Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Полякова, Семейство категорий логтерминальных пар и автоморфизмы поверхностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 103–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:13:24

УДК 512.7

Ю. М. Полякова

Семейство категорий логтерминальных пар и автоморфизмы поверхностей

На основе двумерной логтеории Мори развит категорный аппарат, позволяющий дать описание группы бирегулярных автоморфизмов комплексной квазипроективной поверхности с логтерминальными особенностями посредством групп бирегулярных автоморфизмов ее компактификаций.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: категории, бирегулярные автоморфизмы, бирациональные отображения, линки, логтерминальные особенности, правило Оре.

§ 1. Введение

Одна из основных проблем бирациональной геометрии состоит в факторизации бирациональных отображений алгебраических многообразий, т. е. в представлении этих отображений в виде композиции более простых. В настоящее время в качестве класса таких простых отображений обычно рассматривают класс линков, т. е. бирациональных отображений γ таких, что γ и γ^{-1} стягивают не более одного неприводимого дивизора.

В случае решения задачи факторизации естественным образом возникает проблема явного описания полной системы соотношений в группоиде, порожденном множеством линков.

В [1] для комплексных расслоений Мори размерности два и три с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями доказана теорема о существовании разложения бирациональных отображений на элементарные линки. Основным методом доказательства является метод максимальных особенностей, опирающийся на неравенство Нётера–Фано. Случай расслоений Мори размерности два полностью изучен в статье [2], где дано полное описание всех линков и найдена полная система соотношений между последними.

Для пояснения возникающих проблем сформулируем теорию бирациональных отображений алгебраических многообразий в терминах теории категорий. Рассмотрим категорию M , объектами которой являются алгебраические многообразия, а морфизмами – бирациональные морфизмы. Очевидно, в этой категории множество всех морфизмов образует левый локализирующий класс, т. е. выполнено левое правило Оре. Бирациональные отображения можно определить как классы эквивалентности диаграмм типа “верхний домик” (такие диаграммы обычно называются *частичными разрешениями* соответствующих им бирациональных отображений), для которых естественным образом с помощью

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00051, 99-01-01-204, 02-01-22005, 08-01-00-641-а) и CRDF (грант № RUM1-2661-MO-05).

правила Оре определяется композиция. Таким образом, категория алгебраических многообразий с бирациональными отображениями изоморфна локализации категории M по множеству всех ее морфизмов (весь категорный аппарат изложен в § 2). Отметим, что в работе [1] разложение на элементарные линки по сути применялось не к классу эквивалентности “верхних домиков”, а к некоторому его представителю, т. е. к частичному разрешению бирационального отображения.

Обобщением многообразий, рассмотренных в [1], могут служить двумерные и трехмерные логтерминальные пары, являющиеся расслоениями Мори. Их исследованию посвящена работа [3]. *Двумерной логтерминальной парой* (V, C) называется пара такая, что V – поверхность с $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $C = \sum_{i=1}^n a_i C_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $0 < a_i \leq 1$, – приведенная кривая на V , называемая *границей*, C_i – неприводимые компоненты кривой C , причем существует бирациональный морфизм $\varphi: W \rightarrow V$, являющийся последовательным стягиванием $(K_W + C^W)$ -экстремальных лучей дивизориального типа (см. § 3) и такой, что W – неособая поверхность, C^W – кривая с нормальными пересечениями и $\varphi_*(C^W) = C$, где φ_* – отображение прямого образа, а K_W – канонический дивизор на W . Тогда естественным обобщением бирациональных морфизмов $\varphi: V' \rightarrow V$ алгебраических многообразий являются морфизмы $\varphi: (V', C') \rightarrow (V, C)$, которые представляют собой такую последовательность стягиваний $(K_{V'} + C')$ -экстремальных лучей дивизориального типа, что $\varphi_*(C') = C$. Описанную таким образом категорию мы в дальнейшем будем называть *категорией логтерминальных пар*. Заметим, что морфизмы пар могут стягивать экстремальные лучи, не содержащиеся в границе, а такие морфизмы не сохраняют исходную открытую поверхность $U = V \setminus C$.

В работе [3] почти дословно воспроизводится техника Корти для логтерминальных пар, т. е. с помощью метода максимальных особенностей осуществляется разложение диаграмм типа “верхний домик” на элементарные “верхние домики”, называемые, как и раньше, *линками*. Однако для категории логтерминальных пар это не приводит к таким сильным результатам, как в [1] и [2], так как в общем случае для “верхних домиков” не определена композиция, что, во-первых, не позволяет строить “большие домики” из элементарных линков и, во-вторых, лишает осмысленности постановку задачи о нахождении множества определяющих соотношений.

Отсутствие естественной композиции “верхних домиков” объясняется невыполненностью правила Оре в категории логтерминальных пар в связи с двумя основными причинами. Первая из них (устраняемая) состоит в том, что коэффициенты a_i при кривых C_i могут быть различны. Вторая (не устраняемая при использовании техники из [1], т. е. при рассмотрении расслоения Мори) состоит в том, что можно стягивать экстремальные лучи, не принадлежащие границе.

Описанные выше препятствия к выполнению правила Оре в категории логтерминальных пар привели нас к рассмотрению семейства категорий R_p , где $p \in \mathbb{Q}$, $0 \leq p \leq 1$, эквивалентным таким подкатегориям в категории логтерминальных пар, в которых коэффициенты a_i при кривых C_i совпадают и равны фиксированному значению p и все стягивания происходят внутри границы. В этих категориях правило Оре выполнено при $p < 1$ (см. § 4). Рассматривать их необходимо в связи с тем, что в категории R_1 (именно ее в результате мы будем исследовать) правило Оре не выполнено, а выполнено только на некоторой ее подкатегории, описываемой посредством перехода к пределу при $p \rightarrow 1$.

Изначальной целью настоящего исследования было применение логтеории Мори к описанию группы бигулярных автоморфизмов комплексной квазипроективной поверхности посредством групп автоморфизмов ее компактификаций. Эта задача решалась в серии работ М.Х. Гизатуллиным и В.И. Даниловым [4]–[9]. Авторы изучали неособые поверхности и компактификации, ввиду чего их доказательства были очень громоздки. Рассмотрение особых, а точнее логтерминальных, поверхностей и компактификаций позволяет существенно упростить решение задачи.

Упомянутая выше задача об описании группы автоморфизмов квазипроективной поверхности сводится к разложению морфизмов категории частных рассматриваемых нами категорий R_p на элементарные линки и к описанию полной системы соотношений между последними (см. § 8). Подход, основанный на двумерной логтеории Мори, т. е. на рассмотрении не просто бирациональных отображений, а отображений пар (поверхность и кривая на ней), является наиболее естественным для решения поставленной задачи, поскольку мы рассматриваем компактификации неполной поверхности. При этом очевидно, что стягивания экстремальных лучей, не лежащих в границе, не являются допустимыми морфизмами в нашем случае, так как не сохраняют исходную квазипроективную поверхность (что соответствует определению категорий R_p). Решению задачи факторизации для данного случая, корректному определению композиции элементарных линков и поиску полной системы соотношений между последними посвящена настоящая работа. В конце статьи мы показываем, как на основе этих данных описать группы автоморфизмов некоторого класса квазипроективных поверхностей.

Ограничившись рассмотрением подкатегорий категории логтерминальных пар, для которых коэффициенты a_i при кривых C_i совпадают и равны фиксированным значениям p (такие категории содержат подкатегории, эквивалентные вводимым нами категориям R_p), мы могли бы воспользоваться разложением на линки для расслоений Мори в таких подкатегориях с помощью [3] и получить доминирующее разложение на линки в категории “верхних доминов” над R_p (очевидно, что поверхности, соответствующие парам, являющимся объектами категорий R_p , могут иметь в общем случае большой ранг группы Пикара и не являться расслоениями Мори). Далее, используя выполненность правила Оре для категорий R_p , можно было бы дать описание полной системы соотношений между линками и в случае отсутствия нетривиальных соотношений решить задачу об автоморфизмах. Однако подобное решение было бы не менее громоздко, чем конструкция Гизатуллина и Данилова. Поэтому мы нигде не опираемся на конструкцию Бруно и Мацуки и приводим совершенно другой подход к решению задачи (см. § 8).

Основным практическим результатом статьи является построение категорного аппарата, значительно упрощающего предложенный ранее в [9] подход к описанию группы бигулярных автоморфизмов комплексной квазипроективной поверхности. Поэтому читателю, интересующемуся конкретными приложениями, мы советуем сразу перейти к последним двум параграфам, а потом просмотреть предыдущий текст. Основным теоретическим результатом работы мы считаем исследование возможности введения композиции для отображений логтерминальных пар, которое позволяет нам дать описание полной системы соотношений между линками. Отметим, что без описания соотношений (а точнее, без доказательства отсутствия нетривиальных соотношений) поставленная

задача не может быть решена. Мы надеемся, что теоретические (категорные) исследования, проведенные в работе, проясняют логтеорию Мори и могут быть полезны при рассмотрении аналогичных задач в больших размерностях.

Изложим теперь более подробно содержание настоящей работы.

В § 2 мы развиваем категорный аппарат, необходимый нам в дальнейшем. По произвольной малой категории T , ее подкатегории и подмножеству в множестве объектов строятся нужные нам категории диаграмм (например, категории “стрелок” и “верхних домиков”). Приводятся определения левого и правого правил Оре. Показано, что если в категории T выполнено левое правило Оре, то в категории “верхних домиков” над этой категорией можно ввести отношение эквивалентности, частично определить композицию классов эквивалентности “верхних домиков” и, таким образом, построить категорию частных $\tilde{T}$ для данной категории T (см. определение 2.7). Мы даем определение лево- и правожестких объектов категории, а также $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных категорий. Для $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории T вводятся понятия множества $\text{Ob}^M T$ минимальных объектов T , множества $M_T(\Theta)$ минимизаций произвольного подмножества Θ объектов категории T , а также множества минимальных разрешений объекта в подкатегории Ω категории T и множества минимальных разрешений морфизма γ категории частных $\tilde{T}$. Заметим, что правожесткость минимального объекта $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории означает отсутствие нетривиальных “верхних домиков” над минимальными объектами, концом одной из “стрелок” которых является этот объект; в случае выполненности в категории левого правила Оре правожесткость минимального объекта означает отсутствие морфизмов категории частных из данного объекта в любой другой минимальный объект. Нами доказана теорема 2.16 о том, что в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории выполнено правое правило Оре тогда и только тогда, когда любой ее объект имеет единственную с точностью до изоморфизма минимизацию. В конце § 2 для $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных категорий даются определения разложимости морфизмов, а также замыкания одного подмножества объектов в другом.

В § 3 мы сначала напоминаем некоторые понятия и теоремы из теории Мори. Затем даем определение $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной разложимой категории пар R , объектами которой являются пары (V, C) такие, что V – нормальная проективная поверхность с $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, C – приведенная кривая на V , а морфизмами $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ являются бирациональные морфизмы $\varphi: V \rightarrow V'$ такие, что $C' = \varphi^{-1}(C)$, т. е. φ стягивает компоненты кривой C . Структура $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории естественным образом определяется на R числом Пикара. В категории R мы вводим семейство $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных разложимых подкатегорий R_p p -логтерминальных пар, где $p \in \mathbb{Q}$, $0 \leq p \leq 1$. Объектами этих подкатегорий являются пары (V, C) такие, что пара (V, pC) логтерминальна, а морфизмами – последовательности стягиваний $(K_V + pC)$ -экстремальных лучей дивизориального типа, лежащих в C , где K_V – канонический дивизор на V . Мы также определяем левые и правые предельные категории при стремлении параметра к определенному значению. Далее исследуются элементарные свойства перечисленных выше категорий, в частности доказываются теорема 3.14 об инвариантном представлении морфизмов и разложимость предельных категорий.

В § 4 мы определяем категорию неособых пар R^N как полную подкатеорию в категории R , множество объектов которой состоит из пар (V, C) таких, что

V – неособая поверхность, а C – кривая с простыми нормальными пересечениями (это именно та категория, которую рассматривали Гизатуллин и Данилов). Далее исследуются общие свойства категорий R , R^N и R_p . В теореме 4.6 нами доказана выполненность левого правила Оре в категории X , где X – одна из категорий R , R^N , R_p при $p < 1$ или предельная категория. Отсюда следует, что хорошо определена категория частных $\tilde{X}$ категории X . В утверждении 4.7 мы доказываем, что любой объект категории X имеет единственное минимальное разрешение особенностей с точностью до изоморфизма и что любой морфизм категории частных $\tilde{X}$ имеет единственное минимальное разрешение с точностью до изоморфизма. В теореме 4.12 и замечании 4.13 установлено, что категории X и $\tilde{X}$ являются полными подкатегориями в R и $\tilde{R}$ соответственно. Мы также показываем, что правило Оре не выполнено в категории R_1 и что R_1 не является полной подкатегорией в категории R .

В § 5 мы изучаем более тонкие свойства категорий R_p . В теореме 5.12 произведена классификация особенностей объектов этих категорий и элементарных морфизмов, соответствующих стягиваемым в данных категориях экстремальным лучам. Из этой классификации вытекают следующие результаты (см. следствие 5.13):

1) категория R_{p_1} является полной подкатегорией в категории R_{p_2} при $4/5 < p_1 < p_2 < 1$, и обе они являются полными подкатегориями в категории R_{1-} ; категория $R_{p-} \sim R_p$ является полной подкатегорией в категории R_{p+} при $4/5 < p < 1$, где R_{p-} и R_{p+} – соответственно левые и правые предельные категории при стремлении параметра к p ; аналогичные утверждения выполнены для категорий частных;

2) категория R_{p_1} является полной подкатегорией в категории R_{p_2} при $0 < p_2 < p_1 < 1/3$, и обе они являются полными подкатегориями R_{1-} ; категория $R_{p+} \sim R_p$ является полной подкатегорией в категории R_{p-} при $0 < p < 1/3$; аналогичные утверждения выполнены для категорий частных;

3) $\text{Ob } R_{1-} = \text{Ob } R_1$.

В § 6 мы определяем функтор разрешения особенностей $\mathcal{N}_X: X \rightarrow R^N$ и индуцируемый им функтор категорий частных $\tilde{\mathcal{N}}_X: \tilde{X} \rightarrow \tilde{R}^N$, где X – одна из категорий R_p при $p < 1$ или предельная категория. В теореме 6.2 мы доказываем, что при $4/5 < p < 1$ любой минимальный объект категории R^N имеет единственную с точностью до изоморфизма минимизацию в категории R_p , т. е. морфизм на минимальный в R_p объект. Заметим, что при $p < 4/5$ минимизация может быть не единственна. Поэтому можно определить функтор минимизации $\tilde{\mathcal{M}}_{R_p}: \tilde{R}^{NM} \rightarrow \tilde{R}_p^M$, где $\tilde{R}^{NM}$ и $\tilde{R}_p^M$ – полные подкатегории в $\tilde{R}^N$ и $\tilde{R}_p$, множества объектов которых являются множествами минимальных объектов соответствующих категорий. Функтор минимизации является квазиобратным к ограничению функтора разрешения особенностей на соответствующие подкатегории. Отметим, что не для любого минимального объекта категории R_p его разрешение особенностей будет минимальным объектом категории R^N . Нами доказана следующая важная для дальнейших построений теорема 6.13 о замкнутости: пусть $(V, C), (V', C') \in \text{Ob } \tilde{R}_p^M$ при $4/5 < p < 1$ и их разрешения особенностей минимальны в R^N , пусть, далее, $\gamma: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$, $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_p^M$ (пунктирными стрелками мы обозначаем морфизмы категорий частных) и пара морфизмов $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$ – минимальное разрешение γ ; тогда для любого $\varphi'': (W, C^W) \rightarrow (V'', C'')$ такого, что $\varphi \in \text{Mor } R_p$,

$(V'', C'') \in \text{Ob } \widetilde{R}_p^M$, разрешение особенностей пары (V'', C'') также будет минимальным объектом категории R^N .

В § 7 для пар (V, C) , являющихся объектами категории X , где X – одна из категорий R^N , R_p или предельная категория, по аналогии с [5] мы определяем эффективную кривую $F_X(V, C) \subset C$ как кривую, состоящую из всех неприводимых компонент F_i кривой C , для которых существуют морфизмы $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi_i: (W, C^W) \rightarrow (V^i, C^i)$ такие, что φ_i стягивает $\varphi_{\text{соб}}^{-1}(F_i)$, где $\varphi_{\text{соб}}^{-1}(F_i)$ – собственный прообраз кривой F_i . Эта кривая в случае выполнения в X левого правила Оре инвариантна относительно морфизмов категории частных, где инвариантность понимается в следующем смысле. Пусть пара морфизмов $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$ – разрешение морфизма $\gamma: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$; тогда

$$F_X(V', C') = \varphi'_*(\varphi^{-1}(F_X(V, C))).$$

(Здесь φ^{-1} – отображение полного прообраза.) Очевидно, что при $F_X(V, C) = 0$ пара (V, C) является правожестким объектом категории X .

В утверждении 7.3 мы доказываем, что если $(V, C), (V', C') \in \text{Ob}^M X$, где через $\text{Ob}^M X$ обозначается множество минимальных объектов категории X , $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$ и не существует морфизмов $\rho, \psi, \psi' \in \text{Mor } X$ таких, что $\varphi = \psi \circ \rho$, $\varphi' = \psi' \circ \rho$, то точки неопределенности отображения φ^{-1} лежат в $F_X(V, C)$, а точки неопределенности отображения $(\varphi')^{-1}$ лежат в $F_X(V', C')$.

В теоремах 7.19, 7.20 и 7.22 произведена классификация таких кривых и получен конструктивный способ их нахождения (последнее не было сделано в [5] для категории R^N). Установлено, что любая связная компонента кривой $F_X(V, C)$ при $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ содержит неприводимую компоненту с неотрицательным индексом самопересечения. Доказано, что для $(V, C) \in \text{Ob}^M(X)$ таких, что $\mathcal{N}_X(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$, кривая $F_X(V, C)$ в случае ее непустоты имеет один из трех описанных ниже типов, т. е. является:

1) связной кривой арифметического рода нуль с нормальными пересечениями такой, что любая ее неприводимая компонента пересекается с не более чем двумя другими неприводимыми компонентами, и если неприводимая компонента пересекается с двумя компонентами, то она не проходит через особенности поверхности V , если неприводимая компонента пересекается с одной компонентой, то она содержит не более одной особой точки V типа A_n (ввиду того, что мы рассматриваем особенности пар, а не поверхностей, особая точка поверхности V типа A_n , лежащая на кривой C , в наших обозначениях имеет тип $0_{m,n,k}$, где $k \leq 2$, m – кратность этой точки на кривой C ; см. определение 5.2, 2)), а если кривая $F_X(V, C)$ неприводима, то она проходит через не более чем две особых точки V типа A_n ;

2) объединением неприводимых непересекающихся рациональных кривых с нулевым индексом самопересечения;

3) колесом, т. е. связной не проходящей через особенности V кривой арифметического рода один с нормальными пересечениями, каждая неприводимая компонента которой рациональна, $F_X(V, C)(C - F_X(V, C)) = 0$ (см. определение 5.4).

Мы также доказываем, что $F_X(V, C)$ совпадает с максимальной кривой, содержащейся в C и имеющей один из трех описанных выше типов.

В теореме 7.22 установлена инвариантность $F_X(V, C)$ относительно функтора разрешения особенностей при $X \neq R_1$ (в R_1 и R_p при $p < 4/5$ эти утверждения не верны), поэтому классификация $F_X(V, C)$ в данном случае сводится к их классификации в R^N , полученной в [5]. Для доказательства инвариантности $F_X(V, C)$ относительно данного функтора оказывается необходимым ввести некоторое множество “элементарных” морфизмов категории $\tilde{R}^{NM}$, практически совпадающих с определенными в [9]. Эти морфизмы также используются для приведения пары к стандартному виду (наше определение стандартности несколько шире, чем используемое у Гизатуллина и Данилова). С помощью приведения пары к стандартному виду мы устанавливаем, что любая (за одним исключением) квазипроективная поверхность, имеющая компактификацию (V, C) такую, что кривая $F_X(V, C)$ имеет тип 1, может быть компактифицирована так, что кривая $F_X(V, C)$ будет неприводимой кривой типа 1. Исключением является тот случай, когда поверхность имеет такую компактификацию, что $F_X(V, C)$ состоит из двух компонент F_1, F_2 , не проходящих через особенности V и таких, что $F_1^2 = F_2^2 = 1, (F_1, F_2) = 1$.

Опишем классификацию кривых $F_{R_1}(V, C)$ для различных пар. Пусть $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ и $\mathcal{N}_{R_{1-}}(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$. Тогда

$$F_X(V, C)(C - F_X(V, C)) = 0,$$

любая связная компонента $F = F_{R_1}(V, C)$ неприводима, неособа и либо F – объединение непересекающихся кривых с нулевым индексом самопересечения, не проходящих через особенности V , либо F состоит из одной компоненты, проходящей через не более чем две особые точки поверхности V типа A_n . Последний случай в точности соответствует нашим стандартным парам.

В § 8 мы определяем категорию $\tilde{R}_1^M$ и строим разложение морфизмов категории $\tilde{R}_1^M$ на элементарные. Нам понадобится приводимая ниже конструкция.

Под графом мы будем понимать неориентированный граф в обычном смысле, т. е. задано множество вершин, множество ребер, и каждому ребру сопоставлены две вершины, являющиеся его концами. Подграфы графа определяются естественным образом. Пусть $\mathcal{G}$ – граф и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$; тогда определим дополнение графа $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{G}$ как граф $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$, полученный из $\mathcal{G}$ удалением всех вершин и ребер $\mathcal{G}'$, а также ребер, соединяющих вершины $\mathcal{G}$ с вершинами $\mathcal{G}'$. Пусть теперь $\mathcal{G}$ – дерево (т. е. связный граф без циклов) и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$; тогда $\mathcal{G}'$ мы будем называть *внешним*, если $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ – дерево. Определим замыкание подграфа $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{G}$ как граф $(\mathcal{G}')^{\mathcal{G}}$, являющийся минимальным поддеревом в $\mathcal{G}$, содержащим $\mathcal{G}'$. Аналогично определим замыкание подграфа в объединении деревьев.

Пусть D – приведенная кривая с нормальными пересечениями на некоторой поверхности. Тогда по этой кривой мы можем построить ассоциированный с ней граф $\mathcal{G}(D)$ следующим образом: каждой неприводимой компоненте кривой D сопоставим вершину графа $\mathcal{G}(D)$, а каждой точке пересечения компонент сопоставим ребро, соединяющее вершины, соответствующие пересекающимся компонентам. Отметим, что граф $\mathcal{G}(D)$ может иметь петли и кратные ребра.

Нами доказана следующая теорема: пусть $(V, C) \in \text{Ob} R_{1-}$, $F \subset H \subset G \subset C$ – кривые на V , $(G, C - G) = 0$, граф $\mathcal{G}(G)$ является деревом, кривая H стягиваема в категории R_{1-} и $\mathcal{G}(F)$ – внешний подграф в $\mathcal{G}(G)$; тогда

кривая F стягиваема в категории R_1 . Эта теорема имеет очень важные следствия, а именно:

1) если $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ и кривая $F_{R_1}(V, C)$ непуста, то $F_{R_1}(V, C) = F_{R_{1-}}(V, C)$;

2) можно определить полную подкатегорию $\tilde{R}_1^M$ в категории $\tilde{R}_{1-}^M$, объектами которой являются пары (V, C) такие, что $F_{R_1}(V, C) \neq 0$;

3) если $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_{1-}^M$, пара морфизмов $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$ – минимальное разрешение γ , $F = F_{R_{1-}}(V, C)$, $F' = F_{R_{1-}}(V', C')$, $F^W = F_{R_{1-}}(W, C^W)$ и $\mathcal{G}(F)$ – объединение конечного числа деревьев, то

$$\mathcal{G}(F^W) = \mathcal{G}(F_{R_{1-}}(W, C^W)) = \mathcal{G}(\varphi^{-1}(F)) = \overline{(\mathcal{G}(\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F)) + \mathcal{G}((\varphi')_{\text{cob}}^{-1}(F')))^{\mathcal{G}(C^W)}}.$$

Очевидно что, если $(V, C), (V', C') \in \text{Ob } \tilde{R}_1^M$, то граф кривой F^W является объединением цепей F_i^W , первой вершине каждой из которых соответствует собственный прообраз соответствующей связной компоненты кривой F , а последней – собственный прообраз компоненты кривой F' . Исходя из этого, мы немедленно получаем разложение морфизма γ на элементарные морфизмы γ_i^j , где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i - 1$, n – число связных компонент F_i^W кривой F^W , а m_i – количество вершин i -й компоненты. Граф кривой $F^{W_i^j}$ на минимальном разрешении $((W_i^j, C^{W_i^j})^{\varphi_i^j, \varphi_i^{j+1}})$ морфизма γ_i^j представляет собой $n - 1$ изолированных вершин и две вершины, соединенные отрезком. Эти две вершины являются образами j -й и $(j + 1)$ -й вершин i -й связной компоненты кривой F^W .

Легко доказывается (см. теорему 8.11), что между морфизмами, соответствующими одной связной компоненте, отсутствуют соотношения, а морфизмы, относящиеся к разным компонентам, коммутируют.

Если минимальные разрешения особенностей пар (V, C) и (V', C') являются минимальными объектами категории R^N , то из теоремы о замкнутости следует, что таковыми же будут и все промежуточные объекты разложения. Применяя функтор разрешения особенностей к данному разложению, мы получим, что построенным нами элементарным морфизмам соответствуют элементарные морфизмы категории $\tilde{R}^{NM}$, упомянутые выше.

