Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 6, 147–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:43:57

УДК 513.73

И. Х. Сабитов

Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$

Статья посвящена вопросам изометрических погружений и вложений двумерных локально евклидовых метрик в двумерную евклидову плоскость. Для заданных в односвязной области метрик даются явные формулы для погружений и приводится ряд достаточных условий для существования изометрических вложений. В случае многосвязных областей задания метрик даются необходимые условия существования изометрических погружений и проводится классификация случаев, когда метрика не допускает изометрического погружения в евклидову плоскость.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Пусть в плоской области D (односвязной или многосвязной) задана локально евклидова (л.е.) метрика

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2, \quad (u, v) \in D. \quad (1)$$

Локальная евклидовость метрики (1) означает, что каждая точка из D имеет окрестность, изометричную некоторому кругу на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ со стандартной евклидовой метрикой $dx^2 + dy^2$.

Таким образом, локальная изометрическая вложимость л.е. метрики (1) существует по самому определению л.е. метрики, при этом по теореме о гладкости изометрий (см. [4]) вложение для метрик гладкости $C^{m, \alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $m + \alpha > 0$, имеет гладкость класса $C^{m+1, \alpha}$. Нас в этой работе будет интересовать главным образом вопрос об изометрических вложениях и погружениях в $\mathbb{R}^2$ “в целом” всей области D , или, по-другому, вопрос о существовании отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (2)$$

приводящего (1) в целом к виду $dx^2 + dy^2$. При этом отображение (2) дает изометрическое погружение D в $\mathbb{R}^2$, если оно однозначно, и вложение, если оно однолистно во всей области D .

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Университеты России – фундаментальные исследования” (грант №5271).

§ 2. Нахождение изометрического погружения в квадратурах

Изометрическое погружение (2) метрики (1) в $\mathbb{R}^2$ можно получить двумя способами. Один способ – это исходить из известных формул, позволяющих найти такое погружение в квадратурах через частные производные функций x и y . Такие формулы известны давно. Например, они есть в [2]; для класса гладкости $E, F, G \in C^1$ они обоснованы в [3]. Следуя [5], мы приведем эти формулы в виде, несколько отличающемся от формул из [3] (в [3] особо выделен коэффициент E , а в наши формулы все коэффициенты метрики (1) входят симметричным образом):

$$\begin{aligned} x_u &= \sqrt{E} \cos(\phi + \theta), & x_v &= \sqrt{G} \sin(\phi - \theta), \\ y_u &= \sqrt{E} \sin(\phi + \theta), & y_v &= \sqrt{G} \cos(\phi - \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{\delta + \Delta}}{\sqrt{2\delta}}, \quad \sin \phi = \frac{F}{\sqrt{2\delta(\delta + \Delta)}}, \quad \delta = \sqrt{EG}, \quad \Delta = \sqrt{EG - F^2}, \quad (4)$$

а нахождение θ требует решения системы

$$\theta_u = \phi_u + \frac{F}{2\Delta} (\ln G)_u - \frac{E_v}{2\Delta}, \quad \theta_v = -\phi_v - \frac{F}{2\Delta} (\ln E)_v + \frac{G_u}{2\Delta}. \quad (5)$$

Локальная разрешимость системы (5) представляет собой необходимое и достаточное условие л.е. метрики (1), а совместность уравнений (3) является следствием существования $\theta(u, v)$ (в классе C^2 совместность системы (5) равносильна условию, что гауссова кривизна метрики (1) равна нулю).

Таким образом, изометрическое погружение метрики (1) в $\mathbb{R}^2$ требует решения двух задач в квадратурах: сначала мы из (5) находим функцию $\theta(u, v)$ по ее производным θ_u и θ_v , затем по системе (3) находим $x(u, v)$ и $y(u, v)$ тоже по их частным производным. Этот способ решения задачи возможен в предположении, что коэффициенты метрики принадлежат классу гладкости $C^{0,1}$ и выше, причем отображение (2) тогда будет иметь гладкость на один порядок больше, чем сама метрика. Сказанное подытожим в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты л.е. метрики (1) в некоторой области D принадлежат классу гладкости $C^{m,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $m + \alpha > 0$. Тогда каждая точка области имеет окрестность, которую можно изометрически вложить в $\mathbb{R}^2$ отображением гладкости $C^{m+1,\alpha}$. При дополнительном предположении, что $m + \alpha \geq 1$, это вложение можно найти в квадратурах, и если при этом область D имеет границу гладкости $C^{m+1,\alpha}$ и изометрически погружается в $\mathbb{R}^2$, то это погружение имеет гладкость $C^{m+1,\alpha}$ в $\bar{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. То, что изометрическое погружение имеет гладкость на один порядок выше, чем сама метрика, следует, как мы уже упомянули выше, из теоремы о гладкости изометрий из [4]. Однако эта теорема не дает информации о гладкости изометрии на границе, поэтому для получения утверждения о гладкости изометрии в $\bar{D}$ нужно использовать явный вид систем (3) и (5), а система (5) записывается только для метрик гладкости по крайней мере класса $C^{0,1}$, поэтому нам и пришлось в этой части теоремы сделать дополнительное предположение, что рассмотрения происходят в классе гладкости $C^{m,\alpha}$ с $m + \alpha \geq 1$.

В случае, когда область задания метрики (1) является кругом, $\Omega: u^2 + v^2 \leq R^2$ (а случай общей односвязной области D можно свести к случаю круга предварительным конформным отображением), мы можем предложить явные формулы, дающие критерий локальной евклидовости метрики (1) в случаях гладкости $C^{0,1}$ и выше, а также позволяющие записать изометрическое погружение в $\mathbb{R}^2$ в компактной и вычислимой форме. Для этого мы докажем лемму о представлении решения задачи нахождения действительной функции $F(u, v)$ по ее частным производным в виде некоторого двойного интегрального оператора.

