + 3$, и мы находим при $\beta = 1, 2, 3, 4$ значения $Q = 46, 139, 282, 475$.

Цепная дробь решения $x = \frac{\sqrt{1+4Q}-1}{2}$ уравнения $x^2 + x = Q$ имеет в этих случаях соответственно вид $[6 + [3, 3, 13]]$, $[11 + [3, 3, 23]]$, $[16 + [3, 3, 33]]$ и $[21 + [3, 3, 43]]$. Здесь $T(1, -Q) = 3$, $\Sigma(1, -Q) = b + 6 = 10\beta + 9$.

Случай $\beta = 1$. В этом случае общие формулы принимают вид

$$b = a^2 + a + 1, \quad c = a + 1$$

(со значениями для $a = 1, 2, 3, 4, 5$, соответственно $b = 3, 7, 13, 21, 31$ и $c = 2, 3, 4, 5, 6$), откуда для $Q = \frac{b^2+4c-1}{4}$ находим $Q = 4, 15, 46, 115, 246$.

Соответствующие этой серии значений Q цепные дроби (с периодом из трех неполных частных $[a, a, (a^2 + a + 1)]$) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{17}-1}{2} &= [1 + [1, 1, 3]], & \frac{\sqrt{61}-1}{2} &= [3 + [2, 2, 7]], & \frac{\sqrt{185}-1}{2} &= [6 + [3, 3, 13]], \\ \frac{\sqrt{461}-1}{2} &= [10 + [4, 4, 21]], & \frac{\sqrt{985}-1}{2} &= [15 + [5, 5, 31]]. \end{aligned}$$

В этом случае мы получаем

$$\begin{aligned} T(1, -(a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 6a + 5)) &= 3, \\ \Sigma(1, -(a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 6a + 5)) &= a^2 + 3a + 1 (= 5, 11, 19, 29, \dots). \end{aligned}$$

Наши общие формулы позволяют исследовать любые пары (a, β) , но для больших значений этих параметров получаются слишком большие значения коэффициента Q стандартного уравнения, так что я ограничился рассмотрением разобранных выше примеров.

Сводку этих примеров доставляет следующая таблица значений $Q(a, \beta)$:

$a \backslash \beta$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	9	16	25	36	49	64	81
2	15	×	79	×	193	×	357	×
3	46	139	282	475	...			
4	115	×	...	×		×		×
5	246	...						

Обратимся теперь к уравнениям $x^2 + x = Q$, для которых разложения корня в цепную дробь имеют длины периодов, большие трех. При $Q < 100$ я все их посчитал, и вот какие выводы следуют из полученных таблиц.

§ 5. Неполные частные цепных дробей корней уравнений $x^2 + x = Q$

Приведу список чисел повторений $\sharp$ разных значений t длин периодов цепных дробей корней ста уравнений $x^2 + x = Q$ при $0 \leq Q < 100$:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\sharp$	10	10	11	10	10	6	7	7	2	7	3	1	2	0	1	1	5	0	0	2	0	1

Интересно, что преимущественное появление четных значений t , наблюдавшееся для дробей $\sqrt{Q}$, здесь малозаметно. Неполные частные, составляющие периоды цепных дробей корней уравнений $x^2 + x = Q$, выписаны выше явно для случая длин периодов $T_1(Q) = 1, 2$ и 3 . При больших длинах периода наблюдаются (для $Q < 100$) следующие неполные частные.

Случай $T_1 = 4$. Период имеет вид $[a, b, a, c]$. Значения неполных частных a, b и c периодов цепной дроби для $x = \frac{\sqrt{4Q+1}-1}{2}$ следующие:

Q	8	17	33	35	47	51	53	76	80	94
$4Q+1$	33	69	133	141	189	205	213	305	321	377
a	2	1	3	2	2	1	1	4	2	4
b	1	1	1	3	1	1	3	3	5	1
c	5	7	11	11	13	13	13	17	17	19
Σ	10	10	18	18	18	16	18	28	26	28

Нечетность неполного частного c является частным случаем более общего факта: последнее неполное частное периода всегда нечетно для корней уравнения $x^2 + x = Q$ (и равно $2r+1$ для $r(r+1) < Q < (r+1)(r+2)$). Но я не знаю общего доказательства этого факта, установленного лишь парой сотен примеров.