В § 9 мы описываем группы автоморфизмов квазипроективных поверхностей. Мы рассматриваем квазипроективные поверхности U с 1-логтерминальными особенностями, т. е. U имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, и существует бирациональный морфизм $\varphi: W \rightarrow V$, являющийся последовательным стягиванием $(K_W + E_W)$ -экстремальных лучей дивизориального типа E_i (см. § 3) и такой, что W неособа, $E^W = \sum_{i=1}^n E_i$ – компактная кривая с нормальными пересечениями и $\varphi_* E^W = 0$.

Далее мы определяем категорию T^U компактификаций поверхности U в категории R_{1-} как категорию, объектами которой являются тройки (ρ, V, C) , где $\rho: U \hookrightarrow V$ – открытое вложение, $(V, C) \in \text{Ob } R_1 = \text{Ob } R_{1-}$ и $C = V \setminus \rho(U)$, а морфизмами $\varphi: (\rho, V, C) \rightarrow (\rho', V', C')$ – морфизмы $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ такие, что $\varphi \in \text{Mor } R_{1-}$ и $\varphi \circ \rho = \rho'$.

Через R_{1-}^U мы обозначаем полную подкатегорию в R_{1-} , объектами которой являются пары, компактифицирующие поверхность U в этой категории. Категория R_{1-}^U получается из категории T^U применением функтора забывания открытого вложения ρ .

Выполнение правила Оре в категории R_{1-} индуцирует его выполнение в категории T^U , поэтому корректно определена категория частных $\tilde{T}^U$ категории T^U . Через $\tilde{R}_{1-}^U$ обозначается категория частных категории R_{1-}^U .

Если поверхность U имеет 1-логтерминальные особенности и $\text{Aut}(U)$ – группа ее бирегулярных автоморфизмов, то существует компактификация $(\rho, V, C) \in \text{Ob } T^U$. Поскольку категория R_{1-} является полной подкатегорией в категории R , любому бирегулярному автоморфизму $g \in \text{Aut}(U)$, заданному вместе с компактификациями $(\rho, V, C), (\rho', V', C') \in \text{Ob } T^U$, взаимно однозначно соответствует $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_{1-}^U$, $\gamma = \rho' \circ g \circ \rho^{-1}: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$.

Для поверхности U , имеющей 1-логтерминальные особенности, рассматриваются такие $(\rho, V, C) \in \text{Ob } T^U$, что $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ (очевидно, что такие компактификации всегда существуют). В случае, когда кривая $F_{R_{1-}}(V, C)$ может быть приведена к стандартному виду, рассматриваются только стандартные компактификации. Обозначим через $T^{U, M}$ полную подкатегорию в T^U , соответствующую определенному выше классу компактификаций.

Чтобы не вдаваться в излишние подробности, мы ограничились рассмотрением таких поверхностей U , для компактификаций которых выполнено следующее условие: $F_{R_{1-}}(V, C)(C - F_{R_{1-}}) = 0$. (Легко видеть, что общий случай может быть сведен к данному частному.) Тогда согласно результатам из § 7 имеются следующие альтернативы:

- 1) $F_{R_{1-}}(V, C) \neq 0$; тогда $F_{R_{1-}}(V, C)$ либо является объединением непересекающихся кривых с нулевым индексом самопересечения, не проходящих через особенности V , либо состоит из одной компоненты, проходящей через не более чем две особые точки поверхности V типа A_n ;
- 2) $F_{R_{1-}}(V, C) = 0$, а $F_{R_{1-}}(V, C) \neq 0$; тогда либо $F_{R_{1-}}(V, C)$ является колесом, либо U имеет компактификацию такую, что $F_{R_{1-}}(V, C)$ состоит из двух компонент F_1, F_2 , не проходящих через особенности V и таких, что $F_1^2 = F_2^2 = 1$, $(F_1, F_2) = 1$;
- 3) $F_{R_{1-}}(V, C) = 0$.

Сначала рассматривается случай $F_{R_{1-}}(V, C) \neq 0$. В § 8 определены элементарные морфизмы категории $\tilde{R}_{1-}^M$, на которые можно разложить любой морфизм этой категории. Очевидно, любой морфизм категории $\tilde{T}^{U, M}$ также раскладывается на соответствующие этим морфизмам элементарные морфизмы. Тогда по аналогии с [9] определяется граф компактификаций Δ_U как граф, вершинами которого являются классы изоморфных компактификаций поверхности U , а ребрами – элементарные морфизмы. Такое определение корректно ввиду того, что элементарные морфизмы переводят изоморфные компактификации в изоморфные. Доказательство существования разложения морфизмов категории $\tilde{T}^{U, M}$ на элементарные равносильно доказательству связности графа Δ_U . Условием $g(\rho) = g \circ \rho$ определяется действие группы $\text{Aut}(U)$ на этом графе. Легко проверяется, что факторграф графа Δ_U по данному действию изоморфен графу пар, компактифицирующих поверхность U в категории R_{1-}^M , вершинами которого являются классы изоморфных пар, а ребрами – элементарные морфизмы категории $\tilde{R}_{1-}^M$. Далее по этому факторграфу и группе $\text{Aut}(U)$ согласно классической конструкции Серра [10] строится граф группы Γ_U и рассматривается его фундаментальная группа. Подробное описание этой конструкции приведено в настоящей работе.

Если $F_{R_1}(V, C)$ состоит из одной неприводимой компоненты, то согласно результатам из § 8 между элементарными морфизмами отсутствуют нетривиальные соотношения. Поэтому граф Δ_U не имеет циклов и, следовательно, является деревом. Тогда согласно теореме Серра (см. [10, теорема 13]) группа $\text{Aut}(U)$ изоморфна фундаментальной группе упомянутого выше графа группы Γ_U . Таким образом, получено полное описание группы $\text{Aut}(U)$ для данного случая.

Если $F_{R_1}(V, C)$ состоит из нескольких неприводимых компонент, то элементарные морфизмы, соответствующие различным неприводимым компонентам, коммутируют. Поэтому граф Δ_U имеет циклы и не является деревом, ввиду чего согласно результатам из [10] группа $\text{Aut}(U)$ изоморфна фактору фундаментальной группы графа Γ_U по фундаментальной группе графа Δ_U , порожденной соотношениями коммутации.

Далее рассматривается случай, когда $F_{R_1}(V, C) = 0$, а $F_{R_{1-}}(V, C) \neq 0$. Если $F_{R_{1-}}(V, C)$ является колесом, нами не получено разложение морфизмов категории $\tilde{R}_{1-,N}^M$ на элементарные, и вряд ли оно могло бы оказаться полезным для описания группы $\text{Aut}(U)$, хотя легко доказать, что связная компонента единицы этой группы совпадает со связной компонентой единицы группы бигулярных автоморфизмов любой компактифицирующей ее пары.

В случае, когда U имеет компактификацию такую, что $F_{R_{1-}}(V, C)$ состоит из двух компонент F_1, F_2 , не проходящих через особенности $\bar{V}$ и таких, что $F_1^2 = F_2^2 = 1$, $(F_1, F_2) = 1$, разложение на линки легко может быть построено (хотя мы этого и не делаем) методами, используемыми в [3], но оно не даст полного описания группы $\text{Aut}(U)$, поскольку между линками будут нетривиальные соотношения, описание которых нами на данный момент не получено.

Наконец, рассматривается случай, когда $F_{R_{1-}}(V, C) = 0$. Легко видеть, что в данной ситуации (V, C) является правожестким объектом категории R_{1-} , поэтому $\text{Aut}(U) = \text{Aut}(V, C)$.

В заключение отметим работу [11]. В этой статье авторы, если придерживаться терминологии настоящей работы, описывают класс минимальных пар (V, C) , не являющихся правожесткими объектами категории R_1 , после чего доказывают теорему о разложении диаграммы типа “верхний домик” для рассматриваемых ими пар на элементарные линки. Отметим, что в рассуждениях относительно естественного класса пар авторы допускают неточность, утверждая, что кривая C должна быть неприводима. Их доказательство теоремы о разложении на линки практически совпадает с приведенным в настоящей статье. Однако они не пишут о возможности введения композиции линков и, естественно, о соотношениях между последними.

Автор выражает благодарность ныне покойному В. А. Исковских за постановку задачи и полезные советы, а также Д. Б. Каледину и М. З. Ровинскому за прочтение работы и сделанные ими замечания.

§ 2. Категории частных, жесткость, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченные категории

Далее везде предполагаем, что рассматриваемые категории являются малыми.

Пусть T – некоторая категория, X – ее подкатегория, Ω, Θ – некоторые подмножества в $\text{Ob } T$. Тогда через $T^\vee$ мы будем обозначать категорию, противоположную категории T , т. е. категорию, получаемую из T обращением

морфизмов. Очевидно, определен контравариантный функтор $\mathcal{R}_T: T \rightarrow T^\vee$, тождественный на объектах и переводящий морфизм $\varphi \in \text{Mor } T$ в морфизм $\varphi^\vee \in \text{Mor } T^\vee$, который имеет противоположное направление. Подмножество изоморфизмов в $\text{Mor } T$ будет обозначаться $\text{Isom } T$, а изоморфизм двух объектов $V^1, V^2 \in \text{Ob } T$ – как $V^1 \simeq_T V^2$. Через $T(\Omega)$ обозначим полную подкатегорию в T , заданную условием $\text{Ob } T(\Omega) = \Omega$.

Определим категории $B_k(T, X, \Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ (мы будем обозначать категории $B_k(T, T, \text{Ob } T)$ просто $B_k(T)$), как категории, множество объектов которых $\text{Ob } B_k(T, X, \Omega)$ состоит из диаграмм $(W, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ вида

$$\begin{array}{c} W \\ \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{k-1} \quad \varphi_k \\ \swarrow \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ V^1 \quad V^2 \quad \dots \quad V^{k-1} \quad V^k \end{array} \quad (2.1)$$

где $W \in \text{Ob } X$, $\varphi_i \in \text{Mor } T$, $V^i \in \Omega$ и $\{\varphi_i\}$ – упорядоченный набор, а множество морфизмов $\text{Mor } B_k(T, X, \Omega)$ состоит из морфизмов $\pi: (W, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \rightarrow (W', \varphi'_1, \dots, \varphi'_k)$ таких, что $\pi: W \rightarrow W'$, $\pi \in \text{Mor } X$ и $\varphi_i = \varphi'_i \circ \pi$.

Композицию морфизмов мы определим естественным образом. Очевидно, что категории $B_k(T, X, \Omega)$ распадаются в несвязные объединения категорий $B_k(T, X, \Lambda)$ по всем k -элементным упорядоченным наборам Λ (с возможными повторениями) в множестве Ω . Отметим, что далее мы будем рассматривать только категории $B_1(T, X, \Omega)$ и $B_2(T, X, \Omega)$, являющиеся привычными категориями “стрелок” и диаграмм типа “верхний домик”.

Введем функторы $\mathcal{F}_k: B_k(T, X, \Omega) \rightarrow X$, определяемые условиями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(W, \varphi_1, \dots, \varphi_k) &:= W, \\ \mathcal{F}_k(\pi: (W, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \rightarrow (W', \varphi'_1, \dots, \varphi'_k)) &:= \pi: W \rightarrow W'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим множества $\Theta^\uparrow$ и $\Theta^\downarrow$ условиями

$$\Theta^\uparrow := \mathcal{F}_1(\text{Ob } B_1(T, T, \Theta)), \quad \Theta^\downarrow := \mathcal{F}_1(\text{Ob } B_1(T^\vee, T^\vee, \Theta)).$$

Таким образом, множество $\Theta^\uparrow$ состоит из всех объектов категории T , для которых существует морфизм в объект из множества Θ , а множество $\Theta^\downarrow$ состоит из всех объектов категории T , в которые существует морфизм из объекта, принадлежащего множеству Θ .

Определим категорию морфизмов $C(T, \Theta, \Omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Ob } C(T, \Theta, \Omega) &:= \{(W, \varphi) \in \text{Ob } B_1(T, T, \Omega): W \in \Theta\}, \\ \text{Mor } C(T, \Theta, \Omega) &:= \{(W, \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(T, T, \Omega): W \in \Theta\}, \end{aligned}$$

где $(W, \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(T, T, \Omega)$ сопоставляется морфизм $\pi: (W, \varphi) \rightarrow (W, \varphi')$.

Композиция морфизмов (W, φ, φ') и $(W_1, \varphi_1, \varphi'_1)$ определена тогда и только тогда, когда $W = W_1$ и $\varphi' = \varphi_1$, в этом случае $(W, \varphi, \varphi') \circ (W_1, \varphi_1, \varphi'_1) = (W, \varphi, \varphi'_1)$.

Категории $C(T, \text{Ob } T, \text{Ob } T)$ и $C(T, \Theta, \text{Ob } T)$ будут обозначаться $C(T)$ и $C(T, \Theta)$ соответственно. Очевидно, что категории $C(T, \Theta, \Omega)$ распадаются в несвязные объединения категорий $C(T, W, \Omega)$ по всем $W \in \Theta$ (здесь и далее одноэлементное множество $\{W\}$ обозначается W). Заметим, что все морфизмы в категориях $C(T, \Theta, \Omega)$ являются изоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Категория T удовлетворяет левому правилу Оре, если для любых морфизмов $\varphi, \varphi' \in \text{Mor } T$, $\varphi: V \rightarrow Z$, $\varphi': V' \rightarrow Z$, существуют морфизмы $\psi, \psi' \in \text{Mor } T$, дополняющие угол в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\psi'} & V' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{\varphi} & Z \end{array} \quad (2.3)$$

до коммутативного квадрата.

Категория T удовлетворяет правому правилу Оре, если в противоположной категории $T^\vee$ выполнено левое правило Оре.

Здесь и далее стрелками $\rightsquigarrow$ будут обозначаться морфизмы, которые мы достраиваем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть T – некоторая категория. Введем симметричное и рефлексивное отношение $\overset{T}{\approx}$ следующим образом: $V \overset{T}{\approx} V'$, где $V, V' \in \text{Ob } T$, если существует объект (W, φ, φ') категории $B_2(T)$ такой, что $\varphi: W \rightarrow V$, $\varphi': W \rightarrow V'$. Введем отношение эквивалентности $\overset{T}{\sim}$, являющееся продолжением отношения $\overset{T}{\approx}$ по транзитивности до отношения эквивалентности.

Пусть $\Omega, \Theta \subset \text{Ob } T$. Через $\tilde{\Omega}_T$ мы будем обозначать объединение классов эквивалентности всех объектов из Ω по модулю отношения $\overset{T}{\sim}$, а через $\tilde{\Omega}_T^\Theta$ – множество $\tilde{\Omega}_T \cap \Theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть T – некоторая категория, $V \in \text{Ob } T$; тогда объект V , а также соответствующий класс эквивалентности мы будем называть *правожестким* (*левожестким*), если категория $T(\tilde{V}_T)$ удовлетворяет правому правилу Оре (если категория $T(\tilde{V}_{T^\vee})$ удовлетворяет левому правилу Оре). Напомним, что $T(\tilde{V}_T)$ – полная подкатегория в T , множеством объектов которой является класс эквивалентности объекта V в категории T ; аналогично определяется $T(\tilde{V}_{T^\vee})$.

Подмножество правожестких объектов категории T мы будем обозначать через $\text{Ob}_{\text{rig}} T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Очевидно, если X – подкатегория категории T , удовлетворяющая левому правилу Оре, $\Omega \subset \text{Ob } T$, то во всех категориях $B_k(T, X, \Omega)$ выполнено левое правило Оре. Аналогичное утверждение выполнено для подкатегорий, удовлетворяющих правому правилу Оре, если вместо категорий $B_k(T, X, \Omega)$ рассматривать категории $(B_k(T^\vee, X^\vee, \Omega))^\vee$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. 1) Поскольку $\tilde{\Omega}_T = \Omega^{\downarrow \uparrow \dots} = \Omega^{\downarrow \uparrow \dots} = \tilde{\Omega}_{T^\vee}$, отношения эквивалентности $\overset{T}{\sim}$ и $\overset{T^\vee}{\sim}$ совпадают, в отличие от отношений $\overset{T}{\approx}$ и $\overset{T^\vee}{\approx}$.

2) Левожесткие объекты категории T являются правожесткими объектами $T^\vee$, и наоборот.

3) В категории T выполнено левое (правое) правило Оре тогда и только тогда, когда все ее объекты являются левожесткими (правожесткими).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. Пусть категория T удовлетворяет левому правилу Оре; тогда отношение $\approx^T$ является отношением эквивалентности, совпадающим с $\sim^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отношение $\approx^T$ симметрично и рефлексивно. Его транзитивность следует из достраиваемости коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \swarrow \pi & & \searrow \pi' & \\
 W & & & & W' \\
 \swarrow \varphi & & \searrow \varphi' & \swarrow \psi & \searrow \psi' \\
 V & \xrightarrow{\gamma} & V' & \xrightarrow{\gamma'} & V''
 \end{array} \quad (2.4)$$

в категории $B_2(T)$, так как последняя удовлетворяет левому правилу Оре. Следовательно, отношение $\approx^T$ является отношением эквивалентности. Очевидно, отношение $\approx^T$ совпадает с отношением $\sim^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть категория T удовлетворяет левому правилу Оре. Введем левую категорию частных $\tilde{T}$, задаваемую следующим набором данных:

$$\text{Ob } \tilde{T} := \text{Ob } T, \quad \text{Mor } \tilde{T} := \{\text{Ob } B_2(T)\} / \sim^{B_2(T)}.$$

Здесь морфизмами $\gamma: V \dashrightarrow V'$, $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}$ (во избежании путаницы морфизмы категории $\tilde{T}$ обозначаются пунктирными стрелками), являются классы эквивалентности объектов (W, φ, φ') категории $B_2(T)$ таких, что $\varphi: W \rightarrow V$, $\varphi': W \rightarrow V'$. Элементы класса γ будут называться *разрешениями морфизма* γ . Композиция морфизмов $\gamma: V \dashrightarrow V'$ и $\gamma': V' \dashrightarrow V''$, $\gamma, \gamma' \in \text{Mor } \tilde{T}$, в категории $\tilde{T}$ определяется следующим условием: если $(W, \varphi, \varphi') \in \gamma$, $(W', \psi, \psi') \in \gamma'$, то $(Z, \varphi \circ \pi, \varphi' \circ \pi') \in \gamma' \circ \gamma$, где морфизмы π и π' получаются при достраивании угла, образованного морфизмами φ' и ψ в коммутативной диаграмме (2.4), до коммутативного квадрата.

Тождественные морфизмы $e_V: V \rightarrow V$ определяются как морфизмы в $\tilde{T}$ такие, что $(V, \text{id}_V, \text{id}_V) \in e_V$. Очевидно, что все морфизмы в $\tilde{T}$ обратимы: если $(W, \varphi, \varphi') \in \gamma$, то $(W, \varphi', \varphi) \in \gamma^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. Определение 2.7 корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства корректности определения категории $\tilde{T}$ необходимо проверить, что класс эквивалентности, содержащий $(Z, \varphi \circ \pi, \varphi' \circ \pi')$ (см. диаграмму (2.4)), не зависит от выбора (W, φ, φ') , (W', ψ, ψ') в их классах эквивалентности, а также проверить ассоциативность морфизмов категории $\tilde{T}$. Это легко сделать, используя определение 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Введем функтор $\mathcal{J}_T: T \rightarrow \tilde{T}$, задающий тождественное отображение на объектах и сопоставляющий морфизму $\varphi: V \rightarrow V'$, $\varphi \in \text{Mor } T$, морфизм $\mathcal{J}_T(\varphi): V \dashrightarrow V'$, $\mathcal{J}_T(\varphi) \in \text{Mor } \tilde{T}$, такой, что $(V, \text{id}_V, \varphi) \in \mathcal{J}_T(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. 1) В случае, когда категория T удовлетворяет правому правилу Оре, определена правая категория частных $\widetilde{T}^\vee$. Очевидно, если категория T удовлетворяет обоим правилам Оре, то категории $\widetilde{T}$ и $\widetilde{T}^\vee$ совпадают.

2) Если для любых морфизмов $\varphi, \varphi' \in \text{Mor } T$ существование $\psi \in \text{Mor } T$, $\psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi'$, равносильно тому, что $\varphi = \varphi'$, то функтор $\mathcal{J}_T$ является вложением категорий.

3) Функтор $\mathcal{J}_T$ является вложением.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть в категории T выполнено левое правило Оре, X – ее полная подкатегория, удовлетворяющая следующему требованию: для любого $\varphi: V \rightarrow V'$, $V' \in \text{Ob } X$, существует $\psi: V'' \rightarrow V$, $\psi \in \text{Mor } T$, такой, что $V'' \in \text{Ob } X$. Тогда в категории X также выполнено левое правило Оре и $\widetilde{X}$ – полная подкатегория в $\widetilde{T}$, точнее, канонический функтор $\mathcal{I}_{\widetilde{X}, \widetilde{T}}: \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{T}$ является полным и строгим. Аналогичное утверждение выполнено для категорий, удовлетворяющих правому правилу Оре, при замене указанного выше требования на противоположное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку категория X является полной подкатегорией в категории T , то $\varphi \circ \psi \in \text{Mor } X$. Дальнейшее доказательство получается прямой проверкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категорией мы будем называть категорию T , заданную вместе с функтором $\mathcal{P}_T: T \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, где $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ – категория, ассоциированная с частично упорядоченным множеством $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ неотрицательных целых чисел, т. е. множество объектов категории $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ совпадает с $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а множество морфизмов из U в U' состоит из одного элемента, если $U \geq U'$, и пусто в противном случае. Мы также будем считать, что если $\varphi: V \rightarrow V'$, $\varphi \in \text{Mor } T$, и $\mathcal{P}_T(V) = \mathcal{P}_T(V')$, то $\varphi \in \text{Isom } T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Пусть T – $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, $\mathcal{P}_T: T \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – соответствующий функтор. Тогда:

а) введем отображение $\rho_T: \text{Mor } T \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ условием $\rho_T(\varphi) = \mathcal{P}_T(V) - \mathcal{P}_T(V')$, где $\varphi \in \text{Mor } T$, $\varphi: V \rightarrow V'$; заметим, что если $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Mor } T$, $\varphi_1: V^1 \rightarrow V^2$, $\varphi_2: V^2 \rightarrow V^3$, то $\rho_T(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \rho_T(\varphi_2) + \rho_T(\varphi_1)$;

б) введем подмножества $\text{Ob}^i T$ и $\text{Mor}^i T$ в множествах $\text{Ob } T$ и $\text{Mor } T$ соответственно, где $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, условиями:

$$\text{Ob}^i T := \{V \in \text{Ob } T: \mathcal{P}_T(V) = i\}, \quad \text{Mor}^i T := \{\varphi \in \text{Mor } T: \rho_T(\varphi) = i\};$$

в) введем транзитивные отношения $\geq_T$ и $>_T$ на множестве $\text{Ob } T$, задаваемые условиями:

$$\begin{aligned} V \geq_T V', & \text{ если } \exists \pi: V \rightarrow V', \\ V >_T V', & \text{ если } \exists \pi: V \rightarrow V' \text{ и } \rho_T(\pi) > 0; \end{aligned}$$

г) введем структуры $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных категорий на категориях $B_k(T, X, \Omega)$, где X – подкатегория в T , $\Omega \subset \text{Ob } T$, условиями:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{B_k(T, X, \Omega)}(W, \varphi_1, \dots, \varphi_k) &= \mathcal{P}_T(W), \\ \mathcal{P}_{B_k(T, X, \Omega)}(\varphi: (W, \varphi_1, \dots, \varphi_k) &\rightarrow (W, \varphi'_1, \dots, \varphi'_k)) = \mathcal{P}_T(\varphi: W \rightarrow W'). \end{aligned}$$

Таким образом, структура $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных категорий на категориях $B_k(T, X, \Omega)$ индуцируется функторами $\mathcal{F}_k: B_k(T, X, \Omega) \rightarrow X$, определенными условиями (2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Пусть T – $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, $\mathcal{P}_T: T \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда определим:

а) *подмножество $\text{Ob}^M T$ минимальных объектов категории T в множестве $\text{Ob} T$ условием*

$$\text{Ob}^M T := \{V \in \text{Ob} T \mid \nexists V' \in \text{Ob} T, V >_T V'\};$$

б) *множество $M_T(\Omega)$ минимизаций произвольного множества объектов $\Omega \subset \text{Ob} T$ категории T условием*

$$M_T(\Omega) := \{(V', \pi') \mid V' \in \text{Ob}^M T \text{ и } \exists V \in \Omega, \pi' \in \text{Mor } T, \pi': V \rightarrow V'\};$$

в) *множество $N_{T,X}(V)$ минимальных разрешений объекта V в категории X , где X – подкатегория в T и $V \in \text{Ob} T$ (категория $B_1(T, X, V)$ будет называться категорией разрешений объекта V в X), условием*

$$N_{T,X}(V) := \text{Ob}^M B_1(T, X, V);$$

г) *множество минимальных разрешений морфизма γ в категории T , где категория T удовлетворяет левому правилу Оре и $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}$, условием*

$$L_T(\gamma) := \gamma \cap \text{Ob}^M B_2(T).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Пусть T – $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, $\mathcal{P}_T: T \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – соответствующий функтор. Тогда, поскольку любая строго убывающая последовательность объектов категории T имеет минимальный элемент, множества $\text{Ob}^M T$, $M_T(\Omega)$ при $\Omega \neq \emptyset$, а также $L_T(\gamma)$ для $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}$ в случае, если в T выполнено левое правило Оре, непусты.