ЛЕММА 1. Пусть в круге $\bar{\Omega}$ задано уравнение $\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = H(u, v)$, где $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$, $w = u + iv \in \bar{\Omega}$, а правая часть принадлежит классу $C^{m,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда для разрешимости этого уравнения в классе действительных однозначных функций соответственно гладкости $C^{m+1,\alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы функция $H(u, v)$ удовлетворяла условию

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{R^2 - |w|^2}{(z - w)(R^2 - \bar{w}z)} H(x, y) dx dy \right) = 0, \quad z = x + iy \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

и в этом случае искомая действительная функция $F(u, v)$ с условием $F(0, 0) = 0$ определяется формулой

$$F(u, v) = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{wR^2 - \bar{w}z^2}{z(z - w)(R^2 - \bar{w}z)} H(x, y) du dv \right]. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общее решение уравнения $\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = H(u, v)$ имеет вид (см. [7, гл. 1]):

$$F(u, v) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H(x, y)}{z - w} dx dy + \Phi^+(w), \quad z = x + iy, \quad w = u + iv \bar{\Omega}, \quad (8)$$

где $\Phi^+(w)$ – голоморфная в Ω функция. Пусть сначала известно, что среди этих решений есть действительная функция $F_0(u, v)$. Рассмотрим (8) для $F_0(u, v)$ в точках окружности $\partial\Omega$:

$$F_0(t) = \Psi^-(t) + \Phi^+(t), \quad |t| = R, \quad (9)$$

где $\Psi(t)$ – предельные значения на $\partial\Omega$ голоморфной во внешности круга Ω функции

$$\Psi^-(w) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H(x, y)}{z - w} dx dy \equiv T_{\Omega}H, \quad |w| > R, \quad |z| \leq R; \quad \Psi^-(\infty) = 0$$

(в (9) учтено, что функция $T_\Omega H$ непрерывна на всей плоскости w [7, гл. 1]). По предположению

$$\operatorname{Im} F_0(t) = \Psi^-(t) - \overline{\Psi^-(t)} + \Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)} = 0, \quad |t| = R. \quad (10)$$

Рассмотрим голоморфные функции

$$\Psi^+(w) = \overline{\Psi^-\left(\frac{R^2}{\bar{w}}\right)}, \quad |w| \leq R; \quad \Phi^-(w) = \overline{\Phi^+\left(\frac{R^2}{\bar{w}}\right)}, \quad |w| \geq R.$$

Так как $\Psi^+(t) = \overline{\Psi^-(t)}$, $\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, то из (10) получаем

$$\Psi^+(t) - \Phi^+(t) = \Psi^-(t) - \Phi^-(t),$$

поэтому

$$\Phi^+(w) - \Psi^+(w) = \operatorname{Const} = \Phi^-(\infty) - \Psi^-(\infty) = \overline{\Phi^+(0)}.$$

Кроме того, так как $\Psi^+(0) = 0$, то $\Phi^+(0) = \overline{\Phi^+(0)}$, т.е. $c = \Phi^+(0)$ — действительное число. Следовательно,

$$F_0(u, v) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H(x, y)}{z - w} dx dy + \frac{w}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{H(x, y)}}{R^2 - \bar{z}w} du dv + c, \quad |w| \leq R. \quad (11)$$

Так как $F_0(u, v)$ действительна не только на границе, но и во всем круге Ω , то необходимо выполняется равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F_0(u, v) = & -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{z - w} + \frac{\bar{w}}{R^2 - z\bar{w}} \right) H(x, y) dx dy \\ & + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{w}} + \frac{w}{R^2 - \bar{z}w} \right) \overline{H(x, y)} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

что приводит после упрощения к условию (6).

Вычитая из (11) значение $F_0(0, 0)$, получим новую функцию $F(u, v)$, равную нулю при $w = 0$, и для нее с учетом равенства $F = \operatorname{Re} F$ из (11) получаем представление (7).

Пусть теперь известно, что $H(u, v)$ удовлетворяет (6). Рассмотрим функцию $F_0(u, v)$ из (11) с действительным слагаемым c . Так как (6) равносильно (12), то (11) определяет действительную функцию F_0 , которая после вычитания из нее $F_0(0, 0)$ дает функцию $F(u, v)$ из (7) с $F(0, 0) = 0$, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = H(u, v)$.

Если есть еще одно действительное решение $F_1(u, v)$ с $F_1(0, 0) = 0$, то в силу равенства $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(F - F_1) = 0$ имеем, что действительная функция $F_1 - F$ является голоморфной, что возможно лишь при $F_1 \equiv F$.

Далее, для действительной функции F имеем $\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}(F_u - iF_v) = \bar{H}$, поэтому гладкость F будет класса $C^{m+1, \alpha}$. Лемма доказана.

Из этой леммы мы можем извлечь такие следствия. Во-первых, мы получаем в компактной и *алгоритмически вычислимой* форме критерий локальной евклидовости метрики (1) при условии, что ее коэффициенты являются C^1 - или $C^{0,1}$ -гладкими¹, для этого нужно применить к системе (5) из только что доказанной леммы соответствующий аналог условия (6) существования ее решения $\theta(u, v)$, выполнимость этого интегрального условия на E, F, G и их производные и будет необходимым и достаточным условием локальной евклидовости метрики (1); во-вторых, найдя из системы (5) ее решение $\theta(u, v)$ по аналогу формулы (7), мы по формуле того же вида найдем затем решения $x(u, v)$ и $y(u, v)$ системы (3) и тем самым получим справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Односвязная область D с л.е. метрикой при условиях гладкости $E, F, G \in C^{m,\alpha}$ и $\partial D \in C^{m+1,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $m + \alpha \geq 1$, изометрически погружается в $\mathbb{R}^2$ отображением гладкости $C^{m+1,\alpha}$.*

Мы не выписываем соответствующие формулы для этого отображения ввиду полной очевидности их получения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В принципиальном плане предложенные формулы для проверки локальной евклидовости метрики (1) и для нахождения ее изометрического отображения в $\mathbb{R}^2$ не являются новыми, они даны по существу в [3], но там они приведены, во-первых, в форме, несимметричной относительно коэффициентов E, F, G , во-вторых, там условие локальной евклидовости формулируется так: для локальной евклидовости необходимо и достаточно, чтобы интеграл от некоторой явно выписываемой 1-формы был равен нулю *по всем* гладким замкнутым кривым, — и ясно, что организация вычислительной проверки (конечно, с данной точностью) этого условия существенно сложнее, чем проверка аналога условия (6) для системы (5) в виде одного двойного интеграла.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведенные формулы “работают” и для метрик класса регулярности $C^{0,1}$, так как в этом случае у коэффициентов есть производные в смысле Соболева, принадлежащие классу L_∞ , а тогда применимы все рассуждения доказательства леммы.