Случай $T_1 = 5$. Этот случай реализуется для $Q < 100$ при шести значениях $Q = 10, 37, 39, 45, 67, 99$. Период составляют неполные частные $[a, b, b, a, c]$ (из-за палиндромной симметрии). Параметры $a - c$ и $\Sigma = a + b + b + a + c$ неполных частных периода принимают следующие значения:

Q	10	37	39	45	67	99
a	1	1	1	4	1	2
b	2	1	3	2	2	6
c	5	11	11	13	15	19
Σ	11	15	19	25	21	35

Случай $T_1 = 6$. Этот случай реализуется для $Q < 100$ при семи значениях $Q = 14, 26, 63, 68, 77, 85, 95$. Период составляют неполные частные $[a, b, c, b, a, d]$. Параметры $a - d$ и Σ всех неполных частных периода имеют следующие значения:

Q	14	26	63	68	77	85	95
a	3	1	2	1	3	1	3
b	1	1	4	3	2	2	1
c	1	1	1	5	5	1	5
d	7	9	15	15	17	17	19
Σ	16	14	28	28	32	24	32

Я не знаю, почему s принимает только нечетные (и, следовательно, Σ только четные) значения.

Случай $T_1 = 7$. Этот случай реализуется для $Q < 100$ при семи значениях $Q = 22, 27, 28, 34, 40, 93, 97$. Период составляют неполные частные $[a, b, c, c, b, a, d]$. Параметры $a - d$ и Σ всех неполных частных периода имеют следующие значения:

Q	22	27	28	34	40	93	97
a	4	1	1	2	1	6	2
b	1	2	4	1	5	2	1
c	1	1	2	5	2	1	3
d	9	9	9	11	11	19	19
Σ	21	17	23	27	27	37	31

Здесь нечетность суммы неполных частных периода объясняется упомянутой выше нечетностью последнего неполного частного d .

Случай $T_1 = 8$ реализуется только при $Q = 38$ и при $Q = 65$. Эти значения составляют цепные дроби

$$\frac{\sqrt{153} - 1}{2} = [5 + [1, 2, 5, 1, 5, 2, 1; 11]], \quad \Sigma = 28,$$

$$\frac{\sqrt{261} - 1}{2} = [7 + [1, 1, 2, 1, 2, 1, 1; 15]], \quad \Sigma = 24.$$

Нечетность среднего (четвертого) неполного частного периода, делающая четной сумму Σ неполных частных периода (ввиду нечетности последнего неполного частного), остается при других реализациях Q значения $T_1(Q) = 8$ недоказанной гипотезой.

Случай $T_1 = 9$ реализуется при семи значениях $Q < 100$, а именно при значениях $Q = 18, 24, 58, 69, 75, 87, 88$. Период составляют неполные частные $[a, b, c, d, d, c, b, a, e]$. Параметры $a - e$ и Σ всех неполных частных периода принимают следующие значения:

Q	18	24	58	69	75	87	88
a	1	2	7	1	5	1	1
b	3	2	1	4	1	5	8
c	2	1	1	1	2	3	2
d	1	4	3	1	1	1	4
e	7	9	15	15	17	17	17
Σ	21	27	39	29	35	37	47

Я не выписываю здесь предпериодов соответствующих непрерывных дробей корня

$$x = \frac{\sqrt{1+4Q} - 1}{2}$$

уравнения $x^2 + x = Q$, так как почему-то во всех приведенных выше примерах этот предпериод ограничивается целой частью числа x , а за ней сразу начинается период:

$$x = [[x], [a_2, a_3, \dots, a_{T+1}]].$$

Я не доказал, что это останется верным и при всех $Q > 100$.