ТЕОРЕМА 2.16. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория T удовлетворяет правому правилу Оре тогда и только тогда, когда для любого $V \in \text{Ob} T$ множество $M_T^\vee(V)$ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(T^\vee)$, где

$$M_T^\vee(V) := \{(Y, \varphi^\vee) \in \text{Ob } B_1(T^\vee) \mid (Y, \varphi) \in M_T(V), \varphi^\vee = \mathcal{R}_T(\varphi)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 2.15 множества $M_T(V)$, а следовательно, и $M_T^\vee(V)$ непусты. Очевидно, что с каждым элементом вида $(Y, \varphi^\vee)$ множество $M_T^\vee(V)$ содержит и весь класс изоморфных ему объектов категории $B_1(T^\vee)$. Существование двух неизоморфных в $B_1(T^\vee)$ элементов $(Y^1, \varphi_1^\vee)$, $(Y^2, \varphi_2^\vee) \in M_T^\vee(V)$ противоречит выполнению правила Оре. Несложно проверить, что если для любого $V \in \text{Ob} T$ множество $M_T^\vee(V)$ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(T^\vee)$, то правое правило Оре истинно в категории T . Теорема доказана.

Пусть T – $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория. Подмножество $\text{Ob}_{\text{rig}} T \cap \text{Ob}^M T$ будем обозначать $\text{Ob}_{\text{rig}}^M T$. Напомним, что $\text{Ob}_{\text{rig}} T$ – множество правожестких объектов категории T .

Если T удовлетворяет левому правилу Оре, то категорию $\tilde{T}(\text{Ob}^M T)$ будем обозначать $\tilde{T}^M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. Пусть $T - \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, X – ее подкатегория такая, что структура $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории на X индуцирована соответствующей структурой на T . Тогда очевидно, что $\text{Ob}^M T \cap \text{Ob } X \subset \text{Ob}^M X$, и если для любого $\varphi \in \text{Isom } T \cap \text{Mor } X$ имеем $\varphi \in \text{Isom } X$, то из теоремы 2.16 следует, что $\text{Ob}_{\text{rig}}^M T \cap \text{Ob } X \subset \text{Ob}_{\text{rig}}^M X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.18. Пусть $T - \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория и в T выполнено левое правило Оре. Тогда правожесткость минимального объекта V категории T означает отсутствие нетривиальных морфизмов категории частных $\tilde{T}$ из V в любой другой минимальный объект.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19. Пусть $T - \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, Θ, Ω – некоторые подмножества в $\text{Ob } T$ такие, что $\Theta \subset \Omega$; тогда:

1) подмножество Θ мы будем называть *замкнутым в Ω* , если любой элемент V из Ω , для которого существует $W \in \mathcal{F}_2(\text{Ob}^M B_2(T, T, \Theta))$ такой, что $W \geq_T V$, принадлежит Θ ;

2) замыканием $\bar{\Theta}_T^\Omega$ подмножества Θ в Ω мы будем называть минимальное замкнутое в Ω множество, содержащее Θ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. 1) В предположениях определения 2.19 очевидно, что $\bar{\Theta}_T^\Omega \subset \tilde{\Theta}_T^\Omega$.

2) Отметим следующую конструкцию, объясняющую введение понятия замкнутости и очень существенную в дальнейшем. Пусть $T - \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченная категория, удовлетворяющая левому правилу Оре, $\Theta \subset \Omega \subset \text{Ob } T$, Θ замкнуто в Ω и $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}(\Theta)$. Предположим также, что для категории $C(T, \text{Ob } T, \Omega)$ существует метод разложения морфизмов на некие “элементарные” морфизмы. Рассмотрим $(W, \varphi, \varphi') \in L_T(\gamma)$ как морфизм π категории $C(T, \text{Ob } T, \Omega)$, и пусть $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$ – его разложение на элементарные. Тогда из определения 2.19, 1) следует, что $\pi_i \in \text{Mor } C(T, W, \Theta)$. Теперь, рассмотрев классы эквивалентности морфизмов $\pi, \pi_1, \dots, \pi_n$ категории $B_2(T, T, \Omega)$, а именно $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ соответственно, мы получим разложение морфизма $\gamma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_n$ такое, что $\gamma_i \in \text{Mor } \tilde{T}(\Theta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.21. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченную категорию T мы будем называть *разложимой*, если любой морфизм φ из $\text{Mor}^k T$, где $k > 0$, можно разложить в композицию $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k$ морфизмов из $\text{Mor}^1 T$.

§ 3. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченные категории R_p p -логтерминальных пар

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Зададим категорию многообразий M и полные подкатегории M_d в M , где $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$ условиями:

$\text{Ob } M := \{\text{нормальные неприводимые проективные многообразия над } \mathbb{C},$
 имеющие $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, т. е. такие, что
 любой дивизор Вейля является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье},

$\text{Mor } M := \{\text{доминантные морфизмы со связными слоями}\},$

$\text{Ob } M_d := \{V \in \text{Ob } M \text{ такие, что } \dim V = d\}.$

Очевидно, если $\varphi \in \text{Mor } M_d$, то φ – бирациональный морфизм.

Пусть $(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \text{Ob } B_k(M)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Через $Z_j(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ обозначим группу циклов размерности j , лежащих в слоях морфизмов $\pi_1, \dots, \pi_k$, где $0 \leq j \leq d$, $d = \dim V$. Поскольку V $\mathbb{Q}$ -факториально, определено естественное *спаривание*

$$(\cdot, \cdot): Z_{d-1}(V) \times Z_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \rightarrow \mathbb{Q}. \quad (3.1)$$

Через $\equiv$ обозначим отношения численной эквивалентности на $Z_{d-1}(V)$ и $Z_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$.

Введем следующие понятия и обозначения:

$$\begin{aligned} N_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k) &:= \{Z_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k) / \equiv\} \otimes \mathbb{R}, \\ N_{d-1}(V) &:= \{Z_{d-1}(V) / \equiv\} \otimes \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Очевидно, что спаривание (3.1) индуцирует естественное спаривание

$$N_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \times N_{d-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Пусть, далее, $\rho(V, \pi_1, \dots, \pi_k) := \dim N_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$; $\text{NE}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ – конус в $N_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$, состоящий из линейных комбинаций эффективных кривых, лежащих в слоях всех морфизмов π_i , с коэффициентами в $\mathbb{R}_+$, и $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ – его замыкание,

$$\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)_{D \geq 0} := \{z \in \overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \mid (D, z) \geq 0\},$$

где $D \in N_{d-1}(V)$.

Подконус Q в $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ называется *экстремальным*, если существует численно эффективный класс $H \in N_{d-1}(V)$ такой, что:

$$Q = H^\perp \cap \overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k),$$

где $H^\perp := \{K \in N_1(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \mid (K, H) = 0\}$.

Лучом в $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ назовем одномерный подконус.

D -*экстремальным подконусом* в $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$, где $D \in N_{d-1}(V)$, называется экстремальный подконус Q такой, что $(K, D) < 0$ для любого $K \in Q \setminus 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Стягиванием* подконуса $Q \in \overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$ называется морфизм $\text{cont}_Q \in \text{Mor } M$, $\text{cont}_Q: V \rightarrow Z$, такой, что условие $\text{cont}_Q(B) = \text{pt}$ для кривой B равносильно условию $[B] \in Q$, где $[B]$ – класс B по модулю численной эквивалентности, а pt – точка. Очевидно, что морфизм cont_Q индуцирует естественно определяемый морфизм $\text{cont}_Q: (V, \pi_1, \dots, \pi_k) \rightarrow (Z, \rho_1, \dots, \rho_k)$, $\text{cont}_Q \in \text{Mor } B_k(M)$.

Пусть $\varphi \in \text{Mor } M$, $\varphi: V \rightarrow V'$. Поскольку V и V' $\mathbb{Q}$ -факториальны, определено отображение полного прообраза

$$\varphi^*: Z_{d-1}(V') \otimes \mathbb{Q} \rightarrow Z_{d-1}(V) \otimes \mathbb{Q}.$$

Если $\varphi \in \text{Mor } M_d$, то через $\varphi_{\text{соб}}^{-1}$ и φ_* обозначим стандартные отображения собственного прообраза и прямого образа:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{соб}}^{-1}: Z_{d-1}(V') \otimes \mathbb{Q} &\rightarrow Z_{d-1}(V) \otimes \mathbb{Q}, \\ \varphi_*: Z_{d-1}(V) \otimes \mathbb{Q} &\rightarrow Z_{d-1}(V') \otimes \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Пусть $V \in \text{Об } M$. Определим канонический дивизор Вейля K_V на V как продолжение канонического дивизора $K_{V \setminus \text{Sing } V}$ (рассматриваемого как дивизор Вейля) с неособой части $V \setminus \text{Sing } V$ многообразия V на все V . Существование и единственность такого продолжения очевидны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. 1) Если $V \in \text{Об } M_2$, то определены естественные скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ на $Z_1(V) \otimes \mathbb{Q}$ и $N_1(V)$.

2) Если $\varphi \in \text{Мор } M_2$, $\varphi: V \rightarrow V'$, то исключительная подсхема морфизма φ , $\text{Ex}(\varphi)$, является объединением конечного числа неприводимых φ -исключительных кривых и отображение φ^* удовлетворяет следующему соотношению:

$$(\varphi^* D', \varphi^* B') = (\varphi^* D', \varphi_{\text{cob}}^{-1}(B')) = (\varphi_{\text{cob}}^{-1}(D'), \varphi^* B') = (D', B'),$$

где $D', B' \in Z_1(V') \otimes \mathbb{Q}$. Для любой φ -исключительной кривой E имеет место равенство $(\varphi^* D', E) = 0$, и если $\rho(V, \varphi) = 1$, то

$$\varphi^* D' = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(D) + (\varphi_{\text{cob}}^{-1}(D), E)E.$$

3) Если $\varphi \in \text{Мор } M_d$, $\varphi: V \rightarrow V'$, то $K_{V'} = \varphi_*(K_V)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $V \in \text{Об } M_2$; тогда:

1) на V не может существовать двух численно неэквивалентных нулю $\mathbb{Q}$ -дивизоров D_1 и D_2 со свойствами $(D_1)^2 > 0$, $(D_2)^2 \geq 0$, $(D_1, D_2) = 0$;

2) если $\psi \in \text{Мор } M_2$, $\psi: V \rightarrow V'$, и E_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – все неприводимые ψ -исключительные кривые, то квадратичная форма, заданная матрицей пересечения $((E_i, E_j)_{ij})$, отрицательно определена на подпространстве пространства $Z_1(V) \otimes \mathbb{Q}$, порожденном векторами E_i ;

3) если ψ и E_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, такие, как в п. 2), $F' = \sum_{i=1}^m F'_i$ – кривая на V' , то квадратичная форма, заданная матрицей пересечения $((F'_i, F'_j)_{ij})$, отрицательно (неположительно) определена на подпространстве пространства $Z_1(V) \otimes \mathbb{Q}$, порожденном векторами F'_i , тогда и только тогда, когда квадратичная форма, заданная матрицей пересечения $((F_i, F_j)_{ij})$, где $F_i = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(F'_i)$ при $i \in \{1, \dots, m\}$, $F_i = E_{i-m}$ при $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$, отрицательно (неположительно) определена на подпространстве в $Z_1(V) \otimes \mathbb{Q}$, порожденном векторами F_i ;

4) если $V \in \text{Об } M_2$, D_1, D_2 – эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры на V такие, что $(D_1)^2 \geq 0$, $(D_1, D_2) \neq 0$, то существует $a \in \mathbb{Q}$ такое, что $(D_1 + aD_2)^2 > 0$;

5) если $V \in \text{Об } M_2$, D_1, D_2 – эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры на V такие, что выполнено $(D_1)^2 = (D_2)^2 = (D_1, D_2) = 0$, то дивизоры D_1 и D_2 численно пропорциональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: W \rightarrow V$ – разрешение особенностей поверхности V , $D_1^W = \varphi^*(D_1)$, $D_2^W = \varphi^*(D_2)$. Тогда $(D_1^W)^2 = (D_1)^2 > 0$, $(D_2^W)^2 = (D_2)^2 \geq 0$, $(D_1^W, D_2^W) = (D_1, D_2) = 0$. Индекс пересечения задает на векторном пространстве $N_1(W)$ квадратичную форму, которая согласно теореме Ходжа об индексе имеет тип $(1, \rho - 1)$, где $\rho = \dim N_1(W)$. Если указанные в утверждении 1) дивизоры существуют, то классы $[D_1^W]$ и $[D_2^W]$ являются ненулевыми элементами в $N_1(W)$. Элементы $[D_1^W]$ и $[D_2^W]$ не пропорциональны, так как в противном случае найдутся отличные от нуля числа n_1 и n_2 такие, что дивизор $D^W = n_1 D_1^W + n_2 D_2^W$ численно эквивалентен нулю, но тогда $(D_1^W, D^W) = n_1 (D_1^W)^2 = 0$ и $n_1 = 0$. Непропорциональность $[D_1^W]$ и $[D_2^W]$ противоречит теореме об индексе. Утверждение 1) доказано.

Пусть $D = \sum_{i=1}^n a_i E_i$, H' – очень обильный дивизор на V' , $H = (\psi)^*(H')$ и a_i – произвольные рациональные числа. Очевидно, можно считать, что H' не содержит точек множества $\psi(\text{Ex}(\psi))$. Предположим, что $(D)^2 \geq 0$; тогда

$$(D)^2 \geq 0, \quad (H)^2 = (H')^2 > 0, \quad (H, D) = 0.$$

Получаем противоречие с утверждением 1). Утверждение 2) доказано.

Утверждение 3) очевидным образом следует из утверждения 2), поскольку для любого $D = \sum_{i=1}^{m+n} a_i F_i \in Z_1(V) \otimes \mathbb{Q}$ имеем

$$D = \sum_{i=1}^m a_i \varphi^* F'_i + \sum_{j=1}^n b_j E_j, \quad (\varphi^* F'_i, E_j) = 0 \quad \forall i, j.$$

Для доказательства утверждения 4) достаточно заметить, что кривая, определяемая уравнением

$$y = (D_1 + xD_2)^2 = (D_1)^2 + 2x(D_1, D_2) + x^2(D_2)^2,$$

обязательно пересекается с верхней полуплоскостью.

Докажем утверждение 5). Допустим противное. Согласно утверждению 4) для произвольного эффективного дивизора C такого, что $(C, D_1) > 0$, существует $a \in \mathbb{Q}$ такое, что $(C + aD_1)^2 > 0$. Из утверждения 1) следует, что $(C, D_2) = (C + aD_1, D_2) \neq 0$. Поэтому существует $b \in \mathbb{Q}$ такое, что $(C, D_1 + bD_2) = 0$. Тогда

$$(D_1 + bD_2)^2 = 0, \quad (C + aD_1)^2 > 0, \quad (C + aD_1, D_1 + bD_2) = 0.$$

Это противоречит утверждению 1), поскольку дивизоры $C + aD_1$ и $D_1 + bD_2$ численно неэквивалентны нулю. Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $\varphi \in \text{Mor } M_2$, $\varphi: V \rightarrow V'$, $\rho(V, \varphi) = 1$, E – φ -исключительная кривая, D' – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на V' , $D = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(D')$, K, K' – $\mathbb{Q}$ -дивизоры на V, V' такие, что $K' = \varphi_*(K)$, $(K, E) \leq 0$. Тогда:

1) $(D)^2 \leq (D')^2$ и $(D')^2 = (D)^2$, если и только если $(D, E) = 0$, в этом случае для любого $\mathbb{Q}$ -дивизора F на V имеем $(F, D) = (\varphi_*(F), D')$;

2) $(K', D') \leq (K, D)$;

3) класс кривой $[E]$ порождает экстремальный луч Q в $\overline{NE}(V)$ (действительно, $Q = L^\perp$, где $L = [H - (H, E)E]$, а H – обильный дивизор).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Категорией двумерных пар R назовем категорию, объектами которой являются пары (V, C) такие, что $V \in \text{Ob } M_2$, $C = \sum_{i=1}^n C_i$, где C_i – попарно различные неприводимые кривые на V , а морфизмами $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ являются морфизмы $\varphi: V \rightarrow V'$, $\varphi \in \text{Mor } M$, такие, что $\varphi^{-1}(C') = C$. Мы будем также предполагать, что множество $\text{Ob } R$ содержит ровно по одному объекту в классе изоморфных. Введем структуру $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории на категории R условием $\mathcal{P}_R(V, C) := \rho(V)$, где $\rho(V)$ – число Пикара.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Мы всегда будем подразумевать, что на категориях $B_k(R, X, \Omega)$, где X – подкатегория в R , $\Omega \subset \text{Ob } R$, структура $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченных категорий задана, как в определении 2.13, г).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. 1) Пусть $p \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{Q}$, $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$. Зададим подмножество p -морфизмов $\text{Mor}_p R$ в $\text{Mor } R$ условием

$$\begin{aligned} \text{Mor}_p R := \{ & \varphi \in \text{Mor}^n R, n \neq 0: \varphi = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1, \varphi_i \in \text{Mor}^1 R, \\ & \varphi_i: (V_{i-1}, C_{i-1}) \rightarrow (V_i, C_i), i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i - \text{стягивание} \\ & (K_{V_{i-1}} + pC_{i-1})\text{-экстремального луча для любого } i\} \cup \text{Mor}^0 R. \end{aligned}$$

2) Зададим левое предельное подмножество морфизмов $\text{Mor}_{a-} R$ при $p \rightarrow a$, где $a \in \mathbb{Q}$, $0 < a \leq 1$, и правое предельное подмножество морфизмов $\text{Mor}_{a+} R$ при $p \rightarrow a$, где $a \in \mathbb{Q}$, $0 \leq a < 1$, условиями

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{a-} R &:= \{\varphi \in \text{Mor } R \mid \exists \varepsilon_0 > 0: \varphi \in \text{Mor}_{a-\varepsilon} R, \varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}, \\ \text{Mor}_{a+} R &:= \{\varphi \in \text{Mor } R \mid \exists \varepsilon_0 > 0: \varphi \in \text{Mor}_{a+\varepsilon} R, \varepsilon_0 > \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Далее через $\#$ будем обозначать или пробел, или $-$, или $+$ там, где подобные обозначения имеют смысл.

3) Пусть $\varphi \in \text{Mor } R$. Зададим множество $J(\varphi)$ как множество значений параметра p , при которых $\varphi \in \text{Mor}_p R$.

Очевидно, что определенные в 1) и 2) подмножества морфизмов являются мультипликативно замкнутыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Пусть $\varphi \in \text{Mor}^n R$. Тогда:

1) если $n = 1$, то множество $J(\varphi)$, в случае его непустоты, является интервалом, содержащимся и открытым в $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$, таким, что $0 \in J(\varphi)$ или $1 \in J(\varphi)$, где $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ – интервал из рациональных точек;

2) если $n \neq 0$, то $J(\varphi) = \bigcup_{k \in K} \bigcap_{i=1}^n J(\varphi_i^k)$, где объединение берется по множеству всех возможных разложений $\varphi = \varphi_n^k \circ \dots \circ \varphi_1^k$, $\varphi_i^k \in \text{Mor}^1 R$, морфизма φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. 1) Зададим множество неособых пар NS условием

$$\begin{aligned} \text{NS} := \{ & (V, C) \in \text{Ob } R: V - \text{неособая поверхность,} \\ & C - \text{дивизор с простыми нормальными пересечениями} \}; \end{aligned}$$

2) зададим подкатегорию $R_{p\#}$ в R условием

$$\begin{aligned} \text{Ob } R_{p\#} &:= \{Z \in \text{Ob } R \mid \exists \varphi \in \text{Mor}_{p\#} R, \varphi: W \rightarrow Z, W \in \text{NS}\}, \\ \text{Mor } R_{p\#} &:= \{\varphi \in \text{Mor}_{p\#} R, \varphi: V \rightarrow V' \mid V, V' \in \text{Ob } R_{p\#}\}. \end{aligned}$$

Категория R_p , очевидно являющаяся разложимой, будет называться категорией p -логтерминальных пар;

3) при $(V, C) \in \text{Ob } R$ определим множество $I(V, C)$ как множество значений p , при которых $(V, C) \in \text{Ob } R_p$;

4) при $\varphi \in \text{Mor } R$ определим множество $I(\varphi)$ как множество значений p , при которых $\varphi \in \text{Mor } R_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. 1) Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$; тогда $I(V, C) = \bigcup J(\varphi_i)$, где объединение берется по всем морфизмам $\varphi_i: (W_i, C^{W_i}) \rightarrow (V, C)$ таким, что $(W, C^W) \in \text{NS}$. Пусть $\varphi \in \text{Mor } R$, $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$; тогда $I(\varphi) = I(V, C) \cap J(\varphi)$.

2) Из замечания 3.9 и п. 1) следует, что множества $J(\varphi)$, $I(V, C)$ и $I(\varphi')$ для $\varphi \in \text{Mor } R$, $(V, C) \in \text{Ob } R$ и $\varphi' \in \text{Mor } R$ являются открытыми подмножествами в $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$.

3) Из 2) следует, что категория R_p является подкатегорией в R_{p+} и R_{p-} .

4) Согласно тому, что произвольный морфизм $\varphi \in \text{Mor}^n R$, $n > 0$, являясь последовательностью дивизориальных стягиваний, имеет не более чем $n!$ различных разложений на морфизмы из $\text{Mor}^1 R$, из 2) и замечания 3.9 следует, что категория $R_{p\#}$ является разложимой.

ТЕОРЕМА 3.12 (о конусе). 1) Пусть $(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \text{Ob } B_k(M)$, $(V, C) \in \text{Ob } R_p$. Тогда

$$\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k) = \overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)_{K_V + pC \geq 0} + \sum_i Q_{B_i},$$

где Q_{B_i} – $(K_V + pC)$ -экстремальные лучи в $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)$.

2) Экстремальные лучи Q_{B_i} дискретны в полупространстве $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)_{K_V + pC < 0}$, и для любого Q_{B_i} существует неприводимая кривая B_i такая, что $Q_{B_i} = \mathbb{R}_+[B_i]$, где $[B_i]$ – класс B_i по модулю численной эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [12].

ТЕОРЕМА 3.13 (о стягивании). Пусть $(V, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \text{Ob } B_k(M)$, $(V, C) \in \text{Ob } R_p$ и Q – подконус в $\overline{\text{NE}}(V, \pi_1, \dots, \pi_k)_{K_V + pC < 0}$. Тогда:

1) стягивание $\text{cont}_Q \in \text{Mor } M$ подконуса Q существует, если и только если этот подконус является экстремальным, где морфизм cont_Q такой, как в определении 3.2;

2) если это стягивание дивизориально и его исключительный дивизор лежит в C , то морфизм cont_Q индуцирует естественно определяемый морфизм $\text{cont}_Q \in \text{Mor } B_k(R, R_p, \text{Ob } R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) доказано в [12]. Утверждение 2) легко выводится из теоремы 3.12, утверждения 1) данной теоремы и следствия 3.5, 2). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.14. Морфизм $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\varphi \in \text{Mor}^n R$, $n \neq 0$, принадлежит $\text{Mor } R_p$ тогда и только тогда, когда $(V, C) \in \text{Ob } R_p$ и

$$K_V + pC = \varphi^*(K_{V'} + pC') + \sum_{i=1}^n a_i E_i,$$

где $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_i > 0$, и E_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – все неприводимые φ -исключительные кривые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно: если $\varphi \in \text{Mor } R_p$, то φ представляется в виде последовательности стягиваний $(K_V + pC)$ -экстремальных лучей. Отсюда, используя очевидную индукцию, получаем доказываемое утверждение, поскольку если $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ – стягивание $(K_V + pC)$ -экстремального луча Q , E – соответствующая ему кривая с $E^2 < 0$, то выполнено

$$K_V + pC = \varphi^*(K_{V'} + pC') + aE,$$

где $a \in \mathbb{Q}$, так как $(K_V + pC) - \mathbb{Q}$ -дивизор Картье, и $a > 0$, поскольку $(K_V + pC, E) = a(E)^2 < 0$.

Докажем обратную импликацию. Согласно теореме 3.4, 2) квадратичная форма, задаваемая матрицей пересечения $((E_i, E_j)_{ij})$, отрицательно определена. Рассмотрим соответствующую ей билинейную форму $(\cdot, \cdot)$ на векторном пространстве V , порожденном всеми векторами E_i . Для любого $v \in V$ имеем $(v, v) < 0$. Пусть $v = \sum_{i=1}^n a_i E_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_i > 0$. Тогда

$$(v, v) = \left(\sum_{i=1}^n a_i E_i, \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) = \sum_{j=1}^n a_j \left(E_j, \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) < 0.$$

Следовательно, существует кривая E_k такая, что

$$(E_k, K_V + pC) = \left(E_k, \varphi^*(K_{V'} + pC') + \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) = \left(E_k, \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) < 0.$$

Согласно следствию 3.5, 3) класс $[E_k]$ порождает экстремальный луч Q_k в $\overline{\text{NE}}(V, \varphi)$. Из теоремы 3.13 следует, что определено стягивание $\sigma_1 \in \text{Mor}^1 R_p$ луча Q_k , $\sigma_1: (V, C) \rightarrow (V^1, C^1)$. Имеем

$$\begin{aligned} K_{V^1} + pC^1 &= \sigma_{1*}(K_V + pC) = \sigma_{1*}\varphi^*(K_{V'} + pC') + \sum_{i=1}^n a_i \sigma_{1*}E_i \\ &= (\varphi \circ \sigma_1^{-1})^*(K_{V'} + pC') + \sum_{i \neq k} a_i E_i^1, \end{aligned}$$

где $E_i^1 = \sigma_{1*}E_i$. При $n > 1$ аналогично строим стягивание $\sigma_2: (V^1, C^1) \rightarrow (V^2, C^2)$, $\sigma_2 \in \text{Mor}^1 R_p$, и т. д. В результате получаем разложение $\varphi = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$ такое, что $\sigma_i: (V^{i-1}, C^{i-1}) \rightarrow (V^i, C^i)$, $(V^0, C^0) = (V, C)$, $(V^n, C^n) = (V', C')$, $\sigma_i \in \text{Mor}^1 R_p$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.15. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\varphi \in \text{Mor}^n R$, $n \neq 0$. Тогда множество $I(\varphi)$ является интервалом (возможно, пустым), содержащимся и открытым в интервале $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – все неприводимые φ -исключительные кривые, $p \in \mathbb{Q}$; тогда

$$K_V + pC = \varphi^*(K_{V'} + pC') + \sum_{i=1}^n a_i(p) E_i.$$

Очевидно, что функции $a_i(p)$ линейны по p и множество значений p , где все $a_i(p) > 0$, является пересечением конечного числа открытых полупрямых. Тогда из теоремы 3.14 следует, что множество $I(\varphi)$ имеет вид, указанный в формулировке. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Все построения, определения, утверждения и теоремы настоящего параграфа остаются верными при замене категории M на категорию M^* , определяемую следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Ob } M^* &:= \{ \text{нормальные квазипроективные многообразия над } \mathbb{C}, \\ &\quad \text{имеющие } \mathbb{Q}\text{-факториальные особенности} \}, \\ \text{Mor } M^* &:= \{ \text{проективные морфизмы со связными слоями} \}. \end{aligned}$$

В частности, можно определить категории $R_{p\#}^*$.