Для исследований погружений и вложений D в целом в $\mathbb{R}^2$ полученные формулы практически неприменимы, так как трудно сформулировать сколько-нибудь простое условие, гарантирующее однозначность отображения (2) (в многосвязной области) и тем более его однолистность (даже в односвязной области). Кроме того,

¹ Для коэффициентов меньшей гладкости нахождение критерия локальной евклидовости данной метрики (1) остается до сих пор нерешенным вопросом в следующей постановке: дана метрика (1) с непрерывными или даже с гёльдеровыми коэффициентами; какие нужно провести вычисления с коэффициентами метрики, чтобы проверить ее локальную евклидовость? Теоретические признаки локальной евклидовости есть, например возможность приведения ее к изотермическому виду $ds^2 = \Lambda(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2)$ с гармонической функцией $\ln \Lambda$ (см. [14]), но проблема заключается в том, что неизвестно, как проверить гармоничность $\ln \Lambda$, опираясь только на вычисления над коэффициентами самой метрики (1). У автора есть ряд результатов на эту тему, часть которых анонсирована в [6] и [5], но все они не дают пока достаточно законченного ответа на поставленный вопрос.

формулы (3)–(5) непригодны при малой регулярности метрики (1), скажем для случая $E, F, G \in C^{0,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (тогда представление (3) с (4) остается в силе, но уравнения (5) для θ отсутствуют). Поэтому мы применим другой способ приведения (1) к стандартному виду $dx^2 + dy^2$.

§ 3. Изометрические погружения локально евклидовых метрик в изотермических координатах. Случай односвязной области

3.1. Формула изометрических погружений. Существует алгоритмически осуществимый (правда, через бесконечное число последовательных приближений) метод приведения метрики (1) общего вида к так называемому изотермическому или каноническому виду

$$ds^2 = \Lambda(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2) \quad (13)$$

(см., например, [7, гл. 2]). Для этого надо решить систему Бельтрами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{w}} &= q(w) \frac{\partial \zeta}{\partial w}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad w = u + iv, \\ q &= \frac{E - G + 2iF}{E + G + 2\Delta}, \quad \Delta = EG - F^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Считаем, что коэффициенты метрики (1) из класса $C^{m,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $m + \alpha > 0$ (т.е. охвачены все классические классы гладкости), а граница области D имеет гладкость класса $C^{m+1,\alpha}$. Тогда любое локально диффеоморфное решение $\zeta = \zeta(w)$ системы (14) обладает внутри области гладкостью класса $C^{m+1,\alpha}$ (для $\alpha \neq 0, 1$ это является следствием известных теорем о регулярности решений эллиптической системы, а для $\alpha = 0, 1$ утверждаемая гладкость является следствием теоремы о гладкости изометрий из § 1, так как для л.е. метрик коэффициент $\Lambda(\xi, \eta)$ в (13) имеет аналитическую гладкость). С гладкостью $\zeta(w)$ в замкнутой области $\bar{D}$ дело сложнее. Среди решений $\zeta = \zeta(w)$ системы (14), однолистных или даже просто однозначных в $\bar{D}$, решений класса $C^{m+1,\alpha}$, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, может и не быть, но всегда существует решение класса $C^{m+1,\alpha}$, $\alpha \neq 0$ или $\alpha \neq 1$, и класса $C^{m+1,\beta}$ с любым $\beta < 1$ при $\alpha = 1$ и класса $C^{m,\beta}$ с любым $\beta < 1$ при $\alpha = 0$, диффеоморфно отображающее D на область Ω соответствующей связности с круговыми компонентами границ. Далее, изометрическое отображение

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

области Ω с л.е. метрикой (13) в евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) с учетом формул (3)–(5) определяется из соотношений $\phi = 0$ и $x_\xi - y_\eta = 0$, $x_\eta + y_\xi = 0$, т.е. изометрическое погружение л.е. метрики в изотермическом виде (13) в $\mathbb{R}^2$ дается голоморфной функцией $z = \Phi(\zeta)$ с условием

$$|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta). \quad (15)$$

Следовательно, всякое условие однозначности голоморфной функции $z = \Phi(\zeta)$ в Ω – образе D при переходе от (1) к (13) – с условием (15) дает нам изометрическую погружаемость метрики (13) в $\mathbb{R}^2$, а всякое условие ее однолиственности дает вложимость (13) в $\mathbb{R}^2$, и обратно. Так как сквозное отображение $D \rightarrow \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ дает нам изометрическое погружение области D в $\mathbb{R}^2$, а оно единственно с точностью до движений в $\mathbb{R}^2$, то с учетом теорем 1, 2 и теоремы Келлога о гладкости конформных отображений получаем, что гладкость конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$ будет класса $C^{m+1,\alpha}$, если исходные гладкости метрики (1) и границы области D были соответственно класса $C^{m,\alpha}$ и $C^{m+1,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. А если же $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, то хотя само отображение $z = \Phi(\zeta)$ и не обязано быть класса $C^{m+1,\alpha}$, но образ границы области Ω все же будет класса $C^{m+1,\alpha}$.

Применим, в частности, этот метод для доказательства следующего усиления предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Односвязная область D с л.е. метрикой при условиях гладкости $E, F, G \in C^{m,\alpha}$ и $\partial D \in C^{m+1,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $m + \alpha > 0$, изометрически погружается в $\mathbb{R}^2$ отображением гладкости $C^{m+1,\alpha}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо доказать эту теорему фактически лишь для случаев гладкости $E, F, G \in C^{0,\alpha}$ и $\partial D \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, так как остальные случаи уже охвачены теоремой 2.

