Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 169–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:21:47

УДК 517.5

А. И. Степанец

, А. Л. Шидлич

Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций

Исследуются величины $e_\sigma(f)$ наилучших приближений интегралов функций из пространств $L_p(A, d\mu)$, $p > 0$, при помощи интегралов ранга σ . Найдены точные значения и порядки при $\sigma \rightarrow \infty$ точных верхних граней этих величин на классах функций, представимых в виде произведений некоторой фиксированной неотрицательной функции и функций из единичного шара $U_p(A)$ пространства $L_p(A, d\mu)$. В терминах величин $e_\sigma(\cdot)$ получены необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная функция из множества $L_p(A, d\mu)$ принадлежала $L_s(A, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. Рассматриваются приложения полученных результатов к приближению измеримых функций, задающихся свертками с суммируемыми ядрами, целыми функциями экспоненциального типа.

Библиография: 35 наименований.

Ключевые слова: наилучшие приближения интегралов интегралами конечного ранга, абсолютная сходимость интегралов.

Введение

0.1. Постановка задачи. Пусть $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, $m \geq 1$, – m -мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, оснащенное конечной σ -аддитивной непрерывной мерой $d\mu$; A – μ -измеримое подмножество из $(\mathbb{R}^m, d\mu)$, μ -мера которого равна a , где a – конечное число или $a = \infty$:

$$\mu(A) = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ – множество всех заданных на A функций $f = f(\mathbf{x})$, измеримых относительно меры $d\mu$.

При заданном $p \in (0, \infty)$ через $L_p(A, d\mu)$ обозначим подмножество функций f из $Y(A, d\mu)$, для которых величина

$$\|f\|_{L_p(A, d\mu)} = \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p d\mu \right)^{1/p} \tag{0.1}$$

является конечной.

Известно, что функционал $\|\cdot\|_{L_p(A, d\mu)}$, определенный через (0.1), при $p \geq 1$ задает норму, а при $p \in (0, 1)$ – квазинорму на $L_p(A, d\mu)$.

Пусть, далее, $f \in L_1(A, d\mu)$, σ – некоторое положительное число и $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ – множество всех μ -измеримых подмножеств γ_σ из A , μ -мера которых равна σ .

В настоящей работе исследуются величины

$$e_{\sigma}(f) = e_{\sigma}(f)_A := \inf_{\gamma_{\sigma} \in \Gamma_{\sigma}} \left| \int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_{\sigma}} f(\mathbf{x}) d\mu \right|, \quad (0.2)$$

которые впервые рассматривались в [1]. Идея их введения восходит к работе С. Б. Стечкина [2], в которой появилось известное понятие наилучшего квадратического приближения заданного элемента при помощи n -членных полиномов по данной системе, определяющееся следующим образом.

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H , $f \in H$ и

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad (0.3)$$

– разложение элемента f в ортогональный ряд по системе φ .

Рассматриваются всевозможные n -членные ($n = 1, 2, \dots$) полиномы по системе φ

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k,$$

где γ_n – произвольные наборы из n различных натуральных чисел, а d_k – любые комплексные числа.

Величину

$$e_n(f, \varphi)_H = \inf_{P_{\gamma_n}} \|f - P_{\gamma_n}\|_H = \inf_{\gamma_n, d_k} \left\| f - \sum_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k \right\|_H \quad (0.4)$$

называют *наилучшим квадратическим приближением элемента f при помощи n -членных полиномов по системе φ* .

Согласно определению нормы $\|\cdot\|_H$ для любого элемента $f \in H$ имеем

$$\|f - P_{\gamma_n}\|_H^2 = \sum_{k \notin \gamma_n} |f_k|^2 + \sum_{k \in \gamma_n} |f_k - d_k|^2 \geq \sum_{k \notin \gamma_n} |f_k|^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$e_n(f, \varphi)_H^2 = \inf_{\gamma_n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 - \sum_{k \in \gamma_n} |f_k|^2 \right). \quad (0.5)$$

Сопоставляя равенства (0.5) и (0.2), делаем вывод, что величины $e_{\sigma}(f)$ можно рассматривать в качестве интегрального аналога величин $e_n(f, \varphi)_H$ и называть *наилучшими приближениями интеграла функции f по множеству A посредством интегралов ранга (порядка) σ* .

В работе [2] изучался вопрос абсолютной сходимости ортогональных рядов и посредством величин (0.4) были сформулированы необходимые и достаточные условия того, чтобы для данного элемента $f \in H$ сходиллся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, где $f_k = (f, \varphi_k)$. Однако эти величины интересны и с точки зрения аппроксимации функций. Исследования поведения точных верхних граней аналогичных величин проводились для различных классов периодических функций как одной, так и многих переменных. В частности, для некоторых классов функций

одной переменной поведение точных верхних граней аналогичных величин изучалось в работах [3]–[7] и др. Исследование аналогичных величин для функций многих переменных проводилось, в частности, в работах [8]–[15], [16, гл. XI], [17]–[19] и др.

Настоящая работа посвящена изучению аппроксимационных свойств интегральных величин $e_\sigma(f)$ вида (0.2), которые являются интегральными аналогами рассмотренных выше величин $e_n(f, \varphi)_H$. В ней, в частности, найдены точные значения и порядки при $\sigma \rightarrow \infty$ точных верхних граней этих величин на классах функций, представимых в виде произведений некоторой фиксированной функции и функций из единичного шара пространства $L_p(A, d\mu)$. Кроме того, приведены приложения полученных результатов к вопросам абсолютной сходимости интегралов, а также к приближению измеримых функций, задающихся свертками с суммируемыми ядрами, целыми функциями экспоненциального типа.

0.2. Организация статьи. Работа состоит из введения и шести параграфов.

В § 1 формулируются общие определения и вспомогательные результаты, которые будут использоваться в работе.

В § 2 приведены основные результаты работы. В пп. 2.1, 2.3 представлены теоремы, дающие соответственно точные значения и порядки при $\sigma \rightarrow \infty$ точных верхних граней величин $e_\sigma(f)$ на классах функций, представимых в виде произведений некоторой фиксированной функции и функций из единичного шара пространства $L_p(A, d\mu)$.

При изучении точных верхних граней аналогов величин $e_n(f)$ для классов периодических функций естественно сравнивать значения этих величин со значениями наилучших приближений или со значениями различных поперечников этих классов. В связи с этим в п. 2.2 исследуются величины $E_{\gamma_\sigma}(f)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$, которые можно рассматривать как интегральные аналоги наилучшего приближения функции f и соответственно тригонометрического поперечника заданного класса.

В § 3–5 доказаны все основные утверждения работы, а также некоторые следствия из них.

В § 6 содержатся некоторые приложения полученных результатов. В частности, в п. 6.1 в терминах величин $e_\sigma(\cdot)$ получены необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная функция из множества $L_p(A, d\mu)$ принадлежала $L_s(A, d\mu)$, $0 < p, s < \infty$. В п. 6.2 рассматриваются приложения полученных результатов к приближению измеримых функций, задающихся свертками с суммируемыми ядрами, целыми функциями экспоненциального типа.

§ 1. Общие определения и вспомогательные результаты

1.1. Определение и некоторые свойства перестановок функций.

В работе используется понятие перестановки функции в убывающем порядке. Это понятие по-видимому впервые появилось в работах Г.Г. Харди и

Д. Е. Литтлвуда (см. [20, гл. X]) и затем с успехом использовалось многими авторами. Приведем здесь необходимые определения, придерживаясь текста из книги Н. П. Корнейчука [21, гл. VI], где рассматривались перестановки функций одной переменной, но основные определения пригодны и в общем случае.

Пусть на μ -измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\mu(A) = a$, где a конечно или бесконечно, задана неотрицательная и μ -измеримая функция $\varphi(\mathbf{x})$. Для всех $y \geq 0$ определим функцию $m_\varphi(y)$:

$$m_\varphi(y) := \mu(E_y), \quad E_y = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in A, \varphi(\mathbf{x}) \geq y\}, \quad y \geq 0, \quad (1.1)$$

как меру множества E_y точек $\mathbf{x} \in A$, на котором $\varphi(\mathbf{x}) \geq y$. Мы предполагаем, что $m_\varphi(y)$ принимает при $y > 0$ только конечные значения.

Функция $t = m_\varphi(y)$, которую называют *функцией распределения* для $\varphi(\mathbf{x})$, не возрастает при всех $y \geq 0$, при этом $m_\varphi(0) = a$. Если $m_\varphi(y)$ непрерывна и строго убывает, то на промежутке $t \in (0, a)$ существует строго убывающая обратная к ней функция $y = \bar{\varphi}(t)$, которую и называют *перестановкой* функции $\varphi(\mathbf{x})$ в убывающем порядке. В общем случае, в зависимости от φ , функция $m_\varphi(y)$ может иметь промежутки постоянства, а также разрывы первого рода в конечном или счетном множестве точек. Чтобы однозначно определить обратную к ней функцию, исправим график функции $m_\varphi(y)$ следующим образом. В каждой точке разрыва y_j функции $m_\varphi(y)$ дополним ее график отрезком $y = y_j$, $m_\varphi(y_j-) \leq t \leq m_\varphi(y_j+)$, а на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$, где $m_\varphi(y)$ постоянна, оставим в ее графике только одну точку с координатами, например, $y = (\alpha + \beta)/2$, $t = m_\varphi((\alpha + \beta)/2)$. В таком случае каждому $t \in (0, a)$ будет соответствовать единственная точка с координатами $(t, m_\varphi^{-1}(t))$. Это отображение и определяет функцию $y = \bar{\varphi}(t)$ – перестановку функции $\varphi(\mathbf{x})$ в рассматриваемом случае.

При любом $y \geq 0$ мера Лебега множества точек $t \in (0, a)$, на котором выполнено $\bar{\varphi}(t) \geq y$, равна $m_\varphi(y)$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства

$$\int_0^a F(\bar{\varphi}(t)) dt = \int_A F(\varphi(\mathbf{x})) d\mu \quad (1.2)$$

для любой функции F , для которой эти интегралы существуют (см. [20, гл. X]).

1.2. Свойства величин $e_\sigma(f)$. Приведем ряд общих фактов, которые проясняют некоторые свойства величин $e_\sigma(f)$ и будут использоваться в дальнейшем.

Если $f(\mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in A$, то $e_\sigma(f)$ можно представить в виде

$$e_\sigma(f) = \int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu.$$

При этом величину

$$\mathcal{J}_\sigma(f) := \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \quad (1.3)$$

называют *главным значением ранга σ интеграла $\int_A f(\mathbf{x}) d\mu$* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [1, с. 1390]. Для каждой неотрицательной функции $f \in L(A, d\mu)$ точная верхняя грань в (1.3) реализуется на некотором множестве $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$:

$$\mathcal{J}_\sigma(f) = \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu = \int_{\gamma_\sigma^*} f(\mathbf{x}) d\mu = \int_0^\sigma \bar{f}(t) dt, \quad (1.4)$$

где $\bar{f}(t)$ – убывающая перестановка функции f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2 [1, с. 1392]. Для любой неотрицательной функции $f \in L_1(A, d\mu)$

$$e_\sigma(f) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right) = \int_\sigma^a \bar{f}(t) dt. \quad (1.5)$$

При этом точная нижняя грань в (1.5) реализуется на множестве $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, определенном в соотношении (1.4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть $f(\mathbf{x})$ – произвольная неотрицательная суммируемая на множестве A функция и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность таких неотрицательных функций, что для любых $n \in \mathbb{N}$ почти всюду на A справедливо неравенство

$$f_n(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(\mathbf{x}) d\mu = \int_A f(\mathbf{x}) d\mu. \quad (1.7)$$

Тогда величина

$$e_\sigma(f_n) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{A \setminus \gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x}) d\mu = \int_A f_n(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x}) d\mu$$

сходится к величине $e_\sigma(f)$ при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} e_\sigma(f_n) = e_\sigma(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} |e_\sigma(f) - e_\sigma(f_n)| &= \left| \int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_A f_n(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x}) d\mu \right) \right| \\ &= \left| \int_A (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})) d\mu - \left(\sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x}) d\mu \right) \right|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В силу (1.6) для любого $\sigma < a$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f_n(\mathbf{x}) d\mu \\ &\leq \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})) d\mu \leq \int_A (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие (1.7) и (1.8) получаем необходимое соотношение

$$|e_\sigma(f) - e_\sigma(f_n)| \leq \int_A (f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если функции f и f_n , $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям утверждения 1.3, а величина $e_\sigma(f_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ не превышает некоторую постоянную C , то величина $e_\sigma(f)$ также не будет превышать эту постоянную: $e_\sigma(f) \leq C$.

1.3. Некоторые сведения о выпуклых функциях. Приведем некоторые известные сведения о выпуклых функциях, используемые как при формулировках, так и при доказательствах теорем о порядках точных верхних граней величин $e_\sigma(f)$ на некоторых классах функций. При этом важную роль имеет предложенная в монографии [22, с. 159–176] (см. также [23]) классификация множества $\mathfrak{M}$ всех положительных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций непрерывного аргумента $t \geq 1$:

$$\mathfrak{M} = \{\psi(t): \psi(t) > 0, \psi(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha\psi(t_1) + (1 - \alpha)\psi(t_2) \\ \forall \alpha \in [0, 1], \forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0\}. \quad (1.9)$$

Множество $\mathfrak{M}$ весьма неоднородно по скорости стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$ его элементов: функции $\psi(t)$ могут убывать как сколь угодно медленно, так и сколь угодно быстро. Поэтому возникает необходимость разбиения множества $\mathfrak{M}$ на подмножества, объединяющие функции $\psi \in \mathfrak{M}$, которые в определенном смысле имеют одинаковый характер стремления к нулю.

Следуя [22, с. 159–176], в качестве характеристики, с учетом которой оказывается удобным производить такое разбиение, возьмем пару функций $\eta(\psi; t)$ и $\mu(\psi; t)$, которые определяются следующим образом. Для любой $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\eta(\psi; t)$ обозначим функцию, связанную с ψ равенством

$$\psi(\eta(\psi; t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1. \quad (1.10)$$

В силу строгой монотонности функции ψ величина $\eta(\psi; t)$ для всех $t \geq 1$ из (1.10) определяется однозначно:

$$\eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \quad (1.11)$$

где $\psi^{-1}(\cdot)$ – обратная к ψ функция.

Функция $\mu(\psi; t)$ определяется равенством

$$\mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(\psi; t) - t}.$$

Величина $\eta(\psi; t) - t$, как следует из (1.10), это длина промежутка $[t, \eta(\psi; t)]$, на котором значения функции ψ уменьшаются ровно в два раза. В связи с этим функция $\mu(\psi; t)$ была названа (см., например, [24, с. 94]) *модулем полураспада* функции ψ . Чтобы отличать данную характеристику от меры $\mu(\cdot)$, в скобках будем записывать два аргумента, второй из которых является независимой переменной, а первый обозначает функцию, по которой построена функция $\mu(\psi; t)$.

Если $\psi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то $\mu(\psi_1; t) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$; если $\psi_2(t) = 1/\ln(t + a)$, $a > e$, то $\mu(\psi_2; t) = t/((t + a)^2 + a - t)$; если $\psi_3(t) = e^{-t}$, то $\mu(\psi_3; t) = t/\ln 2$.

Эти примеры показывают, что величина $\mu(\psi; t)$ может быть ограничена сверху и снизу некоторыми положительными числами, стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$ и быть неограниченной сверху. Именно по этим признакам из множества $\mathfrak{M}$ принято выделять следующие подмножества:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi; t) \leq K \ \forall t \geq 1\}, \quad (1.12)$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K \leq \mu(\psi; t) < \infty \ \forall t \geq 1\}, \quad (1.13)$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2 \ \forall t \geq 1\}. \quad (1.14)$$

Здесь и далее $K, K_1, \dots$ – некоторые положительные постоянные, не зависящие от величин, которые являются в данном рассмотрении параметрами (в рассматриваемом случае – от переменной t).

В формуле (1.12) для функции $\psi \in \mathfrak{M}$ величина $\mu(\psi; t)$ при больших t может быть сколь угодно малой, а в формуле (1.13) – сколь угодно большой; этим объясняются обозначения $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ соответственно. В формуле (1.14) величина $\mu(\psi; t)$ ограничена сверху и снизу константами, поэтому это множество обозначается через $\mathfrak{M}_C$.

Далее через $\mathfrak{M}_0^+$ обозначают подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$, для которых величина $\mu(\psi; t)$ при $t \rightarrow \infty$ монотонно стремится к нулю:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \downarrow 0\}, \quad (1.15)$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ – подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, у которых $\mu(\psi; t)$ монотонно и неограниченно возрастает, когда $t \rightarrow \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \quad (1.16)$$

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_C$ являются функции t^{-r} , $r > 0$, $t^{-r} \ln^\varepsilon(t + e)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, и другие, множества $\mathfrak{M}_0^+$ – функции $\ln^\varepsilon(t + e)$ при $\varepsilon < 0$, множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$ принадлежат функции $\exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$. В этом легко убедиться при помощи следующего критерия, полученного в [22, с. 161] (см. также [23]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4 [22, с. 161]. *Функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{M}_0$ тогда и только тогда, когда величина*

$$\alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+), \quad (1.17)$$

удовлетворяет условию

$$\alpha(\psi; t) \geq K > 0 \quad \forall t \geq 1; \quad (1.18)$$

принадлежит $\mathfrak{M}_\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha(\psi; t) \leq K \quad \forall t \geq 1; \quad (1.19)$$

принадлежит $\mathfrak{M}_C$ тогда и только тогда, когда

$$0 < K_1 \leq \alpha(\psi; t) \leq K_2 \quad \forall t \geq 1. \quad (1.20)$$

Если функция $\alpha(\psi; t)$ не убывает, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(\psi; t) = \infty$, то $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$. Если же $\alpha(\psi; t)$ не возрастает и $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(\psi; t) = 0$, то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Приведем также следующее утверждение, полученное в [25], которое следует из утверждения 1.4 и дополнительно характеризует множество $\mathfrak{M}_\infty^+$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5 [25, с. 34]. *Если $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для произвольного $r > 0$ найдется число $K > 0$ такое, что для любого $t \geq 1$ имеем*

$$\psi(t) \leq Kt^{-r}. \quad (1.21)$$

§ 2. Основные результаты

2.1. Величины $e_\sigma(\varphi, p)$ и их точные значения при разных $p > 0$.

Пусть $U_p(A)$ – единичный шар пространства $L_p(A, d\mu)$,

$$U_p(A) = \{y \in Y(A, d\mu) : \|y\|_{L_p(A, d\mu)} \leq 1\},$$

$U_p^+(A)$ – подмножество всех неотрицательных функций из $U_p(A)$ и $\varphi(\mathbf{x})$ – неотрицательная существенно ограниченная на A функция, для которой в случае, когда множество A неограничено, предполагается, что

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.1)$$

(в этом случае записываем $\varphi \in \Phi(A)$).

Будем рассматривать величины $e_\sigma(f)$, определяющиеся равенством (0.2), для функций $f = \varphi y$, где $\varphi \in \Phi(A)$, а y – некоторая неотрицательная функция. В этом случае они будут иметь вид

$$e_\sigma(f) = e_\sigma(\varphi y) = e_\sigma(\varphi y)_A = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{A \setminus \gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) d\mu. \quad (2.2)$$

Следующее утверждение работы [1] позволяет для произвольной функции $\varphi \in \Phi(A)$ находить значения точных верхних граней величин $e_\sigma(\varphi y)$ на классе функций $y \in U_1^+(A)$.