§ 4. Свойства категорий R_p , неособые подкатегории

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. 1) Пусть X – подкатегория категории R . Зададим полную подкатегорию X^N в X , называемую *неособой*, условием

$$\text{Ob } X^N := \text{Ob } X \cap \text{NS}.$$

2) Поскольку категория X^N однозначно определяется категорией X , объекты категории $B_1(X, X^N, (V, C))$, где $(V, C) \in \text{Ob } X$, назовем *разрешениями особенностей пары* (V, C) в категории X , а множества $N_{X, X^N}(V, C)$ – *множествами минимальных разрешений особенностей пары* (V, C) в X . Последние будут обозначаться $N_X(V, C)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2 (1-морфизмы в категориях R^N и R_p^N). Пусть $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\varphi \in \text{Mor}^1 R^N$, и φ стягивает неприводимую кривую E . Тогда очевидно, что $p_a(E) = 0$, $(E)^2 = -1$ и $\varphi \in \text{Mor}^1 R^N$, если и только если $E \subset C$ и $(E, C - E) \leq 2$. При этом $\varphi \in \text{Mor} R_p^N$ тогда и только тогда, когда $(E, C - E) \leq 1$ при $p = 1$, $(E, C - E) \leq 2$ при $p < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. 1) Напомним, что любой морфизм $\varphi: V \rightarrow V'$, где V, V' – неособые поверхности, представляется в виде последовательности стягиваний (-1) -кривых. (Здесь и далее (-1) -кривой на поверхности V мы будем называть кривую арифметического рода нуль, не проходящую через особенности V , с индексом самопересечения, равным -1 .) Если $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\varphi \in \text{Mor}^1 R$, $(V', C') \in \text{NS}$ и V – неособая поверхность, то $\varphi \in \text{Mor}^1 R^N$. Отсюда следует, что категория R^N является разложимой, и если $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\varphi \in \text{Mor } R$, $(V', C') \in \text{NS}$ и V – неособая поверхность, то $\varphi \in \text{Mor } R^N$.

2) Из п. 1) и замечания 4.2 следует, что $R^N \sim R_{p\#}^N \sim R_{1-}^N$ при $0 \leq p < 1$. Поэтому категории R_{1-}^N и $R_{p\#}^N$ при $0 \leq p < 1$, в отличие от категории R_1^N , являются разложимыми.

ЛЕММА 4.4. Пусть X – категория $R_{p\#}$ или $R_{p\#}^N$, $\varphi, \varphi' \in \text{Mor } X$, морфизм φ является стягиванием кривой $E^W = \sum_{i=1}^n E_i^W$, а морфизм φ' – стягиванием кривой $(E')^W = \sum_{i=1}^{n'} (E'_i)^W$ (т. е. $\text{Ex}(\varphi) = E^W$, $\text{Ex}(\varphi') = (E')^W$). Пусть, далее, $E' = \varphi'_* E^W = \sum_{i=1}^{m'} E'_i$, $E = \varphi_*(E')^W = \sum_{i=1}^m E_i$ и квадратичная форма, задаваемая матрицей пересечения $((E'_i, E'_j)_{ij})$, отрицательно определена. Тогда существуют морфизмы $\psi, \psi' \in \text{Mor } X$, являющиеся стягиваниями кривых E, E' и дополняющие угол в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} (W, C^W) & \xrightarrow{\varphi} & (V, C) \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \psi' \\ (V', C') & \rightsquigarrow_{\psi} & (Z, C^Z) \end{array} \quad (4.1)$$

до коммутативного кодекартового квадрата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.4, 3) следует, что квадратичная форма, задаваемая матрицей пересечения $((E_i, E_j)_{ij})$, отрицательно определена.

Заметим, что из того, что категории $R_{p\#}^N$ являются полными подкатегориями в $R_{p\#}$, следует, что утверждение леммы достаточно доказать для следующих

двух случаев: $X \neq R_{p\#}^N$ и $X = R^N$. Заметим также, что в обоих случаях категория X является разложимой, поэтому можно считать, что $\varphi, \varphi' \in \text{Мог}^1 X$. Тогда утверждение леммы в первом случае вытекает из утверждений 1)–3) следствия 3.5, теоремы 3.13, а также того факта, что если $\text{Ex}(\varphi) = \text{Ex}(\varphi')$, то существует $\rho \in \text{Isom } X$ такой, что $\varphi' = \rho \circ \varphi$. Для доказательства леммы во втором случае достаточно воспользоваться следствием 3.5, 1) и замечанием 4.2, а также отметить, что при $\text{Ex}(\varphi) \neq \text{Ex}(\varphi')$ выполнено неравенство $(E', C' - E') \leq (E^W, C^W - E^W)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть X и Y – или категория $R_{p\#}$, или $R_{p\#}^N$, категория X является подкатегорией в Y и $\Omega \subset \text{Об } Y$. Тогда категории $B_k(Y, X, \Omega)$ при $k > 0$ удовлетворяют правому правилу Оре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho, \rho' \in \text{Мог } B_k(Y, X, \Omega)$,

$$\begin{aligned} \rho &: ((Y, C^Y), \mu_1, \dots, \mu_k) \rightarrow ((W, C^W), \varphi_1, \dots, \varphi_k), \\ \rho' &: ((Y, C^Y), \mu_1, \dots, \mu_k) \rightarrow ((W', C^{W'}), \varphi'_1, \dots, \varphi'_k). \end{aligned}$$

Необходимо доказать, что существуют морфизмы $\pi, \pi' \in \text{Мог } X$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \text{Мог } Y$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & (Y, C^Y) & & & \\ & \swarrow \rho & & \searrow \rho' & \\ (W, C^W) & & (Z, C^Z) & & (W', C^{W'}) \\ & \swarrow \varphi_k & \nearrow \varphi'_1 & \searrow \varphi'_2 & \swarrow \varphi'_k \\ \varphi_1 \downarrow & & \varepsilon_1 \nearrow & \varepsilon_2 \nearrow & \downarrow \varphi'_k \\ (V^1, C^1) & (V^2, C^2) & \dots & & (V^k, C^k) \end{array} \quad (4.2)$$

коммутативна. Очевидно, можно считать, что $\text{Ex}(\rho) \neq \text{Ex}(\rho')$ (в противном случае доказательство тривиально) и что, например, $\text{Ex}(\rho) \not\subset \text{Ex}(\rho')$. Тогда существует кривая E' на W' такая, что морфизм ρ является стягиванием кривой E^W такой, что $\rho'_*(E^W) = E'$. Из того, что ρ стягивает кривую E^W , следует, что морфизмы $\varphi'_1, \dots, \varphi'_k$ стягивают кривую E' . Поэтому если $E' = \varphi'_* E^W = \sum_{i=1}^m E'_i$, то согласно теореме 3.4, 2) квадратичная форма, заданная матрицей пересечения $((E'_i, E'_j)_{ij})$, отрицательно определена и по лемме 4.4 существуют морфизмы $\pi, \pi' \in \text{Мог } X$ такие, что $\pi': (W', C^{W'}, D^{W'}) \rightarrow (Z, C^Z, D^Z)$ – стягивание кривой E' и $\pi \circ \rho = \pi' \circ \rho'$.

Положим $\varepsilon_i := \varphi_i \circ \pi^{-1} = \varphi'_i \circ (\pi')^{-1}$. Из леммы 4.4 следует, что $\varepsilon_i \in \text{Мог } Y$ и диаграмма (4.2) коммутативна. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть X – одна из категорий $R, R_{p\#}$ при $0 \leq p < 1, R_{1-}$ или R^N . Тогда категория X удовлетворяет левому правилу Оре и функтор $J_X: X \rightarrow \tilde{X}$ является вложением, где $\tilde{X}$ – категория частных категории X , введенная в определении 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если $\varphi: (V, C) \rightarrow (Z, C^Z)$, $\varphi': (V', C') \rightarrow (Z, C^Z)$, $\varphi, \varphi' \in \text{Mor } X$, то существуют $(W, C^W) \in \text{Ob } X$ и морфизмы $\psi, \psi' \in \text{Mor } X$, $\psi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\psi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$, такие, что $\varphi \circ \psi = \varphi' \circ \psi'$.

Пусть $((Y, C^Y), \pi) \in N_X(V, C)$, $((Y', C^{Y'}), \pi') \in N_X(V', C')$, $\varepsilon: W \rightarrow Y$, $\varepsilon': W \rightarrow Y'$ – разрешение особенностей бирационального отображения $\gamma := (\pi')^{-1} \circ (\varphi')^{-1} \circ \varphi \circ \pi$, $\gamma: Y \dashrightarrow Y'$ (здесь подразумевается разрешение особенностей по Хиронаке) и $E_i, i \in \{1, \dots, n\}$, $E'_i, i \in \{1, \dots, m\}$, – все неприводимые ε - и ε' -исключительные кривые соответственно. Положим

$$C^W := (\varepsilon^{-1})_{\text{cob}} C^Y + \sum_{i=1}^n E_i = (\varepsilon')^{-1}_{\text{cob}} C^{Y'} + \sum_{i=1}^m E'_i.$$

Очевидно, что кривая C^W корректно определена, и из замечания 4.2 и того, что $R^N \sim X^N$, следует, что $\varepsilon, \varepsilon' \in \text{Mor } X^N \subset \text{Mor } X$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (W, C^W) & \xrightarrow{\varepsilon'} & (Y', C^{Y'}) \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \gamma & \searrow \pi' \\ (Y, C^Y) & & (V', C') \\ & \searrow \pi & \downarrow \varphi' \\ & (V, C) & \xrightarrow{\varphi} (Z, C^Z) \end{array} \quad (4.3)$$

коммутативна. Осталось положить $\psi := \pi \circ \varepsilon$, $\psi' := \pi' \circ \varepsilon'$. Очевидно, что (W, C^W) , ψ и ψ' удовлетворяют необходимым требованиям. Следовательно, в категории X выполнено левое правило Оре. То, что функтор $\mathcal{J}_X$ является вложением, вытекает из замечания 2.10, 3). Теорема доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. 1) Пусть X – одна из категорий R^N , $R_{p\#}$ при $0 \leq p < 1$ или R_{1-} . Тогда согласно теореме 4.6 категория X удовлетворяет левому правилу Оре и, если $\gamma \in \text{Mor } \tilde{X}$, множество $L_X(\gamma)$ минимальных разрешений морфизма γ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_2(X)$.

2) Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $0 \leq p < 1$ или R_{1-} и $(V, C) \in \text{Ob } X$. Тогда множество $N_X(V, C)$ минимальных разрешений особенностей пары (V, C) состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X, X^N, (V, C))$.

3) В предположениях п. 2) имеем $N_X(V, C) = N_R(V, C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) непосредственно следует из того, что согласно теореме 4.5 в категории $B_2(X)$ выполнено правое правило Оре, и из теоремы 2.16.

Докажем утверждение 2). Поскольку категория X удовлетворяет левому правилу Оре, для любых $((W, C^W), \varphi), ((W', C^{W'}), \varphi') \in N_X(V, C)$ существует разрешение особенностей $((Y, C^Y), \psi) \in B_1(X, X^N, (V, C))$, доминирующее разрешения $((W, C^W), \varphi)$ и $((W', C^{W'}), \varphi')$ в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -упорядоченной категории $B_1(X, X^N, (V, C))$ (нужно взять разрешение морфизма $(\varphi \circ (\varphi')^{-1}) \in \text{Mor } \tilde{X}$, и $((W, C^W), \varphi)^{B_1(X, \underbrace{X^N}_{(V, C)})}((W', C^{W'}), \varphi')$. Тогда из выполненности правого

правила Оре в категории $B_1(X, X^N, (V, C))$ и теоремы 2.16 следует, что множество $N_X(V, C)$ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X, X^N, (V, C))$.

Равенство $N_X(V, C) = N_R(V, C)$ выполнено в силу того, что категория X является подкатегорией в категории R , леммы 4.4 и $X^N \sim R^N$. Утверждение 3) доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$. Тогда согласно теореме 4.6, утверждению 4.7, 2) и следствию 3.15 множество $I(V, C)$ значений p , где $(V, C) \in \text{Ob } R_p$, является интервалом, содержащимся и открытым в интервале $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Категория R_1 не удовлетворяет левому правилу Оре.

ПРИМЕР 4.10. Пусть V, V' – неособые поверхности, $C = \sum_{i=1}^3 C_i$, $C' = \sum_{i=1}^3 C'_i$ – кривые на V и V' соответственно; C_i и C'_i неособы и рациональны, $(C_i, C_j) = (C'_i, C'_j) = 1$, если $|i - j| = 1$; $(C_i, C_j) = (C'_i, C'_j) = 0$, если $|i - j| > 1$; $(C_1)^2 = (C_2)^2 = (C'_1)^2 = (C'_2)^2 = -1$, $(C_3)^2 = -n$, $(C'_3)^2 = -(n + 1)$, $n > 1$. Пусть пары (V, C) и (V', C') таковы, что морфизм $\varphi: (V, C) \rightarrow (Z, C^Z)$ является стягиванием кривых C_1 и C_3 , а морфизм $\varphi': (V', C') \rightarrow (Z, C^Z)$ – последовательным стягиванием кривых C'_3 и C'_2 . Очевидно, что $\varphi, \varphi' \in \text{Mor } R_1$. Легко проверить также, что не существует пары $(W, C^W) \in \text{Ob } R_1$ с морфизмами $\psi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\psi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$, $\psi, \psi' \in \text{Mor } R_1$, такими, что $\varphi \circ \psi = \varphi' \circ \psi'$ (для того чтобы $\varphi \circ \psi = \varphi' \circ \psi'$, морфизм ψ должен стягивать кривую E такую, что $E \subset C^W$ и $(E, C^W - E) = 2$, но это невозможно в категории R_1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Легко привести примеры того, что множество минимальных разрешений особенностей пары (V, C) в категории R_1 может содержать более одного класса изоморфных объектов категории $B_1(R_1, R_1^N, (V, C))$.

ТЕОРЕМА 4.12. Категория X , где X – либо $R_{p\#}$, $0 \leq p < 1$, либо R_{1-} , является полной подкатегорией в категории R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(V, C), (V', C') \in \text{Ob } X$ и $\varphi \in \text{Mor } R$, где $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$. Докажем, что $\varphi \in \text{Mor } X$. Пусть

$$\begin{aligned} ((W, C^W), \pi) &\in N_R(V, C) = N_X(V, C), \\ ((W', C^{W'}), \pi') &\in N_R(V', C') = N_X(V', C'). \end{aligned}$$

Тогда из утверждения 4.7, 2) следует, что определен морфизм $\psi = (\pi')^{-1} \circ \varphi \circ \pi \in \text{Mor } R^N \subset \text{Mor } X$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (W, C^W) & \xrightarrow{\psi} & (W', C^{W'}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ (V, C) & \xrightarrow{\varphi} & (V', C') \end{array}$$

коммутативна. Из леммы 4.4 вытекает, что $\varphi \in \text{Mor } X$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Пусть категория X такая, как в формулировке теоремы 4.12. Тогда:

1) категории $B_k(X)$ и $C(X)$ являются полными подкатегориями в категориях $B_k(R)$ и $C(R)$;

2) из теоремы 2.11 следует, что категория $\tilde{X}$ является полной подкатегорией в категории $\tilde{R}$, точнее, канонический функтор $I_{\tilde{X}, \tilde{R}}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{R}$ является строгим и полным.

§ 5. 1-морфизмы в категориях R_p и особенности объектов этих категорий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Под *графом* мы будем подразумевать неориентированный граф в обычном смысле (т. е. задано множество вершин, множество ребер, и каждому ребру сопоставлены две вершины, являющиеся его концами). Будем предполагать, что некоторые вершины графа могут быть отмечены. *Степенью* вершины мы назовем число инцидентных ей ребер.

Пусть $V \in \text{Ob } M_2$, F, G – связные кривые на V , $F \subset G$, $F = \sum_{i=1}^n F_i$, где F_i – попарно различные неприводимые кривые на V , и пусть пересечения кривых F_i , как и их пересечения с $G - F$, являются нормальными.

Определим граф $\mathcal{G}(F, G)$ следующим образом: пусть U – малая окрестность кривой F , тогда неотмеченным вершинам $\mathcal{G}(F, G)$ соответствуют кривые F_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, отмеченным – компоненты кривой $(G - F)|_U$. Каждой точке пересечения компонент сопоставим ребро, соединяющее вершины, соответствующие пересекающимся компонентам. Отметим, что граф $\mathcal{G}(F, G)$ может иметь петли и кратные ребра. Пусть, далее, $a_j(F, G)$ – число неотмеченных вершин графа $\mathcal{G}(F, G)$ степени j , $k(F, G)$ – максимальное j такое, что $a_j(F, G) \neq 0$, и $m(F, G)$ – число отмеченных вершин $\mathcal{G}(F, G)$ (очевидно, степень последних всегда равна единице).

Определим также граф $\mathcal{G}(F)$ равенством $\mathcal{G}(F) = \mathcal{G}(F, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, $((W, C^W), \sigma) \in N_R(V, C)$, $F \subset C$ – связная кривая на V , $F^W = \sum_{i=1}^n F_i^W = \sigma^{-1}(F)$, где F_i^W – различные попарно неприводимые кривые на W . Тогда очевидно, что C^W имеет простые нормальные пересечения и можно ввести следующие понятия:

1) кривая F имеет тип $d_{n,m,k}$ и развернутый тип $d_{n,m,k}^{a_0, \dots, a_k}$ в (V, C) , если $p_g(F_i^W) = 0$ для любого i , $d = d(F^W) := p_a(F^W)$, $a_j = a_j(F^W, C^W)$, $m = m(F^W, C^W)$ и $k = k(F^W, C^W)$;

2) пара (V, C) неособа в точке x , где x – точка на V , если поверхность V неособа в x и кривая C имеет простые нормальные пересечения в x ; пара (V, C) имеет особенность типа $d_{n,m,k}$ и развернутого типа $d_{n,m,k}^{a_0, \dots, a_k}$ в точке x , если кривая $\sigma^{-1}(x)$ имеет тип $d_{n,m,k}$ и развернутый тип $d_{n,m,k}^{a_0, \dots, a_k}$ в (V, C) .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. 1) В предположениях определения 5.2 очевидно, что кривая F имеет тип $0_{n,m,k}$ в (V, C) тогда и только тогда, когда граф $\mathcal{G}(F^W, C^W)$ является деревом.

2) Легко видеть, что если тип кривой отличается от $1_{2,0,2}$, то развернутый тип кривой F полностью определяется ее типом, а также что $d \leq 1$, $m \leq 2$ и $m = 0$ при $d = 1$.

В случае, когда тип кривой F равен $1_{2,0,2}$, имеются следующие возможности: F имеет развернутый тип $1_{2,0,2}^{0,0,2}$ или $1_{2,0,2}^{0,1,1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Кривую, тип которой равен $1_{n,0,k}$, $k \leq 2$, и развернутый тип которой отличен от $1_{2,0,2}^{0,1,1}$, мы будем называть *колесом*.

Всюду далее мы будем предполагать, что для кривой F при $k \leq 2$, развернутый тип которой отличен от $1_{2,0,2}^{0,1,1}$, компоненты кривой $F^W = \sum_{i=1}^n F_i^W$ занумерованы следующим образом:

$$(F_i^W, F_j^W) = \begin{cases} 1, & \text{если } |i - j| = 1 \text{ (или } |i - j| = n - 1, \\ & \text{когда } p_a(F_i^W) = 1 \text{ и } n \neq 1, 2), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кривая F при $k \leq 2$ называется *минимальной*, если F^W не содержит (-1) -кривых.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. 1) С каждой кривой F типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) , где $k \leq 2$, с выбранной в определении 5.4 нумерацией на кривой $F^W = \sum_{i=1}^n F_i^W$ свяжем последовательность целых чисел $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ условиями

$$\Delta_n := 1; \quad \Delta_i := \det(-(F_k^W, F_j^W)_{kj}) \quad \text{при } i < n, \quad \text{где } i < k, j \leq n.$$

Числа Δ_i при $i \in \{0, \dots, n-2\}$ удовлетворяют следующему соотношению: $\Delta_i = -(F_i^W)^2 \Delta_{i+1} - \Delta_{i+2}$. Отсюда легко вывести, что $\text{НОД}(\Delta_i, \Delta_{i+1}) = 1$ при $i < n$.

2) Пусть F – кривая типа $d_{n,m,k}$, где $k \leq 2$; тогда мы будем говорить, что кривая F имеет *численный тип* $d_{n,m,k}[(a^i)_i, (a^j)_j, \dots, (a^l)_l]$, если $(F_i^W)^2 = a^i$, $(F_j^W)^2 = a^j, \dots, (F_l^W)^2 = a^l$ и $(F_p^W)^2 \leq -2$ при $p \neq i, j, \dots, l$.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $(V, C) \in \text{Об } R_p$, где $p \in \mathbb{Q}$, $0 \leq p \leq 1$, и B – приведенная кривая на V . Тогда существует естественно определяемый эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор Вейля Diff_B на B , называемый *дифферентой*, такой, что

$$(K_V + B)|_B = K_B + \text{Diff}_B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы о логприсоединении для логтерминальных пар с $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями (см. [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Утверждение теоремы 5.6 ввиду своей локальности остается верным в условиях замечания 3.16.

СЛЕДСТВИЕ 5.8. 1) Пусть $(V, C) \in \text{Об } R_p$ и B – приведенная кривая на V такая, что $(K_V + pC, B) < 0$, $B^2 \leq 0$. Тогда $p_a(B) = 0$.

2) Любой морфизм в категории R_p является стягиванием конечного числа деревьев, состоящих из неприводимых кривых арифметического рода нуль.

3) Пусть $(V, C) \in \text{Об } R_p$ и x – точка на V . Тогда либо x – неособая точка пары (V, C) , либо (V, C) имеет особенность типа $0_{n,m,k}$ в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что согласно теореме 5.6 имеем

$$2p_a(B) - 2 \leq \deg(K_B + \text{Diff}_B) = (K_V + B, B) \leq (K_V + pC, B) < 0.$$

Утверждения 2) и 3) вытекают из утверждения 1), разложимости соответствующих категорий и замечания 5.3, 1). Следствие доказано.

ЛЕММА 5.9. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, F – неприводимая кривая типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) , где $m \leq 1$ и $k \leq 2$, содержащая не более одной особой точки пары (V, C) (которая, очевидно, существует при $n > 1$ и имеет тип $0_{n-1,1,k}$) и такая, что $(F)^2 = -f < 0$ и $F \cap (C - F) \notin \text{Sing}(V)$ при $m = 1$. Пусть, далее, $((W, C^W), \sigma) \in N_R(V, C)$, $F^W = \sum_{i=1}^n F_i^W = \varphi^{-1}(F)$, $F_1^W = \varphi_{\text{соб}}^{-1}(F)$, $b_i = -(F_i^W)^2$ и Δ_i – определители из замечания 5.5, 1), соответствующие кривой F^W . Тогда:

$$1) f = \Delta_0 / \Delta_1;$$

$$2) (K_V + F, F) = (K_W + F_1^W, F_1^W) + (\Delta_1 - 1) / \Delta_1;$$

3) определен морфизм $\varphi \in \text{Mor } R$, $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, являющийся стягиванием кривой F и такой, что $J(\varphi) = (p(F), 1]_{\mathbb{Q}} \cap [0, 1]_{\mathbb{Q}}$, где

$$p(F) := \begin{cases} 1 - \frac{(1-m)\Delta_1 + 1}{\Delta_0 - m\Delta_1} & \text{при } \Delta_0 - m\Delta_1 \neq 0, p(F) < 1, \\ -\infty & \text{при } \Delta_0 - m\Delta_1 = 0, \end{cases}$$

и если G – кривая на V , не содержащая F и такая, что $G \cap F \notin \text{Sing}(V)$, $(G, F) = 1$ и $G' = \varphi_*(G)$, то $(K_{V'} + G', G') = (K_V + G, G) + (\Delta_0 - 1) / \Delta_0$, т. е.

$$\deg \text{Diff}_{G'} = \deg \text{Diff}_G + \frac{\Delta_0 - 1}{\Delta_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\Delta_0 - m\Delta_1 = 0$ тогда и только тогда, когда F – (-1) -кривая и $m = 1$. Очевидно, можно считать, что пара (V, C) не имеет особенностей вне F . Для доказательства всех утверждений проведем индукцию по n .