По указанной выше ссылке на книгу [7] метрика (1) решением $\zeta = \xi + i\eta = \zeta(w)$ гладкости $C^{1,\alpha}(\overline{D})$ системы (14) приводится к изотермическому виду (13), в котором переменные ξ, η изменяются в круге $\overline{\Omega}$: $\xi^2 + \eta^2 \leq R^2$, а $\ln \Lambda(\xi, \eta)$ является гармонической функцией с гладкостью $C^{0,\alpha}(\overline{D})$. В этих классах гладкости конформное отображение $z = x + iy = \Phi(\zeta): \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ с условием (15) определяется формулами

$$\begin{aligned} \Phi'(\zeta) &= \exp\left(\frac{R^2}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\ln \Lambda(w)}{(R^2 - \zeta \bar{w})^2} du dv\right), \\ \Phi(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\Phi'(w)}{\bar{w} - \bar{\zeta}} du dv, \quad w = u + iv \in \Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Сначала докажем формулу для $\Phi(\zeta)$. Согласно [7] решение уравнения $\frac{\partial F}{\partial \zeta} = f$ имеет вид

$$F(\zeta) = T_{\Omega} f + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \Omega} \frac{F(t)}{t - \zeta} dt,$$

где

$$T_{\Omega} f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(u, v)}{w - \zeta} du dv.$$

У нас $F(\zeta) = \overline{\Phi}(\zeta)$, $f = \overline{\Phi}'(\zeta)$. Подставим в контурный интеграл значение

$$F(t) = \overline{\Phi}(\zeta) = a_0 + a_1 \bar{t} + a_2 \bar{t}^2 + \dots$$

и, учитывая, что на окружности радиуса R имеем $\bar{t} = R^2/t$, получим, что контурный интеграл равен постоянной a_0 ; следовательно, с точностью до постоянного слагаемого, $\overline{\Phi}(\zeta)$ имеет утверждаемый в (16) вид.

Формулу для $\Phi'(\zeta)$ мы получим из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Для того чтобы заданная в круге Ω : $\xi^2 + \eta^2 \leq R^2$ вещественная функция $\lambda = \lambda(\zeta)$ класса гладкости $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\lambda(\zeta) = \operatorname{Re} \left(\frac{R^2}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\lambda(w)}{(R^2 - \zeta \bar{w})^2} du dv \right), \quad w = u + iv. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия очевидна, так как в правой части под знаком Re мы имеем голоморфную в Ω функцию с соответствующим классом гладкости. Проверим необходимость, для чего обратимся к формуле

$$\begin{aligned} T_{\Omega}(\zeta^n \bar{\zeta}^m) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{w^n \bar{w}^m}{w - \zeta} du dv \\ &= \begin{cases} \frac{1}{m+1} \zeta^n \bar{\zeta}^{m+1} - \frac{1}{m+1} \zeta^{n-m-1} R^{2(m+1)}, & n \geq m+1, \\ \frac{1}{m+1} \zeta^n \bar{\zeta}^{m+1}, & n < m+1, \text{ если } |\zeta| \leq R, \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$= \begin{cases} 0, & n \geq m+1, \\ \frac{1}{m+1} \zeta^{n-m-1} R^{2(m+1)}, & n < m+1, \text{ если } |\zeta| \geq R \end{cases}$$

(доказательство этой формулы в случае единичного круга дано в [7, с. 44]).

Предположим, что $\lambda(\zeta)$ – гармоническая функция. Тогда $\lambda(\zeta) = \operatorname{Re} \Phi^+(\zeta) = (1/2)(\Phi^+ + \bar{\Phi}^+)$, где $\Phi^+(\zeta)$ – некоторая голоморфная в Ω функция. В круге Ω имеем

$$\Phi^+(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

Так как

$$\frac{R^2}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{w^n \bar{w}^m}{(R^2 - \zeta \bar{w})^2} du dv = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{w^n \bar{w}^m}{\bar{w} - \frac{R^2}{\zeta}} du dv \right), \quad |\zeta| < R,$$

то правая часть (17) в силу формул для $T_{\Omega}(\zeta^n \bar{\zeta}^m)$ равна

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(\frac{R^2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\Phi^+(w) + \bar{\Phi}^+(w)}{(R^2 - \zeta \bar{w})^2} du dv \right) \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{a_n w^n + \bar{a}_n \bar{w}^n}{\bar{w} - \frac{R^2}{\zeta}} du dv \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{a_n}{n+1} \left(\frac{R^2}{\zeta} \right)^{-n-1} R^{2(n+1)} \right) \right] = \operatorname{Re} \Phi^+(\zeta) = \lambda(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к продолжению доказательства теоремы. Мы можем считать, что $\Phi'(0) > 0$, так как этого всегда можно добиться применением, в случае необходимости, некоторого вращения плоскости. Нам известна вещественная часть голоморфной функции $\ln \Phi'(\zeta)$, а именно $\operatorname{Re}(\ln \Phi'(\zeta)) = \ln \Lambda(\zeta)$. Применяя теперь лемму, получаем

$$\operatorname{Re}(\ln \Phi'(\zeta)) = \operatorname{Re} \left[\frac{R^2}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\ln \Lambda(w)}{(R^2 - \bar{w}\zeta)^2} du dv \right],$$

а отсюда уже очевидно, как получить нужное представление для $\Phi'(\zeta)$. Теорема доказана.

3.2. Признаки вложимости в целом. Рассмотрим более подробно вопрос о вложениях метрики (13) в $\mathbb{R}^2$, считая (13) заданной в круге $\bar{\Omega}$: $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$. Вообще говоря, для однолистности голоморфной в круге функции есть соответствующие критерии, но они весьма громоздки и геометрически малоинформативны, поэтому мы сейчас рассмотрим несколько достаточных признаков вложимости в $\mathbb{R}^2$ круга $\bar{\Omega}$ с л.е. метрикой (13). Большинство из этих признаков были приведены в нашей работе [5], но без подробного доказательства.

а) Пусть поворот любой дуги границы круга $\bar{\Omega}$ в метрике (13) неотрицателен. Тогда $\bar{\Omega}$ вкладывается в $\mathbb{R}^2$ в виде выпуклой области.

Это – следствие теоремы о реализации в виде шапочки каждой выпуклой области на многообразии неотрицательной кривизны [8].

Если метрика (13) достаточно регулярна, например в случае $\Lambda \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, это утверждение легко следует из того, что кривизна k кривой $\gamma: z = \Phi(t)$ равна геодезической кривизне

$$k_g = \frac{1}{\Lambda(t)} \left(1 + \operatorname{Re} \frac{t\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \right), \quad t = e^{i\psi} \in \partial\Omega, \quad (18)$$

края $\partial\Omega$ круга $\bar{\Omega}$. Так как $k_g \geq 0$ является кривизной кривой $\gamma: z = \Phi(t)$ и по теореме Гаусса–Бонне имеем

$$\oint k_g ds = 2\pi,$$

то γ является замкнутой выпуклой кривой без самопересечений. Следовательно, отображение $z = \Phi(\zeta)$ однолистно на границе, поэтому оно переводит круг Ω диффеоморфным образом во внутренность кривой γ .