ТЕОРЕМА А. *Пусть $\varphi \in \Phi(A)$. Тогда при каждом $\sigma \in (0, a)$ справедливо равенство*

$$e_\sigma(\varphi, 1) := \sup_{y \in U_1^+(A)} e_\sigma(\varphi y) = \sup_{s \in (0, a]} \frac{s - \sigma}{\int_0^s \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \quad (2.3)$$

в котором $\overline{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом точная верхняя грань в правой части (2.3) достигается при некотором конечном значении $s = s^*$.

Будем рассматривать величины $e_\sigma(\varphi y)$, когда $y \in U_p^+(A)$ для всех $p \in (0, \infty)$ при условиях, гарантирующих существование интегралов в правой части (2.2). В случае, когда $p > 1$, достаточным условием существования этих интегралов в силу неравенства Гёльдера является условие, налагаемое на функцию φ :

$$\|\varphi\|_{L_q(A, d\mu)} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2.4)$$

При $p \in (0, 1)$, в отличие от случая $p \geq 1$, одними условиями для функции φ достигнуть этого можно только в тривиальном случае. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{U}_p(A) = \mathcal{U}_p(A, d\mu) = \begin{cases} U_p^+(A) \cap L_1(A, d\mu), & p \in (0, 1), \\ U_p^+(A), & p \in [1, \infty), \end{cases}$$

и рассматриваем величины $e_\sigma(\varphi y)$ только при $y \in \mathcal{U}_p(A)$.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varphi \in \Phi(A)$ и

$$e_\sigma(\varphi, p) := \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} e_\sigma(\varphi y), \quad p \in (0, \infty). \quad (2.5)$$

Тогда при любых $p \in (0, 1]$ и $\sigma \in (0, a)$ справедливо равенство

$$e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p}, \quad (2.6)$$

в котором $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом точная верхняя грань в правой части (2.6) достигается при некотором конечном значении $s = s^*$. Точная верхняя грань в правой части соотношения (2.5) реализуется функцией $y^* = y^*(\mathbf{x}, \varphi, \sigma, p)$, задающейся равенством

$$y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_E(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-1/p}, \quad (2.7)$$

где E – любое измеримое подмножество множества $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ μ -меры s^* , содержащее множество $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^* -)\}$, а $\chi_E(\cdot)$ – характеристическая функция множества E , принимающая значения 1 на множестве E и 0 вне этого множества.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $e_\sigma(\varphi, p)$ – величина, определяемая равенством (2.5), $p \in (1, \infty)$, $\sigma \in (0, a)$ и φ – произвольная функция из множества $\Phi(A)$, удовлетворяющая условию (2.4). Тогда существует наибольшее на промежутке $(\sigma, a]$ число s^* такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \leq \bar{\varphi}^p(s) \int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \quad (2.8)$$

и справедливо равенство

$$e_\sigma = e_\sigma(\varphi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \bar{\varphi}^q(t) dt \right)^{1/q}, \quad (2.9)$$

где $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. Верхняя грань в соотношении (2.5) реализуется функцией $y^* = y^*(\mathbf{x}, \varphi, \sigma, p)$ из $\mathcal{U}_p(A)$, в которой при $s^* = a < \infty$

$$y^*(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \left(\int_A \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-1/p}, \quad \mathbf{x} \in A, \quad (2.10)$$

и при $s^* < a$

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathbf{x}) (s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-q/p} e_\sigma^{-q/p}, & \mathbf{x} \in E, \\ \varphi^{q/p}(\mathbf{x}) e_\sigma^{-q/p}, & \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $E = \{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$.

Заметим, что условие (2.1) гарантирует тот факт, что для функции $\varphi(\mathbf{x})$ ее функция распределения $m_\varphi(y)$, определяющаяся соотношением (1.1), принимает только конечные значения из промежутка $[0, a]$. Поэтому согласно определению убывающей перестановки функции величина $\bar{\varphi}(t)$ определена при любом $t > 0$.

2.2. Определение величин $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$ и теоремы об их точных значениях. Для данных функции $f \in L_1(A, d\mu)$ и положительного числа σ наряду с величинами $e_\sigma(f)$, определяющимися соотношением (0.2), естественно рассмотреть величины

$$E_{\gamma_\sigma}(f) := \left| \int_{A \setminus \gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right|,$$

где γ_σ – произвольное фиксированное множество из Γ_σ .

Величины $E_{\gamma_\sigma}(f)$ (как и $e_\sigma(f)$) будем рассматривать в случае, когда справедливо представление

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

где $\varphi \in \Phi(A)$, а $y \in \mathcal{U}_p(A)$, $p \in (0, \infty)$. Тогда

$$E_{\gamma_\sigma}(f) = E_{\gamma_\sigma}(\varphi y) = \int_{A \setminus \gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) d\mu. \quad (2.12)$$

При этом если $p > 1$, то будем предполагать, что функция φ удовлетворяет условию (2.4), гарантирующему существование интегралов в правой части соотношения (2.12).

Согласно определению для любой функции $f \in L_1(A, d\mu)$ справедливо соотношение

$$E_{\gamma_\sigma}(f) \geq e_\sigma(f) \quad \forall \sigma > 0.$$

В связи с этим возникает вопрос: насколько отличаются значения величин $e_\sigma(\varphi, p)$, определяющихся равенством (2.5), от значений величин $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) := \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} E_{\gamma_\sigma}(\varphi y)$, $p \in (0, \infty)$, а также от значений величин $D_\sigma(\varphi, p) := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$, $p \in (0, \infty)$?

Отметим, что в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами величинам $E_{\gamma_\sigma}(f)$ можно поставить в соответствие наилучшее приближение функции f посредством полиномов степени σ , величине $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ – верхнюю грань на заданном множестве, а величина $D_\sigma(\varphi, p)$ напоминает тригонометрический поперечник порядка σ заданного множества функций.

Для ответа на поставленный вопрос найдем значения $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$ при всех $p \in (0, \infty)$. При $p = 1$ эти значения фактически найдены в работе [1]. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА Б. Пусть $\varphi \in \Phi(A)$. Тогда для произвольных $\sigma > 0$ и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ справедливо равенство

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, 1) = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+),$$

в котором $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ – убывающая перестановка функции

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A \setminus \gamma_\sigma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma, \end{cases} \quad (2.13)$$

и $D_\sigma(\varphi, 1) = \bar{\varphi}(\sigma+)$, где $\bar{\varphi}$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом в Γ_σ имеется множество γ_σ^* , для которого выполняется равенство

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, 1) = D_\sigma(\varphi, 1) = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

В частности, в качестве γ_σ^* можно взять любое измеримое подмножество множества $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ -меры σ , содержащее множество $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

В настоящей работе рассмотрим случай, когда $p \neq 1$. При $p \in (1, \infty)$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функция $\varphi \in \Phi(A)$ удовлетворяет условию (2.4). Тогда для произвольных $p \in (1, \infty)$, $\sigma > 0$ и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ справедливы равенства

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \|\varphi_{\gamma_\sigma}\|_{L_q(A, d\mu)} = \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_q((0, a), dt)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2.14)$$

где $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ – убывающая перестановка функции φ_{γ_σ} , определяющейся соотношением (2.13), и

$$D_\sigma(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}\|_{L_q((0, a), dt)} = \|\bar{\varphi}\|_{L_q((\sigma, a), dt)}, \quad (2.15)$$

где $\bar{\varphi}$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом нижняя грань в (2.15) реализуется множеством $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, определенным в теореме Б:

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = D_\sigma(\varphi, p) = \|\bar{\varphi}\|_{L_q((\sigma, a), dt)}.$$

Пусть теперь $p \in (0, 1)$. В этом случае если для некоторого $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ μ -мера множества $B_{\gamma_\sigma} := \{\mathbf{x} \in A \setminus \gamma_\sigma: \varphi(\mathbf{x}) > 0\}$ равна нулю, то $E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = 0$, и тогда $D_\sigma(\varphi, p) = E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = 0$. Если же множество γ_σ такое, что $\mu(B_{\gamma_\sigma}) > 0$, то $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \infty$, и если $\mu(B_{\gamma_\sigma}) > 0$ при любом $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, то и $D_\sigma(\varphi, p) = \infty$.

Этот факт следует из того, что множества $\mathcal{U}_p(A)$, вообще говоря, содержат функции со сколь угодно большими нормами в пространстве $L_1(A, d\mu)$. В связи с этим естественно рассмотреть величины $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, y)$ также в случае, когда $y \in \mathcal{U}'_p(A) = U_p^+(A) \cap U_1(A)$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $p \in (0, 1]$ и $\varphi \in \Phi(A)$. Тогда для произвольных $\sigma > 0$ и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ выполняются равенства

$$E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) := \sup_{y \in \mathcal{U}'_p(A)} E_{\gamma_\sigma}(\varphi, y) = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+), \quad (2.16)$$

где $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ – убывающая перестановка функции, определяющейся соотношением (2.13), и

$$D'_\sigma(\varphi, p) := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \bar{\varphi}(\sigma+), \quad (2.17)$$

где $\bar{\varphi}$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. При этом для множества $\gamma_\sigma^* \in \Gamma_\sigma$, определенного в теореме Б, справедливо равенство

$$E'_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, p) = D'_\sigma(\varphi, p) = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

В случае, когда мера $d\mu$ не является непрерывной, вложение $U_p^+(A) \subset U_1(A)$ может выполняться. В частности, это так, если $A = \mathbb{Z}^m$, а носителем меры $d\mu$ в $\mathbb{R}^m$ является целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n$, где эта мера равна, например, единице: $\mu(\mathbf{k}) \equiv 1, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$. В этом случае для любой функции $f \in L_1(A, d\mu)$ имеем

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mu = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} f(\mathbf{k});$$

$L_p(A, d\mu), p \in (0, \infty]$, – множества последовательностей $\{y(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m}$, для которых величины

$$\|y\|_{L_p(A, d\mu)} = \begin{cases} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} |y(\mathbf{k})|^p \right)^{1/p}, & p \in (0, \infty), \\ \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} |y(\mathbf{k})|, & p = \infty, \end{cases}$$

являются конечными, и множества $\mathcal{U}_p(A)$ всегда совпадают с множествами $U_p^+(A)$, состоящими из положительных последовательностей, нормы которых $\|\cdot\|_{L_p(A, d\mu)}$ не превосходят единицы. Множества Γ_σ определены только для натуральных σ и состоят из множеств γ_σ , содержащих σ различных точек из множества $\mathbb{Z}^m$. Вместо σ в этом случае будем записывать n , а вместо $U_p^+(A)$ использовать U_p^+ . Тогда

$$E_{\gamma_n}(f) = \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m \setminus \gamma_n} f(\mathbf{k}) \right|,$$

и если $f(\mathbf{k}) = \varphi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m$, где $\varphi = \{\varphi_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m}$ – некоторая положительная последовательность, для которой

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \varphi_{\mathbf{k}} = 0, \quad |\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2)^{1/2} \quad (2.18)$$

(в таком случае записываем $\varphi \in \Phi$), а $y = \{y_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m}$ принадлежит U_p^+ , то полагаем

$$E_{\gamma_n}(\varphi y) = \sum_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}, \quad E_{\gamma_n}(\varphi, p) = \sup_{y \in U_p^+} E_{\gamma_n}(\varphi y).$$

В принятых обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 2.4'. Пусть $p \in (0, 1]$ и $\varphi \in \Phi$. Тогда для произвольных натуральных n и $\gamma_n \in \Gamma_n$ выполняются равенства

$$E_{\gamma_n}(\varphi, p) = \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}, \quad (2.19)$$

$$D_n(\varphi, p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(\varphi, p) = \overline{\varphi}(n+1), \quad (2.20)$$

где $\overline{\varphi}(k), k \in \mathbb{N}$, – убывающая перестановка последовательности φ . Точная нижняя грань в (2.20) реализуется множеством γ_n^* , содержащим множество $e'_k = \{k \in \mathbb{Z}^m : \varphi_k > \overline{\varphi}(n+1)\}$ и дополненным в случае, когда число точек $|e'_n|$ в e'_n меньше n , и любыми $n - |e'_n|$ точками множества $\{k \in \mathbb{Z}^m : \varphi_k = \overline{\varphi}(n+1)\}$:

$$D_n(\varphi, p) = E_{\gamma_n^*}(\varphi, p) = \overline{\varphi}(n+1).$$

Анализ результатов из настоящего пункта показывает, что в случае, когда $p \in (0, 1)$, а мера $d\mu$ такая, что множество $\mathcal{U}_p(A, d\mu)$ нельзя вложить ни в один из шаров $U_1(A, d\mu, R)$ пространства $L_1(A, d\mu)$ радиуса $R > 0$, величины $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$ могут быть неограничены, в отличие от величин $e_\sigma(\varphi, p)$. Для того чтобы сравнить эти величины в других случаях, найдем порядки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

2.3. Порядки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. В этом пункте исследуется поведение величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Понятно, что такая задача имеет смысл только в случае, когда $\text{mes}_\mu A = \infty$. В силу теорем 2.1, 2.2 задача об изучении поведения величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ сводится к исследованию следующих величин $G_\sigma(\varphi, p)$, которые при $p \in (0, 1]$ и $\varphi \in \Phi(A)$ задаются равенством

$$G_\sigma(\varphi, p) := \sup_{s > 0} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p}, \quad (2.21)$$

где $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$. Если $p \in (1, \infty)$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ удовлетворяет условию (2.4), то

$$G_\sigma(\varphi, p) := e_\sigma(\varphi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^\infty \bar{\varphi}^q(t) dt \right)^{1/q}, \quad (2.22)$$

где $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$, а s^* – наибольшее на промежутке (σ, ∞) число такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*]$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \leq \bar{\varphi}^p(s) \int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t) dt. \quad (2.23)$$

Отметим, что величины $G_\sigma(\varphi, p)$ вида (2.21) и (2.22) в случае, когда $\sigma = n \in \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$, а носителем меры $d\mu$ в пространстве $\mathbb{R}^+$ является множество $\mathbb{N}$, на котором мера равна единице: $\mu(k) \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, встречались, в частности, в работах [14]–[16, гл. XI], [26]–[29, гл. VI] и др. Например, в работах [26], [27] и [29, гл. VI] в терминах величин вида (2.21) получены точные значения поперечников по Колмогорову октаэдров в гильбертовом пространстве; в работах [14]–[16, гл. XI] в терминах таких величин найдены точные значения наилучших n -членных приближений q -эллипсоидов пространств S_φ^q в пространствах S_φ^p , $0 < q \leq p < \infty$. Поэтому изучение поведения величин $G_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ имеет и самостоятельный интерес.

Для упрощения записей в случае, когда $p \in (0, 1]$, положим $\psi(t+1) := \bar{\varphi}^p(t)$, $t > 0$, и

$$\tilde{G}_\sigma(\psi, p) := G_\sigma(\varphi, p) = \sup_{s > 0} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p} = \sup_{s > \sigma} (s - \sigma) \left(\int_1^{s+1} \frac{dt}{\psi(t)} \right)^{-1/p}, \quad (2.24)$$

а при $p \in (1, \infty)$ положим $\psi(t+1) := \bar{\varphi}(t)$, $t > 0$, и

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\sigma(\psi, p) := G_\sigma(\varphi, p) &= \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^\infty \bar{\varphi}^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &= \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)} \right)^{-q/p} + \int_{s^*+1}^\infty \psi^q(t) dt \right)^{1/q}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $s^* = s^*(\sigma)$ – такое наибольшее на промежутке (σ, ∞) число, что при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство

$$s - \sigma \leq \psi^p(s+1) \int_1^{s+1} \frac{dt}{\psi^p(t)}. \quad (2.26)$$

Будем рассматривать величины $\tilde{G}_\sigma(\psi, p)$ в случае, когда функции ψ выбираются из определяющегося равенством (1.9) множества $\mathfrak{M}$ всех положительных выпуклых вниз и исчезающих на бесконечности функций непрерывного аргумента $t \geq 1$.

Таким образом, к условиям монотонного убывания к нулю функций $\psi(\cdot)$, которым эти функции удовлетворяют как степени перестановок, добавляются условия их выпуклости. Эти условия являются техническими, поскольку здесь применяется развитый аппарат выпуклых функций, использующий предложенную в п. 1.3 классификацию. В то же время следует отметить, что для практических приложений такое ограничение малозначительно.

ТЕОРЕМА 2.5. *Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_0$, то для любого $p \in (0, 1]$ справедливо порядковое при $\sigma \rightarrow \infty$ равенство*

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{1/p}(\sigma+1)}{\sigma^{1/p-1}}. \quad (2.27)$$

Здесь и далее под выражением “ $a(\sigma) \asymp b(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ ” следует понимать, что существуют такие постоянные $0 < K_1 < K_2$, для которых при всех σ , больших некоторого числа σ_0 , справедливо неравенство

$$K_1 a(\sigma) \leq b(\sigma) \leq K_2 a(\sigma).$$

Из теоремы 2.5, учитывая теорему 2.1 и принятые обозначения, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если $p \in (0, 1]$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ такая, что при любом $t \geq 0$ выполняется равенство $\overline{\varphi}^p(t) = \psi(t+1)$, где $\overline{\varphi}$ – убывающая перестановка функции φ , а $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то справедливо порядковое при $\sigma \rightarrow \infty$ равенство*

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\overline{\varphi}(\sigma)}{\sigma^{1/p-1}}.$$

В случае, когда ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.6. *Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$ и при некоторых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ выполняется условие*

$$\eta'(\psi; t) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \forall t > t_0 \quad (2.28)$$

то для любого $p \in (0, 1]$ справедливо порядковое при $\sigma \rightarrow \infty$ равенство

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \frac{\psi^{1/p}(\sigma+1)}{(\eta(\psi; \sigma+1) - \sigma - 1)^{1/p-1}}. \quad (2.29)$$

Отметим, что условию (2.28) удовлетворяют, в частности, функции $\exp(-\alpha t^r)$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

Из теорем 2.1 и 2.6, учитывая принятые обозначения, а также то, что согласно определению для любого $t > 0$ выполнено

$$\eta(\bar{\varphi}; t) = \eta(\psi; t + 1) - 1, \quad (2.30)$$

получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $p \in (0, 1]$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}^p(t) = \psi(t + 1)$, где $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ такая, что выполняется условие (2.28), то справедливо порядковое при $\sigma \rightarrow \infty$ равенство

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \frac{\bar{\varphi}(\sigma)}{(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{1/p-1}}.$$

Пусть теперь $p \in (1, \infty)$. Если ограничиться рассмотрением функций ψ из множества $\mathfrak{M}$ и учесть обозначения (1.12)–(1.16), то понятно, что интегралы в (2.25) могут быть конечными, только когда эти функции принадлежат множеству $\mathfrak{M}_\infty$. Рассмотрим сначала случай, когда $\psi \in \mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_\infty$.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $p \in (1, \infty)$, а функция $\psi \in \mathfrak{M}_C$ такая, что

$$\|\psi\|_{L_q[1, \infty)}^q := \int_1^\infty |\psi(t)|^q dt < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2.31)$$

и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \geq t_0 \geq 1$. Тогда справедливо соотношение

$$\tilde{G}_\sigma(\psi, p) \asymp \psi(\sigma + 1)\sigma^{1-1/p}. \quad (2.32)$$

Из теоремы 2.7, учитывая теорему 2.2 и принятые обозначения, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если $p \in (1, \infty)$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где функция $\psi \in \mathfrak{M}_C$ такая, что выполняется условие (2.31) и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \geq t_0 \geq 1$, то при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-1/p}.$$

Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, в силу утверждения 1.5 условие (2.31) выполняется всегда.