При $n = 1$ имеем $\Delta_0 = b_1$, $\Delta_1 = 1$ и утверждения 1) и 2) очевидны:

$$f = b_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}, \quad (K_V + F, F) = -2.$$

Тогда $p(F) = (b_1 - 2) / (b_1 - m)$ при $b_1 \neq m \neq 1$ и $p(F) = -\infty$ при $b_1 = m = 1$. Из теоремы 3.13 и замечания 3.16 следует, что кривая F стягиваема в категории R и $J(\varphi) = (p(F), 1]_{\mathbb{Q}} \cap [0, 1]_{\mathbb{Q}}$. Равенство

$$\deg \text{Diff}_{G'} = \deg \text{Diff}_G + \frac{b_1 - 1}{b_1}$$

легко проверяется. Таким образом, в случае $n = 1$ утверждения 1)–3) доказаны.

Пусть при $n \leq k$ выполнены все утверждения леммы; докажем, что они выполнены при $n = k + 1$. Из предположения индукции следует, что определено разложение морфизма $\sigma = \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_{k+1}$, где $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$ – стягивание последней i -й компоненты F_i^i кривой $F^i = (\sigma_{i+1})_* F^{i+1} = \sum_{j=1}^i F_j^i$, $\sigma_i \in \text{Mor}^1 R$, $F_j^i = (\sigma_{i+1})_* F_j^{i+1}$ при $j \leq i$, $(W, C^W) = (V^{k+1}, C^{k+1})$. Из утверждения 1) и предположения индукции получаем $(F_2^2)^2 = -\Delta_1 / \Delta_2$. Используя предположение индукции в утверждении 3), имеем

$$(K_V + F, F) = (K_W + F_1^W, F_1^W) + \frac{\Delta_1 - 1}{\Delta_1}.$$

Таким образом, доказано утверждение 2) при $n = k + 1$, а также то, что

$$f = b_1 - \frac{1}{(F_2^2)^2} = b_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{b_1 \Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

Таким образом, утверждение 1) для $n = k + 1$ доказано.

Докажем утверждение 3) для $n = k + 1$. Из утверждений 1) и 2), замечания 3.16 и теоремы 3.13 следует, что $\varphi \in \text{Mor } R$, и для интервала $J(\varphi)$ получаются границы, указанные в формулировке леммы. Мы также имеем

$$\begin{aligned} (K_{V'} + G', G') &= (\varphi^*(K_V + G'), G) = \left(K_V + \frac{(K_V, F)}{f} F + G + \frac{1}{f} F, G \right) \\ &= (K_V + G, G) + \frac{1}{f} + 1 + \frac{1}{f} (K_V + F, F) \\ &= (K_V + G, G) + \frac{\Delta_1}{\Delta_0} + 1 - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \left(\frac{\Delta_1 + 1}{\Delta_1} \right) \\ &= (K_V + G, G) + \frac{\Delta_0 - 1}{\Delta_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение 3) доказано. Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. 1) Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, $F = \sum_{i=1}^n F_i$ – кривая типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) , где $m \leq 1$, $k \leq 2$, такая, что форма пересечения $((F_i, F_j)_{ij})$ отрицательно определена, $F_i \cap (C - F_i) \cap \text{Sing}(V) = \emptyset$, и если $m = 1$, то $(F_1, C - F_1) = 1$. Тогда, пользуясь леммой 5.9, теоремой 3.4, 3) и леммой 4.4, несложно доказать, что определено стягивание $\varphi \in \text{Mor } R$ кривой F и $1 \in J(\varphi)$.

2) Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, $F^1, \dots, F^s$ – минимальные кривые типов $0_{n^j, m^j, k^j}$ в (V, C) , $j \in \{1, \dots, s\}$, удовлетворяющих требованиям п. 1) и такие, что при $j \neq l$ имеем $(F_r^j, F_t^l) = 0$ при любых r и t . Пусть Δ_i^j , $j \in \{1, \dots, s\}$, – определители из замечания 5.5, 1), соответствующие этим кривым, G – кривая на V , не содержащая компонент кривых F^j и такая, что $(G, F^j) = (G, F_1^j) = 1$ и $G \cap F \not\subset \text{Sing}(V)$. Тогда определено стягивание $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ всех кривых F^j , $\varphi \in \text{Mor } R$ и $1 \in J(\varphi)$. Пусть $G' = \varphi_* G$. Тогда в силу того, что $\Delta_0^j \geq 2$, имеем

$$\deg \text{Diff}_G + s > \deg \text{Diff}_{G'} = \deg \text{Diff}_G + \sum_{j=1}^s \frac{\Delta_0^j - 1}{\Delta_0^j} \geq \deg \text{Diff}_G + \frac{s}{2}.$$

3) В условиях п. 1) пусть F – кривая численного типа $0_{n,m,k}[(2)_1, (2)_2, \dots, (2)_n]$ в (V, C) и φ – ее стягивание; тогда несложно проверить, что $\Delta_i(F) = n + 1 - i$ и $J(\varphi) = (0, 1]_{\mathbb{Q}}$.

4) В условиях п. 1) пусть F – минимальная кривая численного типа $0_{n,m,k}[(a^1)_1, (a^2)_2, \dots, (a^n)_n]$ в (V, C) такая, что существует $a^i \neq 2$, а φ – ее стягивание; тогда легко убедиться в том, что $J(\varphi) = (p_0, 1]_{\mathbb{Q}}$, где $p_0 > 1/3$.

ТЕОРЕМА 5.11. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R_p$, где $p > 3/4$, x – точка на V такая, что через x проходит больше одной ветви кривой C . Тогда x – неособая точка пары (V, C) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что x – особая точка (V, C) . Очевидно, можно считать, что x – единственная особая точка этой пары. Пусть $((W, C^W), \sigma) \in$

$N_R(V, C)$, $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ – разложение морфизма σ на морфизмы $\sigma_i \in \text{Mor}^1 R_p$, $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$, $(V^0, C^0) = (V, C)$, $(V^n, C^n) = (W, C^W)$, σ_i – стягивание неприводимой кривой $E^i \subset C^i$. Пусть σ_j – первое стягивание кривой E^j , пересекающей $r > 1$ ветвей кривой C^j (очевидно, что такое стягивание всегда существует и E^j пересекает $C^j - E^j$ в r попарно различных неособых точках поверхности V^j). Тогда если E^j не содержит особых точек поверхности V^j , то при $p > 3/4$ имеем $r = (E^j, C^j - E^j) = 2$, и из минимальности разрешения $((W, C^W), \sigma)$ вытекает, что $(E^j)^2 \leq -2$. Легко проверяется, что в этом случае $\sigma_j \notin \text{Mor}^1 R_p$. Следовательно, кривая E^j должна проходить через особые точки $x_1, \dots, x_s$, $s \geq 1$, поверхности V^j .

Заметим, что из условия, налагаемого на морфизм σ^j , вытекает, что пара (V^j, C^j) имеет особенности типов $0_{n^1, 1, k^1}, \dots, 0_{n^s, 1, k^s}$ в точках $x_1, \dots, x_s$, где $k^f \leq 2$ при $1 \leq f \leq s$, и что $(E^j, C^j - E^j) \in \mathbb{Z}$, $(E^j, C^j - E^j) \geq 2$. Тогда из замечания 5.10, 2) получаем

$$\begin{aligned} (K_{V^j} + pC^j, E^j) &\geq 2p + (K_{V^j} + pE^j, E^j) \\ &\geq 2p + (K_W + E^W, E^W) + \frac{s}{2} - (1-p)(E^j)^2 \\ &= 2p - 2 + \frac{s}{2} - (1-p)(E^j)^2 > 2p - 2 + \frac{s}{2} > \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

(Здесь E^W – собственный прообраз E^j на W .) Поэтому $\sigma_j \notin \text{Mor} R_p$. Противоречие. Следовательно, x – неособая точка пары (V, C) . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.12 (элементарные морфизмы в категории R_p при $p > 4/5$). Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R_p$, где $4/5 < p < 1$, E – неприводимая кривая на V , стягиваемая в категории R_p , $\varphi: (V, C) \rightarrow (V', C')$ – ее стягивание, $x_1, \dots, x_s$ – все особые точки пары (V, C) , лежащие на кривой E , и $((W, C^W), \sigma) \in N_R(V, C)$. Тогда $p_a(E) = 0$. Пусть $t := (E, C - E)$. Тогда $t = 0, 1, 2$. Точки пересечения E с $C - E$ являются неособыми точками пары (V, C) , все $x_1, \dots, x_s$ имеют особенности типов $0_{n^1, 1, k^1}, \dots, 0_{n^s, 1, k^s}$ в (V, C) , где $k^l \leq 2$ при $1 \leq l \leq s$. Тогда для кривой E и морфизма φ имеются следующие возможности:

- 1) при $t = 2$: $s = 0$, $(E)^2 = -1$, точки пересечения E с $C - E$ попарно различны и $J(\varphi) = [0, 1]_{\mathbb{Q}}$;
- 2) при $t = 1$: $s \leq 1$ и $1 \in J(\varphi)$;
- 3) при $t = 0$: $s \leq 3$ и $1 \in J(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 5.8 имеем $p_a(E) = 0$. Неравенство $t \leq 2$ следует из теоремы 5.11. Очевидно, можно предполагать, что пара (V, C) не имеет особенностей вне E .

Пусть $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ – разложение морфизма σ на морфизмы $\sigma_i \in \text{Mor}^1 R_p$, $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$, $(V^0, C^0) = (V, C)$, $(V^n, C^n) = (W, C^W)$, σ_i – стягивание кривой E^i . Из теоремы 5.11 и минимальности разрешения $((W, C^W), \sigma)$ вытекает, что $(E^i, C^i - E^i) = 1$ и точка пересечения E^i с $C^i - E^i$ является неособой точкой пары (V, C) . Докажем следующее вспомогательное утверждение. Предположим, что на кривой E^i лежит не более одной особой точки x^i пары (V^i, C^i) и точка x^i имеет тип $0_{n^i, 1, k^i}$, где $k^i \leq 2$. Тогда все особые точки $x_1, \dots, x_s$ пары (V, C) , лежащие на E , имеют особенности типов $0_{n^1, 1, k^1}, \dots, 0_{n^s, 1, k^s}$, где $k^l \leq 2$ при $1 \leq l \leq s$. Проведем индукцию по $n - i$.

При $i = n$ утверждение очевидно.

Пусть при $i > j$ на кривой E^i лежит не более одной особой точки пары (V^i, C^i) типа $0_{n^i,1,k^i}$, где $k^i \leq 2$. Заметим, что тогда все особые точки $x^{j,1}, \dots, x^{j,r}$ пары (V^j, C^j) , лежащие на кривой E^j , имеют особенности типов $0_{n^{j,1},1,k^{j,1}}, \dots, 0_{n^{j,r},1,k^{j,r}}$, где $k^{j,f} \leq 2$ при $1 \leq f \leq r$. Из стягиваемости кривой E^j в категории R_p получаем

$$\begin{aligned} 0 &> (K_{V^j} + pC^j, E^j) = p + (K_{V^j} + E^j, E^j) - (1-p)(E^j)^2 \\ &= p + (K_W + E_j^W, E_j^W) + \sum_{f=1}^r \frac{\Delta_0^{j,f} - 1}{\Delta_0^{j,f}} - (1-p)(E^j)^2 \\ &= p - 2 - (1-p)(E^j)^2 + \sum_{f=1}^r \frac{\Delta_0^{j,f} - 1}{\Delta_0^{j,f}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

(E_j^W – собственный прообраз E^j на W , $\Delta_0^{j,f}$ – определители, соответствующие точкам $x^{j,f}$).

Заметим, что при $p > 4/5$, $(E^j)^2 < 0$ и $(\Delta_0^{j,f} - 1)/\Delta_0^{j,f} \geq 1/2$ имеем $r \leq 2$. Докажем, что $r \leq 1$. Допустим противное. Очевидно, что минимум выражения $\sum_{f=1}^2 (\Delta_0^{j,f} - 1)/\Delta_0^{j,f}$ достигается при $\Delta_0^{j,1} = \Delta_0^{j,2} = 2$ (если $\Delta_0^{j,f} = 1$, то $x^{j,f}$ – неособая точка пары (V, C) и разрешение $((W, C^W), \sigma)$ не минимально). Легко видеть, что в этом случае $(E^j)^2 = (E_j^W)^2 + 1$. Поэтому $(E^j)^2 \in \mathbb{Z}$ и из стягиваемости E^j следует, что $(E^j)^2 \leq -1$. Получаем

$$0 > p - 2 - (1-p)(E^j)^2 + \sum_{f=1}^2 \frac{\Delta_0^{j,f} - 1}{\Delta_0^{j,f}} \geq p - 2 + 1 - p + 1 = 0.$$

Следовательно, случай $\Delta_0^{j,1} = \Delta_0^{j,2} = 2$ невозможен. Поэтому

$$\sum_{f=1}^2 \frac{\Delta_0^{j,f} - 1}{\Delta_0^{j,f}} \geq \frac{3-1}{3} + \frac{2-1}{2} = \frac{7}{6}.$$

В этом случае $(E_j)^2 = -1/6$. Тогда из неравенства (5.1) получаем

$$0 > p - 2 - (1-p)(E^j)^2 + \sum_{f=1}^2 \frac{\Delta_0^{j,f} - 1}{\Delta_0^{j,f}} > \frac{5}{6}p - \frac{4}{6} > 0.$$

Противоречие. Следовательно, этот случай невозможен. Легко проверить, что другие варианты также невозможны. Поэтому на кривой E^j лежит не более одной особой точки x^j пары (V, C) , имеющей тип $0_{n^j,1,k^j}$, где $k^j \leq 2$, и наше вспомогательное утверждение доказано.

Пусть $E^W = \sigma_{\text{соб}}^{-1} E$, Δ_0^l – определитель, соответствующий x_l , $l \in \{1, \dots, s\}$. Имеем

$$0 > (K_V + pC, E) = mp + (K_W + E^W, E^W) + \sum_{l=1}^s \frac{\Delta_0^l - 1}{\Delta_0^l} - (1-p)(E)^2. \quad (5.2)$$

По теореме 5.11 на кривой E может лежать только одна особая точка численного типа $0_{n,m,k}[(2)_1, (2)_2, \dots, (2)_n]$, $(E^W)^2 \equiv -1$. Тогда согласно замечанию 5.10, 3) имеем $\Delta_0 = n + 1$, $\Delta_1 = n$ и по лемме 5.9 получаем, что

$(E)^2 = -1/(n+1)$. Подставляя эти формулы в (5.2), мы получаем противоречие с имеющимся в (5.2) неравенством. Следовательно, этот случай невозможен. Тогда из теоремы 5.11 следует, что $(E)^2 = -1$ и на E не лежат особые точки пары (V, C) . Таким образом, для случая $n = 2$ теорема доказана.

Доказательство того, что $s \leq 1$ при $t = 1$, аналогично приведенному выше. Из леммы 5.9, 3) вытекает, что интервал $J(\varphi)$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Если $t = 0$, то из формулы (5.2) и замечания 5.10, 2), следует, что $s \leq 3$ и интервал $J(\varphi)$ имеет вид, указанный в формулировке. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.13. 1) Согласно тому, что категория $R_{p\#}$ ($\tilde{R}_{p\#}$) является полной подкатегорией в R ($\tilde{R}$), из замечаний 5.10, 3), 4), 3.9, 2) и теоремы 5.12 следует, что:

а) категория $R_{p_1\#}$ является полной подкатегорией в категории $R_{p_2\#}$ при $4/5 < p_1 < p_2 < 1$, и обе они являются полными подкатегориями в категории R_{1-} , категория $R_{p-} \sim R_p$ является полной подкатегорией в категории R_{p+} при $4/5 < p < 1$; аналогичные утверждения выполнены для категорий частныхх;

б) категория $R_{p_1\#}$ является полной подкатегорией в категории $R_{p_2\#}$ при $0 < p_2 < p_1 < 1/3$, и обе они являются полными подкатегориями в категории R_{0+} , категория $R_{p+} \sim R_p$ является полной подкатегорией в категории R_{p-} при $0 < p < 1/3$; аналогичные утверждения выполнены для категорий частныхх.

2) Из п. 1) имеем $\text{Ob } R_{1-} = \text{Ob } R_1$.

3) Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R_{p\#}$ при $p > 4/5$, x – точка на V . Тогда либо x – неособая точка пары (V, C) , либо (V, C) имеет особенность типов $0_{n,0,k}$, $0_{n,1,k}$, где $k \leq 2$, или расширенного типа $0_{n,0,3}^{0,3,n-4,1}$ в точке x . Графы, соответствующие данным типам особых точек, имеют вид

(здесь отмеченным вершинам соответствуют жирные точки).

Из замечания 5.10, 1) следует, что на объектах категорий R_{1-} и R_1 реализуются все возможные в категории R особенности типов $0_{n,0,k}$ и $0_{n,1,k}$ при $k \leq 2$.

§ 6. Функторы разрешения особенностей и минимизации.

Теорема о замкнутости

ЛЕММА 6.1. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $(V, C) \in \text{Ob } X$, $((W, C^W), \varphi) \in N_X(V, C)$, $B \subset C$ – неприводимая компонента кривой C и $(B^W, C^W - B^W) \leq 2$, где $B^W = \varphi_{\text{cob}}^{-1}B$. Тогда если $B^2 \geq 0$ и $(B^W)^2 < 0$, то

$$(B^W)^2 = -1, \quad (B^W, C^W - B^W) = 2, \quad (B, C - B) = 0,$$

на кривой B лежат две особые точки пары (V, C) типов $0_{n_1, 1, k_1}$ и $0_{n_2, 1, k_2}$, $k_1, k_2 \leq 2$, и $(W, C^W) \notin \text{Ob}^M R^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5.12 пара (V, C) не может иметь на кривой C никаких особенностей, кроме особых точек типа $0_{n_j, 1, k_j}$, где $k_j \leq 2$. Пусть $(B^W, C^W - B^W) = m$, $(B, C - B) = n$, на кривой B лежат k особых точек пары (V, C) типа $0_{n_j, 1, k_j}$ и Δ_i^j , $j \in \{1, \dots, k\}$, – определители (см. замечание 5.5, 1)), соответствующие кривым, стягиваемым в эти точки. Из того, что $((W, C^W), \varphi) \in N_X(V, C)$ и из замечания 5.10, 1) следует, что $m = k + n$ и $\Delta_i^j / \Delta_{i+1}^j < 1$. Тогда из следствия 3.5, 1) и леммы 5.9, 1) вытекает, что

$$0 \leq B^2 = (B^W)^2 + \sum_{j=1}^k \frac{\Delta_1^j}{\Delta_0^j} < (B^W)^2 + k.$$

Отсюда и из того, что $(B^W)^2 < 0$, $k \leq m \leq 2$, получаем $(B^W)^2 = -1$, $k = m = 2$, $n = m - k = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$ и $((Y, C^Y), \sigma), ((Y', C^{Y'}), \psi) \in M_X(V, C)$, где $M_X(V, C)$ – множество минимизаций пары (V, C) из определения 2.14, б). Тогда $\text{Ex}(\sigma) = \text{Ex}(\psi)$, множество $M_X^\vee(V, C)$ (см. теорему 2.16) состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X^\vee)$ и $((Y, C^Y), \sigma^\vee) \in M_X^\vee(V, C)$, если и только если $((V, C), \sigma) \in N_X(Y, C^Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все рассуждения локальны, можно считать, что C – связная кривая. Пусть $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$, где $\sigma_i \in \text{Mor}^1 X$, $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$, $(V^n, C^n) = (V, C)$, $(V^0, C^0) = (Y, C^Y)$, σ_i – стягивание кривой E^i , а n_i – число неприводимых компонент кривой C^i . Компоненты кривой C^i будут обозначаться далее через $B^i, E^i, \dots$, а их собственные прообразы на V – через $B_i^V, E_i^V, \dots$.

Из связности C следует, что если $n_i > 1$, то для любой неприводимой компоненты B^i кривой C^i выполнено $(B^i, C^i - B^i) \geq 1$, а из теоремы 5.12 и того, что $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$, вытекает, что если $n_i > 1$, то $(E^i, C^i - E^i) = 1$, $(E_i^V)^2 < -1$ и на E^i лежит не более одной особой точки пары (V^i, C^i) типа $0_{n_i, 1, k_i}$, где $k_i \leq 2$.

Очевидно, что для доказательства того, что $\text{Ex}(\sigma) = \text{Ex}(\psi)$, достаточно доказать следующее утверждение: пусть $B^i \neq E^i$ – неприводимая компонента кривой C^i , стягиваемая в категории X ; тогда кривая $(\sigma_i)_* B^i$ также стягиваема в категории X . Для доказательства этого утверждения нужно рассмотреть два случая: $n_i > 2$ и $n_i = 2$, поскольку случаи $n_i = 1$ и $n_i = 0$ очевидны.

Итак, пусть $n_i > 2$, B^i – неприводимая компонента кривой C^i . Если $(B^i, E^i) = 0$, то очевидно, что кривая B^i стягиваема в категории X тогда и только тогда, когда кривая $(\sigma_i)_* B^i$ стягиваема в X . Если $(B^i, E^i) > 0$, то кривая B^i не может быть стягиваема в X согласно теореме 5.12. Действительно, предположим, что B^i стягиваема в категории X . Из связности C , того, что $n_i > 2$, $(E^i, C^i - E^i) = 1$, и теоремы 5.12 следует, что $(B^i, C^i - B^i) = 2$. Тогда из $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$ вытекает, что либо $(B^i)^2 = (B_i^V)^2 \neq -1$, либо на B^i должны лежать особые точки пары (V^i, C^i) типов $0_{n_i^j, 1, k_i^j}$, где $k_i^j \leq 2$. Это противоречит стягиваемости кривой B^i в категории X . Таким образом, наше утверждение в случае $n_i > 2$ доказано.

Осталось рассмотреть случай $n_i = 2$, когда $C^i = E^i + B^i$, $(E^i, B^i) = 1$. Допустим, что кривая B^i стягиваема в категории X , а $(\sigma_i)_* B^i$ не стягиваема в X . Из стягиваемости B^i и теоремы 5.12 следует, что $(B_i^V)^2 \leq (B^i)^2 < 0$ и на B^i лежит не более одной особой точки пары (V^i, C^i) типа $0_{n_i, 1, k_i}$, где $k_i \leq 2$, поэтому $(B_i^V, C - B_i^V) \leq 2$. Поскольку кривая $(\sigma_i)_* B^i$ не стягиваема в X , из леммы 4.4 вытекает, что $((\sigma_i)_* B^i)^2 \geq 0$. Поэтому в данной ситуации можно применить лемму 6.1, согласно которой $(B_i^V)^2 = -1$, $(B_i^V, C - B_i^V) = 2$. Это противоречит минимальности пары (V, C) в категории R^N . Таким образом, вспомогательное утверждение доказано.

Следовательно, $\text{Ex}(\sigma) = \text{Ex}(\psi)$. Тогда из леммы 4.4 вытекает, что множество $M_X^\vee(V, C)$ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X^\vee)$. Очевидно, что $((Y, C^Y), \sigma^\vee) \in M_X^\vee(V, C)$ тогда и только тогда, когда $((V, C), \sigma) \in N_X(Y, C^Y)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В категории R_1 утверждение, аналогичное теореме 6.2, не выполняется.

ПРИМЕР 6.4. Пусть V – неособая поверхность, $C = \sum_{i=1}^4 C_i$ – кривая типа $0_{4,0,2}$ на V , $(C_1)^2 = (C_4)^2 = -2$, $(C_2)^2 = (C_3)^2 = -1$. Тогда очевидно, что $(V, C) \in \text{Ob}^M R_1^N$ и $((V^1, C^1), \varphi_1), ((V^2, C^2), \varphi_2) \in M_{R_1}(V, C)$, где φ_1 – стягивание кривых C_1 , C_2 и C_4 , а φ_2 – стягивание C_1 , C_3 и C_4 . Заметим, что $\text{Ex}(\varphi_1) \neq \text{Ex}(\varphi_2)$ и пара (V, C) может быть выбрана таким образом, чтобы $((V^1, C^1), \varphi_1^\vee)$ и $((V^2, C^2), \varphi_2^\vee)$ принадлежали различным классам изоморфных объектов категории $B_1(R_1^\vee)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p < 1/2$. Тогда в категории X утверждение, аналогичное теореме 6.2, не верно.

ПРИМЕР 6.6. Пусть V – неособая поверхность, $C = \sum_{i=1}^3 C_i + \sum_{i=1}^3 C'_i$ – кривая на V такая, что C_i, C'_i неособы, рациональны и $(C_i)^2 = (C'_i)^2 = -1$, $(C_i, C_j) = (C'_i, C'_j) = 0$ при $i \neq j$, $(C_i, C'_j) = 1$ при любых i, j . Тогда очевидно, что $(V, C) \in \text{Ob}^M X^N$ и $((V^1, C^1), \varphi_1), ((V^2, C^2), \varphi_2) \in M_X(V, C)$, где φ_1 – стягивание всех кривых C_i , а φ_2 – стягивание всех C'_i . Заметим, что $\text{Ex}(\varphi_1) \neq \text{Ex}(\varphi_2)$ и пара (V, C) может быть выбрана таким образом, чтобы $((V^1, C^1), \varphi_1^\vee)$ и $((V^2, C^2), \varphi_2^\vee)$ принадлежали различным классам изоморфных объектов категории $B_1(X^\vee)$.