б) Пусть на граничной окружности $\operatorname{Re}(t\Phi'(t)/\Phi(t)) \geq 0$. Тогда круг $\bar{\Omega}$ с метрикой (13), где $\Lambda \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, можно вложить в $\mathbb{R}^2$ в виде области, звездной относительно точки $z = \Phi(0) = 0$.

При $\Phi(\zeta) \neq 0, \zeta \neq 0$, гармоническая в Ω функция $\operatorname{Re}(\zeta\Phi'/\Phi) > 0$ положительна, а это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы регулярная в Ω функция $\Phi(\zeta)$ была однолистной и отображала Ω на звездную относительно точки $z = 0$ область [9]. Покажем, что это верно и без априорного дополнительного предположения, что $\Phi(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \neq 0$.

Рассмотрим угол ψ между касательной к кривой $\gamma = \Phi(\partial\Omega)$ и радиус-вектором кривой γ в плоскости z . Этот угол вычисляется по очевидной формуле

$$\psi = \arg t + \frac{\pi}{2} + \arg \Phi'(t) - \arg \Phi(t), \quad t = e^{i\phi} \in \partial\Omega.$$

Так как условие $\operatorname{Re}(t\Phi'(t)/\Phi(t)) \geq 0$ означает, что $\arg \Phi(t)$ возрастает при положительном обходе точкой t окружности $\partial\Omega$, то $0 \leq \psi(t) \leq \pi$. Далее, $\Phi'(t) \neq 0$, поэтому $\Phi(t)$ может обращаться в нуль на $\partial\Omega$ лишь в конечном числе точек $t_1, \dots, t_n$. При $t \rightarrow t_j^-$ радиус-вектор $\Phi(t)$, являясь секущей, стремится к касательной, поэтому $\psi(t_j^-) = 0$. При $t \rightarrow t_{j+1}^+$ касательная направлена от $\Phi(t)$ к $\Phi(t_{j+1}) = 0$, а секущая – от $\Phi(t_{j+1})$ к $\Phi(t)$, поэтому $\psi(t_{j+1}^+) = \pi$. Пусть радиус-вектор $\Phi(t)$ при изменении t от t_j до t_{j+1} повернулся на положительный угол α_j , $1 \leq j \leq n$ ($t_{n+1} = t_1$); тогда касательная, как это видно из вышеприведенного рассуждения, повернется на угол $\alpha_j + \pi$; общий поворот касательной составит $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n\pi$. Но общий поворот касательной равен интегральной кривизне кривой γ , т.е. в силу (18) он равен 2π . Следовательно, или $n = 0$ и поворот касательной равен повороту радиус-вектора, который тогда должен равняться 2π , или же $n = 1$ и на γ есть один нуль функции $\Phi(t)$, и тогда поворот радиус-вектора равен π . В этом случае γ является кривой без самопересечений, проходящей через точку $z = 0$. Но $z = 0$ является также образом внутренней точки $\zeta = 0$, окрестность которой отображается в некоторую окрестность точки $z = 0$, обязательно выходящую из области внутри γ . Однако это невозможно, так как тогда вне внутренности γ должны быть граничные точки образа $\Phi(\Omega)$, а они все совпадают с образами граничных точек.

Итак, на $\partial\Omega$ функция $\Phi(\zeta)$ не обращается в нуль. Поэтому γ – гладкая замкнутая кривая без самопересечений, содержащая точку $z = 0$ внутри, причем отображение $\Phi: \partial\Omega \rightarrow \gamma$ является взаимно однозначным. А так как якобиан отображения $z = \Phi(\zeta)$ всюду положителен, то отсюда уже легко вывести, что отображение круга Ω на внутренность γ является гомеоморфизмом.

Этот признак вложимости метрики (13) легко обобщить на случай звездности γ относительно произвольной заранее заданной точки $z_0 = \Phi(\zeta_0)$.

в) Условие из п. а) можно существенно обобщить, а именно достаточно потребовать, чтобы поворот любой дуги из $\partial\Omega$ был больше, чем $(-\pi)$. В случае $\Lambda \in C^{1,\alpha}$ это условие равносильно тому, что для любых $0 \leq \psi_1 < \psi_2 \leq 2\pi$ было выполнено неравенство

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} k_g ds > -\pi.$$

Класс таких кривых (под названием *почти выпуклые кривые*) был введен в [10], а в [11] доказано, что гладкое внутреннее (в смысле Стоилова) отображение круга с почти выпуклой границей образа является гомеоморфизмом (в [12] дано другое геометрическое описание этого класса кривых).

г) Известно много условий, выполнение которых является необходимым или достаточным признаком однолистности голоморфных функций в круге (см. [1], [9]). Каждое из этих условий будет также некоторым аналитическим признаком вло-

жимости метрики (13) в $\mathbb{R}^2$. В качестве примера рассмотрим условия Нехари [9, с. 547]. Эти условия утверждают, что если голоморфная в единичном круге функция $\Phi(\zeta)$ нормирована равенствами $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 1$, то из двух неравенств

$$|\{\Phi, \zeta\}| \leq \frac{6}{(1 - |\zeta|^2)^2}, \quad |\{\Phi, \zeta\}| \leq \frac{2}{(1 - |\zeta|^2)^2}$$

первое необходимо, а второе достаточно для однолистности $\Phi(\zeta)$. Здесь $\{\Phi, \zeta\}$ обозначает производную Шварца для $\Phi(\zeta)$. В нашем случае

$$\frac{\Phi''(\zeta)}{\Phi'(\zeta)} = 2 \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta},$$

поэтому условия Нехари соответственно имеют вид

$$\left| \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta} \right) \right| \leq \frac{3}{(1 - |\zeta|^2)^2}$$

или

$$\left| \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial \zeta^2} - \left(\frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta} \right) \right| \leq \frac{1}{(1 - |\zeta|^2)^2}.$$

Для однолистных в круге функций известно также много оценок различных их характеристик (например, известны различные оценки коэффициентов Тейлора, оценки роста модуля функции, модуля производной и ее аргумента, вид областей значений ряда функционалов, связанных с $\Phi(\zeta)$ и $\Phi'(\zeta)$, и т.д.). Каждая такая оценка является необходимым условием вложимости метрики (13) в $\mathbb{R}^2$.