ТЕОРЕМА 2.8. Если функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$ и выполняется условие (2.28), то для любого $p \in (1, \infty)$ справедливо равенство

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) \asymp \psi^{1/p}(\sigma + 1)(\eta(\psi; \sigma + 1) - \sigma - 1)^{1-1/p}, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Из теоремы 2.8 с учетом теоремы 2.2 и соотношения (2.30) получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если φ из $\Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ такая, что выполняется условие (2.28), то для любого $p \in (1, \infty)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\psi; \sigma) - \sigma)^{1-1/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Сравнивая приведенные порядковые оценки для величин $e_\sigma(\varphi, p)$ со значениями величин $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$, которые дает теорема Б, делаем вывод, что если $p = 1$, а функция $\varphi \in \Phi(A)$ удовлетворяет условиям следствия 2.1 или следствия 2.2, то величины $e_\sigma(\varphi, p)$ имеют тот же порядок при $\sigma \rightarrow \infty$, что и величины $D_\sigma(\varphi, p)$:

$$D_\sigma(\varphi, 1) = E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, 1) \asymp e_\sigma(\varphi, 1) \asymp \overline{\varphi}(\sigma).$$

Если $p \in (0, 1)$, а мера $d\mu$ непрерывна, то, как отмечено ранее, величины $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$ равны бесконечности, в то время как величины $e_\sigma(\varphi, p)$ монотонно стремятся к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$.

Сравнивая порядковые оценки для величин $e_\sigma(\varphi, p)$ со значениями величин $E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p)$ и $D'_\sigma(\varphi, p)$, которые найдены в теореме 2.4, делаем вывод, что если $p \in (0, 1)$, а функция $\varphi \in \Phi(A)$ удовлетворяет условиям следствия 2.1 или следствия 2.2, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{e_\sigma(\varphi, p)}{D'_\sigma(\varphi, p)} = 0,$$

т.е. в этом случае величины $e_\sigma(\varphi, p)$ стремятся к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$ быстрее, чем величины $D'_\sigma(\varphi, p)$.

§ 3. Доказательство теорем о точных значениях величин $e_\sigma(\varphi, p)$

3.1. Точные значения величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $p \in (0, 1)$. Приведем доказательства теоремы 2.1 и сопутствующих ей утверждений.

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму, занимающую центральное место в доказательстве теоремы 2.1. Перед ее формулировкой введем некоторые обозначения.

Пусть $L_p(0, \infty)$ – пространство всех измеримых на $(0, \infty)$ по Лебегу функций $f(t)$ таких, что

$$\|f\|_{L_p(0, \infty)} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

$U_p(0, a)$ – единичный шар пространства $L_p(0, a)$ и $\mathcal{A}$ – множество всех невозрастающих положительных функций $\alpha(t)$, существенно ограниченных на промежутке $(0, a)$, $0 < a \leq \infty$, для которых при $a = \infty$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0. \quad (3.1)$$

Пусть, далее, α – произвольная функция из $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}_p^\alpha$ – множество всех неотрицательных функций m из $U_p(0, a)$ при данном $p \in (0, 1]$, для которых произведение $\alpha(t)m(t)$ на промежутке $(0, a)$ не возрастает и принимает только конечное число значений. Для каждого $\sigma > 0$ и для любых $\alpha \in \mathcal{A}$ и $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$ рассмотрим аналоги величин (2.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) &:= e_\sigma(\alpha m)_{(0, a)} = \inf_{\delta_\sigma \subset (0, a)} \left(\int_0^a \alpha(t)m(t) dt - \int_{\delta_\sigma} \alpha(t)m(t) dt \right) \\ &= \int_0^a \alpha(t)m(t) dt - \sup_{\delta_\sigma \subset (0, a)} \int_{\delta_\sigma} \alpha(t)m(t) dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где δ_σ – подмножества из $(0, a)$, меры которых равны σ , а также аналоги величин (2.5):

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) := \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\alpha} \mathcal{E}_\sigma(m) = \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\alpha} e_\sigma(\alpha m)_{(0,a)}. \quad (3.3)$$

Из определения множеств $\mathcal{M}_p^\alpha$ и $\mathcal{A}$ следует, что интегралы в соотношении (3.2) конечны, и поэтому величины $\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha)$ и $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ имеют смысл.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$ и $p \in (0, 1]$. Тогда при каждом $\sigma \in (0, a)$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) = \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (3.4)$$

При этом точная верхняя грань в правой части равенства (3.4) всегда достигается в некоторой конечной точке $s^* \in (\sigma, a]$. Точная верхняя грань в правой части соотношения (3.3) реализуется функцией $m^* = m^*(t)$ из $\mathcal{M}_p^\alpha$, где

$$m^*(t) = \frac{\chi_{(0, s^*)}(t)}{\alpha(t)} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}, \quad (3.5)$$

а $\chi_{(0, s^*)}(t)$ – характеристическая функция множества $(0, s^*)$.

Отметим, что значения величин $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ в случае, когда $\mathcal{M}_p^\alpha$ – множество всех неотрицательных функций из единичного шара пространства $L_1(0, a)$, найдены в [1]. Утверждения, содержащие решения аналогичных задач для числовых рядов, получены в работах [14]–[16, гл. XI].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Пусть m – любая функция из множества $\mathcal{M}_p^\alpha$. Тогда произведение $\alpha(t)m(t)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ представляется в виде

$$\alpha(t)m(t) = y_k, \quad t \in (s_{k-1}, s_k), \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad (3.6)$$

где $y_1 > y_2 > \dots > y_n > y_{n+1} = 0$ – некоторые числа и $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq s_{n+1} = a$. Отсюда, полагая $\Delta_k = s_k - s_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) = \int_\sigma^a \alpha(t)m(t) dt = \sum_{k=1}^n y_k \Delta_k - \int_0^\sigma \alpha(t)m(t) dt.$$

Убедимся в том, что длина Δ_1 промежутка $(0, s_1)$, на котором произведение $\alpha(t)m(t)$ принимает наибольшее значение, не меньше σ . Если это не так, то через k_σ , $k_\sigma \in [1, n+1]$, обозначим наименьшее натуральное число такое, что $s_{k_\sigma} > \sigma$, и положим $\tilde{s}_0 = 0$, $\tilde{s}_1 = s_{k_\sigma}$, $\tilde{y}_1 = y_{k_\sigma}$; $\tilde{s}_k = s_{k_\sigma+k-1}$ и $\tilde{y}_k = y_{k_\sigma+k-1}$, где $k = 2, \dots, n - k_\sigma + 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{m}(t)$ такую, что $\tilde{m}(t) = 0$, когда $t > \tilde{s}_{n-k_\sigma+1}$, и

$$\alpha(t)\tilde{m}(t) = \tilde{y}_k, \quad t \in (\tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n - k_\sigma + 1.$$

Для этой функции $\tilde{\Delta}_1 = \tilde{s}_1 - \tilde{s}_0 = s_{k_\sigma} > \sigma$, $\|\tilde{m}\|_{L_p(0, \infty)} \leq \|m\|_{L_p(0, \infty)} \leq 1$, т. е. $\tilde{m} \in \mathcal{M}_p^\alpha$ и

$$\mathcal{E}_\sigma(\tilde{m}, \alpha) = \tilde{y}_1(\tilde{\Delta}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} \tilde{y}_k \tilde{\Delta}_k = y_{k_\sigma} s_{k_\sigma} + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} y_k \Delta_k = \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha).$$

Поэтому далее будем считать, что длина промежутка $(0, s_1)$ не меньше σ . В таком случае

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) = y_1(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n y_k \Delta_k. \quad (3.7)$$

В силу (3.6) при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$M_k := \int_{s_{k-1}}^{s_k} m^p(x) dx = y_k^p \int_{s_{k-1}}^{s_k} \alpha^{-p}(x) dx,$$

следовательно,

$$y_k = \alpha(t)m(t) = I_k M_k^{1/p}, \quad t \in [s_{k-1}, s_k),$$

где

$$I_k := \left(\int_{s_{k-1}}^{s_k} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}.$$

Поэтому равенство (3.7) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) = (\Delta_1 - \sigma) I_1 M_1^{1/p} + \sum_{k=2}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p}. \quad (3.8)$$

Для нахождения оценки сверху правой части равенства (3.8) применим прием, который использовался в [30]. Идея этого приема состоит в том, чтобы в результате получить оценку величины (3.8), не содержащую суммы вида $\sum_{k=i}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p}$. С этой целью сначала положим

$$x_1 = M_1, \quad c = M_1 + M_2, \quad a_1 = I_1, \quad a_2 = I_2, \quad b_1 = \Delta_1 - \sigma, \quad b_2 = \Delta_2 \quad (3.9)$$

и на отрезке $[0, c]$ рассмотрим функцию

$$g(x) := a_1 b_1 x^{1/p} + a_2 b_2 (c - x)^{1/p}. \quad (3.10)$$

Данная функция на отрезке $[0, c]$ имеет единственную критическую точку $x_* = c(a_2 b_2)^{-q}((a_1 b_1)^{-q} + (a_2 b_2)^{-q})^{-1}$, являющуюся ее точкой минимума.

Отсюда следует, что функция $g(x)$ на любом отрезке $[x_0, c] \subset [0, c]$ достигает своего наибольшего значения на одном из его концов. Поэтому, полагая $x_0 = a_2^p c(a_1^p + a_2^p)^{-1}$, будем иметь

$$g(x) \leq \max\{g(x_0), g(c)\} \quad \forall x \in [x_0, c]. \quad (3.11)$$

Вследствие выбора x_0 имеем, что $[x_0, c] = \{x \in [0, c] : a_1 x^{1/p} \geq a_2(c - x)^{1/p}\}$. Поэтому, замечая, что в силу определения множества $\mathcal{M}_p^\alpha$

$$a_1 x_1^{1/p} = I_1 M_1^{1/p} = y_1 > y_2 = I_2 M_2^{1/p} = a_2(c - x_1)^{1/p},$$

делаем вывод, что $x_1 \in [x_0, c]$. Отсюда, учитывая обозначения в (3.9) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) &= g(x_1) + \sum_{k=3}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p} \leq \max\{g(x_0), g(c)\} + \sum_{k=3}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p} \\ &= (M_1 + M_2)^{1/p} \max\{\xi_{s_1}, \xi_{s_2}\} + \sum_{k=3}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\xi_{s_k} := (s_k - \sigma) \left(\sum_{i=1}^k I_i^{-p} \right)^{-1/p} = (s_k - \sigma) \left(\int_0^{s_k} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что в последней сумме из (3.12) содержится на одно слагаемое меньше, чем в соответствующей сумме соотношения (3.8).

Далее, полагая $b_1 = s_l - \sigma$, $b_2 = \Delta_3$,

$$x_1 = M_1 + M_2, \quad c = M_1 + M_2 + M_3, \quad a_1 = \left(\sum_{k=1}^l I_k^{-p} \right)^{-1/p}, \quad a_2 = I_3, \quad (3.13)$$

где l – натуральное число, для которого $\xi_{s_l} = \max\{\xi_{s_1}, \xi_{s_2}\}$, из того, что $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$, делаем вывод:

$$\begin{aligned} a_1 x_1^{1/p} &= (M_1 + M_2)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^l I_k^{-p} \right)^{-1/p} = \left(\int_0^{s_2} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s_l} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p} \\ &\geq \alpha(s_2 -) m(s_2 -) = y_1 > y_2 = I_3 M_3^{1/p} = a_2 (c - x_1)^{1/p}, \end{aligned}$$

т.е. точка x_1 вновь принадлежит соответствующему отрезку $[x_0, c]$. Учитывая (3.13), (3.10) и (3.11), получаем очередную оценку величины $\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) &\leq (M_1 + M_2)^{1/p} \max\{\xi_{s_1}, \xi_{s_2}\} + \sum_{k=3}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p} \\ &= g(x_1) + \sum_{k=3}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p} \leq \max\{g(x_0), g(c)\} + \sum_{k=4}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p} \\ &= (M_1 + M_2 + M_3)^{1/p} \max\{\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \xi_{s_3}\} + \sum_{k=4}^n \Delta_k I_k M_k^{1/p}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, на $(n-1)$ -м шаге получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) &\leq \left(\sum_{k=1}^n M_k \right)^{1/p} \max_{k=1, n} \xi_{s_k} \\ &= \|m\|_{L_p(0, a)} \max_{k=1, n} (s_k - \sigma) \left(\int_0^{s_k} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу того, что $\|m\|_{L_p(0, a)} \leq 1$ и

$$\max_{k=1, n} (s_k - \sigma) \left(\int_0^{s_k} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p} \leq \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p},$$

делаем вывод, что

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) \leq \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}. \quad (3.14)$$

Ясно, что в случае, когда $a < \infty$, существует число $s^* > \sigma$, которое реализует точную верхнюю грань в правой части соотношения (3.4). Если $a = \infty$, то из определения множества $\mathcal{A}$ следует, что при каждом фиксированном $\sigma > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} (s - \sigma) \left(\alpha^{-p}(0+) \frac{s}{2} + \alpha^{-p}\left(\frac{s}{2} +\right) \frac{s}{2} \right)^{-1/p} = 0.$$

Поэтому и в этом случае найдется хотя бы одно число $s^* > \sigma$, реализующее точную верхнюю грань в правой части соотношения (3.4). Таким образом, с учетом (3.14) имеем

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) \leq \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p} = (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (3.15)$$

и для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что функция m^* , определенная равенством (3.5), принадлежит множеству $\mathcal{M}_p^\alpha$ и для нее справедливо

$$\mathcal{E}_\sigma(m^*, \alpha) = (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Объединяя последнее соотношение с соотношением (3.15), завершаем доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть $p \in (0, 1]$, $\varphi \in \Phi(A)$ и $G_\sigma(\varphi, p)$ – величина, определяемая равенством (2.21). Покажем сначала, что для любой функции $y \in \mathcal{U}_p(A)$ выполняется неравенство

$$e_\sigma(\varphi y) \leq G_\sigma(\varphi, p). \quad (3.16)$$

Для этого рассмотрим функции y_n , определяющиеся равенством

$$\varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{при } \mathbf{x}: \frac{k}{n} \leq \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ n & \text{при } \mathbf{x}: \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \geq n. \end{cases} \quad (3.17)$$

Видим, что $y_n \in \mathcal{U}_p(A)$, $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x} \in A$ и $n \in \mathbb{N}$, и вследствие суммируемости на A произведения $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$ величины

$$\int_A (\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})) d\mu$$

сходятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому если доказать справедливость неравенства (3.16) для всех функций y_n , определяющихся равенством вида (3.17), то в силу следствия 1.1 (при $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$, $f_n(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})$) отсюда будет вытекать, что это неравенство выполняется и для данной функции $y \in \mathcal{U}_p(A)$.

На самом деле мы докажем более общий факт. Для данной функции φ обозначим через $\mathcal{U}_p^\varphi(A)$ множество всех функций $y \in \mathcal{U}_p(A)$, для которых произведение $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$ принимает на множестве A только конечное число значений (понятно, что в случае, когда $\text{mes}_\mu A = \infty$, эти значения не равны нулю лишь на множествах конечной меры), и убедимся, что неравенство (3.16) выполняется для любой функции $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(A)$.

Итак, пусть функция $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(A)$ такая, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ произведение $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) =: f(\mathbf{x})$ принимает на множестве A только n разных отличных от нуля значений f_k , $k = \overline{1, n}$, которые для удобства упорядочим в порядке убывания:

$$f_1 > f_2 > \dots > f_n > 0,$$

и положим $A_k := \{\mathbf{x} \in A: f(\mathbf{x}) = f_k\}$, $\mu(A_k) =: \mu_k$.

Тогда

$$e_\sigma(\varphi y) = \inf_{\gamma_\sigma} \left(\int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \right) = \sum_{k=1}^n f_k \mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu. \quad (3.18)$$

Убедимся в том, что, как и при доказательстве леммы 3.1, можно считать, что $\mu_1 = \mu(A_1) \geq \sigma$. С этой целью для данного $\sigma \in (0, a)$ обозначим через k_σ наименьшее натуральное число такое, что $\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k \geq \sigma$, и положим $\tilde{A}_1 = \bigcup_{i=1}^{k_\sigma} A_i$ и $\tilde{f}_1 = f_{k_\sigma}$, $\tilde{A}_k = A_{k_\sigma+k-1}$ и $\tilde{f}_k = f_{k_\sigma+k-1}$, где $k = 2, \dots, n - k_\sigma + 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{y}(\mathbf{x})$ такую, что $\tilde{y}(\mathbf{x}) = 0$, когда $t \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-k_\sigma+1} \tilde{A}_i$, и

$$\varphi(\mathbf{x})\tilde{y}(\mathbf{x}) = \tilde{f}_k, \quad \mathbf{x} \in \tilde{A}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - k_\sigma + 1.$$

Для этой функции $\mu(\tilde{A}_1) \geq \sigma$, $\|\tilde{y}\|_{L_p(A, d\mu)} \leq \|y\|_{L_p(A, d\mu)} \leq 1$, т.е. $\tilde{y} \in \mathcal{U}_p^\varphi(A)$ и

$$\begin{aligned} e_\sigma(\varphi \tilde{y}) &= \tilde{f}_1(\text{mes}_\mu \tilde{A}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} \tilde{f}_k \mu(\tilde{A}_k) \\ &= f_{k_\sigma} \left(\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k - \sigma \right) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} f_k \mu_k = e_\sigma(\varphi y). \end{aligned}$$

Поэтому далее будем считать, что μ -мера множества A_1 не меньше σ .

Для $t \in (0, a)$ рассмотрим функцию $m'(t) = m'(y, t)$, определяющуюся равенствами

$$m'(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}^{-1}(t) f_k, & \text{если } t \in (a_{k-1}, a_k], \quad k = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{если } t \in (a_n, a), \end{cases} \quad (3.19)$$

где $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $a_k := \sum_{i=1}^k \mu_i$, $a_0 := 0$. Убедимся в том, что функция m' принадлежит единичному шару $U_p(0, a)$ пространства $L_p(0, a)$ и для нее выполняется соотношение

$$e_\sigma(\varphi y) = \inf_{\gamma_\sigma \in (0, a)} \left(\int_0^a \bar{\varphi}(t) m'(t) dt - \int_{\delta_\sigma} \bar{\varphi}(t) m'(t) dt \right) = \mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi}), \quad (3.20)$$

и тем самым задача об оценке величины $e_\sigma(\varphi y)$ для $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(A)$ будет сведена к исследованию величин $\mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})$ на множестве всех функций $m \in U_p(0, a)$ вида (3.19).