Пусть X – одна из категорий $R, R_{p\#}$ при $p < 1$ или R_{1-} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. 1) Введем *функтор разрешения особенностей* $\mathcal{N}_X: X \rightarrow R^N \sim X^N$ следующим образом. Начнем с определения $\mathcal{N}_X$ на объектах категории X . Согласно утверждению 4.7, 2), 3) для $(V, C) \in \text{Ob} X$ множество $N_X(V, C) = N_R(V, C)$ состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X)$. Выберем по одному элементу $((W, C^W), \pi)$ из каждого такого класса. (Здесь и далее выбранные морфизмы будут обозначаться через π, π' .) Положим

$$\mathcal{N}_X(V, C) := (W, C^W).$$

Теперь определим функтор $\mathcal{N}_X$ на морфизмах X . Пусть $\psi: (V, C) \rightarrow (V', C')$, $\psi \in \text{Mor} X$ и $((W, C^W), \pi) \in N_X(V, C)$, $((W', C^{W'}), \pi') \in N_X(V', C')$.

Поскольку $((W, C^W), \psi \circ \pi) \in \text{Ob } B_1(R, R^N, (V', C'))$, из утверждения 4.7, 2) следует, что определен морфизм $\mathcal{N}_X(\psi) \in \text{Mor } R^N$:

$$\mathcal{N}_X(\psi) := (\pi')^{-1} \circ \psi \circ \pi: (W, C^W) \rightarrow (W', C^{W'}).$$

Очевидно, что определенный выше функтор $\mathcal{N}_X$ удовлетворяет условию композиции морфизмов и этот функтор является строгим.

2) Функтор $\mathcal{N}_X$ индуцирует функтор $\tilde{\mathcal{N}}_X: \tilde{X} \rightarrow \tilde{R}^N$, определяемый следующим образом: если $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X} = \text{Ob } X$, положим $\tilde{\mathcal{N}}_X(V, C) := \mathcal{N}_X(V, C)$.

Для определения функтора $\tilde{\mathcal{N}}_X$ на $\text{Mor } \tilde{X}$ продолжим сначала функтор $\mathcal{N}_X$ на объекты категории $B_2(X)$:

$$\mathcal{N}_X((W, C^W), \varphi, \varphi') := (\mathcal{N}_X(W, C^W), \mathcal{N}_X(\varphi), \mathcal{N}_X(\varphi')).$$

Легко видеть, что если $((W, C^W), \varphi, \varphi') \xrightarrow{B_2(X)} ((W', C^{W'}), \psi, \psi')$, то

$$\mathcal{N}_X((W, C^W), \varphi, \varphi') \xrightarrow{B_2(R^N)} \mathcal{N}_X((W', C^{W'}), \psi, \psi').$$

Поэтому функтор $\tilde{\mathcal{N}}_X$ можно корректно определить на множестве $\text{Mor } \tilde{X}$. Его согласованность с композицией морфизмов очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.8. *Функтором минимизации $\tilde{\mathcal{M}}_X: \tilde{R}^{NM} \rightarrow \tilde{X}^M$, где X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , а $\tilde{R}^{NM} = \tilde{R}^N(\text{Ob}^M R^N)$, называется функтор, заданный следующим образом. Пусть $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$ и $((Y, C^Y), \pi) \in M_X(V, C)$ (или, что равносильно, $(V, C) \in N_X(Y, C^Y)$, где π – выбранный морфизм). Положим*

$$\tilde{\mathcal{M}}_X(V, C) := (Y, C^Y).$$

Для определения функтора $\tilde{\mathcal{M}}_X$ на морфизмах $\text{Mor } \tilde{R}^{NM}$ определим $\tilde{\mathcal{M}}_X$ на $\text{Ob } B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N)$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} ((W, C^W), \varphi, \varphi') &\in \text{Ob } B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N), \\ \varphi: (W, C^W) &\rightarrow (V, C), \quad ((Y, C^Y), \pi) \in M_X(V, C), \\ \varphi': (W, C^W) &\rightarrow (V', C'), \quad ((Y', C^{Y'}), \pi') \in M_X(V', C'). \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{M}}_X((W, C^W), \varphi, \varphi') := ((W, C^W), \pi \circ \varphi, \pi' \circ \varphi').$$

Очевидно, что если $((W, C^W), \varphi, \varphi') \xrightarrow{B_2(R^N)} ((W', C^{W'}), \psi, \psi')$, то

$$\tilde{\mathcal{M}}_X((W, C^W), \varphi, \varphi') \xrightarrow{B_2(X)} \tilde{\mathcal{M}}_X((W', C^{W'}), \psi, \psi').$$

Поэтому функтор $\tilde{\mathcal{M}}_X$ определен на множестве $\text{Mor } \tilde{R}^{NM}$. Очевидно также, что $\tilde{\mathcal{M}}_X(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \tilde{\mathcal{M}}_X(\gamma_1) \circ \tilde{\mathcal{M}}_X(\gamma_2)$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$. Таким образом, функтор $\tilde{\mathcal{M}}_X$ корректно определен.

Пусть $\tilde{X}_N^M$ – образ категории $\tilde{R}^{NM}$ относительно функтора минимизации.

ТЕОРЕМА 6.9. Функтор $\widetilde{\mathcal{M}}_X$ является строгим и полным, поэтому он задает вложение категории $\widetilde{R}^{NM}$ в $\widetilde{X}^M$ в качестве полной подкатегории $\widetilde{X}_N^M \sim \widetilde{R}^{NM}$. Ограничение функтора $\widetilde{\mathcal{N}}_X$ на $\widetilde{X}_N^M$ является функтором, обратным к $\widetilde{\mathcal{M}}_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N)$, то

$$\mathcal{N}_X(\widetilde{\mathcal{M}}_X((W, C^W), \varphi, \varphi')) = ((W, C^W), \varphi, \varphi').$$

Теперь согласно определению 6.7, 2) если $((Y, C^Y), \rho, \rho') \xrightarrow{B_2(X)} ((Y', C^{Y'}), \psi, \psi')$, то имеем

$$\mathcal{N}_X((Y, C^Y), \rho, \rho') \xrightarrow{B_2(R^N)} \mathcal{N}_X((Y', C^{Y'}), \psi, \psi').$$

Отсюда следует строгость функтора $\widetilde{\mathcal{M}}_X$. Его полнота, а также то, что ограничение $\widetilde{\mathcal{N}}_X$ на $\widetilde{X}_N^M$ является функтором, обратным к $\widetilde{\mathcal{M}}_X$, вытекает из того, что если $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(X, X, \text{Ob } \widetilde{X}_N^M)$, то

$$\widetilde{\mathcal{M}}_X(\mathcal{N}_X((W, C^W), \varphi, \varphi')) \xrightarrow{B_2(X)} ((W, C^W), \varphi, \varphi').$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.10. Категория $\widetilde{X}_N^M$ не совпадает с $\widetilde{X}^M$, поскольку существуют пары $(V, C) \in \text{Ob}^M T$ такие, что $\mathcal{N}_X(V, C) = (W, C^W) \notin \text{Ob}^M R^N$.

ПРИМЕР 6.11. Пусть W – неособая поверхность, $C^W = \sum_{i=1}^3 C_i$ – кривая типа $0_{3,0,2}$ на W , $(C_1)^2 = (C_3)^2 = -2$, $(C_2)^2 = -1$. Тогда $(W, C^W) \notin \text{Ob}^M R^N$, а $(V, C) \in \text{Ob}^M X$, где (V, C) получается из (W, C^W) стягиванием кривых C_1 и C_3 , поскольку C – неприводимая кривая и $C^2 = 0$.

ЛЕММА 6.12. Пусть $((Z, C^Z), \psi, \psi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob } \widetilde{X}_N^M)$; тогда имеем $\mathcal{N}_X((Z, C^Z), \psi, \psi') \in \text{Ob}^M B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N)$. В частности, если выполнено $\gamma \in \text{Mor } \widetilde{R}^{NM}$ и $\gamma_M = \widetilde{\mathcal{M}}_X(\gamma)$, то $L_{R^N}(\gamma) = \mathcal{N}_X(L_X(\gamma_M))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $((W, C^W), \varphi, \varphi') = \mathcal{N}_X((Z, C^Z), \psi, \psi')$ и условия леммы представлены коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} & (W, C^W) & & & \\ & \swarrow \varphi & \downarrow \pi^W & \searrow \varphi' & \\ (V, C) & & (Z, C^Z) & & (V', C') \\ \downarrow \pi & \swarrow \psi & & \searrow \psi' & \downarrow \pi' \\ (Y, C^Y) & & & & (Y', C^{Y'}) \end{array} \quad (6.1)$$

Допустим, что доказываемое утверждение не выполнено. Тогда на (W, C^W) существует кривая E , стягиваемая в категории R^N относительно морфизмов φ и φ' (т.е. существует морфизм $\varepsilon \in \text{Mor } B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N)$, $\varepsilon: ((W, C^W), \varphi, \varphi') \rightarrow ((T, C^T), \rho, \rho')$, стягивающий E на W). Из определения функтора $\mathcal{N}_X$ на объектах категории $B_2(X)$ следует, что образом кривой E на Z должна

быть кривая E^Z , не стягиваемая в категории X . С другой стороны, из коммутативности диаграммы (6.1) вытекает, что кривая E^Z должна стягиваться морфизмами ψ и ψ' . Поэтому $(E^Z)^2 < 0$ и E^Z стягиваема в категории X согласно лемме 4.4. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.13. *Множество $\text{Ob } \tilde{X}_N^M$, где X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , замкнуто в $\text{Ob}^M X$ (см. определение 2.19).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение теоремы не выполнено. Тогда существуют

$$(Y, C^Y) \in \text{Ob}^M X, \quad \psi \in \text{Mor } X, \quad ((Z, C^Z), \psi_1, \psi_2) \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob } \tilde{X}_N^M)$$

такие, что $((Y, C^Y), \psi) \in M_X(Z, C^Z)$ и $(V, C) = \mathcal{N}_X(Y, C^Y) \notin \text{Ob}^M R^N$. Поэтому на V существует кривая E , стягиваемая в категории R^N и такая, что кривая $E^Y = \pi_* E$ не стягиваема в категории X , где $((V, C), \pi) \in N_X(Y, C^Y)$. Тогда из лемм 6.1, 4.4 следует, что $(E)^2 = -1$, $(E, C - E) = 2$, $(E^Y, C^Y - E^Y) = 0$ и на E^Y лежат две особые точки пары (Y, C^Y) типов $0_{n_1, 1, k_1}$ и $0_{n_2, 1, k_2}$, где $k_1, k_2 \leq 2$. Пусть $((W, C^W), \varphi, \varphi') = \mathcal{N}_X((Z, C^Z), \psi_1, \psi_2)$, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & (W, C^W) & & \\ & \swarrow \varphi_1 & \downarrow \varphi & \searrow \varphi_2 & \\ (V^1, C^1) & & (V, C) & & (V^2, C^2) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_2 \\ (Y^1, C^{Y^1}) & \swarrow \psi_1 & (Y, C^Y) & \searrow \psi_2 & (Y^2, C^{Y^2}) \\ & & (Z, C^Z) & & \end{array} \quad (6.2)$$

коммутативна и $E^W = \varphi^{-1}(E)$, $E_0^W = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(E)$.

Очевидно, что кривая E^W стягиваема в категории R^N . Мы докажем, что E^W должна стягиваться морфизмами φ_1 и φ_2 . Таким образом, согласно лемме 4.4 будет получено противоречие с тем, что $((W, C^W), \varphi_1, \varphi_2) \in \text{Ob}^M B_2(R^N, R^N, \text{Ob}^M R^N)$ по лемме 6.12.

Поскольку все рассуждения локальны, можно считать, что кривые C^Y , C , C^W связны, и тогда кривая C^Y состоит из одной компоненты E^Y . Допустим, что кривая E^W не стягивается морфизмом φ_1 . Тогда, если кривая E_0^W также не стягивается φ_1 , согласно тому, что множество минимальных разрешений особенностей любого объекта категории X состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X)$, и ввиду стягиваемости кривой $E^W - E_0^W$ в этой категории получаем, что $(E^1)^2 = -1$, $(E^1, C^1 - E^1) = 2$, где $E^1 = (\varphi_1)_* E_0^W$. Таким образом, получаем противоречие с тем, что $(V^1, C^1) \in \text{Ob}^M R^N$. Поэтому кривая E_0^W должна стягиваться морфизмами φ_1 и φ_2 .

Допустим теперь, что морфизм φ_1 стягивает кривую E_0^W и не стягивает E^W . Пусть $\varphi_1 = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$, $\sigma_i \in \text{Mor}^1 R^N$, $\sigma_i: (W^i, C^{W^i}) \rightarrow (W^{i-1}, C^{W^{i-1}})$, $(W^n, C^{W^n}) = (W, C^W)$, $(W^0, C^{W^0}) = (V^1, C^1)$, $E^n = E^W$, $E_0^n = E_0^W$, $E^{i-1} = (\sigma_i)_* E^i$, $E_0^{i-1} = (\sigma_i)_* E_0^i$, и пусть σ_k стягивает кривую E_0^k . Заметим, что $\rho \in \text{Mor } X$, где $\rho: (W^k, C^{W^k}) \rightarrow (Y, C^Y)$ – стягивание кривой $E^k - E_0^k$, так как морфизмы σ_j , $j > k$, не стягивали собственные прообразы компонент

кривой $C^Y = E^Y$. Тогда из того, что множество минимальных разрешений особенностей любого объекта категории X состоит из одного класса изоморфных объектов категории $B_1(X)$, вытекает, что существует $\varepsilon \in \text{Mor } R^N$, $\varepsilon: (W^k, C^{W^k}) \rightarrow (V, C)$, $\varepsilon_{\text{cob}}^{-1}(E) = E_0^k$, $\varepsilon^{-1}(E) = E^k$, и $E^k \neq E_0^k$. Тогда из следствия 3.5, 1) вытекает, что $(E_0^k)^2 < (E)^2 = -1$, и мы получаем противоречие с тем, что $\sigma_k \in \text{Mor } R^N$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.14. Пусть Θ – некоторое подмножество в $\text{Ob}^M R^N$. Тогда из теоремы 6.13 и леммы 6.12 следует, что Θ замкнуто в $\text{Ob}^M R^N$, если и только если $\mathcal{M}_X(\Theta)$ замкнуто в $\text{Ob}^M X$, где X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} .

§ 7. Определение кривых $F_X(V, C)$, их классификация и инвариантность относительно функтора разрешения особенностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ или R^N и $(V, C) \in \text{Ob } X$. Введем кривую $F_X(V, C)$ следующим образом:

$$F_X(V, C) := \sum_{i \in I} E_i,$$

где E_i – неприводимые кривые на V и $i \in I$, если существует объект $((W_i, C^{W_i}), \varphi_i, \varphi'_i)$ категории $B_2(X)$, где $\varphi_i: (W_i, C^{W_i}) \rightarrow (V, C)$, $\varphi'_i: (W_i, C^{W_i}) \rightarrow (V'_i, C'_i)$, такой, что морфизм φ'_i стягивает кривую $(\varphi_i)^{-1}_{\text{cob}}(E_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Пусть X такая, как в определении 7.1, и $(V, C) \in \text{Ob } X$. Тогда:

- 1) для пары $(V, C) \in \text{Ob}^X$ равенство нулю дивизора $F_X(V, C)$ является критерием ее правоужесткости и минимальности;
- 2) если категория Y является подкатегорией в категории X и $(V, C) \in \text{Ob } Y$, то $F_Y(V, C) \subset F_X(V, C)$;
- 3) в определении 7.1 можно заменить условие $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(X)$ на условие $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X)$ (а также на условие $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$, если $(V, C) \in \text{Ob}^M X$).

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ или R^N , $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$ и F – кривая на V такая, что морфизм φ' является стягиванием кривой D , $\varphi_*(D) = F$ (очевидно, что $F \subset F_X(V, C)$). Тогда $\varphi(\text{Ex}(\varphi)) \subset F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\varphi(\text{Ex}(\varphi)) \not\subset F$. Из того, что $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$, следует, что существует точка $x \in V \setminus F$ такая, что $E = \varphi^{-1}(x)$ – кривая на W , не стягиваемая морфизмом φ' . С другой стороны, из леммы 4.4 вытекает, что кривая $\varphi'_*(E)$ стягивается в категории X , что противоречит минимальности пары (V', C') . Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. 1) Пусть X – одна из категорий R^N , $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $\varphi \in \text{Mor } X$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $F = F_X(V, C)$, $F^W = F_X(W, C^W)$,

E_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, – все φ -исключительные кривые на W . Тогда из выполненности левого правила Оре в категории X следует, что

$$F^W = \left(\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F) + \sum_{i=1}^n E_i \right).$$

2) Для категории R_1 утверждение типа 1) не выполнено.

ПРИМЕР 7.5. Пусть V – неособая поверхность, C – неприводимая неособая кривая на V с $C^2 = 1$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$ – раздутие точки x на кривой C , $E = \text{Ex}(\varphi)$, $C^W = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(C) + E$. Тогда очевидно, что $F_{R_1}(V, C) = C$. С другой стороны, используя теорему 5.12, несложно убедиться в том, что $F_{R_1}(W, C^W) = E \neq C^W$, поскольку не существует такого $((W, C^W), \pi, \pi') \in \text{Ob } B_2(R_1)$, $\pi: (W, C^W) \rightarrow (V', C')$, что π' стягивает кривую $(\varphi \circ \pi)_{\text{cob}}^{-1}(C)$.

ЛЕММА 7.6. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p > 4/5$ или R^N , $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob } B_2(X)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$, $(V, C) \in \text{Ob}^M X$, $E \subset C$ – неприводимая кривая на V такая, что кривая $E^W = \varphi_{\text{cob}}^{-1}E$ стягивается морфизмом φ' . Тогда $p_g(E) = 0$ и для кривой E имеем:

1) если $X = R_1$, то $(E, C - E) = 0$, $p_a(E) = 0$ и E содержит не более двух особых точек пары (V, C) типов $0_{n_1, 1, k_1}$ и $0_{n_2, 1, k_2}$, где $k_i \leq 2$ (см. определение 5.2);

2) если $X = R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или $X = R_{1-}$, то:

а) либо E такая, как в случае категории R_1 ;

б) либо $(E, C - E) = 0$, E не содержит особенностей пары (V, C) , $p_a(E) = 1$ и кривая E имеет ровно одну обыкновенную двойную точку (заметим, что в этом случае E имеет тип $1_{1, 0, 1}$ в (V, C));

с) либо $(E, C - E) = 1$, $p_a(E) = 0$ и E содержит не более одной особой точки пары (V, C) типа $0_{n, 1, k}$, где $k \leq 2$;

д) либо $(E, C - E) = 2$, E не содержит особенностей пары (V, C) и $p_a(E) = 0$;

3) если $X = R^N$, то либо $p_a(E) = 0$ и $(E, C - E) \leq 2$, либо $(E, C - E) = 0$, $p_a(E) = 1$ и E содержит только одну обыкновенную двойную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi' = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ – разложение морфизма φ , где $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$, $\sigma_i \in \text{Mor}^1 X$, $(V^0, C^0) = (V', C')$, $(V^n, C^n) = (W, C^W)$, и пусть морфизм σ_k стягивает кривую $E^k = (\sigma_{k+1} \circ \dots \circ \sigma_n)_* E^W$. Тогда $(E^k, C^k - E^k) > 0$, поскольку в противном случае из леммы 4.4 следовало бы, что кривая E стягивается в категории X , а это противоречит минимальности пары (V, C) .

Заметим, что если B – компонента кривой C , то из того, что $(V, C) \in \text{Ob}^M X$, следует, что $B^k = (\sigma_{k+1} \circ \dots \circ \sigma_n \circ \varphi^{-1}(B))$ – кривая на V^k , и если $(B, E) > 0$, то $(B^k, E^k) > 0$. Заметим также, что если x – особая точка пары (V, C) типа $0_{n, 1, k}$, где $k \leq 2$, лежащая на E , то либо $H^k := (\sigma_{k+1} \circ \dots \circ \sigma_n \circ \varphi^{-1}(x))$ – кривая на V^k такая, что $(H^k, E^k) = 1$, либо $(\sigma_{k+1} \circ \dots \circ \sigma_n \circ \varphi^{-1}(x))$ – особая точка пары (V^k, C^k) типа $0_{n, 1, k}$, лежащая на E^k .

Если бы индекс пересечения $(E, C - E)$ был больше, чем указано в условии леммы, или если бы E содержала больше особых точек пары (V, C) либо собственных особенностей, чем указано в этом условии, то кривая E^k не удовлетворяла бы условиям теоремы 5.12 или замечания 4.2 и была не стягиваема

в категории X . (Заметим, что если кривая E имеет обыкновенную двойную точку, то $(E^k, C^k - E^k) \geq 2$. Отсюда следует, что E не содержит особенностей пары (V, C) , $(E, C - E) = 0$, и E не может иметь других особых точек.) Лемма доказана.

ЛЕММА 7.7. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p > 4/5$ или R^N , $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и $F \neq 0$ – кривая на V такая, что морфизм φ' является стягиванием кривой D , $\varphi_*(D) = F$. Тогда любая максимальная связная компонента $B = \sum_{i=1}^n B_i$ кривой F (т.е. связная компонента, не содержащаяся ни в какой связной компоненте F , отличной от нее самой) содержит неприводимую компоненту с неотрицательным индексом самопересечения, и если кривая B имеет тип $1_{1,0,1}$ в (V, C) , то $B^2 \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7.6 следует, что кривая B имеет тип $0_{n,m,k}$ или $1_{n,0,k}$ в (V, C) , где $m, k \leq 2$; в последнем случае она является колесом (см. замечание 5.3, 2)). Допустим, что кривая B либо не содержит неприводимых компонент с неотрицательным индексом самопересечения, либо имеет тип $1_{1,0,1}$ в (V, C) и $B^2 < 3$. Пусть $B_i^W = \varphi_{\text{cob}}^{-1} B_i$, $B^W = \varphi^{-1}(B) = \varphi_{\text{cob}}^{-1} B + \sum_{i=1}^l E_i$, где E_i – φ -исключительные кривые на W такие, что $\varphi(E_i) \in B$. Тогда из минимальности пары (V, C) , из теоремы 5.12 и леммы 5.9, 3) несложно вывести, что ни одна из кривых B_i^W не стягиваема в категории X . Поскольку морфизм φ' стягивает $\varphi_{\text{cob}}^{-1} B$, первой неприводимой компонентой из B^W , стягиваемой морфизмом φ' , является одна из кривых E_i , $i \in \{1, \dots, l\}$. Теперь, используя лемму 4.4, получаем противоречие с тем, что $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X)$. Лемма доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.8. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R^N , $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, и F – неприводимая компонента кривой C , k – число особых точек пары (V, C) , лежащих на F , и $(F, C - F) + k = 2$. Тогда для любой неприводимой компоненты F_i^W кривой $F^W = \varphi^{-1}(F)$ имеем $(F_i^W, C^W - F_i^W) + k_i^W = 2$, где k_i^W – число особых точек пары (W, C^W) , лежащих на F_i^W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагая противное, мы несложными рассуждениями приходим к противоречию с тем, что $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$. Утверждение доказано.

ЛЕММА 7.9. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R^N , $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и кривая F имеет тип $1_{2,0,2}$ в (V, C) , где $(F_1)^2 = -r < 0$, $(F_2)^2 = 0$, и является колесом. Тогда не существует такого $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$, что морфизм φ' стягивает кривую $\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Очевидно, можно считать, что φ' не стягивает компонент кривой C , не лежащих в F . Тогда согласно утверждению 7.3 имеем $\varphi(\text{Ex}(\varphi)) \subset F$. Из утверждения 7.8 следует, что кривая $F^W = \varphi^{-1}(F)$ имеет тип $1_{n^W,0,2}$ в (W, C^W) . Пусть $\varphi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_p$, $\varphi' = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_q$, где $\sigma_i: (V^i, C^i) \rightarrow (V^{i-1}, C^{i-1})$, $\sigma'_i: ((V')^i, (C')^i) \rightarrow ((V')^{i-1}, (C')^{i-1})$, $\sigma_i, \sigma'_i \in \text{Mor}^1 X$, $(V^0, C^0) = (V, C)$, $((V')^0, (C')^0) = (V', C')$, $(V^p, C^p) = ((V')^q, (C')^q) = (W, C^W)$, $F^i = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i)^{-1}(F)$, $F_1^i = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_i)_{\text{cob}}^{-1}(F_1)$, σ_i – стягивание кривой E^i . Докажем, что $\sigma_i(E^i) \in F_1^{i-1}$.

При $i = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $\sigma_i(E^i) \in F_1^{i-1}$ при $i \leq j$. Тогда кривая $F^j = \sum_{l=1}^{j+2} F_l^j$ имеет следующий вид: $(F_1^j)^2 = -r - j$, $(F_2^j)^2 = (F_{j+2}^j)^2 = -1$, $(F_l^j)^2 = -2$ при $2 < l < j + 2$. Допустим, что $\sigma_{j+1}(E^{j+1}) \notin F_1^j$, тогда $\sigma_{j+1}(E^{j+1}) = F_s^j \cap F_{s+1}^j$, где $s \neq 1, j + 2$. Легко видеть, что если кривая $(\sigma'_l \circ \dots \circ \sigma'_q)_* \circ (\sigma_{j+2} \circ \dots \circ \sigma_p)^{-1}(E^{j+1})$ не стягивается морфизмом σ'_{l-1} , то кривые $(\sigma'_l \circ \dots \circ \sigma'_q)_* \circ (\sigma_{j+2} \circ \dots \circ \sigma_p)^{-1}_{\text{cob}}(F_s^j)$ и $(\sigma'_l \circ \dots \circ \sigma'_q)_* \circ (\sigma_{j+2} \circ \dots \circ \sigma_p)^{-1}_{\text{cob}}(F_{s+1}^j)$ также не стягиваются морфизмом σ'_{l-1} . Поэтому из условия $(V', C') \in \text{Ob}^M X$ следует, что

$$((W, C^W), \varphi, \varphi') >_{B_2(X)} ((W', C^{W'}), \psi, \psi'),$$

где $\sigma: (W, C^W) \rightarrow (W', C^{W'})$ – стягивание кривой $(\sigma_{j+2} \circ \dots \circ \sigma_p)^{-1}(E^{j+1})$. Получаем противоречие с тем, что $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(X, X, \text{Ob}^M X)$.