Проиллюстрируем применение этих условий примером. Рассмотрим в круге $|\zeta| \leq 1$ метрику

$$ds^2 = \exp(2 \operatorname{Re}(a\zeta^n))(d\xi^2 + d\eta^2), \quad a = \operatorname{const}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Для этой метрики

$$\begin{aligned} \Phi'(\zeta) &= e^{a\zeta^n} = 1 + a\zeta^n + \frac{a^2\zeta^{2n}}{2!} + \dots, \\ \Phi(\zeta) &= \zeta + \frac{a\zeta^{n+1}}{n+1} + \frac{a^2\zeta^{2n+1}}{2!(2n+1)} + \dots \end{aligned}$$

Вычисления дают

$$|\{\Phi, \zeta\}| = n|a| |\zeta^{n-2}| \left| n - 1 - \frac{an}{2}\zeta^n \right|,$$

откуда для $|a|$ как необходимое условие вложимости метрики (19) получаем следующее ограничение:

$$|a| \leq \inf_{0 \leq \rho < 1} \frac{12\rho^{2-n}}{n(1 - \rho^2) \left(\sqrt{(n-1)^2(1 - \rho^2)^2 + 12\rho^2} + (n-1)(1 - \rho^2) \right)}, \quad \rho = |\zeta|^2.$$

Аналогично, достаточное условие Нехари дает, что при

$$|a| \leq \inf_{0 \leq \rho < 1} \frac{4\rho^{2-n}}{n(1-\rho^2) \left(\sqrt{(n-1)^2(1-\rho^2)^2 + 4\rho^2} + (n-1)(1-\rho^2) \right)}$$

метрика (19) является в целом евклидовой, т.е. допускает изометрическое вложение в $\mathbb{R}^2$.

Подсчитаем эти ограничения более точно. Получаем, что при $n = 1$ для евклидовости в целом метрики (19) достаточно, чтобы $|a| \leq 2$, и необходимо, чтобы $|a| \leq \sqrt{12}$ (точный критерий: $|a| < \pi$), а при $n = 2$ имеем достаточное условие $|a| \leq 1$ и необходимое условие $|a| \leq 2,85$. При $n \geq 3$ точные оценки технически уже затруднительны, однако при $n \rightarrow \infty$ можно найти главный член ограничения на $|a|$. Именно, достаточное условие при больших n имеет вид

$$|a| \leq \frac{4}{b^2 - 1} \exp\left(\frac{b^2 - 1}{2b}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \approx 1,73 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где b – корень уравнения $b^4 - 4b^3 - 1 = 0$, $b > 1$, а необходимое условие

$$|a| \leq \frac{6}{b^2 - 3} \exp\left(\frac{b^2 - 3}{2b}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \approx 2,34 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где b – корень уравнения $b^4 - 4b^3 - 9 = 0$, $b > \sqrt{3}$.

Другие свойства однолистных функций могут дать для $|a|$ более точные оценки, в которых необходимые и достаточные условия уже весьма близки друг к другу. В частности, для необходимых условий можно использовать известные оценки коэффициентов однолистных функций. Например, с учетом ограничения $|\Phi(\zeta)|$ величиной $(e^{|a|} - 1)/|a|$ и при использовании связи между коэффициентами однолистных функций из [13] для $n = 2$ необходимое условие удастся понизить до $|a| < \sqrt{7.5} \approx 2,74$, а при $n \rightarrow \infty$ – до $|a| \leq 2$. Есть и другие способы получения или достаточных, или необходимых условий, скажем, используя условие почти выпуклости и т.д.

§ 4. Изометрические погружения локально евклидовой метрики в случае многосвязных областей

4.1. Формулы для изометрических отображений. Пусть теперь область D является $(n+1)$ -связной. Можно считать, что при переходе от (1) к (13) $\overline{D}$ отображается в область $\overline{\Omega}$, ограниченную окружностью $\Gamma_0: |\zeta| = R_0$, которая содежит внутри себя попарно внешние окружности $\Gamma_j: |\zeta - \zeta_j| = R_j$, $1 \leq j \leq n$. Без потери общности предположим, что $\zeta_1 = 0$. Ориентацию границы $\partial\Omega$ считаем положительной.

Найдем общий вид отображения $z = \Phi(\zeta)$, приводящего (13) к стандартной форме $dx^2 + dy^2$. Основой для этого является следующая

ЛЕММА 3. Пусть голоморфная функция $z = f(\zeta)$ имеет в области $\bar{\Omega}$ однозначную производную $f'(\zeta) \in C^{0,\alpha}$, и пусть

$$f'(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^{(j)} (\zeta - \zeta_j)^m, \quad c_m^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j^+} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - \zeta_j)^{m+1}} d\zeta, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (20)$$

– разложения функции $f'(\zeta)$ в ряд Лорана в кольцевой полукрестности каждой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq n$ (Γ_j^+ означает, что контур Γ_j обходится против часовой стрелки). Пусть

$$H(\zeta) = f'(\zeta) - \sum_{j=1}^n \frac{c_1^{(j)}}{(\zeta - \zeta_j)}.$$

Тогда функцию $f(\zeta)$ можно найти по формуле

$$f(\zeta) = \overline{\Phi_0(\zeta)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H(w)}{\bar{w} - \bar{\zeta}} du dv + \sum_{j=1}^n c_{-1}^{(j)} \ln(\zeta - \zeta_j) + \text{const}, \quad (21)$$

где голоморфная и однозначная в Ω функция $\Phi_0(\zeta)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) = & - \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\bar{c}_{-m}^{(0)} \zeta^{m-1}}{(m-1)R_0^{2m-2}} - \sum_{j=2}^n \bar{c}_{-1}^{(j)} \ln(R_0^2 - \zeta \bar{\zeta}) - \sum_{j=2}^n \frac{R_1^2 \bar{c}_{-1}^{(j)}}{\zeta \bar{\zeta}_j} \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{R_j^{2m+2} \bar{c}_m^{(j)}}{(m+1)(\zeta - \zeta_j)^{m+1}} \\ & - \sum_{j=2}^n \sum_{k \neq j} \frac{R_j^2 \bar{c}_{-1}^{(k)}}{|\zeta|^2} \ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta(\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_j) - \zeta_j \bar{\zeta}_k}. \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$f'(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{j=1}^n \frac{c_1^{(j)}}{\zeta - \zeta_j},$$