Учитывая то, что $a_1 = \mu_1 \geq \sigma$, имеем

$$\mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi}) = f_1(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n f_k(a_k - a_{k-1}) = f_1(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n f_k \mu_k. \quad (3.21)$$

С другой стороны, в силу (3.18)

$$e_\sigma(\varphi y) = \sum_{k=1}^n f_k \mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu = f_1(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n f_k \mu_k. \quad (3.22)$$

Сравнивая выражения в правых частях соотношений (3.21) и (3.22), видим, что действительно $\mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi}) = e_\sigma(\varphi y)$. Покажем теперь, что

$$\|m'\|_{L_p(0, a)} \leq \|y\|_{L_p(A, d\mu)} \leq 1. \quad (3.23)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \|m'\|_{L_p(0,a)}^p &= \int_0^a (m')^p(t) dt = \sum_{k=1}^n f_k^p \int_{a_{k-1}}^{a_k} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^n (f_k^p - f_{k+1}^p) \int_0^{a_k} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt, \quad f_{n+1} := 0, \\
 \|y\|_{L_p(A,d\mu)}^p &= \int_A y^p(\mathbf{x}) d\mu = \sum_{k=1}^n f_k^p \int_{A_k} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \\
 &= \sum_{k=1}^n (f_k^p - f_{k+1}^p) \int_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Далее, обозначив через $\bar{\varphi}_k(t)$ убывающую перестановку функции

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^k A_i, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i, \end{cases}$$

вследствие равенства (1.2) получим

$$\int_{\bigcup_{i=1}^k A_i} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \int_0^{a_k} \bar{\varphi}_k^{-p}(t) dt,$$

и поэтому

$$\|y\|_{L_p(A,d\mu)}^p = \sum_{k=1}^{n-1} (f_k^p - f_{k+1}^p) \int_0^{a_k} \bar{\varphi}_k^{-p}(t) dt.$$

Сопоставляя последнее равенство с равенством (3.24) и учитывая то, что при каждом $t \in (0, a_k)$ выполняется неравенство $\bar{\varphi}^{-1}(t) \leq \bar{\varphi}_k^{-1}(t)$, получаем оценку (3.23). Следовательно, для функции $m'(t)$ выполняется равенство (3.20), и $m' \in U_p(0, a)$.

Пусть, далее, $\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}$ – множество всех неотрицательных функций $m \in U_p(0, a)$, для которых произведение $\bar{\varphi}(t)m(t)$ на промежутке $(0, a)$ не возрастает и принимает только конечное число значений. В силу (3.19) и (3.23) видим, что $m' \in \mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}$, и поэтому вследствие (3.20) для любой функции $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(A)$ справедливо неравенство

$$e_{\sigma}(\varphi y) \leq \sup_{m \in \mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}} \inf_{\gamma_{\sigma} \in (0, a)} \left(\int_0^a \bar{\varphi}(t)m(t) dt - \int_{\gamma_{\sigma}} \bar{\varphi}(t)m(t) dt \right) = \mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi}). \tag{3.25}$$

Для нахождения величины $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi})$ воспользуемся доказанной выше леммой 3.1. Полагая $\alpha(t) = \bar{\varphi}(t)$, $t \in (0, a)$, видим, что $\alpha \in \mathcal{A}$, и согласно равенству (3.4) получаем

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^{\bar{\varphi}}, \bar{\varphi}) = G_{\sigma}(\varphi, p) = \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p}. \tag{3.26}$$

При этом точная верхняя грань в правой части последнего соотношения достигается при некотором конечном значении $s = s^*$. Объединяя соотношения (3.25) и (3.26), приходим к выводу, что неравенство (3.16) выполняется

для любой функции $y \in \mathcal{U}_p^{\varphi}(A)$, а значит, и для любой функции y из множества $\mathcal{U}_p(A)$.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что во множестве $\mathcal{U}_p(A)$ существует функция $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar{\varphi}, \sigma, p)$, для которой

$$e_{\sigma}(\varphi y^*) = G_{\sigma}(\varphi, p).$$

С этой целью выделим из множества $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ любое измеримое подмножество E μ -меры s^* , содержащее множество $\{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^* -)\}$, и рассмотрим функцию y^* , определенную соотношением (2.7). Имеем $y^* \in L_1(A, d\mu)$ и

$$\|y^*\|_{L_p(A, d\mu)}^p = \int_A (y^*(\mathbf{x}))^p d\mu = \int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-1} = 1,$$

т. е. $y^* \in \mathcal{U}_p(A)$. Поскольку для любого числа $h \geq 0$ μ -мера множества $\{\mathbf{x} \in E: \varphi(\mathbf{x}) \geq h\}$ равна мере Лебега множества $\{t \in (0, s^*): \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt,$$

и поэтому

$$e_{\sigma}(\varphi y^*) = \inf_{\gamma_{\sigma}} \int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi(\mathbf{x}) y^*(\mathbf{x}) d\mu = (s^* - \sigma) \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-1/p} = G_{\sigma}(\varphi, p).$$

Таким образом, соотношение (2.6) действительно является равенством, и теорема доказана.

В доказательстве леммы 3.1 условие (3.1) используется только для получения соотношения (3.15). Поэтому все рассуждения этого доказательства, включая получение соотношения (3.14), остаются в силе и без условия (3.1). В частности, неравенство (3.14) будет выполняться, если функция α является постоянной на $(0, a)$: $\alpha(t) \equiv c$, $c > 0$. В таком случае, полагая $\mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^{\alpha}, \alpha) = \mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^c, c)$ при $\alpha(t) \equiv c$, имеем

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\mathcal{M}_p^c, c) \leq \sup_{s \in (0, a]} (s - \sigma) \left(\int_0^s c^{-p} dt \right)^{-1/p} = c \sup_{s \in (0, a]} \frac{s - \sigma}{s^{1/p}}. \quad (3.27)$$

Функция $g(x) = g(x; p) := (x - \sigma)/x^{1/p}$ при $x > 0$ и $p \in (0, 1)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x_0 = \sigma/(1 - p)$, и

$$g(x_0; p) = p \left(\frac{1 - p}{\sigma} \right)^{(1-p)/p};$$

если $p = 1$, то $g(x) = g(x; 1)$ с ростом x , не убывая, стремится к единице. Поэтому

$$\sup_{x > 0} g(x; 1) = \sup_{x > 0} \frac{x - \sigma}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sigma}{x} = 1 =: g(\infty; 1).$$

Положим

$$s^* = \begin{cases} x_0 = \frac{\sigma}{1 - p}, & p \in (0, 1), \quad x_0 < a \leq \infty, \\ a, & p \in (0, 1), \quad a < x_0; \quad p = 1, \quad a < \infty, \\ \infty, & p = 1, \quad a = \infty. \end{cases} \quad (3.28)$$

Тогда вследствие (3.27) для любого $p \in (0, 1]$ справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) \leq c \sup_{\sigma \leq s \leq a} \frac{s - \sigma}{s^{1/p}} = c g(s^*; p). \quad (3.29)$$

В случаях, когда $p \in (0, 1)$ и $x_0 < a \leq \infty$, $p \in (0, 1)$ и $a < x_0$, $p = 1$ и $a < \infty$, экстремальная функция, реализующая верхнюю грань величины $\mathcal{E}_\sigma(\cdot, c)$ по множеству $\mathcal{M}_p^c$, имеет вид

$$m^*(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{s^*}\right)^{1/p}, & \text{если } t \in (0, s^*], \\ 0, & \text{если } t \in (s^*, a). \end{cases}$$

В случае, когда $a = \infty$, а $p = 1$, оценка (3.29) также является точной, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ можно указать функцию m_ε , например, полагая

$$m_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sigma + 1}, & \text{если } t \in \left(0, \frac{\sigma + 1}{\varepsilon}\right], \\ 0, & \text{если } t \in \left(\frac{\sigma + 1}{\varepsilon}, a\right), \end{cases}$$

для которой $\mathcal{E}_\sigma(m_\varepsilon, c) > c g(s^*; 1) - c\varepsilon = c - c\varepsilon$.

Таким образом, справедлив следующий аналог леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\alpha(t) \equiv c$, $c > 0$, $p \in (0, 1]$, $\mathcal{M}_p^c = \mathcal{M}_p^\alpha$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) &= \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) = \sup_{m \in \mathcal{M}_p^c} \mathcal{E}_\sigma(m, c) \\ &= \sup_{m \in \mathcal{M}_p^c} \left(\int_0^a c m(t) dt - \sup_{\delta_\sigma \in (0, a)} \int_{\delta_\sigma} c m(t) dt \right). \end{aligned}$$

Тогда при каждом $\sigma \in (0, a)$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^c, c) = c g(s^*; p),$$

где $g(x; p) = (x - \sigma)/x^{1/p}$, а число s^* определяется соотношением (3.28).

На основе леммы 3.2 можно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $p \in (0, 1]$, $\varphi(\mathbf{x}) \equiv c$, $c > 0$, и

$$e_\sigma(\varphi, p) = e_\sigma(c, p) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A c y(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} c y(\mathbf{x}) d\mu \right).$$

Тогда при любом $\sigma \in (0, a)$ справедливы равенства

$$e_\sigma(c, p) = c g(s^*; p) = \begin{cases} c p \left(\frac{1-p}{\sigma} \right)^{(1-p)/p}, & p \in (0, 1), \quad x_0 < a \leq \infty, \\ c \frac{a - \sigma}{a^{1/p}}, & p \in (0, 1), \quad a < x_0; \quad p = 1, \quad a < \infty, \\ c, & p = 1, \quad a = \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 2.1, сначала убедимся в правильности оценки

$$e_{\sigma}(\varphi y) \leqslant c g(s^*; p) \quad (3.30)$$

на множестве $\mathcal{U}_p^{\varphi}(A) = \mathcal{U}_p^c(A)$ всех функций $y \in \mathcal{U}_p(A)$, для которых произведение $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) = cy(\mathbf{x})$ принимает на A конечное число значений. При этом, полагая

$$m'(t) = \begin{cases} \frac{f_k}{c}, & \text{если } t \in (a_{k-1}, a_k], \quad k = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{если } t \in (a_n, a), \end{cases} \quad (3.31)$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ – значения функции cy , упорядоченные по убыванию, $a_k = \sum_{i=1}^k \mu_i$, $a_0 = 0$ и $\mu_k = \mu(A_k) = \mu(\{\mathbf{x} \in A: y(\mathbf{x}) = f_k\})$, получим

$$e_{\sigma}(\varphi y) = \inf_{\gamma_{\sigma} \in (0, a)} \left(\int_0^a c m'(t) dt - \int_{\gamma_{\sigma}} c m'(t) dt \right) = \mathcal{E}_{\sigma}(m', c).$$

Таким образом, задача об оценке величины $e_{\sigma}(\varphi y)$ на множестве $\mathcal{U}_p^c(A)$ свелась к исследованию поведения величин $\mathcal{E}_{\sigma}(m', c)$ на множестве всех функций $m' \in U_p(0, a)$ вида (3.31). Поскольку каждая такая функция m' принадлежит множеству $\mathcal{M}_p^c$, то в силу леммы 3.2 имеет место соотношение

$$\mathcal{E}_{\sigma}(m', c) \leqslant c g(s^*; p),$$

из которого следует справедливость соотношения (3.30) для любой функции $y \in \mathcal{U}_p^c(A)$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2.1, в силу следствия 1.1 убеждаемся в справедливости этой оценки и для любой функции $y \in \mathcal{U}_p(A)$.

Для завершения доказательства теоремы в случаях, когда $p \in (0, 1)$ и $x_0 < a \leqslant \infty$, $p \in (0, 1)$ и $a < x_0$, $p = 1$ и $a < \infty$, достаточно рассмотреть функцию y^* , определяющуюся равенством

$$y^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} (s^*)^{-1/p}, & \text{если } \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases}$$

где $E = E(s^*)$ – любое подмножество множества A μ -меры s^* . Эта функция принадлежит множеству $\mathcal{U}_p(A)$, и для нее имеем

$$e_{\sigma}(\varphi y^*) = c g(s^*; p).$$

В случае, когда $a = \infty$, а $p = 1$, оценка (3.30) также является точной, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ можно указать функцию $y_{\varepsilon} \in \mathcal{U}_1(A)$, например, полагая

$$y_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sigma + 1}, & \text{если } \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in A \setminus E, \end{cases}$$

где $E \subset A$, $\mu(E) = (\sigma + 1)/\varepsilon$, для которой будет выполняться условие

$$e_{\sigma}(\varphi y_{\varepsilon}) > c g(s^*; 1) - c\varepsilon = c - c\varepsilon.$$

3.2. Точные значения величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $p > 1$. В этом пункте приведем доказательство теоремы 2.2, а также сформулируем и докажем лемму 3.3, занимающую основное место в этом доказательстве.

Доказательство теоремы 2.2 базируется на следующей лемме, в формулировке которой используются обозначения леммы 3.1.

ЛЕММА 3.3. Пусть $p \in (1, \infty)$, α – произвольная функция из множества $\mathcal{A}$, для которой

$$\|\alpha\|_{L_q(0,a)} < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (3.32)$$

и $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ – величина, определяемая соотношением (3.3). Тогда при каждом $\sigma > 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \alpha^q(t) dt \right)^{1/q}, \quad (3.33)$$

где s^* – наибольшее на $(0, a]$ число, для которого

$$s - \sigma \leq \alpha^p(s) \int_0^s \alpha^{-p}(t) dt \quad \forall s \in [\sigma, s^*]. \quad (3.34)$$

При этом равенство $s^* = a$ возможно только в случае, когда $a < \infty$. Верхнюю грань в правой части соотношения (3.3) реализует функция $m^* \in \mathcal{M}_p^\alpha$, определяемая при $s^* = a$ равенством

$$m^*(t) = \left(\alpha^p(t) \int_0^a \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}, \quad t \in (0, a), \quad (3.35)$$

и при $s^* < a$ – равенством

$$m^*(t) = \begin{cases} \alpha^{-1}(t)(s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-q/p} \mathcal{E}_\sigma^{-q/p}, & t \in (0, s^*], \\ \alpha^{q/p}(t) \mathcal{E}_\sigma^{-q/p}, & t > s^*. \end{cases} \quad (3.36)$$

Заметим, что в силу условия (3.32) интегралы в правой части (3.2) конечны, и поэтому величины $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$ корректны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Пусть функция α удовлетворяет условиям леммы. Тогда согласно определению множества $\mathcal{M}_p^\alpha$ если $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$, а $\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha)$ – величина, определяемая соотношением (3.2), то

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) = \int_\sigma^a \alpha(t)m(t) dt = \int_0^a \nu(t)\alpha(t)m(t) dt, \quad \nu(t) := \begin{cases} 0, & t \in (0, \sigma], \\ 1, & t > \sigma. \end{cases} \quad (3.37)$$

Поскольку при $s \geq \sigma$ выполняется равенство

$$\alpha^{-p}(s)(s - \sigma) - \int_0^s \alpha^{-p}(t) dt = \int_\sigma^s (\alpha^{-p}(s) - \alpha^{-p}(t)) dt - \int_0^\sigma \alpha^{-p}(t) dt,$$

где величина $\int_\sigma^s (\alpha^{-p}(s) - \alpha^{-p}(t)) dt$ при $s = \sigma$ равна нулю, а с ростом s , не убывая, стремится к бесконечности, то всегда можно указать наибольшее число s^* , удовлетворяющее соотношению (3.34).

Далее, обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ множество всех функций m из $\mathcal{M}_p^\alpha$, для которых функция $\alpha(t)m(t)$ постоянна на $(0, s^*]$, и убедимся в том, что справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) = \sup_{m \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha). \quad (3.38)$$

Для этого покажем, что для каждой функции $m \in \mathcal{M}_p^\alpha$ найдется функция $m_1 \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$, для которой $\|m_1\|_{L_p(0,a)} \leq \|m\|_{L_p(0,a)}$ и в то же время

$$\mathcal{E}_\sigma(m_1, \alpha) \geq \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha). \quad (3.39)$$

С этой целью рассмотрим функцию $m_1(t)$ такую, что $m_1(t) = m(t)$ при $t \in (s^*, a)$, а при $t \in (0, s^*]$ значения $m_1(t)$ определяются соотношением

$$\alpha(t)m_1(t) = \left(\int_0^{s^*} m^p(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}. \quad (3.40)$$

Для этой функции будем иметь

$$\begin{aligned} \|m_1\|_{L_p(0,a)}^p &= \int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \left(\int_0^{s^*} m^p(x) dx \right) \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1} \\ &\quad + \int_{s^*}^a m^p(x) dx = \|m\|_{L_p(0,a)}^p. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для доказательства неравенства (3.39) в силу (3.37) и (3.40) достаточно убедиться в том, что

$$\int_0^{s^*} \nu(t) \alpha(t) m(t) dt \leq \int_0^{s^*} \nu(t) dt \left(\int_0^{s^*} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (3.42)$$

Положив

$$K(t) = \alpha^{-p}(t) \left(\nu(t) \alpha^p(t) - (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1} \right),$$

замечаем, что вследствие (3.34) имеем $K(t) \leq 0$, если $t \in (0, \sigma]$, и $K(t) \geq 0$ при $t \in (\sigma, s^*)$. Кроме того,

$$\int_0^{s^*} K(t) dt = 0.$$

Поэтому имеет место представление

$$\begin{aligned} \int_0^{s^*} \nu(t) \alpha(t) m(t) dt &- \int_0^{s^*} \nu(t) dt \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1} \int_0^{s^*} \alpha^{-p/q} m(t) dt \\ &= \int_0^{s^*} (\alpha(t) m(t) - c) K(t) dt, \end{aligned}$$

где c – любое действительное число.

Учитывая то, что произведение $\alpha(t)m(t)$ на промежутке $(0, a)$ является монотонным, выберем в качестве c число $c^* = \alpha(\sigma+)m(\sigma+)$. В таком случае

функция $(\alpha(t)m(t) - c^*)K(t)$ будет неположительной при всех $t \in (0, s^*)$. Отсюда следует, что величина в правой части последнего соотношения является неположительной, а следовательно, выполняется неравенство

$$\int_0^{s^*} \nu(t)\alpha(t)m(t) dt \leq \int_0^{s^*} \nu(t) dt \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1} \int_0^{s^*} \alpha^{-p/q} m(t) dt. \quad (3.43)$$

Применив к последнему интегралу в (3.43) неравенство Гёльдера, получим соотношение (3.42):

$$\begin{aligned} & \int_0^{s^*} \nu(t)\alpha(t)m(t) dt \\ & \leq \int_0^{s^*} \nu(t) dt \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1} \left(\int_0^{s^*} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{1/q} \\ & = \int_0^{s^*} \nu(t) dt \left(\int_0^{s^*} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

а вместе с ним и (3.39). Объединяя соотношения (3.39)–(3.41), получаем искомое равенство (3.38).

Из определения множества $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ следует, что для произвольной функции $m \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ при каждом $t \in (0, s^*)$ выполнено

$$\alpha(t)m(t) = \left(\int_0^{s^*} m^p(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1/p}.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) = (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p} + \int_{s^*}^a \alpha(t)m(t) dt. \quad (3.44)$$

Далее будем различать два случая: $s^* = a$ (что возможно, только когда $a < \infty$) и $s^* < a$.