Таким образом, $\sigma_i(E^i) \in F_1^{i-1}$ и кривая $F^W = F^p = \sum_{l=1}^{p+2} F_l^W$ имеет следующий вид: $(F_1^W)^2 = -r - p$, $(F_2^W)^2 = (F_{p+2}^W)^2 = -1$, $(F_l^W)^2 = -2$ при $2 < l < p + 2$. Тогда очевидно, что кривая F_1^W не стягивается морфизмом φ' и $(\varphi'_* F_1^W)^2 = -r$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.10. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R$, B_i – неприводимые кривые типа $0_{n^i, m^i, k^i}$ в (V, C) , где $k^i \leq 2$, и $(B_i)^2 = (B_i, B_k) = 0$. Тогда:

1) согласно теореме 3.4, 5) кривые B_i численно пропорциональны, в случае, когда B_i не содержат особенностей пары (V, C) , из формулы присоединения следует их численная эквивалентность;

2) из леммы 5.9, 1) и леммы 6.1 следует, что кривая B_i либо не содержит особенностей пары (V, C) , либо содержит две особые точки типов $0_{n_1^i, 1, k_1^i}$ и $0_{n_2^i, 1, k_2^i}$ в (V, C) . В последнем случае $(V, C) \notin \text{Ob } \tilde{R}_N^M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.11. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R^N$, $F = \sum_{i=1}^n F_i$ – кривая типа $0_{n, m, k}$ или $1_{n, 0, k}$ в (V, C) , где $k \leq 2$ (в последнем случае F – колесо), p – число неприводимых компонент F_i кривой F с неотрицательным индексом самопересечения. Тогда:

1) $p \leq 4$, и если $p = 4$, то $n = 4$, F имеет тип $1_{4, 0, 2}$ и $(F_i)^2 = 0$ при $i \in \{1, \dots, 4\}$;

2) если F содержит две непересекающиеся компоненты F_i, F_j с $(F_i)^2 \geq 0$, $(F_j)^2 \geq 0$, то $(F_i)^2 = (F_j)^2 = 0$, и если F имеет тип $0_{n, m, k}$, то $n = 3$, а если F имеет тип $1_{n, 0, k}$, то $n = 4$;

3) если F содержит две компоненты F_i, F_j с $(F_i)^2 > 0$, $(F_j)^2 > 0$, то если F имеет тип $0_{n, m, k}$, то $n = 2$, $(F_i)^2 = (F_j)^2 = 1$, а если F имеет тип $1_{n, 0, k}$, то $n \leq 3$ и $(F_i)^2 = (F_j)^2 = 1$ при $n = 3$ и $1 \leq (F_i)^2 \leq 2$, $1 \leq (F_j)^2 \leq 2$ при $n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $p \geq 4$; тогда существуют неприводимые компоненты $F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}, F_{i_4}$ кривой F , $(F_{i_j})^2 \geq 0$ при $j \in \{1, \dots, 4\}$, такие, что $F_{i_j} \neq F_{i_l}$, если $j \neq l$. Из теоремы 3.4, 1) следует, что $(F_{i_j})^2 = 0$ при $j \in \{1, \dots, 4\}$, поскольку в противном случае одна из компонент пересекала бы три оставшиеся. Очевидно, что среди F_{i_j} не может быть трех попарно непересекающихся компонент, так как если бы, например, F_{i_1}, F_{i_2} и F_{i_3} не пересекались, то из замечания 7.10, 1) следовало бы, что они численно эквивалентны, что невозможно. Таким образом, единственным возможным вариантом (по

модулю нумерации) является следующий:

$$(F_{i_1}, F_{i_2}) = (F_{i_2}, F_{i_3}) = (F_{i_3}, F_{i_4}) = (F_{i_4}, F_{i_1}) = 1.$$

Поэтому F имеет тип $1_{4,0,2}$ и утверждение 1) доказано.

Из теоремы 3.4, 1) следует, что $(F_i)^2 = (F_j)^2 = 0$. Теперь утверждение 2) очевидным образом вытекает из того, что F_i и F_j численно эквивалентны согласно замечанию 7.10, 1).

Осталось доказать утверждение 3). Согласно теореме 3.4, 1) выполнено $(F_i, F_j) > 0$. Следовательно, $(F_i, F_j) = 1, 2$. Предположим, что F имеет либо тип $1_{n,0,k}$ и $n \geq 3$, либо тип $0_{n,m,k}$. В этом случае $(F_i, F_j) = 1$. Пусть $\sigma: (V', C') \rightarrow (V, C)$ – раздутие точки пересечения F_i и F_j ; тогда $(\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_i))^2 \geq 0$, $(\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_j))^2 \geq 0$, $(\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_i), \sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_j)) = 0$. Из утверждения 2) следует, что $(\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_i))^2 = 0$, $(\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_j))^2 = 0$. Поэтому $(F_i)^2 = (F_j)^2 = 1$ и из численной эквивалентности $\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_i)$ и $\sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_j)$ вытекает, что если F имеет тип $0_{n,m,k}$, то $n = 2$, а если F имеет тип $1_{n,0,k}$, то $n = 3$. В случае, когда F имеет тип $1_{n,0,k}$ и $n = 2$, мы аналогично получаем, что $(F_i)^2 \leq 2$, $(F_j)^2 \leq 2$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.12. Пусть X – одна из категорий R^N , $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X}_N^M$. Тогда если $F = \sum_{i=1}^n F_i$ – кривая типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) , где $k \leq 2$, содержащая неприводимую компоненту с неотрицательным индексом самопересечения, то из утверждения 7.11 следует, что кривая F имеет один из следующих численных типов в (V, C) :

- 1) $0_{n,m,k}[(a)_i]$, где $a \geq 0$;
- 2) $0_{n,m,k}[(a)_i, (b)_{i+1}]$, где $a, b \geq 0$ и либо $a = 0$, либо $b = 0$;
- 3) $0_{3,m,2}[(0)_1, (0)_3]$, в этом случае из замечания 7.10, 1) следует, что $t = 0$ или $t = 2$;
- 4) $0_{2,m,k}[(1)_1, (1)_2]$, из замечания 7.10, 1) следует, что $t = 0$ или $t = 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.13. Пусть X – одна из категорий R^N , $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X}_N^M$. Тогда пару (V, C) мы будем называть *стандартной*, если кривая $F_X(V, C)$ либо состоит из более чем одной связной компоненты, либо имеет численный тип $0_{n,m,k}[a_i]$ в (V, C) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.14. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R^N$, $F = \sum_{j=1}^n F_j$ – кривая типа $0_{n,m,k}$ или F – колесо типа $1_{n,0,k}$ в (V, C) , где $k \leq 2$, и пусть кривая F содержит неприводимую компоненту F_i с неотрицательным индексом самопересечения, $(F_i)^2 = a$ и любая неприводимая компонента F_j кривой F неособа. Пусть $p \in F$ – точка на кривой F_i такая, что если $(F_i, C - F_i) = 2$, то $p \in F_i \cap (C - F_i)$. Введем морфизмы $\varepsilon_{F_i,p} \in \text{Mor } \hat{R}^N$ как $\varepsilon_{F_i,p} = \sigma' \circ (\sigma_p)^{-1}$, где $\sigma_p: (V', C') \rightarrow (V, C)$ – последовательность стягиваний, $\sigma_p = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{a+1}$, такая, что $\sigma_j: (V^j, C^j) \rightarrow (V^{j-1}, C^{j-1})$, $\sigma_j \in \text{Mor}^1 R^N$, $(V^0, C^0) = (V, C)$, $(V^{a+1}, C^{a+1}) = (V', C')$, E_j – σ_j -исключительные кривые, $\sigma_j(E_j) = (\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{j-1})_{\text{cob}}^{-1} F_i \cap E_{j-1}$ при $j > 2$, $\sigma_1(E_1) = p$, и $\sigma': (V', C') \rightarrow (V'', C'')$ – стягивание кривой $G' \cup H'$. Заметим, что $((\sigma_p)_{\text{cob}}^{-1} F_i)^2 = -1$.

Пусть E'_j – собственные прообразы определенных выше кривых E_j на V' ; тогда $(E'_{a+1})^2 = -1$, $(E'_j)^2 = -2$ при $j \leq a$. Определим кривые G' и H' на V' следующим образом: $G' := \sum_{j=1}^{n_G} G_j$ – кривая численного типа

$$0_{n_G, m_G, k_G}[(-1)_1, (-2)_2, (-2)_3, \dots, (-2)_{n_G}]$$

в (V, C) , где $k_G \leq 2$, $G' \subset F'$, такая, что $G'_1 = (\sigma_p)_{\text{cob}}^{-1}(F_i)$, и $n_G \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – максимальное число с такими свойствами,

$$H' := \begin{cases} (\sigma_p)_{\text{cob}}^{-1}(D) + \sum_{j=1}^a E'_j, & \text{если } p = D \cap F_i, \text{ где } D - \\ & \text{неприводимая компонента кривой } F \\ & \text{с } D^2 = 0 \text{ и } ((\sigma_p)_{\text{cob}}^{-1}(D), G') = 0, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что такое определение корректно и $\sigma' \in \text{Mor } R^N$. Заметим, что если $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$, то $(V'', C'') \in \text{Ob}^M R^N$ и $\varepsilon_{F_i, p} \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.15. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R^N$, $G = \sum_{i=1}^n G_i$ – минимальная кривая численного типа $0_{n, m, k}[(a^1)_1]$ в (V, C) такая, что $a^i = (G_i)^2$ и $a^1 \geq 0$. Численной степенью $d(G)$ кривой G называется число

$$d(G) := \sum_{i=2}^n -a^i.$$

Очевидно, что $d(G) \geq 0$ и $d(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $G = G_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.16. В условиях определения 7.15 пусть $\varepsilon_{G_1, p} : (V, C) \dashrightarrow (V'', C'')$ – морфизм категории $\tilde{R}^N$ (см. определение 7.14), где $p \notin \text{Sing } G$. Определим кривую G'' в (V'', C'') следующим образом:

$$G'' := \sum_{i=1}^q G''_i = \sigma'_*(E'_{a^1+1}) + \sigma'_* \circ (\sigma_p)_{\text{cob}}^{-1} \left(\sum_{i=2}^n G_i \right),$$

где $G''_1 = \sigma'_*(E'_{n_1+1})$. Тогда G'' – кривая численного типа $0_{q, m, l}[(b^1)_1]$ в (V, C) , где $l \leq 2$ и $b^1 \geq 0$, и из определения 7.14 следует, что $d(G'') < d(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.17. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p > 4/5$ или R^N , $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и F – кривая на V . Тогда мы будем говорить, что F удовлетворяет требованию $(*)$ в категории X , если любая максимальная связная компонента B кривой F содержит неприводимую компоненту с неотрицательным индексом самопересечения и F удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) F имеет тип $0_{n, m, k}$ в (V, C) , где $m, k \leq 2$ и $m = 0$ в случае $X = R_1$;
- 2) F состоит из нескольких неприводимых непересекающихся компонент с нулевым индексом самопересечения, имеющих тип $0_{n_i, 0, k_i}$ или $0_{1, m, m}$ в (V, C) , где $k_i, m \leq 2$, и $m = 0$ в случае $X = R_1$;
- 3) $X \neq R_1$, F – колесо, и если F имеет тип $1_{1, 0, 1}$ в (V, C) , то $F^2 \geq 3$, а если F имеет тип $1_{2, 0, 2}$, то по модулю нумерации $F \neq F_1 + F_2$, где $(F_1)^2 < 0$, $(F_2)^2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.18. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p > 4/5$ или R^N , $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и F_1, F_2 – кривые на V , удовлетворяющие требованию $(*)$. Тогда из теоремы 3.4, 1), 4) и замечания 7.10 следует, что кривая $F_1 \cup F_2$ удовлетворяет требованию $(*)$.

ТЕОРЕМА 7.19. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $p > 4/5$ или R^N , $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и $F = F_X(V, C)$. Тогда F удовлетворяет требованию $(*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7.7 любая максимальная связная компонента B кривой F содержит неприводимую компоненту с неотрицательным индексом самопересечения. Из леммы 7.6 следует, что B имеет тип $0_{n,m,k}$ в (V, C) , где $m, k \leq 2$ (и $m = 0$, компонента B неприводима и $(B, C - B) = 0$ в случае $X = R_1$), или является колесом при $X \neq R_1$. Из замечания 7.10 и теоремы 3.4 вытекает, что если F состоит из более чем одной максимальной связной компоненты, то каждая из них неприводима, имеет нулевой индекс самопересечения и тип $0_{n_i,0,k_i}$ или $0_{1,m,m}$ в (V, C) и $m = 0$ при $X = R_1$. Из лемм 7.7, 7.9 следует, что F не может иметь тип $1_{1,0,1}$ в (V, C) с $F^2 \geq 3$, а также тип $1_{2,0,2}$ и состоять из двух неприводимых компонент F_1 и F_2 , где $(F_1)^2 < 0$, $(F_2)^2 = 0$.

ТЕОРЕМА 7.20. Пусть $(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$, $F = \sum_{i=1}^n F_i$ — максимальная кривая в (V, C) , удовлетворяющая требованию $(*)$ (т.е. не существует кривой G , удовлетворяющей условию $(*)$ и такой, что $F \subset G$, $F \neq G$). Тогда:

- 1) $F = F_{R^N}(V, C)$;
- 2) если F — кривая типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) , отличного от $0_{3,m,2}[0_1, 0_3]$ и $0_{2,m,k}[1_1, 1_2]$, то существует $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$ такое, что пара (V', C') стандартна, где $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{R^N}(\gamma)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что кривая $F_{R^N}(V, C)$ удовлетворяет требованию $(*)$, доказано в теореме 7.19. Из замечания 7.18 следует, что для доказательства теоремы необходимо доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.21. Пусть $F = \sum_{i=1}^n F_i$ — кривая типа $0_{n,m,k}$ или $1_{n,0,k}$ в (V, C) , где $k \leq 2$, удовлетворяющая требованию $(*)$. Тогда:

- а) для любой компоненты F_i кривой F существует $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$ такое, что $\varphi' \circ \varphi_{\text{соб}}^{-1}(F_i) = \text{pt}$, где $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{R^N}(\gamma)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$;
- б) если кривая F имеет численный тип $0_{n,m,k}[(a)_i, (b)_{i+1}]$, где $a, b \geq 0$, и не существует $\rho \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$ такого, что кривая $\psi''_* \psi^{-1}(F)$ имеет численный тип $0_{2,m,k}[(1)_1, (1)_2]$ в (V'', C'') , где $((Z, C^Z), \psi, \psi'') \in L_{R^N}(\rho)$, $\psi: (Z, C^Z) \rightarrow (V, C)$, $\psi'': (Z, C^Z) \rightarrow (V'', C'')$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$ и существует морфизм $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$ такой, что кривая $F' = \varphi'_* \circ \varphi^{-1}(F)$ имеет численный тип $0_{n',m,k'}[(c)_1]$ в (V', C') , где $c \geq 0$, $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{R^N}(\gamma)$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, если F имеет тип $1_{1,0,1}$, произведем раздутие $\sigma: (V', C') \rightarrow (V, C)$ единственной особой точки кривой F . Пусть $F' = \sigma_{\text{соб}}^{-1}(F)$; тогда $(F')^2 = (\sigma_{\text{соб}}^{-1}F)^2 = F^2 - 4$. Если $(F')^2 = -1$, стянем кривую F' , а если $(F')^2 \geq 0$, применим к паре (V', C') морфизм $\varepsilon_{F',p'} \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, где $p' \in F' \cap \text{Sing } C'$. Пусть $((Z, C^Z), \pi', \pi'') \in L_{R^N}(\varepsilon_{F',p'})$. Очевидно, что морфизм π'' стягивает кривую $(\pi')_{\text{соб}}^{-1}(F')$. Это доказывает утверждение для данного случая.

Предположим теперь, что если F имеет тип $1_{n,0,k}$, то $n \geq 2$. Тогда если F_i — компонента кривой F с $(F_i)^2 \geq 0$, то морфизм $\varepsilon_{F_i,p} \in \text{Mor } R^{NM}$ удовлетворяет требованиям утверждения а). Таким образом, утверждение а) в случае $(F_i)^2 \geq 0$ доказано.

Доказательства утверждения а) в случае $(F_i)^2 < 0$ и утверждения б) аналогичны. Для доказательства а) в случае, когда F имеет тип $1_{2,0,2}$, раздуем любую особую точку кривой F , $\sigma: (V', C') \rightarrow (V, C)$, получившуюся при этом

пару (V', C') и кривые $F' = \sigma^{-1}(F)$, $F'_i = \sigma_{\text{cob}}^{-1}(F_i)$ во избежание громоздкости записи мы будем обозначать далее через (V, C) , F и F_i соответственно.

Для доказательства утверждений а), б) построим кривую $G = \sum_{i=1}^{n_G} G_i$ типа $0_{n_G, m_G, k_G}$ в (V, C) такую, что $(G_1)^2 \geq 0$, $(G_l)^2 \leq -2$ при $l > 1$. В случае доказательства утверждения а) заметим, что существует компонента F_j кривой F с $(F_j)^2 \geq 0$. Положим $G_1 = F_j$, $G_{n_G} = F_i$. В доказательстве утверждения б) положим $G_1 = F_i$, $G_{n_G} = F_i$.

Если $d(G) > 0$, применим к паре $(V, C) = (V^0, C^0)$ морфизм $\varepsilon_1 = \varepsilon_{G_1^0, p^0} \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, $\varepsilon_1: (V^0, C^0) \dashrightarrow (V^1, C^1)$, где $p^0 \notin \text{Sing } G^0$, $G^0 = G$, $G_l^0 = G_l$. Определим кривую G^1 на V^1 по аналогии с определением G'' в замечании 7.16. Согласно этому же замечанию имеем $d(G^1) < d(G^0)$. Если $d(G^1) = 0$, положим $\varepsilon = \varepsilon_1$, а если $d(G^1) > 0$, аналогичным образом строим морфизм $\varepsilon_2 = \varepsilon_{G_1^1, p^1} \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, $\varepsilon_2: (V^1, C^1) \dashrightarrow (V^2, C^2)$, и так далее, пока $d(G^s) \neq 0$. В результате получаем морфизм $\varepsilon \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, $\varepsilon = \varepsilon_s \circ \dots \circ \varepsilon_1$, $\varepsilon: (V^0, C^0) \dashrightarrow (V^s, C^s)$, такой, что $d(G^s) = 0$. Пусть $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{RN}(\varepsilon)$. В случае доказательства утверждения а) морфизм φ' стягивает кривую $\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F_i)$, и утверждение а) доказано.

В случае доказательства утверждения б) легко видеть, что кривая $F^s = \varphi'_* \varphi^{-1}(F)$ имеет численный тип $0_{n^s, m, k^s}[(a^s)_1]$ или $0_{n^s, m, k^s}[a_1^s, b_2^s]$ в (V^s, C^s) , где $a^s, b^s \geq 0$ и $a^s = 0$ или $b^s = 0$. Если $a^s \neq 0$, применим к паре (V^s, C^s) морфизм $\varepsilon_{F_2^s, p^s} \in \text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, $\varepsilon_{F_2^s, p^s}: (V^s, C^s) \dashrightarrow (V^{s+1}, C^{s+1})$, где $p^s = F_1^s \cap F_2^s$. Тогда $F^{s+1} = \varepsilon_{F_2^s, p^s}(F^s)$ имеет численный тип $0_{n^{s+1}, m, k^{s+1}}[(a^s - 1)_1, (0)_2]$. Продолжая этот процесс, мы придем к паре (V^t, C^t) такой, что кривая F^t имеет численный тип $0_{n^t, m, k^t}[(0)_1, (b^t)_2]$ в (V^t, C^t) . Если $b^t \geq 0$, то, применив к паре (V^t, C^t) последовательность морфизмов $\varepsilon_{b^t+t} \circ \dots \circ \varepsilon_t$ категории $\tilde{R}^{NM}$, где $\varepsilon_j = \varepsilon_{F_1^j, p^j}$, $p^j = F_1^j \cap F_2^j$ при $j \in \{t, \dots, b^t + t\}$, мы получим пару (V^z, C^z) такую, что кривая F^z имеет численный тип $0_{n^z, m, k^z}[(a^z)_1]$, где $a^z \geq 0$, $z = b^t + t + 1$, что доказывает утверждение б). Таким образом, доказано утверждение, а следовательно, и теорема.

ТЕОРЕМА 7.22. Пусть X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} . Тогда:

- 1) если $(V, C) \in \text{Ob } X$ и $((W, C^W), \varphi) \in N_X(V, C)$, то $F_{RN}(W, C^W) = \varphi^{-1}(F_X(V, C))$;
- 2) если $(V, C) \in \text{Ob}^M X$ и $F = \sum_{i=1}^n F_i$ – максимальная кривая в (V, C) , удовлетворяющая условию (*), то $F = F_X(V, C)$;
- 3) если $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X}_N^M$ и F имеет тип $0_{n, m, k}$ в (V, C) , отличный от $0_{3, m, 2}[0_1, 0_3]$ и $0_{2, m, k}[1_1, 1_2]$, то существует морфизм $\gamma \in \text{Mor } \tilde{X}_N^M$, $\gamma: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$, такой, что пара (V', C') стандартна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что кривая $F_X(V, C)$ удовлетворяет требованию (*), доказано в теореме 7.19.

Согласно замечанию 7.4, 1) можно считать, что $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X}_N^M$. Очевидно, что $\varphi_*(F_{RN}(W, C^W)) \subset F_X(V, C)$. Из того, что кривая $F_X(V, C)$ удовлетворяет требованию (*), из замечания 7.10, того факта, что $\varphi(\text{Ex}(\varphi)) \cap F_X(V, C) = \emptyset$, если кривая $F_X(V, C)$ имеет тип $1_{n, 0, k}$, и теоремы 7.20 следует, что кривая $\varphi^{-1}F_X(V, C)$ удовлетворяет требованию (*). Поэтому $\varphi^{-1}(F_X(V, C)) \subset F_{RN}(W, C^W)$ и $\varphi^{-1}(F_X(V, C)) = F_{RN}(W, C^W)$, что доказывает утверждение 1).

Отсюда согласно утверждению 1) теоремы 7.20 и лемме 6.1 следует истинность утверждения 2). Утверждение 3) следует из теоремы 7.20, 2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.23. 1) Из утверждения 1) теоремы 7.22 и следствия 5.13, 2) вытекает, что если $(V, C) \in \text{Ob } R_{p_1}$ при $4/5 < p_1 < 1$, то $(V, C) \in \text{Ob } R_{p_2} \subset \text{Ob } R_{1-}$ при любом p_2 , $p_1 < p_2 < 1$, и $F_{R_{p_1}}(V, C) = F_{R_{p_2}}(V, C) = F_{R_{1-}}(V, C)$.

2) Пусть $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{X}_N^M$, где X – одна из категорий $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $F = F_X(V, C)$ и $F'_X(V, C)$ – кривая на V , определяемая следующим образом:

$$F'_X(V, C) := \sum_{i \in I} E_i,$$

где E_i – неприводимые кривые на V и $i \in I$, если существует объект $((W_i, C^{W_i}), \varphi_i, \varphi'_i)$ категории $B_2(X, X, \text{Ob } \tilde{X}_N^M)$, где морфизм $\varphi_i: (W_i, C^{W_i}) \rightarrow (V, C)$ такой, что φ'_i стягивает кривую $(\varphi_i)_{\text{cob}}^{-1}(E_i)$. Тогда из того, что определенные выше элементарные морфизмы $\varepsilon_{F_i, p}: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$ принадлежали множеству $\text{Mor } \tilde{R}^{NM}$, и из замечания 7.4, 1) следует $F_X(V, C) = F'_X(V, C)$.

3) При $p < 4/5$ утверждение 1) теоремы 7.22 может не выполняться.

ПРИМЕР 7.24. Пусть $p = 1/2$, V – неособая поверхность; $C = \sum_{i=1}^3 C_i + \sum_{i=1}^3 C'_i$ – кривая на V такая, что C_i, C'_i неособы, рациональны и $(C_i)^2 = (C'_i)^2 = -1$, $(C_i, C_j) = (C'_i, C'_j) = 0$ при $i \neq j$, $(C_i, C'_j) = 1$ при любых i, j . Пусть $\varphi_1: (V, C) \rightarrow (V^1, C^1)$ – стягивание всех кривых C_i , а $\varphi_2: (V, C) \rightarrow (V^1, C^1)$ – стягивание всех C'_i . Тогда $F_{R^N}(V, C) = 0$, а $F_{R_p}(V^1, C^1) = C^1$, $F_{R_p}(V^2, C^2) = C^2$.

§ 8. Категории $\tilde{R}_1^M$ и $\tilde{R}_{1,N}^M$, разложение морфизмов на элементарные линки, соотношения между линками

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. 1) Под графом мы будем понимать неориентированный граф, как и в определении 5.1. Подграфы графа определяются естественным образом. Пусть $\mathcal{G}$ – граф и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$, определим *дополнение* графа $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{G}$ как граф $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$, полученный из $\mathcal{G}$ удалением всех вершин и ребер $\mathcal{G}'$, а также ребер, соединяющих вершины $\mathcal{G}$ с вершинами $\mathcal{G}'$. *Деревом*, как обычно, мы будем называть связный граф без циклов.