то нам достаточно найти голоморфную функцию $f_0(\zeta)$ с производной $f'_0(\zeta) = H(\zeta)$. По определению функции $H(\zeta)$ интеграл от нее вдоль любой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq n$, равен нулю, поэтому $f_0(\zeta)$ тоже будет однозначной функцией. По условию имеем

$$\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{H(\zeta)},$$

поэтому по формуле для общего решения неоднородной системы Коши–Римана [7, с. 41] получаем

$$\bar{f}_0(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{H(w)}}{w - \zeta} du dv + \Phi_0(\zeta), \quad \Phi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\bar{f}_0(t)}{t - \zeta} dt. \quad (23)$$

Покажем, что на самом деле $\Phi_0(\zeta)$ можно найти, используя только известную функцию $H(\zeta)$.

Из (23) и из условий голоморфности $f_0(\zeta)$ имеем [7, с. 78]

$$\Phi'_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{H(w)}}{(w - \zeta)^2} du dv = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\overline{H^+(t)}}{t - \zeta} d\bar{t}. \quad (24)$$

Теперь заметим, что знание разложений $f'(\zeta)$ в ряды Лорана в окрестности каждой окружности Γ_j , $1 \leq j \leq n$, позволяет найти ряд Лорана для $f'(\zeta)$ также в окрестности окружности Γ_0 . Действительно, пусть в окрестности окружности $\Gamma_0: |\zeta| = R_0$ имеем

$$f'(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^{(0)} \zeta^m, \quad c_m^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0^+} \frac{f'(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

Но функция $f'(\zeta)/\zeta^{m+1}$ голоморфна и однозначна в Ω , поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0^+} \frac{f'(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j^+} \frac{f'(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

Подставим сюда значения $f'(\zeta)$ из (20) на каждой окружности Γ_j^+ и прямым вычислением найдем $c_m^{(0)}$:

$$\begin{aligned} c_1^{(0)} &= \sum_{j=1}^n c_1^{(j)}, \\ c_m^{(0)} &= c_m^{(1)} + \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k^{(j)} C_{m-1+k}^{k-1} \zeta_j^{-m-k}, \quad m > -1, \\ c_m^{(0)} &= c_m^{(1)} + \sum_{j=2}^n \sum_{k=-1}^{k=-m} c_k^{(j)} C_{-m-1}^{k-1} \zeta_j^{-m-k}, \quad m < -1. \end{aligned}$$

Зная вид функции $H(t)$ на каждой окружности Γ_j , $0 \leq j \leq n$, мы из (24) находим $\Phi'_0(\zeta)$, а затем $\Phi_0(\zeta)$ и получаем утверждаемую формулу (22). Участвующие в этой формуле логарифмы являются однозначными в Ω функциями, так как легко проверить, что в Ω однозначны аргументы функций, находящихся под знаком логарифмов. Лемма доказана.

Применим теперь эту лемму для описания отображения $z = \Phi(\zeta)$, приводящего метрику (13) к стандартному виду $dx^2 + dy^2$. В этом случае

$$f'(\zeta) = (\ln \Phi'(\zeta))' = 2 \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta}.$$

Используя лемму, находим, что

$$\Phi'(\zeta) = b \prod_{j=1}^n (\zeta - \zeta_j)^{c_{-1}^{(j)}} \exp \left(\overline{\Phi_0(\zeta)} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{2 \frac{\partial \ln \Lambda(w)}{\partial w} - \sum_{j=1}^n \frac{c_{-1}^{(j)}}{w - \zeta_j}}{\bar{w} - \bar{\zeta}} du dv \right), \quad (25)$$

где $\Phi_0(\zeta)$ – функция, определяемая формулой вида (22), а b – некоторая постоянная, определенная с точностью до аргумента из условия $|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta)$ в какой-нибудь конкретной точке $\zeta \in \Omega$.

Важно отметить, что здесь каждый коэффициент $c_{-1}^{(j)}$ имеет простой геометрический смысл. Именно, так как касательная к кривой $z = \Phi(t)$ наклонена к оси Ox под углом, равным $\phi + \arg \Phi'$, $\phi = \arg t$, $t \in \partial\Omega$, то

$$c_{-1}^{(j)} = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_j^+} \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial t} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j^+} (d \ln |\Phi| + d \arg \Phi') = -1 + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j} k_g ds.$$

Следовательно, если интегральная геодезическая кривизна каждой окружности Γ_j^+ , $1 \leq j \leq n$, кратна 2π , то $\Phi'(\zeta)$, как это видно из (25), будет однозначной функцией, и в этом случае $\Phi(\zeta)$ снова можно найти с применением леммы, причем однозначность или неоднозначность функции $\Phi(\zeta)$ зависит от того, равны или не равны нулю коэффициенты $d_{-1}^{(j)}$ в разложении Лорана функции $\Phi'(\zeta)$ в окрестности окружностей Γ_j (ср. связь однозначности функции $f(\zeta)$ леммы с равенством нулю коэффициентов $c_{-1}^{(j)}$ для $f'(\zeta)$ из (20)). Если же хотя бы одна из окружностей Γ_j , $1 \leq j \leq n$, имеет не кратную 2π интегральную геодезическую кривизну, то $\Phi'(\zeta)$, а вместе с ней и $\Phi(\zeta)$ будут многозначными функциями, и погружение (13) в $\mathbb{R}^2$ невозможно.

Сказанное подытожим в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы заданная в многосвязной круговой области $\bar{\Omega}$ с границей $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$ л.е. метрика (13) допускала изометрическое погружение в $\mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы:*

- 1) *интегральные геодезические кривизны (повороты) окружностей Γ_j , $1 \leq j \leq n$, были кратны 2π ;*
- 2) *коэффициенты $d_{-1}^{(j)}$ при $(\zeta - \zeta_j)^{-1}$ в разложениях Лорана функции $\Phi'(\zeta)$ из (25) в окрестности Γ_j были равны нулю.*

Тогда погружение $z = \Phi(\zeta)$ единственно и определяется из (25) по аналогии с формулой (21) из леммы 3.