В случае, когда $s^* = a$, последний интеграл в соотношении (3.44) отсутствует, кроме того,

$$\int_0^{s^*} m^p(t) dt = \|m\|_{L_p(0,a)}^p \leq 1,$$

поэтому в силу (3.44) делаем вывод, что

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha) \leq (a - \sigma) \left(\int_0^a \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Для завершения доказательства леммы в этом случае достаточно заметить, что функция m^* , определяющаяся равенством (3.35), принадлежит множеству $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$ и для нее выполняется равенство

$$\mathcal{E}_\sigma(m^*, \alpha) = (a - \sigma) \left(\int_0^a \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p}.$$

В случае, когда $s^* < a$, применяя к выражению в правой части (3.44) сначала интегральное неравенство Гёльдера, а потом неравенство Гёльдера для сумм, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m, \alpha) &\leq (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-1/p} \\ &\quad + \left(\int_{s^*}^a m^p(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_{s^*}^a \alpha^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_0^a m^p(t) dt \right)^{1/p} \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \alpha^q(t) dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие того, что $\|m\|_{L_p(0,a)} \leq 1$, получаем необходимую оценку величины $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\alpha, \alpha)$.

Рассмотрим теперь функцию m^* , определенную соотношением (3.36), и покажем, что $m^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$. Действительно, в силу (3.36) имеем $\|m^*\|_{L_p(0,a)} \leq 1$, и при каждом $t \in (0, s^*]$

$$\alpha(t)m^*(t) = (s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-q/p} \mathcal{E}_\sigma^{-1/p}, \quad (3.45)$$

а при $t \in (s^*, a)$

$$\alpha(t)m^*(t) = \alpha^q(t) \mathcal{E}_\sigma^{-1/p}, \quad (3.46)$$

т. е. функция $\alpha(t)m^*(t)$ на промежутке $(0, s^*]$ постоянна, а на промежутке (s^*, a) не возрастает. Поэтому достаточно показать, что для любого $t_0 > s^*$

$$\alpha(s^*)m^*(s^*) \geq \alpha(t_0)m^*(t_0) \quad (3.47)$$

или что

$$(s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1} \geq \alpha^p(t_0). \quad (3.48)$$

В случае, когда при $s = s^*$ неравенство (3.34) не выполняется, для любого $t_0 > s^*$ имеем

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx} \geq \alpha^p(s^*) \geq \alpha^p(t_0),$$

следовательно, тогда справедливо неравенство (3.47).

Если же

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx} \leq \alpha^p(s^*),$$

то рассмотрим функцию

$$H(s) := (s - \sigma) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-1}, \quad s \geq \sigma.$$

Ее производная имеет вид

$$H'(s) = \left(\int_0^s \alpha^{-p}(x) dx - (s - \sigma)\alpha^{-p}(s) \right) \left(\int_0^s \alpha^{-p}(x) dx \right)^{-2}.$$

В силу определения числа s^* делаем вывод, что функция $H(s)$ не возрастает при всех $s \geq s^*$. Отсюда следует, что при любом $s > s^*$ неравенство (3.34) не выполняется.

Подобрав для данного t_0 число $s_0 > s^*$ так, чтобы $\alpha(s_0) \geq \alpha(t_0)$, видим, что и в этом случае справедливо неравенство (3.48):

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(x) dx} = H(s^*) \geq H(s_0) = \frac{s_0 - \sigma}{\int_0^{s_0} \alpha^{-p}(x) dx} \geq \alpha^p(s_0) \geq \alpha^p(t),$$

а значит, и неравенство (3.47).

Таким образом, функция m^* принадлежит множеству $\widetilde{\mathcal{M}}_p^\alpha$, и для нее вследствие (3.45)–(3.47) выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\sigma(m^*, \alpha) &= \mathcal{E}_\sigma^{-q/p} \left((s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} (s^* - \sigma) + \int_{s^*}^a \alpha^{q/p+1}(t) dt \right) \\ &= \mathcal{E}_\sigma^{-q/p} \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \alpha^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \alpha^q(t) dt \right) = \mathcal{E}_\sigma. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Как и при доказательстве теоремы 2.1, сначала убеждаемся в том, что для любой функции $y \in \mathcal{U}_p(A)$ выполняется неравенство

$$e_\sigma(\varphi y) \leq G_\sigma(\varphi, p), \quad (3.49)$$

в котором величина $G_\sigma(\varphi, p)$ теперь уже определяется равенством (2.22). Для этого, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2.1, показываем, что для любой функции $y \in \mathcal{U}_p(A)$ справедливо неравенство

$$e_\sigma(\varphi y) \leq \sup_{m \in \mathcal{M}_p^\varphi} \inf_{\gamma_\sigma \in (0, a)} \left(\int_0^a \overline{\varphi}(t) m(t) dt - \int_{\gamma_\sigma} \overline{\varphi}(t) m(t) dt \right) = \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\varphi, \overline{\varphi}), \quad (3.50)$$

где $\mathcal{M}_p^\varphi$ – множество всех неотрицательных функций $m \in U_p(0, a)$, для которых произведение $\overline{\varphi}(t)m(t)$ на $(0, a)$ не возрастает и принимает только конечное число значений. Тем самым задача опять сводится к исследованию величин $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\varphi, \overline{\varphi})$.

Для нахождения величин $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\varphi, \overline{\varphi})$ воспользуемся леммой 3.3. Полагая $\alpha(t) = \overline{\varphi}(t)$, $t \in (0, a)$, видим, что функция α удовлетворяет условиям этой леммы, и согласно (3.33) получаем

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\varphi, \overline{\varphi}) = G_\sigma(\varphi, p) = \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \overline{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \overline{\varphi}^q(t) dt \right)^{1/q}, \quad (3.51)$$

где s^* – наибольшее на промежутке $(\sigma, a]$ число, для которого при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство (2.8).

Объединяя соотношения (3.50) и (3.51), приходим к выводу, что неравенство (3.49) выполняется для любой функции y из множества $\mathcal{U}_p(A)$. Поэтому

$$e_\sigma(\varphi, p) = \sup_{y \in \mathcal{U}_p(A)} e_\sigma(\varphi y) \leq G_\sigma(\varphi, p). \quad (3.52)$$

Для завершения доказательства теоремы при таком предположении остается показать, что в соотношении (3.52) строгого неравенства быть не может. Для этого достаточно убедиться в том, что в множестве $\mathcal{U}_p(A)$ существует функция $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar{\varphi}, \sigma, p)$, для которой

$$e_\sigma(\varphi y^*) = G_\sigma(\varphi, p). \quad (3.53)$$

Пусть $s^* = s^*(\sigma, \varphi)$ – наибольшее на промежутке $(\sigma, a]$ число такое, что при всех $s \in (\sigma, s^*)$ выполняется неравенство (2.8). Заметим, что если на некотором промежутке (s_1, s_2) функция $\bar{\varphi}$ постоянна и при некотором $s = s_0$ выполняется соотношение (2.8), то это соотношение будет справедливо и при любом $s' \in (s_0, s_2]$:

$$\begin{aligned} s' - \sigma &= s_0 - \sigma + (s' - s_0) \leq \bar{\varphi}^p(s_0) \int_0^{s_0} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt + \bar{\varphi}^p(s_0) \frac{s' - s_0}{\bar{\varphi}^p(s_0)} \\ &= \bar{\varphi}^p(s') \int_0^{s'} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt. \end{aligned}$$

Это означает, что в случае, когда $s^*(\sigma, \varphi) < a$, для любого $\varepsilon > 0$ будет $\bar{\varphi}(s^* + \varepsilon) < \bar{\varphi}(s^* -)$ и μ -мера множества $E = \{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ равна мере Лебега множества $\{t \in (0, a]: \bar{\varphi}(t) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ и, следовательно, равна s^* .

В случае, когда $s^*(\sigma, \varphi) = a$ ($a < \infty$), соотношению (3.53) удовлетворяет функция $y^* \in \mathcal{U}_p(A)$, определяющаяся равенством (2.10). Действительно,

$$\|y^*\|_{L_p(A, d\mu)}^p = \int_A y^*(\mathbf{t})^p d\mu = \int_A \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \left(\int_A \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-1} = 1,$$

поэтому $y^* \in \mathcal{U}_p(A)$, и вследствие (1.2) имеем

$$e_\sigma(\varphi y^*) = \inf_{\gamma_\sigma} \int_{A \setminus \gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{t}) y^*(\mathbf{t}) d\mu = (a - \sigma) \left(\int_A \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-1/p} = G_\sigma(\varphi, p).$$

В случае, когда $s^* < a$, в качестве экстремальной возьмем функцию $y^*(\mathbf{t})$, задающуюся соотношением (2.11). Поскольку для любого $h > 0$ μ -мера множества $\{\mathbf{t} \in E: \varphi(\mathbf{t}) \geq h\}$ равна мере Лебега множества $\{t \in (0, s^*): \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, а μ -мера множества $\{\mathbf{t} \in A \setminus E: \varphi(\mathbf{t}) \geq h\}$ равна мере Лебега множества $\{t \in (s^*, a): \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt, \quad \int_{A \setminus E} \varphi^q(\mathbf{x}) d\mu = \int_{s^*}^a \bar{\varphi}^q(t) dt. \quad (3.54)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|y^*\|_{L_p(A, d\mu)}^p &= \int_A y^*(\mathbf{t})^p d\mu = G_\sigma^{-q} \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-q} \int_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right. \\ &\quad \left. + \int_{A \setminus E} \varphi^q(\mathbf{t}) d\mu \right) = 1, \end{aligned}$$

где $G_\sigma := G_\sigma(\varphi, p)$ и, следовательно, $y^* \in \mathcal{U}_p(A)$. Кроме того, в силу (2.11) и (3.54) при всех $\mathbf{t} \in E$

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}) &= G_\sigma^{-q/p}(s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-q/p} \\ &= G_\sigma^{-q/p}(s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx \right)^{-q/p},\end{aligned}\quad (3.55)$$

а при $\mathbf{t} \in A \setminus E$

$$\varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}) = G_\sigma^{-q/p} \varphi^{1+q/p}(\mathbf{t}) = G_\sigma^{-q/p} \varphi^q(\mathbf{t}). \quad (3.56)$$

Убедимся в том, что для любых $\mathbf{x} \in E$ и $\mathbf{t} \in A \setminus E$

$$\varphi(\mathbf{x})y^*(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{t})y^*(\mathbf{t}), \quad (3.57)$$

что в силу (3.55) и (3.56) равносильно неравенству

$$(s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx \right)^{-1} \geq \varphi^p(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in A \setminus E. \quad (3.58)$$

Это можно сделать аналогично доказательству неравенства (3.45). В случае, когда при $s = s^*$ неравенство (2.8) не выполняется, для любого $\mathbf{t} \in A \setminus E$ имеем

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx} \geq \bar{\varphi}^p(s^*) \geq \varphi^p(\mathbf{t}),$$

следовательно, справедливо неравенство (3.57).

Если же

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx} \leq \bar{\varphi}^p(s^*),$$

то рассмотрим функцию

$$H(s) := (s - \sigma) \left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(x) dx \right)^{-1}$$

при любом $s \geq \sigma$. Ее производная имеет вид

$$H'(s) = \left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(x) dx - (s - \sigma) \bar{\varphi}^{-p}(s) \right) \left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(x) dx \right)^{-2}.$$

В силу определения числа s^* делаем вывод, что функция $H(s)$ не убывает при всех $s \in [\sigma, s^*)$ и не возрастает при $s \geq s^*$. Отсюда следует, что при любом $s > s^*$ неравенство (2.8) не выполняется.

Подобрав для данного $\mathbf{t} \in A \setminus E$ число $s_0 > s^*$ так, чтобы $\bar{\varphi}(s_0) \geq \varphi(\mathbf{t})$, видим, что и в этом случае справедливо неравенство (3.58):

$$\frac{s^* - \sigma}{\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx} = H(s^*) \geq H(s_0) = \frac{s_0 - \sigma}{\int_0^{s_0} \bar{\varphi}^{-p}(x) dx} \geq \bar{\varphi}^p(s_0) \geq \varphi^p(\mathbf{t}),$$

а значит, и неравенство (3.57).

Учитывая соотношения (2.11), (3.54)–(3.57), получаем

$$\begin{aligned} e_\sigma(\varphi y^*) &= G_\sigma^{-q/p} \left((s^* - \sigma)^{q/p} \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-q/p} (s^* - \sigma) + \int_{A \setminus E} \varphi^{1+q/p}(\mathbf{t}) d\mu \right) \\ &= G_\sigma^{-q/p} \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-q/p} + \int_{s^*}^a \bar{\varphi}^q(t) dt \right) = G_\sigma(\varphi, p). \end{aligned}$$

Таким образом, во второй части (3.52) можно поставить знак равенства. Теорема доказана.

3.3. Теоремы 2.1, 2.2 в случае, когда мера $d\mu$ не является непрерывной. Теоремы 2.1, 2.2 были доказаны в случае, когда мера $d\mu$ является непрерывной. Однако, полностью повторяя приведенные выше рассуждения, нетрудно убедиться в том, что теорема 2.2 справедлива для любой σ -конечной σ -аддитивной меры $d\mu$. Если выполняются условия теоремы 2.1, то можно показать, что в случае произвольной σ -конечной σ -аддитивной меры $d\mu$ справедливо неравенство

$$e_\sigma(\varphi, p) \leq \sup_{s \in E_A(\mu)} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p}, \quad (3.59)$$

в котором $\bar{\varphi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\varphi(\mathbf{x})$, а $E_A(\mu)$ – множество значений меры $d\mu$ на множестве A :

$$E_A(\mu) = \{t \in [0, a] \mid \exists B_t \subset A: \mu(B_t) = t\}.$$

Если мера $d\mu$ непрерывна, то $E_A(d\mu) = (0, a]$ и в (3.59) можно поставить знак равенства. Однако знак равенства в (3.59) можно поставить и во многих случаях, когда мера $d\mu$ не является непрерывной. В частности, это так, если носителем меры $d\mu$ в $\mathbb{R}^m$ является целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n$, на которой мера равна, например, единице: $\mu(\mathbf{k}) \equiv 1$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, и $A = \mathbb{Z}^m$.

Действительно, в этом случае для любого $\sigma \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} e_\sigma(\varphi, p) &\leq \sup_{s \in E_A(\mu)} (s - \sigma) \left(\int_0^s \frac{dt}{\bar{\varphi}^p(t)} \right)^{-1/p} = \sup_{s \in E_A(\mu)} (s - \sigma) \left(\sum_{k=1}^s \frac{1}{\bar{\varphi}^p(k)} \right)^{-1/p} \\ &= (s^* - \sigma) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{\bar{\varphi}^p(k)} \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

где $s^* \in E_A(\mu) \cap \mathbb{N}$. Положим $E = \{\mathbf{x} \in A: \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(s^* -)\}$ и рассмотрим функцию

$$y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_E(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \right)^{-1/p},$$

где $\chi_E(\cdot)$ – характеристическая функция множества E . Тогда $y^* \in \mathcal{U}_p(A)$, и поскольку $\mu(E) = s^*$, то

$$\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu = \int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt = \sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{\bar{\varphi}^p(k)},$$

ПОЭТОМУ

$$e_{\sigma}(\varphi y^*) = (s^* - \sigma) \left(\int_E \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu \right)^{-1/p} = (s^* - \sigma) \left(\sum_{k=1}^{s^*} \frac{1}{\bar{\varphi}^p(k)} \right)^{-1/p}.$$

§ 4. Доказательство теорем о точных значениях величин $E_{\gamma_{\sigma}}(\varphi, p)$ и $D_{\sigma}(\varphi, p)$

Приведем доказательство всех сформулированных выше теорем, касающихся величин $E_{\gamma_{\sigma}}(\varphi, p)$ и $D_{\sigma}(\varphi, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть y – произвольная функция из $\mathcal{U}_p(A)$. Тогда в силу неравенства Гёльдера, соотношений (2.13) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} E_{\gamma_{\sigma}}(\varphi y) &= \int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) d\mu \leq \|y\|_{L_p(A, d\mu)} \left(\int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi^q(\mathbf{x}) d\mu \right)^{1/q} \\ &\leq \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)} = \|\bar{\varphi}_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(0, a)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

и для доказательства (2.14) остается показать, что строгого неравенства в соотношении (4.1) быть не может. С этой целью рассмотрим функцию $h = h(\mathbf{x})$,

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \gamma_{\sigma}, \\ \varphi_{\gamma_{\sigma}}^{q/p}(\mathbf{x}) \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)}^{-q/p}, & \mathbf{x} \in A \setminus \gamma_{\sigma}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Тогда

$$\|h\|_{L_p(A, d\mu)} = \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)}^{-q/p} \int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi_{\gamma_{\sigma}}^q(\mathbf{x}) d\mu = 1, \quad (4.3)$$

т. е. $h \in \mathcal{U}_p(A)$. Кроме того, вследствие (2.13)

$$\begin{aligned} E_{\gamma_{\sigma}}(\varphi h) &= \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)}^{-q/p} \int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi(\mathbf{x}) \varphi_{\gamma_{\sigma}}^{q/p}(\mathbf{x}) d\mu \\ &= \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)}^{-q/p} \int_{A \setminus \gamma_{\sigma}} \varphi_{\gamma_{\sigma}}^q(\mathbf{x}) d\mu = \|\varphi_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q(A, d\mu)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Объединяя соотношения (4.1)–(4.4), делаем вывод, что равенство (2.14) доказано.

Рассматривая нижние грани по множеству Γ_{σ} обеих частей (2.14), получаем

$$D_{\sigma}(\varphi, p) = \inf_{\gamma_{\sigma} \in \Gamma_{\sigma}} \|\bar{\varphi}_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q((0, a), dt)}.$$

Отсюда, учитывая соотношение (2.13), заключаем, что наименьшее значение величины $\|\bar{\varphi}_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q((0, a), dt)}$ будет в случае, когда $\gamma_{\sigma} = \gamma_{\sigma}^*$, и это значение равно $\|\bar{\varphi}\|_{L_q((\sigma, a), dt)}$:

$$\inf_{\gamma_{\sigma} \in \Gamma_{\sigma}} \|\bar{\varphi}_{\gamma_{\sigma}}\|_{L_q((0, a), dt)} = \|\bar{\varphi}\|_{L_q((\sigma, a), dt)}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Функция $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ существенно ограничена на $A_\sigma := A \setminus \gamma_\sigma$. Поэтому ее перестановка в убывающем порядке ограничена, и для нее будет выполняться равенство

$$\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = \lim_{v \rightarrow 0+} \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v) =: y_\sigma.$$

Если при этом $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = y_\sigma = 0$, то $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = 0$ почти всюду на A_σ , и в таком случае $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = 0 = \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$.

Если $y_\sigma > 0$, то при каждом $y > 0$ положим $e_y = \{\mathbf{t} \in A_\sigma : \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) \geq y\}$. Тогда при $y > y_\sigma$ μ -мера множества e_y равна нулю и $\mu(e_y) > 0$ при $0 < y < y_\sigma$. Отсюда, в частности, следует, что

$$y_\sigma = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{t} \in A_\sigma} \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}).$$

В силу теоремы Б для любой функции $h \in \mathcal{U}'_p(A)$ справедлива оценка

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi h) \leq y_\sigma.$$

Следовательно,

$$E'_{\gamma_\sigma}(\varphi, p) = \sup_{h \in \mathcal{U}'_p(A, d\mu)} E_{\gamma_\sigma}(\varphi h) \leq y_\sigma, \quad (4.5)$$

и для доказательства (2.16) остается показать, что строгого неравенства в последнем соотношении быть не может.