2) Пусть $\mathcal{G}$ – дерево и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$; тогда $\mathcal{G}'$ мы будем называть *внешним*, если $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ – дерево.

3) Пусть $\mathcal{G}$ – дерево и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$. Определим *замыкание* $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{G}$, обозначаемое $\overline{(\mathcal{G}')^\mathcal{G}}$, как минимальное поддерево в $\mathcal{G}$, содержащее $\mathcal{G}'$.

4) Пусть $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n \mathcal{G}_i$ – объединение конечного числа деревьев, $\mathcal{G}'_i$ – подграф в $\mathcal{G}_i$, $\mathcal{G}' = \sum_{i=1}^n \mathcal{G}'_i$; тогда $\overline{(\mathcal{G}')^\mathcal{G}}$ определяется равенством $\overline{(\mathcal{G}')^\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^n \overline{(\mathcal{G}'_i)^{\mathcal{G}_i}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Пусть $\mathcal{G}$ – дерево и $\mathcal{G}'$ – подграф в $\mathcal{G}$. Тогда:

1) если $\mathcal{G}'$ – внешнее поддерево $\mathcal{G}$, то существует единственная вершина $a \in \text{Som}(\mathcal{G})$, где $\text{Som}(\mathcal{G})$ – множество вершин $\mathcal{G}$, степень которой в $\mathcal{G}$ на единицу больше ее степени в $\mathcal{G}'$ (см. определение 5.1);

2) из п. 1) несложно вывести, что $\mathcal{G}'$ является внешним поддеревом в $\mathcal{G}$, если и только если существуют вершина $a \in \text{Som}(\mathcal{G})$, ассоциированные с ней

ориентация на $\mathcal{G}$ и отображение $\mathcal{V}: \text{Som}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$ такие, что $\mathcal{V}(\text{Som}(\mathcal{G}')) \geq 0$, $\mathcal{V}(\text{Som}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}')) < 0$;

3) из п. 2) следует, что любой внешний подграф содержит вершину степени один в $\mathcal{G}$, если $\mathcal{G}$ не состоит из одной вершины;

4) $\mathcal{G}'$ является внешним в $\mathcal{G}$, если и только если каждая связная компонента $\mathcal{G}'$ – внешнее поддерево в $\mathcal{G}$.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $(V, C) \in \text{Ob } R_{1-}$, $F \subset H \subset G \subset C$ – кривые на V , $(G, C - G) = 0$, $H \neq G$, $\mathcal{G}(G)$ – дерево, кривая H стягиваема в категории R_{1-} и $\mathcal{G}(F)$ – внешний подграф в $\mathcal{G}(G)$. Тогда кривая F стягиваема в категории R_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5.12, замечания 8.2, 3), стягиваемости кривой H в категории R_{1-} и условия $H \neq G$ следует, что существует неприводимая компонента E^0 кривой F такая, что $(E^0, G - E^0) = 1$, $p_a(E_0) = 0$, $(E^0)^2 < 0$. Докажем, что E^0 содержит не более одной особой точки пары (V, C) типа $0_{n,1,k}$ (см. определение в 5.2), где $k \leq 2$. Допустим противное. Пусть φ – стягивание кривой H , $\varphi = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1$ – разложение морфизма φ ; тогда из теоремы 5.12 следует, что для любого i : $(\varphi_i \circ \dots \circ \varphi_1)_*(E^0)$ – кривая, содержащая более одной особой точки. Тогда из условия $H \neq G$ следует, что кривая H не стягиваема в категории R_{1-} . Противоречие.

Поэтому согласно теореме 5.12 кривая E^0 стягиваема в категории R_1 . Пусть $\sigma_1: (V, C) \rightarrow (V^1, C^1)$ – ее стягивание, $G^1 = (\sigma_1)_*(G)$, $H^1 = (\sigma_1)_*(H)$, $F^1 = (\sigma_1)_*(F)$. Очевидно, если $F^1 \neq 0$, то кривая H^1 стягиваема в категории R_{1-} и подграф $\mathcal{G}(F^1)$ является внешним в $\mathcal{G}(G^1)$. Тогда аналогично можно построить стягивание $\sigma_2: (V^1, C^1) \rightarrow (V^2, C^2)$ неприводимой кривой $E^1 \in F^1$, $\sigma_2 \in \text{Mor } X$. Продолжая этот процесс, мы получим стягивание кривой F в категории R_1 . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. Пусть $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ и кривая $F_{R_{1-}}(V, C)$ непуста и состоит из неприводимых связных компонент, имеющих типы $0_{n_i,0,k_i}$ в (V, C) , где $k_i \leq 2$ (см. определение 7.1). Тогда $F_{R_1}(V, C) = F_{R_{1-}}(V, C)$. Действительно, достаточно заметить, что для каждой компоненты F_i кривой $F_{R_{1-}}(V, C)$ легко привести объект $((W, C^W), \varphi, \varphi')$ категории $B_2(R_1)$ такой, что $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$ и морфизм φ' стягивает кривую $\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F_i)$. Если $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ и кривая $F_{R_1}(V, C)$ непуста, то $F_{R_1}(V, C) = F_{R_{1-}}(V, C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. Из теоремы 8.3 и замечания 8.4 следует, что можно определить полные подкатегории $\tilde{R}_1^M$ и $\tilde{R}_{1,N}^M$ в категории $\tilde{R}_{1-}^M$ условиями

$$\begin{aligned} \text{Ob } \tilde{R}_1^M &:= \{(V, C) \in \text{Ob } \tilde{R}_{1-}^M \mid F_{R_1}(V, C) \neq \emptyset\}, \\ \text{Ob } \tilde{R}_{1,N}^M &:= \{(V, C) \in \text{Ob } \tilde{R}_{1-,N}^M \mid F_{R_1}(V, C) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 8.6. 1) Пусть $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in \text{Ob}^M B_2(R_{1-})$, $\varphi: (W, C^W) \rightarrow (V, C)$, $\varphi': (W, C^W) \rightarrow (V', C')$, $F \subset C$ – кривая на V и $\mathcal{G}(F)$ – объединение конечного числа деревьев, $F' = \varphi'_* \circ \varphi^{-1}(F)$, $(F, C - F) = 0$. Тогда очевидно, что

$$\mathcal{G}(\varphi^{-1}(F)) = \overline{\mathcal{G}((\varphi_{\text{cob}}^{-1}(F)) + \mathcal{G}((\varphi')_{\text{cob}}^{-1}(F'))^{\mathcal{G}(C)}}.$$

2) Пусть $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_1^M$, $\gamma: (V, C) \dashrightarrow (V', C')$, $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{R_{1-}}(\gamma)$, $F = F_{R_1}(V, C) = \sum_{i=1}^n F_i$, где F_i – неприводимые связные компоненты кривой F ,

$F^W = \varphi^{-1}(F) = \sum_{i=1}^n F_i^W$, $F_i^W = \varphi^{-1}(F_i) = \sum_{j=1}^{m_i} F_i^{W,j}$, $F'_i = \varphi'_* \circ \varphi^{-1}(F_i)$ – неприводимые связные компоненты кривой $F_{R_1}(V', C')$. Тогда из п. 1) вытекает, что кривые F_i^W имеют типы $0_{n_i,0,k_i}$, где $k_i \leq 2$, и что нумерацию на кривой F^W можно выбрать так, что

$$F_i^{W,1} = \varphi_{\text{cob}}^{-1}(F_i), \quad F_i^{W,m_i} = (\varphi')_{\text{cob}}^{-1}(F'_i).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7. В обозначениях следствия 8.6, 2) пусть $((W, C^W), \varphi, \varphi') \in L_{R_1-}(\gamma)$, где $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_1^N$. Положим

$$(V_1^1, C_1^1) = (V, C), \quad (V_n^{m_n}, C_n^{m_n}) = (V', C').$$

Рассмотрим морфизмы $\sigma_i^j \in \text{Mor } R_1$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m_i\}$. Каждый морфизм $\sigma_i^j: (W, C^W) \rightarrow (V_i^j, C_i^j)$ является стягиванием следующих компонент кривой F^W : $F_l^{W,p}$, где $l < i$, $p < m_i$, $F_i^{W,r}$, где $j < r \leq m_i$ или $j > r$, и $F_f^{W,s}$, где $f > i$, $s > 1$. Очевидно, что морфизмы σ_i^j корректно определены и $(V_i^j, C_i^j) \in \text{Ob}^M R_1$.

Определим морфизмы $\gamma_i^j \in \text{Mor } \tilde{R}_1^M$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m_i - 1\}$, условиями $((W, C^W), \sigma_i^j, \sigma_i^{j+1}) \in \gamma_i^j$.

ТЕОРЕМА 8.8. В обозначениях определения 8.7 имеем

$$\gamma = \gamma_n^{m_n-1} \circ \dots \circ \gamma_n^1 \circ \dots \circ \gamma_1^{m_1-1} \circ \dots \circ \gamma_1^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следствия 8.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.9. 1) Морфизмы γ_i^j элементарны в следующем смысле: пусть $((Z_i^j, C_i^j), \rho_i^j, \rho_i^{j+1}) \in L_{R_1-}(\gamma_i^j)$ при $j < m_i$; тогда $\rho_i^j, \rho_i^{j+1} \in \text{Mor}^1 R_1$.

2) Пусть $\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_{1,N}^M$; тогда из теоремы 6.13 следует, что $\gamma_i^j \in \text{Mor } \tilde{R}_{1,N}^M$. Если $\varepsilon_i^j = \tilde{\mathcal{N}}_{R_1-}(\gamma_i^j)$, то $\varepsilon_i^j \in \text{Mor } \tilde{R}^N$ совпадает с некоторым морфизмом $\varepsilon_{F,p}$, описанным в определении 7.14.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.10. Пусть X – одна из категорий R^N , $R_{p\#}$ при $4/5 < p < 1$ или R_{1-} , $\gamma \in \text{Mor } \tilde{X}_N^M$, $\gamma: (V, C) \rightarrow (V', C')$, пара (V, C) стандартна (см. определение 7.13) и кривая $F_X(V, C)$ либо состоит из более чем одной связной компоненты, либо имеет численный тип $0_{n,m,k}[(a)_i]$ в (V, C) . Тогда из теоремы 8.8 следует, что морфизм γ разложим в последовательность морфизмов ε_{F_i,p_i} , если X является категорией R^N , и последовательность минимизаций морфизмов ε_{F_i,p_i} в противном случае.

ТЕОРЕМА 8.11. В условиях определения 8.7 между элементарными морфизмами γ_i^j категории $\tilde{R}_{1,N}^M$, действующими на одной связной компоненте, отсутствуют нетривиальные соотношения. Морфизмы, действующие на разных компонентах, коммутируют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что между элементарными морфизмами, действующими на одной связной компоненте, отсутствуют нетривиальные соотношения. Тогда можно считать, что кривая C из определения 8.7 состоит из одной связной компоненты. Допустим, что $\gamma_i^1 \circ \dots \circ \gamma_i^n$ – соотношение такое, что любое подслово данного слова не является соотношением. Тогда

если $((Z_i, C^{Z_i}), \rho_i^0, \rho_i^{n-1}) \in L_{R_{1-}}(\gamma_i^1 \circ \dots \circ \gamma_i^{n-1})$, то граф, соответствующий кривой $F_{R_{1-}}(Z_i, C_i)$, является цепью. Заметим, что если $((W_i, C_i^W), \varphi_i, \varphi'_i)$ – минимальное разрешение морфизма $\gamma_i^1 \circ \dots \circ \gamma_i^n$ такое, что (W_i, C_i^W) доминирует (Z_i, C^{Z_i}) , то граф, соответствующий кривой $F_{R_{1-}}(W_i, C_i^W)$, является деревом и либо получается добавлением одного звена к цепи, соответствующей кривой $F_{R_{1-}}(Z_i, C_i)$, либо совпадает с ней. В первом случае $\gamma_i^1 \circ \dots \circ \gamma_i^n$ не может быть соотношением, во втором случае $\gamma_i^1 \circ \dots \circ \gamma_i^n$ может быть соотношением тогда и только тогда, когда $n = 2$ и $\gamma_i^1 = (\gamma_i^2)^{-1}$. Таким образом, первое утверждение доказано. То, что элементарные морфизмы, действующие на разных связных компонентах коммутируют, очевидно. Теорема доказана.

§ 9. Автоморфизмы квазипроективных поверхностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. 1) Пусть U – квазипроективная поверхность; тогда мы будем говорить, что U имеет $p_{\#}$ -логтерминальные особенности, если $(U, 0) \in \text{Ob } R_{\#}^*$, где категории $R_{\#}^*$ определены в замечании 3.16. Исходя из результатов § 4 несложно убедиться в том, что если поверхность U имеет $p_{\#}$ -логтерминальные особенности, то она имеет также и 1-логтерминальные особенности.

2) Пусть квазипроективная поверхность U имеет 1-логтерминальные особенности. Определим категорию T^U компактификаций поверхности U в категории R_{1-} условиями:

$$\begin{aligned} \text{Ob } T^U &:= \{(\rho, V, C) \mid \rho: U \hookrightarrow V \text{ – открытое вложение,} \\ &\quad (V, C) \in \text{Ob } R_1 = \text{Ob } R_{1-} \text{ и } C = V \setminus \rho(U)\}, \\ \text{Mor } T^U &:= \{\varphi: (\rho, V, C) \rightarrow (\rho', V', C') \mid \varphi: (V, C) \rightarrow (V', C'), \\ &\quad \varphi \in \text{Mor } R_{1-}, \varphi \circ \rho = \rho'\}. \end{aligned}$$

3) Из выполнения правила Оре в категории R_{1-} следует его выполнение в категории T^U , поэтому корректно определена категория частных $\tilde{T}^U$ категории T^U .

Через R_{1-}^U мы будем обозначать полную подкатегорию в R_{1-} , объектами которой являются пары, компактифицирующие поверхность U в этой категории. Заметим, что категория R_{1-}^U получается из категории T^U функтором забывания открытого вложения ρ . Через $\tilde{R}_{1-}^U$ мы будем обозначать категорию частных категории R_{1-}^U .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Пусть поверхность U имеет 1-логтерминальные особенности и $\text{Aut}(U)$ – группа ее бирегулярных автоморфизмов. Тогда, очевидно, существует компактификация $(\rho, V, C) \in \text{Ob } T^U$. Поскольку категория R_{1-} является полной подкатегорией в категории R , любому бирегулярному автоморфизму $g \in \text{Aut}(U)$, заданному вместе с компактификациями (ρ, V, C) , $(\rho', V', C') \in \text{Ob } T^U$ взаимно однозначно соответствует морфизм

$$\gamma \in \text{Mor } \tilde{R}_{1-}^U, \quad \gamma = \rho' \circ g \circ \rho^{-1}: (V, C) \dashrightarrow (V', C').$$

Опишем теперь классы рассматриваемых компактификаций и поверхностей и возникающие в этих случаях альтернативы. Пусть U имеет 1-логтерминальные особенности; тогда мы будем рассматривать такие $(\rho, V, C) \in \text{Ob } T^U$, что $(V, C) \in \text{Ob}^M R_{1-}$ и $\mathcal{N}_{R_{1-}}(V, C) \in \text{Ob}^M R^N$ (очевидно, что такие компактификации всегда существуют). В случае, когда кривая $F_{R_{1-}}(V, C)$ имеет тип $0_{n,m,k}$ в (V, C) и может быть приведена к стандартному виду, будут рассматриваться только стандартные компактификации (см. определения 7.1, 5.2 и 7.13). Обозначим через $T_N^{U,M}$ полную подкатегорию в T^U , соответствующую определенному выше классу компактификаций.

Чтобы не вдаваться в излишние подробности, мы ограничимся рассмотрением таких поверхностей U , для компактификаций которых выполнено условие $F_{R_{1-}}(V, C)(C - F_{R_{1-}}) = 0$. Тогда согласно результатам из § 7 имеются следующие альтернативы:

1) $F_{R_1}(V, C) \neq 0$; тогда $F_{R_1}(V, C)$ либо является объединением непересекающихся кривых с нулевым индексом самопересечения, не проходящих через особенности V , либо состоит из одной компоненты, проходящей через не более чем две особые точки поверхности V типа $0_{n,m,k}$ в (V, C) ;

2) $F_{R_1}(V, C) = 0$, а $F_{R_{1-}}(V, C) \neq 0$; тогда либо $F_{R_{1-}}(V, C)$ имеет тип $1_{n,0,k}$ в (V, C) и является колесом (см. замечание 5.3, 2)), либо U имеет компактификацию такую, что $F_{R_{1-}}(V, C)$ состоит из двух компонент F_1, F_2 , не проходящих через особенности V и таких, что $F_1^2 = F_2^2 = 1$, $(F_1, F_2) = 1$;

3) $F_{R_{1-}}(V, C) = 0$.

Рассмотрим случай $F_{R_1}(V, C) \neq 0$. В определении 8.7 были введены элементарные морфизмы категории $\tilde{R}_{1,N}^M$, на которые можно разложить любой морфизм этой категории. Очевидно, любой морфизм категории $\tilde{T}_N^{U,M}$ также раскладывается на соответствующие этим морфизмам элементарные морфизмы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. По аналогии с [9] *графом компактификаций* Δ_U называется граф, вершинами которого являются классы изоморфных компактификаций поверхности U , а ребрами – элементарные морфизмы. Такое определение корректно ввиду того, что элементарные морфизмы переводят изоморфные компактификации в изоморфные. Очевидно, что доказательство существования разложения морфизмов категории $\tilde{T}_N^{U,M}$ на элементарные равносильно доказательству связности графа Δ_U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. 1) *Графом групп* (Γ, G) называется неориентированный граф Γ (здесь неориентированность будет пониматься в смысле [10], т.е. будут рассматриваться направленные ребра, на которых определена операция обращения, равная в квадрате тождественному отображению), каждому ребру и вершине которого сопоставлены некоторые группы, при этом фиксированы вложения групп, соответствующих ребрам, в группы, соответствующие вершинам, инцидентным данным ребрам, иначе говоря, группы на ребрах отождествляются с подгруппами групп на вершинах, которые эти ребра соединяют. Далее через P_i мы будем обозначать вершины, через y_i – направленные ребра, $\bar{y}_i$ – противоположные ребра, а через G_{P_i}, G_{y_i} – соответствующие группы. Если $g \in G_{y_i}$, то через g^{y_i} мы обозначим образ g в группе, соответствующей концу ребра y_i .

2) Пусть Γ – связный граф. Рассмотрим группу $F(\Gamma, G)$, порожденную группами G_{P_i} и элементами y_i , связанными соотношениями

$$\bar{y} = y^{-1}, \quad yg^y y^{-1} = g^{\bar{y}}, \quad g \in G_y.$$

Если P_0 – некоторая вершина Γ , то *фундаментальной группой графа* (Γ, G) в P_0 называется подгруппа $\pi_1(\Gamma, G, P_0) \subset F(\Gamma, G)$, порожденная словами вида $g_0 y_1 g_1 \dots y_n g_n$, где $g_i \in G_{P_i}$, y_i – направленное ребро из P_{i-1} в P_i и $P_0 = P_n$.

3) Пусть группа G действует на связном графе Δ и Γ – факторграф Δ по действию G . Тогда по этим данным в работе [10] построен *граф групп* (Γ, G) , ассоциированный с графом Δ и действующей на нем группой G . Конструкция примерно следующая: строится поднятие вершин и ребер графа Γ в Δ , после чего вершинам и ребрам графа Γ сопоставляются подгруппы группы G , являющиеся стабилизаторами соответствующих вершин и ребер графа Δ . Отображения между группами, соответствующими ребрам и вершинам Γ , строятся согласно выбору поднятия. То, что в результате действительно будет получен граф групп (Γ, G) , следует из конструкции.

ТЕОРЕМА 9.5 [10, теорема 13]. *В обозначениях определения 9.4, 3) выполнены следующие утверждения:*

- 1) *определен сюръективный гомоморфизм $\psi: \pi_1(\Gamma, G, P_0) \rightarrow G$, где P_0 – произвольная вершина Γ ;*
- 2) *граф Δ является деревом тогда и только тогда, когда ψ – изоморфизм.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.6. *В предыдущих обозначениях ядро гомоморфизма ψ изоморфно фундаментальной группе графа Δ .*

Рассмотрим граф компактификаций Δ_U и действующую на нем группу $\text{Aut}(U)$. Условием $g(\rho) = g \circ \rho$ определено действие группы $\text{Aut}(U)$ на этом графе. Легко проверить, что факторграф Γ_U графа Δ_U по данному действию изоморфен графу пар, компактифицирующих поверхность U в категории $R_{1,N}^M$, вершинами которого являются классы изоморфных пар, а ребрами – элементарные морфизмы категории $\tilde{R}_{1,N}^M$.

Тогда, если $F_{R_1}(V, C)$ состоит из одной неприводимой компоненты, между элементарными морфизмами отсутствуют нетривиальные соотношения. Поэтому граф Δ_U не имеет циклов и, следовательно, является деревом. Тогда согласно теореме 9.5 группа $\text{Aut}(U)$ изоморфна фундаментальной группе графа групп $(\Gamma_U, \text{Aut}(U))$, построенного по факторграфу графа Δ_U по действию $\text{Aut}(U)$ в соответствии с определением 9.4. Для решения поставленной задачи остается вычислить стабилизаторы вершин и ребер Δ_U . Легко проверить, что стабилизаторы вершин графа Δ_U изоморфны группам бирегулярных автоморфизмов соответствующих этим вершинам стандартных пар, стабилизаторы ребер также легко определяются по элементарным морфизмам. Таким образом, мы получили полное описание группы $\text{Aut}(U)$ для данного случая.

В случае, когда $F_{R_1}(V, C)$ состоит из нескольких неприводимых компонент, элементарные морфизмы, соответствующие различным неприводимым компонентам, коммутируют. Поэтому граф Δ_U имеет циклы и не является деревом, ввиду чего мы можем дать полное описание группы $\text{Aut}(U)$ в соответствии с утверждением 9.6.

Рассмотрим случай, когда $F_{R_1}(V, C) = 0$, а $F_{R_1-}(V, C) \neq 0$. Если $F_{R_1-}(V, C)$ имеет тип $1_{n,0,k}$ в (V, C) , т. е. является колесом, нами не получено разложение

морфизмов категории $\widetilde{R}_{1-,N}^M$ на элементарные, и вряд ли оно могло бы оказаться полезным для описания группы $\text{Aut}(U)$, хотя легко доказать, что связная компонента единицы этой группы совпадает со связной компонентой единицы группы бирегулярных автоморфизмов любой компактифицирующей ее пары (это следует из утверждения 7.8).

В случае, когда U имеет компактификацию такую, что $F_{R_{1-}}(V, C)$ состоит из двух компонент F_1, F_2 , не проходящих через особенности $\bar{V}$ и таких, что $F_1^2 = F_2^2 = 1$, $(F_1, F_2) = 1$, разложение на линки легко может быть построено (хотя мы этого и не делаем) методами из [3], но оно не даст полного описания группы $\text{Aut}(U)$, поскольку между линками будут нетривиальные соотношения, которые нам на данный момент не известны.

Рассмотрим случай $F_{R_{1-}}(V, C) = 0$. Легко видеть, что в данной ситуации (V, C) является правожестким объектом категории R_{1-} , поэтому $\text{Aut}(U) = \text{Aut}(V, C)$ (см. определение 2.3 и замечание 2.18).

Список литературы

1. A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.
2. В. А. Исковских, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори”, *УМН*, **51**:4 (1996), 3–72; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Factorization of birational maps of rational surfaces from the viewpoint of Mori theory”, *Russian Math. Surveys*, **51**:4 (1996), 585–652.
3. A. Bruno, K. Matsuki, “Log Sarkisov program”, *Internat. J. Math.*, **8**:4 (1997), 451–494.
4. М. Х. Гизатуллин, “Квазиоднородные аффинные поверхности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:5 (1971), 1047–1071; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, “Quasihomogeneous affine surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:5 (1971), 1057–1081.
5. М. Х. Гизатуллин, “Инварианты неполных алгебраических поверхностей, получаемые с помощью пополнений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 485–497; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, “Invariants of incomplete algebraic surfaces obtained by completions”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 503–515.
6. М. Х. Гизатуллин, “Аффинные поверхности, квазиоднородные относительно алгебраической группы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 738–753; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, “Affine surfaces which are quasihomogeneous with respect to an algebraic group”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:4 (1971), 754–769.
7. М. Х. Гизатуллин, “Об аффинных поверхностях, пополняемых неособой рациональной кривой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:4 (1970), 778–802; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, “On affine surfaces that can be completed by a nonsingular rational curve”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 787–810.
8. М. Х. Гизатуллин, В. И. Данилов, “Аutomорфизмы аффинных поверхностей. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 523–565; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, V. I. Danilov, “Automorphisms of affine surfaces. I”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 493–534.
9. М. Х. Гизатуллин, В. И. Данилов, “Аutomорфизмы аффинных поверхностей. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:1 (1977), 54–103; англ. пер.: М. Н. Gizatullin, V. I. Danilov, “Automorphisms of affine surfaces. II”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:1 (1977), 51–98.

10. Ж. П. Серр, “Деревья, амальгамы и SL_2 ”, *Математика*, **18:1** (1974), 3–51.
11. A. Dubouloz, S. Lamy, *Variations on log Sarkisov program for surfaces*, [arXiv:abs/0802.2441](#).
12. K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
13. Yu. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic geometry* (Sendai, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.

Ю. М. Полякова (Yu. M. Polyakova)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: wainzwei@iitp.ru

Поступило в редакцию
18.06.2007
18.08.2009