Случай $T_1 = 10$ реализуется при $Q < 100$ для трех значений $Q = 32, 74, 86$:

$$\frac{\sqrt{129} - 1}{2} = [5 + [5, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 5; 11]], \quad \Sigma = 32,$$

$$\frac{\sqrt{297} - 1}{2} = [8 + [8, 1, 1, 3, 1, 3, 1, 1, 8; 17]], \quad \Sigma = 44,$$

$$\frac{\sqrt{345} - 1}{2} = [8 + [1, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 1; 17]], \quad \Sigma = 34.$$

Четность сумм Σ всех неполных частных, составляющих период длиной $T_1 = 10$, объясняется нечетностью среднего (пятого) неполного частного периода и остается при бóльших 100 значениях Q недоказанной гипотезой.

Удивительно часто встречается при $Q < 100$ значение $T_1(Q) = 16$: это происходит при пяти значениях $Q = 54, 62, 82, 92, 98$. Период составляют неполные частные $[a, b, c, d, e, f, g, h, g, f, e, d, c, b, a; k]$ Параметры $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ и Σ всех неполных частных периода таковы:

Q	54	62	82	92	98
a	1	2	1	9	2
b	6	1	1	1	2
c	2	1	3	1	2
d	3	3	8	4	1
e	4	2	1	3	9
f	1	1	3	1	4
g	1	7	1	1	1
h	1	5	1	1	5
k	13	15	17	19	19
Σ	60	54	54	60	66

Четность сумм Σ для периодов из 16 неполных частных объясняется нечетностью среднего неполного частного g , для которого, однако, при $Q > 100$ нет никаких доказательств.

Остающиеся, бóльшие 10, длины $T_1(Q) = t$ периодов непрерывных дробей корней уравнений $x^2 + x = Q$ встречаются при $Q < 100$ в следующих случаях:

$T_1(66) = 11$, а именно

$$\frac{\sqrt{265} - 1}{2} = [7 + [1, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1; 15]], \quad \Sigma = 31;$$

$T_1(44) = T_1(96) = 12$, а именно

$$\frac{\sqrt{117} - 1}{2} = [6 + [6, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 6; 13]], \quad \Sigma = 38,$$

$$\frac{\sqrt{385} - 1}{2} = [9 + [3, 4, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 3; 19]], \quad \Sigma = 42;$$

$T_1(50) = 14$, а именно период длиной 14 имеет цепная дробь

$$\frac{\sqrt{201} - 1}{2} = [6 + [1, 1, 2, 3, 6, 1, 3, 1, 6, 3, 2, 1, 1; 13]], \quad \Sigma = 44;$$

$T_1(70) = 15$, а именно период длиной 15 имеет цепная дробь

$$\frac{\sqrt{281} - 1}{2} = [7 + [1, 7, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 7, 1; 15]], \quad \Sigma = 49.$$

Период длиной $T_1(Q) = 19$ имеют при $Q < 100$ две цепные дроби корней уравнения $x^2 + x = Q$, а именно это происходит при $Q = 60$ и при $Q = 78$:

$$\frac{\sqrt{241} - 1}{2} = [7 + [3, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 7, 7, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1, 3; 15]], \quad \Sigma = 59,$$

$$\frac{\sqrt{313} - 1}{2} = [8 + [2, 1, 8, 5, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 1, 2; 17]], \quad \Sigma = 65.$$

Самый большой период из цепных дробей корней уравнений $x^2 + x = Q$ имеет для $Q < 100$ длину $T_1(84) = 21$. Это цепная дробь

$$\frac{\sqrt{337} - 1}{2} = [8 + [1, 2, 8, 1, 5, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 1, 8, 2, 1; 17]].$$

Сумма Σ всех 21 неполных частных, составляющих этот период, равна 71.