Пусть y – произвольное число из промежутка $(0, y_\sigma)$ и $\bar{e}_y$ – любое подмножество множества e_y , мера которого не превышает единицы: $\operatorname{mes}_\mu \bar{e}_y \leq 1$. Положим

$$h_y(\mathbf{t}) = \begin{cases} (\operatorname{mes}_\mu \bar{e}_y)^{-1}, & \mathbf{t} \in \bar{e}_y, \\ 0, & \mathbf{t} \in A \setminus \bar{e}_y, \end{cases}$$

так, что всегда $h_y \in \mathcal{U}'_p(A)$, и в то же время

$$y \leq E_{\gamma_\sigma}(\varphi h_y) = \int_{A_\sigma} \varphi_\sigma(\mathbf{t}) h_y(\mathbf{t}) d\mu \leq y_\sigma.$$

Устремляя y к y_σ , видим, что действительно в (4.5) строгого неравенства быть не может, что и завершает доказательство равенства (2.16).

Рассматривая нижние грани по множеству Γ_σ обеих частей (2.16), получаем

$$D'_\sigma(\varphi, p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+).$$

Учитывая соотношение (2.13), заключаем, что наименьшее значение величины $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$ будет в случае, когда $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^*$, и это значение равно $\overline{\varphi}(\sigma+)$:

$$\inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = \overline{\varphi}(\sigma+).$$

Этим соотношение (2.17) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4'. Вследствие (2.18) величина $\max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}$ конечна для любой функции $\varphi \in \Phi$, причем для некоторого $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{Z}^m \setminus \gamma_n$ будет выполняться равенство

$$\max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}_0}.$$

Поэтому в силу известного неравенства Йенсена для произвольной последовательности $y \in U_p^+$ выполняется соотношение

$$E_{\gamma_n}(\varphi y) = \sum_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} \leq \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} y_{\mathbf{k}} \leq \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} y_{\mathbf{k}}^p \leq \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}. \quad (4.6)$$

С другой стороны, последовательность

$$y^* = \begin{cases} 1, & \mathbf{k} = \mathbf{k}_0, \\ 0, & \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0, \end{cases}$$

принадлежит множеству U_p^+ , и для нее имеет место равенство $E(\varphi y^*) = \varphi_{\mathbf{k}_0}$, которое в сочетании с (4.6) и доказывает соотношение (2.19).

Рассматривая нижние грани по множеству Γ_n обеих частей (2.19), получаем

$$D_n(\varphi, p) = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}.$$

Отсюда заключаем, что наименьшее значение величины $\max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}}$ будет в случае, когда $\gamma_n = \gamma_n^*$, и это значение равно $\overline{\varphi}(n+1)$:

$$\inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} \max_{\mathbf{k} \notin \gamma_n} \varphi_{\mathbf{k}} = \overline{\varphi}(n+1).$$

Этим соотношение (2.20) доказано.

§ 5. Доказательство теорем о порядках величин $e_\sigma(\varphi, p)$, $p > 0$, при $\sigma \rightarrow \infty$

5.1. Порядки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $p \in (0, 1]$. Приведем доказательства теорем 2.5 и 2.6, из которых следуют порядки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ в случае, когда $p \in (0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. При заданных $\nu > 1$ и $s > \nu$ рассмотрим функцию

$$H_\nu(s) = \frac{s - \nu}{\left(\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1/p}}, \quad 0 < p \leq 1. \quad (5.1)$$

Критическая точка $s = s_\nu$ функции $H_\nu(s)$ является точкой максимума и удовлетворяет соотношению

$$H'_\nu(s) = \frac{\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} - \frac{1}{p}(s - \nu)\psi^{-1}(s)}{\left(\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1/p+1}} = 0. \quad (5.2)$$

При этом

$$H_\nu(s_\nu) = \frac{s_\nu - \nu}{\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}} \frac{1}{\left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1/p-1}} = \frac{p\psi(s_\nu)}{\left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1/p-1}}. \quad (5.3)$$

Покажем сначала, что в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu). \quad (5.4)$$

Вследствие монотонности функции ψ всегда имеем $\psi(s_\nu) \leq \psi(\nu)$, поэтому для доказательства (5.4) достаточно убедиться в существовании постоянной $K_1 > 0$, для которой

$$\psi(\nu) \leq K_1 \psi(s_\nu). \quad (5.5)$$

Рассмотрим возрастающую последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ чисел таких, что $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а $\nu_0 := \nu$. Поскольку функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_0$, то вследствие (1.12) для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\nu \geq 1$ имеем

$$\frac{\nu_k - \nu}{\nu} = \frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}} \dots \frac{\nu_1}{\nu} - 1 \geq (K_2 + 1)^k - 1, \quad K_2 = \text{const},$$

поэтому начиная с некоторого номера $k_0 \geq 1$ будем иметь $\nu_{k_0} - \nu > \nu$.

Покажем, что $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$. Тогда согласно определению последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ будем иметь

$$\psi(s_\nu) \geq \psi(\nu_{k_0+1}) = \frac{\psi(\nu)}{2^{k_0+1}},$$

что и доказывает неравенство (5.5), а с ним и порядковое равенство (5.4).

Из соотношения (5.2) следует, что

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s_\nu - \nu}{p \psi(s_\nu)} \quad \text{или} \quad \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} = \Phi(s_\nu),$$

где

$$\Phi(s) = \int_\nu^s \left(\frac{1}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(t)} \right) dt + \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{s - \nu}{\psi(s)}. \quad (5.6)$$

Функция $\Phi(s)$ не убывает при всех $s > \nu$. Поэтому если при $s = \nu_{k_0+1}$ будет справедливо неравенство

$$\int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} dt \leq \Phi(s), \quad (5.7)$$

то будет выполняться и соотношение $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$.

Согласно определению последовательности $\{\nu_k\}$ имеем

$$\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}}{\psi(\nu)} \geq \frac{1}{\psi(\nu)}.$$

Отсюда, учитывая монотонность функции ψ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\nu_{k_0+1}) &\geq \int_\nu^{\nu_{k_0+1}} \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(t)} \right) dt \\ &\geq \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} \right) (\nu_{k_0} - \nu) \geq \frac{\nu}{\psi(\nu)} \geq \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)}, \end{aligned}$$

т.е. неравенство (5.7) при $s = \nu_{k_0+1}$ выполняется. Поэтому, действительно, $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$, следовательно, справедливо соотношение (5.4).

Если $p = 1$, то вследствие (5.1) имеем

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{t \geq \sigma} H_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s \geq \nu} H_\nu(s),$$

где $\nu = \sigma + 1 > 1$, $s = t + 1 \geq \nu$. Отсюда в силу (5.3) и (5.4) получаем

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \geq \nu} H_\nu(s) = H_\nu(s_\nu) = p \psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma + 1),$$

и соотношение (2.27) в таком случае доказано.

Если $p \in (0, 1)$, то для доказательства соотношения (2.27) следует еще показать, что

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\nu - 1}{\psi(\nu)}. \quad (5.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} &= \int_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\psi(t+1)} = \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)} - \int_0^{s_\nu-1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^2(t+1)} dt \\ &\geq \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)} - \int_0^{s_\nu-1} \frac{dt}{\alpha(\psi; t+1)\psi(t+1)}, \end{aligned}$$

где функция $\alpha(\psi; t)$ определяется равенством (1.17).

Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то в силу утверждения 1.4 для любого $t \geq 1$ справедливо соотношение $\alpha(\psi; t) \geq K_3 > 0$, учитывая которое, получаем

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)} - \frac{1}{K_3} \int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)},$$

а значит,

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{K_3}{K_3 + 1} \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)}.$$

С другой стороны, так как функция ψ убывает, то

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)}. \quad (5.9)$$

Поэтому

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)}. \quad (5.10)$$

Из соотношений (5.2) и (5.9) следует, что

$$(s_\nu - 1) - (\nu - 1) = p\psi(s_\nu) \int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq p\psi(s_\nu) \frac{s_\nu - 1}{\psi(s_\nu)} = p(s_\nu - 1),$$

откуда видим, что

$$\nu - 1 \leq s_\nu - 1 \leq \frac{\nu - 1}{1 - p}.$$

Объединяя последнее соотношение с соотношениями (5.4) и (5.10), получаем (5.8).

Таким образом, положив $\nu = \sigma + 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\sigma(\psi; p) &= \sup_{s \geq \nu} H_\nu(s) = H_\nu(s_\nu) = p\psi(s_\nu) \left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \right)^{1-1/p} \\ &\asymp \psi(\nu) \left(\frac{\nu - 1}{\psi(\nu)} \right)^{1-1/p} = \frac{\psi^{1/p}(\nu)}{(\nu - 1)^{1/p-1}} = \frac{\psi^{1/p}(\sigma + 1)}{\sigma^{1/p-1}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приведем некоторые дополнительные сведения о функциях из множества $\mathfrak{M}$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Согласно (1.11) для любой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ имеет место равенство

$$\eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \quad t \geq 1,$$

из которого следует, что

$$\eta'(\psi; t) \geq \frac{1}{2}, \quad t \geq 1. \quad (5.11)$$

Примеры функций $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, и $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+e)$, $\varepsilon > 0$, показывают, что величина $\eta'(\psi; t)$ для различных функций $\psi \in \mathfrak{M}$ может быть как ограниченной сверху, так и неограниченной. В связи с этим рассматривают множество (см., например, [23], а также [22, с. 164–166])

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M}: \eta'(\psi; t) \leq K\}.$$

Множество F обладает рядом специфических свойств, содержащихся в следующих утверждениях.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1 [23]. *Справедливо включение $\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+ \subseteq F$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2 [23]. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежала F , необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \geq 1$ выполнялось соотношение*

$$K_1|\psi'(t)|(\eta(t) - t) \leq \psi(t) \leq K_2|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t), \quad \eta(t) = \eta(\psi; t). \quad (5.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1 [23]. Если положить $\lambda(t) := \psi(t)/|\psi'(t)|$, то из (5.12) следует, что для любого $\psi \in F$ имеем

$$K_1(\eta(t) - t) \leq \lambda(t) \leq K_2(\eta(t) - t), \quad \eta(t) = \eta(\psi; t). \quad (5.13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3 [23]. *Для того чтобы функция $\psi \in \mathfrak{M}$ принадлежала F , необходимо и достаточно, чтобы при всех $t \geq 1$ выполнялось неравенство*

$$\frac{\eta(\eta(t)) - \eta(t)}{\eta(t) - t} \leq K, \quad \eta(t) = \eta(\psi; t). \quad (5.14)$$

ЛЕММА 5.1. *Пусть функция $\psi \in \mathfrak{M}$ такая, что функция $h(t) := 1/\psi(t)$ выпукла вниз при $t \geq t_0 \geq 1$. Тогда при любом $t \geq t_0 \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\eta'(\psi; t) \leq 2. \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно определению функции η при любом $t \geq 1$ имеем

$$h(\eta(\psi; t)) = 2h(t). \quad (5.16)$$

Отсюда получаем

$$h'(\eta(\psi; t))\eta'(\psi; t) = 2h'(t). \quad (5.17)$$

Поскольку функция $h(t)$ выпукла вниз при $t \geq t_0$, то ее производная $h'(t)$ на этом промежутке не убывает, и поэтому справедливо соотношение (5.15):

$$\eta'(\psi; t) = \frac{2h'(t)}{h'(\eta(\psi; t))} \leq 2. \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Как отмечено ранее, критическая точка $s = s_\nu$ функции $H_\nu(s)$ является точкой максимума и удовлетворяет соотношениям (5.2) и (5.3).

Покажем сначала, что для произвольной функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо порядковое при $s \rightarrow \infty$ равенство

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi(s)}. \quad (5.19)$$

Используя формулу интегрирования по частям, с учетом замечания 5.1 получаем

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} = \frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} - \int_1^s \frac{t|\psi'(t)| dt}{\psi^2(t)} \geq \frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} - \frac{1}{K_1} \int_1^s \frac{\mu(\psi; t) dt}{\psi(t)}, \quad (5.20)$$

где величина $\mu(\psi; t) = t/(\eta(\psi; t) - t)$ согласно определению множества $\mathfrak{M}_\infty^+$ монотонно стремится к бесконечности. Отсюда следует, что

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{1}{1 + \mu(\psi; s)/K_1} \left(\frac{s}{\psi(s)} - \frac{1}{\psi(1)} \right) \geq K_3 \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi(s)}. \quad (5.21)$$

С другой стороны, для любой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ при любом $t \geq 1$

$$\frac{1}{2}\psi(t) = - \int_t^{\eta(\psi; t)} \psi'(\tau) d\tau \leq |\psi'(t)|(\eta(\psi; t) - t). \quad (5.22)$$

Поэтому

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \leq 2 \int_1^s \frac{|\psi'(t)|}{\psi^2(t)} (\eta(\psi; t) - t) dt = 2 \frac{\eta(\psi; t) - t}{\psi(t)} + 2 \int_1^s \frac{1 - \eta'(\psi; t)}{\psi(t)} dt,$$

и если выполняется условие (2.28), то при $s > t_0$

$$\begin{aligned} \int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} &\leq 2 \frac{\eta(\psi; t) - t}{\psi(t)} + 2 \int_1^{t_0} \frac{1 - \eta'(\psi; t)}{\psi(t)} dt + (1 - 2\varepsilon) \int_{t_0}^s \frac{dt}{\psi(t)} \\ &\leq 2 \frac{\eta(\psi; t) - t}{\psi(t)} + (1 - 2\varepsilon) \int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} + K_4. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi(t)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\eta(\psi; t) - t}{\psi(t)} + K_4 \right) \leq K_5 \frac{\eta(\psi; t) - t}{\psi(t)}. \quad (5.24)$$

Объединяя соотношения (5.21) и (5.24), делаем вывод, что действительно выполняется соотношение (5.19).

Покажем теперь, что для любой функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо соотношение

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Для этого, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 2.5, достаточно показать, что существует постоянная $K_6 > 0$, для которой

$$\psi(\nu) \leq K_6 \psi(s_\nu). \quad (5.26)$$

Из соотношения (5.19) следует, что существует постоянная $K_7 > 0$ такая, что при всех достаточно больших ν будет выполняться неравенство

$$\int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \leq K_7 \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi(\nu)}. \quad (5.27)$$

Выберем число $k_0 = k_0(K_7) \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{2^{k_0} - 3}{K_7} \geq 1, \quad (5.28)$$

и аналогично доказательству теоремы 2.5 покажем, что $s_\nu \leq \nu_{k_0}$, где $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu_0 = \nu$. Отсюда получим $\psi(s_\nu) \geq \psi(\nu_{k_0}) = \psi(\nu)/2^{k_0}$, а значит, справедливы соотношения (5.26) и (5.25).

Рассмотрим функцию $\Phi(s)$, определяющуюся равенством (5.6). Покажем, что при достаточно больших ν выполняется неравенство $\int_1^\nu \psi(t) dt \leq \Phi(\nu_{k_0})$, из которого будет следовать, что $s_\nu \leq \nu_{k_0}$.

В силу (5.6), (5.27) и (5.28) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\nu_{k_0}) &\geq \int_\nu^{\nu_{k_0}} \left(\frac{1}{\psi(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi(t)} \right) dt \geq (2^{k_0} - 3) \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} \\ &\geq \frac{2^{k_0} - 3}{K_7} \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \geq \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)}. \end{aligned}$$

Поэтому, действительно, $s_\nu \leq \nu_{k_0}$ и $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Если $p = 1$, то

$$\tilde{G}_\sigma(\psi; p) = \sup_{s \geq \nu} H_\nu(s) = H_\nu(s_\nu) = p \psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) = \psi(\sigma + 1),$$

и соотношение (2.29) в таком случае доказано.

Если $p \in (0, 1)$, то для доказательства соотношения (2.29) остается показать, что

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi(\nu)} \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (5.29)$$

В силу (5.19) и того, что $s_\nu > \nu$, имеем

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \geq \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} \geq K_8 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)}. \quad (5.30)$$

С другой стороны, $s_\nu \leq \nu_{k_0}$, следовательно, с учетом (5.27) имеем

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq \int_1^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} = \int_1^\nu \frac{dt}{\psi(t)} + \int_\nu^{\nu_{k_0}} \frac{dt}{\psi(t)} \leq K_7 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} + \frac{\nu_{k_0} - \nu}{\psi(\nu_{k_0})}. \quad (5.31)$$

Функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$. Поэтому в силу соотношения (5.14) имеет место оценка

$$\frac{\nu_{k_0} - \nu}{\psi(\nu_{k_0})} \leq 2^{k_0} \frac{(\eta(\nu) - \nu)(K^{k_0-1} + K^{k_0-2} + \dots + 1)}{\psi(\nu)} = K_9 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)}.$$

Подставляя эту оценку в (5.31), получаем неравенство

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \leq K_7 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} + K_9 \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} = K_{10} \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)},$$

которое в сочетании с соотношением (5.30) дает (5.29).

Таким образом, при $\nu = \sigma + 1 \rightarrow \infty$ и $s = t + 1 \geq \nu$ будем иметь

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\sigma(\psi; p) &= \sup_{t \geq \sigma} F_{\sigma+1}(t+1) = \sup_{s \geq \nu} H_\nu(s) = H_\nu(s_\nu) = p \psi(s_\nu) \left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi(t)} \right)^{1-1/p} \\ &\asymp \psi(\nu) \left(\frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi(\nu)} \right)^{1-1/p} = \frac{\psi^{1/p}(\nu)}{(\eta(\nu) - \nu)^{1/p-1}} = \frac{\psi^{1/p}(\sigma+1)}{(\eta(\sigma+1) - \sigma - 1)^{1/p-1}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

5.2. Порядки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ (случай $p \in (1, \infty)$). Приведем доказательства теорем 2.7, 2.8, из которых следуют порядковые оценки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ в случае, когда $p \in (1, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. При любых $\nu > 1$ и $s > \nu$ рассмотрим функцию $H_\nu(s)$, определяющуюся равенством

$$H_\nu(s) = \frac{s - \nu}{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}. \quad (5.32)$$

Ее производная для произвольного $\nu > 1$ имеет вид

$$H'_\nu(s) = \frac{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} - (s - \nu)\psi^{-p}(s)}{\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}}.$$

Пусть теперь s_ν – наибольшее на промежутке (ν, ∞) число такое, что при всех $s \in (\nu, s_\nu)$ выполняется неравенство

$$s - \nu \leq \psi^p(s) \int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)}. \quad (5.33)$$

Видим, что функция $H'_\nu(s)$ при переходе аргумента s через число s_ν меняет знак $+$ на $-$. Поэтому точка s_ν является точкой максимума функции $H_\nu(s)$, и справедливо равенство $H'_\nu(s_\nu) = 0$, из которого следует, что

$$H_\nu(s_\nu) = \frac{s_\nu - \nu}{\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}} = \psi^p(s_\nu). \quad (5.34)$$

Покажем, что, как и в доказательствах теорем 2.5, 2.6, в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (5.35)$$

Из соотношения (5.34) следует, что

$$\int_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} = \Phi(s_\nu),$$

где

$$\Phi(s) = \int_\nu^s \left(\frac{1}{\psi^p(s)} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt. \quad (5.36)$$

Функция $\Phi(s)$ возрастает при всех $s > \nu$. Поэтому если при некотором s будет справедливо неравенство

$$\int_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} dt \leq \Phi(s), \quad (5.37)$$

то будет выполняться и соотношение $s_\nu \leq s$.

Рассмотрим возрастающую последовательность чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $\nu_k = \eta(\psi; \nu_{k-1})$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а $\nu_0 := \nu$. Поскольку функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_C$, то вследствие (1.14) для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\nu \geq 1$ имеем

$$(K_1 + 1)^k - 1 \leq \frac{\nu_k - \nu}{\nu} = \frac{\nu_k}{\nu_{k-1}} \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-2}} \dots \frac{\nu_1}{\nu} - 1 \leq (K_2 + 1)^k - 1, \quad (5.38)$$

и поэтому начиная с некоторого номера $k_0 \geq 1$ будем иметь $\nu_{k_0} - \nu > \nu$. Убедимся, что при $s = \nu_{k_0+1}$ справедливо соотношение (5.37).

Согласно определению последовательности $\{\nu_k\}$ имеем

$$\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^p - 1}{\psi^p(\nu_{k_0})} = \frac{2^{k_0}(2^p - 1)}{\psi^p(\nu)} \geq \frac{1}{\psi^p(\nu)}.$$

Отсюда, учитывая монотонность функции ψ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\nu_{k_0+1}) &\geq \int_{\nu}^{\nu_{k_0+1}} \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt \geq \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0+1})} - \frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} \right) (\nu_{k_0} - \nu) \\ &\geq \frac{\nu}{\psi^p(\nu)} \geq \int_1^{\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)}, \end{aligned}$$

т. е. неравенство (5.37) при $s = \nu_{k_0+1}$ выполняется, а следовательно, $s_{\nu} \leq \nu_{k_0+1}$. Поэтому в силу монотонности функции ψ имеем

$$\psi(\nu) \geq \psi(s_{\nu}) \geq \psi(\nu_{k+1}) = \frac{\psi(\nu)}{2^{k_0+1}},$$

т. е., действительно, соотношение (5.35) выполняется.

Покажем теперь, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\nu - 1}{\psi^p(\nu)}. \quad (5.39)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)} &= \int_0^{s_{\nu}-1} \frac{dt}{\psi^p(t+1)} = \frac{s_{\nu} - 1}{\psi^p(s_{\nu})} - p \int_0^{s_{\nu}-1} \frac{t|\psi'(t+1)|}{\psi^{p+1}(t+1)} dt \\ &\geq \frac{s_{\nu} - 1}{\psi^p(s_{\nu})} - p \int_0^{s_{\nu}-1} \frac{dt}{\alpha(t+1)\psi^p(t+1)}, \end{aligned}$$

где $\alpha(t) = \alpha(\psi; t)$. Поскольку $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то в силу утверждения 1.4 для любого $t \geq 1$ справедливо соотношение

$$0 < K_3 \leq \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq K_4, \quad (5.40)$$

учитывая которое, получаем оценки

$$\int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)} \geq \frac{s_{\nu} - 1}{\psi^p(s_{\nu})} - \frac{p}{K_3} \int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)}, \quad \int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)} \geq \frac{K_3}{K_3 + p} \frac{s_{\nu} - 1}{\psi^p(s_{\nu})}.$$

С другой стороны, так как функция ψ убывает на $[1, \infty)$, то

$$\int_1^{s_{\nu}} \frac{dt}{\psi^p(t)} \leq \frac{s_{\nu} - 1}{\psi^p(s_{\nu})},$$

поэтому

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{s_\nu - 1}{\psi^p(s_\nu)}. \quad (5.41)$$

Поскольку $s_\nu \leq \nu_{k_0+1}$, то вследствие (5.38) заключаем, что

$$\nu - 1 \leq s_\nu - 1 \leq \nu_{k_0+1} - 1 \leq (K_2 + 1)^{k_0+1} \nu - 1,$$

следовательно,

$$s_\nu - 1 \asymp \nu - 1 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Объединяя соотношение (5.42) с соотношениями (5.35) и (5.41), получаем (5.39).

Для завершения доказательства теоремы убедимся, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t) dt \asymp (\nu - 1) \psi^q(\nu). \quad (5.43)$$

Для этого покажем, что при $s \rightarrow \infty$

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt \asymp (s - 1) \psi^q(s). \quad (5.44)$$

В силу (5.40) существует постоянная $K_5 > 0$ такая, что для любого $t \geq 1$

$$\frac{\psi^q(t)}{t|(\psi^q(t))'|} \geq K_5.$$

Отсюда следует, что для любого $s \geq 1$

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt \geq -K_5 \int_s^\infty t(\psi^q(t))' dt \geq -K_5 s \int_s^\infty (\psi^q(t))' dt = K_5 s \psi^q(s). \quad (5.45)$$

Для оценки последнего интеграла сверху положим $s_0 = s$ и $s_k = \eta(\psi; s_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу монотонности функции ψ

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{s_k}^{s_{k+1}} \psi^q(t) dt \leq \sum_{k=0}^\infty \psi^q(s_k)(s_{k+1} - s_k) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\psi^q(s)}{2^{qk}} (s_{k+1} - s_k). \quad (5.46)$$

Далее, поскольку данная функция ψ удовлетворяет условиям леммы 5.1, то при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\eta'(\psi; t) \leq 2$. Тогда

$$\eta(\psi; \eta(\psi; t)) - \eta(\psi; t) = \int_t^{\eta(\psi; t)} \eta'(\psi; \tau) d\tau \leq 2(\eta(\psi; t) - t).$$

Подставляя эту оценку в (5.46) и учитывая (1.14), получим

$$\begin{aligned} \int_s^\infty \psi^q(t) dt &\leq \sum_{k=0}^\infty \frac{\psi^q(s)}{2^{qk}} (s_{k+1} - s_k) \leq \psi^q(s) (\eta(\psi; s) - s) \sum_{k=0}^\infty \frac{2^k}{2^{qk}} \\ &\leq K_1 s \psi^q(s) \frac{2^{q-1}}{2^{q-1} - 1}. \end{aligned}$$

Объединяя эту оценку с оценкой (5.45), получаем (5.44). Полагая $s = s_\nu$ в (5.44) и учитывая (5.35) и (5.42), видим, что, действительно, при $\nu \rightarrow \infty$ справедливо соотношение (5.43).

Таким образом, в силу (5.35), (5.39) и (5.43) при $\nu = \sigma + 1 \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned}\tilde{G}_\sigma(\psi, p) &= \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)} \right)^{-q/p} + \int_{s^*+1}^\infty \psi^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &= \left((s_\nu - \nu)^q \left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \right)^{-q/p} + \int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &\asymp (\psi^q(\nu)(\nu - 1))^{1/q} \asymp \psi(\sigma + 1)\sigma^{1/q},\end{aligned}$$

и соотношение (2.32) доказано.

Из соотношения (5.44), учитывая теорему 2.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если $p \in (1, \infty)$ и функция $\varphi \in \Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где $\bar{\varphi}$ – убывающая перестановка функции φ , а функция $\psi \in \mathfrak{M}_C$ такая, что $\|\psi\|_{L_q[1, \infty)} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и функция $1/\psi(t)$ выпукла вниз при всех $t \geq t_0 \geq 1$, то при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-1/p}.$$

Сравнивая утверждения следствий 2.3, 5.1 видим, что в случае, когда $p \in (1, \infty)$, а функция $\varphi \in \Phi(A)$ удовлетворяет условиям этих следствий, справедливо порядковое равенство при $\sigma \rightarrow \infty$:

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)\sigma^{1-1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8 аналогично доказательствам теоремы 2.5 и теорем 2.6, 2.7, поэтому отметим только его основные моменты.

Прежде всего, повторяя рассуждения доказательства соотношения (5.19), убеждаемся в том, что для произвольной функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, справедливо порядковое при $s \rightarrow \infty$ равенство

$$\int_1^s \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; s) - s}{\psi^p(s)}. \quad (5.47)$$

Далее, рассмотрим функцию $H_\nu(s)$, определяющуюся равенством (5.32), и отметим, что если s_ν – наибольшее на промежутке (ν, ∞) число такое, что при всех $s \in (\nu, s_\nu)$ имеет место неравенство (5.33), то точка $s = s_\nu$ является точкой максимума функции $H_\nu(s)$ и выполняется равенство (5.34).

Покажем, что, как и во всех предыдущих теоремах, в рассматриваемом случае

$$\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (5.48)$$

Из соотношения (5.47) следует, что для любой функции ψ , удовлетворяющей условиям теоремы, существует постоянная $K > 0$ такая, что при всех достаточно больших ν будет

$$\int_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} \leq K \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi^p(\nu)}. \quad (5.49)$$

Возьмем число $k_0 = k_0(K) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{2^{k_0} - 3}{K} \geq 1, \quad (5.50)$$

и рассмотрим функцию $\Phi(s)$, задающуюся равенством (5.36). Покажем, что при достаточно больших ν справедливо неравенство

$$\int_1^\nu \psi^p(t) dt \leq \Phi(\nu_{k_0}), \quad \nu_k = \eta(\psi^p; \nu_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \nu_0 = \nu,$$

из которого будет следовать, что $s_\nu \leq \nu_{k_0}$.

В силу (5.49) и (5.50) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\nu_{k_0}) &= \int_\nu^{\nu_{k_0}} \left(\frac{1}{\psi^p(\nu_{k_0})} - \frac{1}{\psi^p(t)} \right) dt \geq (2^{k_0} - 3) \frac{\eta(\nu) - \nu}{\psi^p(\nu)} \\ &\geq \frac{2^{k_0} - 3}{K} \int_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)} \geq \int_1^\nu \frac{dt}{\psi^p(t)}. \end{aligned}$$

Поэтому, действительно, $s_\nu \leq \nu_{k_0}$ и, следовательно,

$$\psi(\nu) \geq \psi(s_\nu) \geq \psi(\nu_{k_0}) = \frac{\psi(\nu)}{2^{k_0 p}},$$

т. е. $\psi(s_\nu) \asymp \psi(\nu)$.

Далее, аналогично доказательству соотношения (5.29) убеждаемся в том, что при $\nu \rightarrow \infty$ справедливо порядковое равенство

$$\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \asymp \frac{\eta(\psi; \nu) - \nu}{\psi^p(\nu)}. \quad (5.51)$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t) dt \asymp \psi^q(\nu)(\eta(\psi; \nu) - \nu). \quad (5.52)$$

Используя формулу интегрирования по частям, с учетом (5.22) и утверждения 1.5 имеем

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt = -s\psi(s) + q \int_s^\infty t|\psi'(t)|\psi^{q-1}(t) dt \geq -s\psi(s) + \frac{q}{2} \int_s^\infty \mu(\psi; t)\psi^q(t) dt, \quad (5.53)$$

откуда в силу монотонного возрастания функции $\mu(\psi; t)$ получаем

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt \leq \frac{s\psi^q(s)}{\frac{q}{2}\mu(\psi; s) - 1} \leq K_1 \psi^q(s)(\eta(\psi; s) - s). \quad (5.54)$$

С другой стороны, поскольку функция ψ положительна и убывает, то

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt \geq \int_s^{\eta(\psi; s)} \psi^q(t) dt \geq \psi^q(\eta(\psi; s))(\eta(\psi; s) - s) = \frac{1}{2^q} \psi^q(s)(\eta(\psi; s) - s). \quad (5.55)$$

Объединяя соотношения (5.54) и (5.55), видим, что

$$\int_s^\infty \psi^q(t) dt \asymp \psi^q(s)(\eta(\psi; s) - s), \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

Отсюда в силу того, что $s_\nu > \nu$, имеем

$$\int_{s_\nu}^\infty \psi^q(t) dt \leq \int_\nu^\infty \psi^q(t) dt \asymp \psi^q(\nu)(\eta(\psi; \nu) - \nu). \quad (5.57)$$

С другой стороны, $s_\nu \leq \nu_{k_0}$. Поэтому, учитывая (5.11), а следовательно, и то, что

$$\eta(\psi; \eta(\psi; t)) - \eta(\psi; t) = \int_t^{\eta(\psi; t)} \eta'(\psi; \tau) d\tau \geq \frac{1}{2}(\eta(\psi; t) - t),$$

при $\nu \rightarrow \infty$ получаем

$$\int_{s_\nu}^{\infty} \psi^q(t) dt \geq \int_{\nu_{k_0}}^{\infty} \psi^q(t) dt \asymp \psi^q(\nu_{k_0})(\eta(\psi; \nu_{k_0}) - \nu_{k_0}) \geq \frac{1}{2^{2k_0}} \psi^q(\nu)(\eta(\psi; \nu) - \nu). \quad (5.58)$$

Объединяя соотношения (5.57) и (5.58), убеждаемся в том, что, действительно, справедливо при $\nu \rightarrow \infty$ порядковое равенство (5.52).

Таким образом, вследствие (5.48), (5.51) и (5.52) при $\nu = \sigma + 1 \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\sigma(\psi; p) &= \left((s^* - \sigma)^q \left(\int_1^{s^*+1} \frac{dt}{\psi^p(t)} \right)^{-q/p} + \int_{s^*+1}^{\infty} \psi^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &= \left((s_\nu - \nu)^q \left(\int_1^{s_\nu} \frac{dt}{\psi^p(t)} \right)^{-q/p} + \int_{s_\nu}^{\infty} \psi^q(t) dt \right)^{1/q} \\ &\asymp (\psi^q(\nu)(\eta(\psi; \nu) - \nu))^{1/q} \asymp \psi(\sigma + 1)(\eta(\psi; \sigma + 1) - \sigma - 1)^{1/q}, \end{aligned}$$

и соотношение (2.33) доказано.

При доказательстве соотношения (5.56) был использован лишь тот факт, что функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_\infty^+$, поэтому, учитывая теорему 2.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если функция φ из $\Phi(A)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет равенству $\bar{\varphi}(t) = \psi(t + 1)$, где $\bar{\varphi}$ — убывающая перестановка функции φ , а $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для любого $p \in (1, \infty)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{1-1/p}.$$

Сравнивая найденные оценки величин $e_\sigma(\varphi, p)$ и $D_\sigma(\varphi, p)$, видим, что в указанных случаях справедливы порядковые равенства

$$e_\sigma(\varphi, p) \asymp D_\sigma(\varphi, p) \asymp \bar{\varphi}(\sigma)(\eta(\bar{\varphi}; \sigma) - \sigma)^{1-1/p}, \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

§ 6. Приложения полученных результатов

В этом параграфе рассматриваются приложения полученных результатов к изучению вопросов абсолютной сходимости интегралов и приближений измеримых функций целыми функциями экспоненциального типа.

6.1. Об одном критерии сходимости интегралов. Как уже отмечалось, идея изучения величин $e_\sigma(f)$ вида (0.2) восходит к работе [2], в которой найдены необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости ортогональных рядов именно в терминах величин, интегральными аналогами которых являются величины $e_\sigma(f)$. Существенное место в работе [2] занимает следующий результат для числовых рядов: *пусть последовательность*

$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$; тогда для того чтобы сходиллся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$, необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e_{n-1}(c)$, где $e_{n-1}(c) = \inf_{\gamma_{n-1}} (\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{k \in \gamma_{n-1}} c_k^2)$, γ_n – произвольные наборы из n различных натуральных чисел.

При помощи величин $e_{\sigma}(f)$ удастся обобщить этот результат следующим образом.

Пусть f – любая функция из пространства $L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, а s – некоторое отличное от p число. Возникает вопрос об условиях сходимости интеграла

$$\int_A |f(\mathbf{x})|^s d\mu, \quad (6.1)$$

т. е. чтобы данная функция принадлежала пространству $L_s(A, d\mu)$.

В случае, когда $\text{mes}_{\mu} A < \infty$, а $0 < s \leq p$, справедливо вложение $L_p(A, d\mu) \subset L_s(A, d\mu)$, и поэтому интеграл (6.1) сходится для любой функции $f \in L_p(A, d\mu)$. Однако если $0 < p < s$ или $\text{mes}_{\mu} A = \infty$, то аналогичное вложение в общем случае неверно.

Ответ на поставленный вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть f – любая функция из пространства $L_p(A, d\mu)$, $\text{mes}_{\mu} A = \infty$, $p \in (0, \infty)$. Тогда:

1) если $0 < s < p < \infty$, то для того, чтобы сходиллся интеграл (6.1), необходимо и достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e_{\sigma}(g)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma, \quad (6.2)$$

где g – убывающая перестановка функции $|f(\mathbf{x})|^p$ на множестве A , а $e_{\sigma}(g)$ – наилучшее приближение интеграла функции g по промежутку $(0, \infty)$ посредством интегралов ранга σ ;

2) если $0 < p < s < \infty$, то для сходимости интеграла (6.1) необходимо и достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\int_0^{\infty} e_{\sigma}^{s/p}(h) d\sigma,$$

где $h(t) = g(t)/t$, $t \in (0, \infty)$, g – убывающая перестановка функции $|f(\mathbf{x})|^p$ на множестве A , а $e_{\sigma}(h)$ – наилучшее приближение интеграла функции h по множеству $(0, \infty)$ посредством интегралов ранга σ .

Теорема 6.1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $u(t)$ – любая неотрицательная монотонно невозрастающая на $(0, \infty)$ функция, для которой $\int_0^{\infty} u(t) dt < \infty$, и $F(x) := \int_x^{\infty} u(t) dt$. Тогда если $r \in (0, 1)$, то

$$\frac{1-r}{e} \int_0^{\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)^r dx \leq \int_0^{\infty} u^r(x) dx \leq \left(\frac{1-r}{r} \right)^r \int_0^{\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)^r dx, \quad (6.3)$$

если же $r > 1$, то

$$r^{-r} \int_0^{\infty} F^r(x) dx \leq \int_0^{\infty} (xu(x))^r dx \leq \frac{r^r}{(r-1)^{r-1}} \int_0^{\infty} F^r(x) dx. \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что неравенства вида (6.3) и (6.4) называют неравенствами Харди.

Второе из неравенств в соотношении (6.3) доказано в [20, с. 302], первое неравенство следует из [31, лемма 2.5].

В соотношении (6.4) первое неравенство доказано в [20, с. 294], второе вытекает из следующих рассуждений, аналогичных доказательству леммы 2.5 работы [31].

Поскольку функция $u(\cdot)$ не возрастает на $(0, \infty)$, то для любого числа $C > 1$ имеем

$$\begin{aligned} J &:= \int_0^\infty F^r(x) dx \geq \int_0^\infty \left(\int_x^{Cx} u(t) dt \right)^r dx + \int_0^\infty \left(\int_{Cx}^\infty u(t) dt \right)^r dx \\ &\geq \frac{(C-1)^r}{C^{r+1}} J^* + \frac{1}{C} J, \end{aligned}$$

где $J^* = \int_0^\infty (xu(x))^r dx$, откуда при $C = r$ получаем необходимое неравенство. Тем самым лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Для доказательства утверждения 1) положим $r = s/p$ и $u(x) = g(x)$, где $g(x)$ – убывающая перестановка функции $|f(\mathbf{x})|^p$ на множестве A . Тогда в силу определения получаем

$$e_\sigma(g) = \int_\sigma^\infty g(t) dt = \int_\sigma^\infty u(t) dt = F(\sigma).$$

Кроме того, вследствие равенства (1.2) имеем

$$\int_A |f(\mathbf{x})|^s d\mu = \int_0^\infty g^{s/p}(t) dt = \int_0^\infty u^r(t) dt.$$

Отсюда в силу соотношений (6.3) следует, что интеграл (6.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл (6.2), что и надо было доказать.