Доказательства сформулированных выше в виде многочисленных таблиц теорем о цепных дробях для корней уравнений $x^2 + x = Q$ проводятся так: нужно просто вычислить эти дроби.

Прямое вычисление сколько-нибудь длинных цепных дробей чисел, заданных своими десятичными знаками, быстро становится невозможным даже для вычислительной машины, когда дробь длинная, из-за очень быстрой потери точности.

Поэтому, хотя я и пытался идти этими методами вычислительной математики, для определения периодов квадратичных иррациональностей пришлось изобрести более быстрые методы, которые и описаны в настоящей статье.

Список литературы

1. V. Arnold, "Arithmetics of binary quadratic forms, symmetry of their continued fractions and geometry of their de Sitter world", *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, **34**:1 (2003), 1–42.
2. Р. О. Кузьмин, "Об одной задаче Гаусса", *Докл. АН СССР, сер. А*, 1928, № 18–19, 375–380; R. O. Kuz'min, "Sur un problème de Gauss", *Anni Congr. Intern. Bologne*, **6** (1928), 83–89.
3. М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистике Гаусса–Кузьмина*, Дальнаука, Владивосток, 2002.
4. В. И. Арнольд, *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2001.
5. H. Tsuchihashi, "Higher-dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities", *Tohoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 607–639.
6. O. Karpenkov, *On examples of two-dimensional continued fractions*, № 0430, Cahiers du Ceremade-Université, Paris-Dauphine, 2004, 18 p..
7. М. О. Авдеева, "О статистиках неполных частных конечных цепных дробей", *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: М. О. Avdeeva, "On the statistics of partial quotients of finite continued fractions", *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.

8. В. И. Арнольд, “Слабые асимптотики чисел решений диофантовых уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:4 (1999), 65–66; англ. пер.: V. I. Arnold, “Weak asymptotics for the numbers of solutions of diophantine problems”, *Funct. Anal. Appl.*, **33**:4 (1999), 292–293.
9. В. И. Арнольд, “Динамическая система Ферма–Эйлера и статистика арифметики геометрических прогрессий”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:1 (2003), 1–18; англ. пер.: V. I. Arnold, “Fermat–Euler dynamical system and the statistics of the arithmetics of geometrical progressions”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:1 (2003), 1–15.
10. V. Arnold, “Ergodic and arithmetical properties of geometrical progression’s dynamics and of its orbits”, *Mosc. Math. J.*, **5**:1 (2005), 5–22.
11. В. И. Арнольд, *Задачи семинара 2003–2004*, МЦНМО, М., 2005.
12. В. И. Арнольд, *Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа*, МЦНМО, М., 2005.
13. V. I. Arnold, “Geometry and growth rate of Frobenius numbers of additive semigroups”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **9**:2 (2006), 95–108.
14. V. Arnold, “Arithmetical turbulence of selfsimilar fluctuations statistics of large Frobenius numbers of additive semigroups of integers”, *Moscow Math. J.*, **7**:2 (2007), 173–193; ICTP Preprints Archive, IC/2006/037, http://users.ictp.it/~pub_off/preprints-sources/2006/IC2006037P.pdf.
15. V. Arnold, “Number-theoretical turbulence in Fermat–Euler arithmetics and large young diagrams geometry statistics”, *J. Math. Fluid Mech.*, **7** (2005), 4–50.
16. V. Arnold, “Statistics of the symmetric group representations as a natural science question on asymptotics of Young diagrams”, *Representation theory, dynamical systems, and asymptotic combinatorics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **217**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 1–7.
17. В. И. Арнольд, *Экспериментальное открытие математических фактов*, Цикл лекций, прочитанных в летней школе “Современная математика” (Дубна, июль 2005 г.), МЦНМО, М., 2007.
18. V. Arnold, “Statistics of Young diagrams of cycles of dynamical systems for finite tori automorphisms”, *Moscow Math. J.*, **6**:1 (2006), 43–56.

В. И. Арнольд (V. I. ARNOL'D)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: arnold@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
15.06.2007