Для доказательства утверждения 2) достаточно положить $u(t) = h(t)$, где $h(t) = g(t)/t$, $r = s/p$, и аналогично воспользоваться соотношением (6.4). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда данная функция $f \in L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, $f \not\equiv 0$, является произведением двух функций:

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad (6.5)$$

где $|\varphi| \in \Phi(A)$, а $y \in L_q(A, d\mu) \cap L_p(A, d\mu)$, $0 < q \leq p$, и найдем достаточные условия сходимости интеграла

$$\int_A |f(\mathbf{x})|^s d\mu, \quad 0 < s < p. \quad (6.6)$$

В силу ограниченности функций $|\varphi| \in \Phi(A)$ условие $y \in L_q(A, d\mu) \cap L_p(A, d\mu)$, $0 < q \leq p$, гарантирует включение $f \in L_s(A, d\mu)$, если $s \in [q, p]$, поэтому содержательным здесь является случай, когда $s < q$.

Положим $v(\mathbf{x}) = |y(\mathbf{x})|/\|y\|_q$, где $\|y\|_q = \|y\|_{L_q(A, d\mu)}$. Тогда $v \in \mathcal{U}_q(A)$ и в силу теоремы 6.1 для того, чтобы сходиллся интеграл (6.6), необходимо и достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\int_0^\infty \left(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma,$$

где g – убывающая перестановка функции $|f(\mathbf{x})|^p$ на множестве A , а $e_\sigma(g)$ – наилучшее приближение интеграла функции g по интервалу $(0, \infty)$ посредством интегралов ранга σ . При этом

$$\begin{aligned} e_\sigma(g) &= e_\sigma(|f|^p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A |f(\mathbf{x})|^p d\mu - \int_{\gamma_\sigma} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \right) \\ &= \|y\|_q^p \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A |\varphi(\mathbf{x})|^p v^p(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} |\varphi(\mathbf{x})|^p v^p(\mathbf{x}) d\mu \right) \\ &= \|y\|_q^p e_\sigma(|\varphi|^p v^p) \leq \|y\|_q^p \sup_{v \in \mathcal{U}_q(A)} e_\sigma(|\varphi|^p v^p) = \|y\|_q^p e_\sigma\left(|\varphi|^p, \frac{q}{p}\right). \end{aligned}$$

Кроме того, для любого $\sigma > 0$ согласно определению $e_\sigma(|f|^p) \leq \|f\|_{L_p(A, d\mu)}^p < \infty$. Поэтому для произвольной функции $f \in L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, вида (6.5) и любого $M > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma &= \int_0^\infty \left(\frac{e_\sigma(|f|^p)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma = \int_0^\infty \left(\frac{e_\sigma(g)}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma \\ &\leq \|f\|_{L_p(A, d\mu)}^s \int_0^M \sigma^{-s/p} d\sigma + \|y\|_q^s \int_M^\infty \left(\frac{e_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma \\ &\leq K_1 + K_2 \int_M^\infty \left(\frac{e_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая теорему 2.1, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть функция $f \in L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, представима в виде (6.5), где $|\varphi| \in \Phi(A)$, а $y \in L_q(A, d\mu) \cap L_p(A, d\mu)$, $0 < q \leq p$. Тогда для того, чтобы сходиллся интеграл (6.6), достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\int_M^\infty \left(\frac{G_\sigma(|\varphi|^p, \frac{q}{p})}{\sigma} \right)^{s/p} d\sigma,$$

где M – некоторое положительное число,

$$G_\sigma\left(|\varphi|^p, \frac{q}{p}\right) = \sup_{l \in (0, \infty)} (l - \sigma) \left(\int_0^l \frac{dt}{\bar{\varphi}^q(t)} \right)^{-p/q},$$

а $\bar{\varphi}$ – убывающая перестановка функции $|\varphi|$ на множестве A .

Воспользовавшись следствием 2.1, из следствия 6.1 можно получить утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть функция $f \in L_p(A, d\mu)$, $p \in (0, \infty)$, представима в виде

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A,$$

где $y \in L_q(A, d\mu) \cap L_p(A, d\mu)$, $0 < q \leq p$, а функция $|\varphi| \in \Phi(A)$ такая, что при любом $t \geq 0$ выполняется равенство $\bar{\varphi}^q(t+1) = \psi(t)$, в котором $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тогда если при некотором $M > 0$ сходится интеграл $\int_M^\infty \frac{\bar{\varphi}^q(\sigma)}{\sigma^{s/q}} d\sigma$, то сходится и интеграл $\int_A |f(\mathbf{x})|^s d\mu$, $0 < s < p$.

6.2. Приближение функциями экспоненциального типа. Рассмотрим еще одно применение полученных результатов. Пусть $L_p(\mathbb{R}^m)$ – пространство всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ таких, что

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty, \quad p \geq 1.$$

Для каждой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ через $\hat{f}(\mathbf{t})$ обозначим преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}(f; \mathbf{t}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Через $\Omega_2 = \Omega_2(L_2(\mathbb{R}^m))$ обозначим множество всех измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций ω , для которых произведение $\omega(\mathbf{x})\hat{f}(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^m)$ для любой $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Понятно, что множество Ω_2 содержит все функции, существенно ограниченные на $\mathbb{R}^m$. В частности, множеству Ω_2 принадлежат существенно ограниченные функции $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(\mathbf{x})$, носителями которых являются ограниченные множества γ_σ лебеговой меры σ , $\sigma > 0$ ($\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$). Поэтому для таких функций λ и любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ можно указать функцию $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$, для которой

$$\hat{U}_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x}) = \mathcal{F}(U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda); \mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{x})\hat{f}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma, \\ 0, & \mathbf{x} \in \overline{\gamma_\sigma}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Именно функции $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$ рассматриваются в качестве аппарата приближения для функций из пространств $L_2(\mathbb{R}^m)$. Если при этом $\lambda(\mathbf{x}) \equiv 1$ на γ_σ , т.е. если $\lambda(\mathbf{x})$ совпадает с характеристической функцией $\chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ множества γ_σ , то полагают $U_{\gamma_\sigma}(f; \chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(f)$.

Известно (см., например, [32, гл. I]), что на пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$ оператор $\mathcal{F}$ является унитарным. Поэтому

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} = \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}. \quad (6.8)$$

В этом случае функции $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$ имеют вид

$$U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_\sigma(\mathbf{t}) \hat{f}(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{z}) \check{\lambda}_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (6.9)$$

где

$$\check{\lambda}_\sigma(\mathbf{v}) = \mathcal{F}^{-1}(\lambda_\sigma; \mathbf{v}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_\sigma(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

(см., например, [33, гл. III, п. 61]). Также известно, что в таком случае функции $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x})$ являются целыми функциями экспоненциального типа (см., например, [33, гл. V]).

Объектами приближений в данном случае являются классы ψ -интегралов всех функций из $L_2(\mathbb{R}^m)$, принадлежащих единичному шару пространства $L_q(\mathbb{R}^m)$. Понятие ψ -интеграла вводится следующим образом [1]. Пусть $\psi = \psi(\mathbf{x})$ – некоторая функция из множества Ω_2 и $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$. Тогда ψ -интегралом f называется функция $f_\psi = \mathcal{J}f$ из $L_2(\mathbb{R}^m)$, для которой

$$\hat{f}_\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(f_\psi; \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{x}). \quad (6.10)$$

Заметим, что если функция ψ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^m)$, то f_ψ можно представить в виде

$$f_\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{J}^\psi f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{z}) \check{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) d\mathbf{z},$$

$$\check{\psi}(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{v}\mathbf{t}} d\mathbf{t}.$$

Множество ψ -интегралов всех функций из $L_2(\mathbb{R}^m)$, принадлежащих единичному шару $U_q(\mathbb{R}^m) = \{\varphi: \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^m)} \leq 1\}$ пространства $L_q(\mathbb{R}^m)$, $q \geq 1$, обозначим через $\psi U_{q,2}$.

Будем рассматривать следующие характеристики, которым в периодическом случае соответствуют величины, связанные с наилучшим n -членным приближением:

$$e_\sigma(f)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \inf_{\lambda \in \Omega_2} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x})\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}, \quad (6.11)$$

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{f \in \psi U_{q,2}} e_\sigma(f)_2. \quad (6.12)$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $q \in [1, 2]$ и $\psi(\mathbf{x})$ – любая неотрицательная существенно ограниченная на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, функция, для которой $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |\psi(\mathbf{x})| = 0$. Тогда при каждом $\sigma > 0$ справедливо равенство

$$e_\sigma(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{s > \sigma} (s - \sigma) \left(\int_0^s \bar{\psi}^{-q}(t) dt \right)^{-1/q}, \quad (6.13)$$

где $\bar{\psi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\psi(\mathbf{x})$. При этом точная верхняя грань в правой части (6.13) достигается при некотором конечном значении $s = s^*$. Точная верхняя грань в правой части соотношения (6.12) реализуется функцией $f^* = f^*(\mathbf{x})$, для которой

$$\hat{f}^*(\mathbf{x}) = \chi_E(\mathbf{x}) \left(\int_E \psi^{-q}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right)^{-1/q}, \quad (6.14)$$

где E – любое измеримое подмножество лебеговой меры s^* множества $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: \psi(\mathbf{x}) \geq \bar{\psi}(s^* -)\}$, содержащее множество $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: \psi(\mathbf{x}) > \bar{\psi}(s^* -)\}$, а $\chi_E(\cdot)$ – характеристическая функция множества E .

Заметим, что в случае, когда $q = 2$, точные значения величин $e_\sigma(\psi U_{q,2})_2$ найдены в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ вследствие (6.7) и (6.8) имеем

$$\begin{aligned} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \|\hat{f}(\mathbf{x}) - \hat{U}_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; \mathbf{x})\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \int_{\gamma_\sigma} (1 - \lambda(\mathbf{x}))^2 \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^m \setminus \gamma_\sigma} \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для произвольных $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma > 0$, справедливо равенство

$$\|f - U_{\gamma_\sigma}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\gamma_\sigma} \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.15)$$

Если теперь $f_\psi \in \psi U_{q,2}$, то согласно (6.11), (6.15) и (6.10) имеем

$$\begin{aligned} e_\sigma(f_\psi)_2^2 &= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|f - U_{\gamma_\sigma}(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}^2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}_\psi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\gamma_\sigma} \hat{f}_\psi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \\ &= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \psi^2(\mathbf{x}) \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\gamma_\sigma} \psi^2(\mathbf{x}) \hat{f}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

где $f \in U_q(\mathbb{R}^m)$.

Положим $\varphi(\mathbf{x}) = \psi^2(\mathbf{x})$, $y(\mathbf{x}) = \hat{f}^2(\mathbf{x})$ и $p = q/2$. Видим, что функция y принадлежит $\mathcal{U}_p(\mathbb{R}^m)$, $p \in (0, 1]$, и выполняется равенство

$$e_\sigma^2(f_\psi)_2 = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}) y(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) = e_\sigma(\varphi y),$$

а функция φ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому справедливо соотношение

$$e_\sigma^2(\psi U_{q,2})_2 = \sup_{f \in \psi U_{q,2}} e_\sigma^2(f)_2 \leq \sup_{y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{R}^m)} e_\sigma(\varphi y) = e_\sigma(\varphi, p),$$

из которого в силу (2.6) следует необходимая оценка сверху для $e_\sigma^2(\psi U_{q,2})_2$:

$$e_\sigma^2(\psi U_{q,2})_2 \leq \sup_{s > \sigma} (s - \sigma) \left(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t) dt \right)^{-1/p} = \sup_{s > \sigma} (s - \sigma) \left(\int_0^s \bar{\psi}^{-q/2}(t) dt \right)^{-2/q},$$

где $\bar{\psi}(t)$ – убывающая перестановка функции $\psi(\mathbf{x})$. При этом точная верхняя грань в правой части последнего соотношения достигается при некотором конечном значении $s = s^*$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что функция f^* , для которой преобразование Фурье $\hat{f}^*$ определяется равенством (6.14), принадлежит множеству $\psi U_{q,2}$ и что справедливо соотношение

$$e_\sigma(f^*)_2^2 = (s^* - \sigma) \left(\int_0^{s^*} \bar{\psi}^{-q}(t) dt \right)^{-2/q}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что результаты настоящей работы анонсированы в [34] и [35].

Список литературы

1. А. И. Степанец, “Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах”, *Укр. матем. журн.*, **55**:10 (2003), 1378–1409; англ. пер.: A. I. Stepanets, “Extremal problems of approximation theory in linear spaces”, *Ukrainian Math. J.*, **55**:10 (2003), 1662–1698.
2. С. Б. Стечкин, “Об абсолютной сходимости ортогональных рядов”, *Докл. АН СССР*, **102**:1 (1955), 37–40.
3. Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29**:3 (1974), 169–186.
4. Б. С. Кашин, “О нижних оценках для n -членных приближений”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 636–638; англ. пер.: B. S. Kashin, “Lower bounds for n -term approximations”, *Math. Notes*, **70**:3–4 (2001), 574–576.
5. Б. С. Кашин, “Об экстремальных свойствах полных ортонормированных систем”, *Исследования по теории функций многих действительных переменных и приближению функций*, Тр. МИАН СССР, **172**, Наука, М., 1985, 187–191; англ. пер.: B. S. Kashin, “On approximation properties of complete orthonormal systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **172** (1987), 207–211.
6. В. Е. Майоров, “О линейных поперечниках соболевских классов”, *Докл. АН СССР*, **243**:5 (1978), 1127–1130; англ. пер.: V. E. Majorov, “On linear diameters of Sobolev classes”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1491–1494.
7. В. Е. Майоров, “О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств”, *Матем. сб.*, **113**(155):3(11) (1980), 437–463; англ. пер.: V. E. Maïorov, “On linear widths of Sobolev classes and chains of extremal subspaces”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:3 (1982), 361–382.
8. Э. С. Белинский, “Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники”, *Докл. АН СССР*, **284**:6 (1985), 1294–1297; англ. пер.: E. S. Belinskij, “Approximation of periodic functions of several variables by a “floating” system of exponentials, and trigonometric widths”, *Soviet Math. Dokl.*, **32**:2 (1985), 571–574.
9. Э. С. Белинский, “Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций”, *Матем. сб.*, **132**(174):1 (1987), 20–27; англ. пер.: È. S. Belinskiĭ, “Approximation by a “floating” system of exponentials on classes of smooth periodic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **60**:1 (1988), 19–27.
10. Э. С. Белинский, “Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной”, *Исследование по теории функций многих вещественных переменных*, Изд-во Ярослав. ун-та, Ярославль, 1988, 16–33.
11. А. С. Романюк, “Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. I”, *Укр. матем. журн.*, **44**:11 (1992), 1535–1547; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Best trigonometric and bilinear approximations of functions of several variables from the classes $B_{p,\theta}^r$. I”, *Ukrainian Math. J.*, **44**:11 (1992), 1411–1424.
12. А. С. Романюк, “Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B_{p,\theta}^r$. II”, *Укр. матем. журн.*, **45**:10 (1993), 1411–1423; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “The best trigonometric and bilinear approximations for functions of many variables from the classes $B_{p,\theta}^r$. II”, *Ukrainian Math. J.*, **45**:10 (1993), 1583–1597.
13. А. С. Романюк, “О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных”, *Укр. матем. журн.*, **47**:8

- (1995), 1097–1111; англ. пер.: A. S. Romanyuk, “Best trigonometric and bilinear approximations for the Besov classes of functions of many variables”, *Ukrainian Math. J.*, **47**:8 (1995), 1253–1270.
14. А. И. Степанец, “Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p ”, *Укр. матем. журн.*, **53**:3 (2001), 392–416; англ. пер.: A. I. Stepanets, “Approximation characteristics of spaces S_φ^p ”, *Ukrainian Math. J.*, **53**:3 (2001), 446–475.
 15. А. И. Степанец, “Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках”, *Укр. матем. журн.*, **53**:8 (2001), 1121–1146; англ. пер.: A. I. Stepanets, “Approximation characteristics of the spaces S_φ^p in different metrics”, *Ukrainian Math. J.*, **53**:8 (2001), 1340–1374.
 16. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*. II, Тр. Ин-та математики НАН Украины, **40**, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2002.
 17. В. Н. Темляков, “О приближении периодических функций многих переменных”, *Докл. АН СССР*, **279**:2 (1984), 301–305; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “On the approximation of periodic functions of several variables”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 659–662.
 18. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН СССР, **178**, Наука, М., 1986.
 19. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Comput. Math. Anal. Ser., Nova Science Publ., Commack, NY, 1993.
 20. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
 21. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближений*, Наука, М., 1970.
 22. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*. I, Тр. Ин-та математики НАН Украины, **40**, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2002.
 23. А. И. Степанец, “Несколько утверждений для выпуклых функций”, *Укр. матем. журн.*, **51**:5 (1999), 688–702; англ. пер.: A. I. Stepanets, “Several statements for convex functions”, *Ukrainian Math. J.*, **51**:5 (1999), 764–780.
 24. А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Наукова думка, Киев, 1987.
 25. А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, “Об одном критерии для выпуклых функций”, *Докл. НАН Украины*, 2007, № 8, 31–36.
 26. Л. Б. Софман, “Поперечники октаэдров”, *Матем. заметки*, **5**:4 (1969), 429–436; англ. пер.: L. B. Sofman, “Diameters of octahedra”, *Math. Notes*, **5**:4 (1969), 258–262.
 27. Л. Б. Софман, “Поперечники бесконечного октаэдра”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1973, № 5, 54–56; англ. пер.: L. B. Sofman, “Diameters of an infinite-dimensional octahedron”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **28**:5 (1974), 45–47.
 28. F. Gensun, Q. Lixin, “Approximation characteristics for diagonal operators in different computational settings”, *J. Approxim. Theory*, **140**:2 (2006), 178–190.
 29. A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
 30. А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, “Об одной экстремальной задаче для положительных рядов”, *Укр. матем. журн.*, **57**:12 (2005), 1677–1683; англ. пер.: A. I. Stepanets, A. L. Shydlich, “On one extremal problem for positive series”, *Ukrainian Math. J.*, **57**:12 (2005), 1968–1976.
 31. V. I. Kolyada, “Mixed norms and Sobolev type inequalities”, *Approximation and probability* (Bedlewo, Poland, 2004), Banach Center Publ., **72**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006, 141–160.
 32. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

33. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1970; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
34. А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, “Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций”, *Докл. НАН Украины*, 2007, №3, 25–31.
35. А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, *Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций*, Препринт № 2007.2, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2007.

А. И. СТЕПАНЕЦ (A. I. STEPANETS)
Институт математики НАН Украины, г. Киев

Поступило в редакцию
28.06.2007
23.03.2009

А. Л. Шидлич (A. L. SHIDLICH)
Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: andy709@list.ru