Заметим, что в условиях теоремы нет требования, чтобы интегральная кривизна самой внешней окружности Γ_0 была кратна 2π , так как она при выполнении условий теоремы автоматически будет кратна 2π в силу теоремы Гаусса–Бонне.

Отсутствие погружения метрики (13) в $\mathbb{R}^2$ может быть вызвано, следовательно, двумя причинами:

- 1) один из коэффициентов $c_{-1}^{(j)}$ не равен целому числу;
- 2) один из коэффициентов $d_{-1}^{(j)}$ не равен нулю.

Обе эти возможности реализуются и дают основание классифицировать непогружаемые в $\mathbb{R}^2$ л.е. метрики как метрики конического или цилиндрического типа. Следовательно, по внутренней геометрии в локально евклидовых метриках *не выделяется особый тип, соответствующий торсу* как одному из трех типов разветвляющихся поверхностей.

При нецелых $c_{-1}^{(j)}$ можно было бы дать аналитическое выражение для приращений $\Phi(\zeta)$ при обходе вдоль каждой граничной окружности Γ_j , но в силу их громоздкости и геометрически малой информативности мы эти формулы опускаем. Ограничимся приведением подробных формул только для случая двусвязной области. Для концентрического кольца имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(\zeta) &= b\zeta^{c-1} \exp\left(\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{c_{-1} - 2w \frac{\partial \ln \Lambda(w)}{\partial w}}{w(\bar{w} - \bar{\zeta})} dudv + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_{-m} \bar{\zeta}^{m-1}}{(m-1)R_0^{2m-2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m R_1^{2+2m}}{(m+1)\bar{\zeta}^{m+1}}\right), \\ \Phi(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{d_{-1} - w\Phi'(w)}{w(\bar{w} - \bar{\zeta})} dudv + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{d_{-m} \bar{\zeta}^{m-1}}{(m-1)R_0^{2m-2}} \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m R_1^{2+2m}}{(m+1)\bar{\zeta}^{m+1}} + d_{-1} \ln \zeta + \text{const},\end{aligned}$$

где

$$c_m = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \zeta} \zeta^{-m-1} d\zeta, \quad d_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta.$$

Пусть $1 + c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} k_g ds$ целое.

Если $d_{-1} \neq 0$, то получится многозначная функция $\Phi(\zeta)$ типа логарифма (это соответствует неоднозначности цилиндрического типа). Если же c_{-1} нецелое, то и $\Phi'(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ будут многозначными, причем $\Phi(\zeta)$ имеет многозначность того же вида, что и $\Phi'(\zeta)$, т.е.

$$\Phi(\zeta) = \zeta^{c-1} \phi_0(\zeta),$$

где $\phi_0(\zeta)$ – однозначная функция (получается неоднозначность конического типа).

Рассмотрим один пример. Пусть в кольце $\Omega: R_1 \leq |\zeta| \leq R_0$, задана л.е. метрика

$$ds^2 = \rho^{2b}(d\xi^2 + d\eta^2), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad b - \text{действительное число.} \quad (26)$$

Для этой метрики

$$\Phi'(\zeta) = \zeta^b, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{b+1}, \quad b \neq -1; \quad \Phi(\zeta) = \ln \zeta, \quad b = -1.$$

Тогда при целом $b \neq -1$ метрика (26) погружается в $\mathbb{R}^2$ в виде $|b+1|$ раз покрытого кругового кольца, а при $b = -1$ погружения нет, так как $d_{-1}^{(1)} = 1 \neq 0$ (однолистный

образ Ω – прямоугольник с двумя отождествленными противоположными сторонами, что соответствует цилиндру в $\mathbb{R}^3$). При нецелом b погружения тоже нет: однолистный образ Ω – концентрическая часть кругового сектора с раствором угла при вершине $2\pi|b+1|$, что соответствует конусу в $\mathbb{R}^3$.

В многосвязном случае непогружаемая в $\mathbb{R}^2$ л.е. метрика может иметь в окрестности одной или нескольких окружностей цилиндрический тип непогружаемости, а на других окружностях – конический тип. Может быть, в связностях 3 и больше надо искать внутренние признаки метрик, погружаемых в $\mathbb{R}^3$ только в виде торсов и непогружаемых в виде цилиндрической или конической поверхностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Задача нахождения отображения $z = \Phi(\zeta)$ по $|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta)$ и в односвязном и многосвязном случаях схожа с обратными краевыми задачами теории функций [15], поэтому для проверки однолистности $\Phi(\zeta)$ в односвязном случае можно воспользоваться установленными в [15] критериями однолистности. Отметим, что основное отличие рассматриваемой задачи от обратных краевых задач заключается в том, что у нас $|\Phi'(\zeta)|$ известно всюду в области, а не только на границе, поэтому для нахождения $\Phi'(\zeta)$ нет необходимости искать функцию Грина области Ω , нахождение которой в свою очередь представляет некоторую самостоятельную задачу.

4.2. Изометрические вложения метрики. В случае многосвязной области изометрические вложения метрики (13) в $\mathbb{R}^2$ описывает следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы л.е. метрика (13) гладкости $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, заданная в многосвязной круговой области Ω , допускала изометрическое вложение в $\mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы погружение $z = \Phi(\zeta)$ было однолистным на каждой из окружностей Γ_j , $0 \leq j \leq n$.*

Действительно, необходимость условия очевидна, а достаточность получается из того, что при условиях теоремы л.е. метрику (13) можно C^2 -гладко продолжить внутрь каждой окружности Γ_j , $1 \leq j \leq n$ (при условии, что интегральная геодезическая кривизна каждой окружности Γ_j^+ равна 2π), чего легко добиться, учитывая формулу Гаусса–Бонне и заменив, в случае необходимости, внешнюю окружность отображением вида $z = 1/(\zeta - \zeta_j)$. Тогда продолженная на весь круг $|\zeta| \leq R_0$ л.е. метрика допускает погружение в $\mathbb{R}^2$ с однолистным образом границы. Значит, это погружение является вложением.

4.3. Использование натуральных уравнений краевых линий. Признаки погружаемости и вложимости метрики (13) в $\mathbb{R}^2$ можно получить также с помощью следующего геометрического приема. На каждой компоненте границы многосвязной области Ω нам известна геодезическая кривизна метрики (13), которая при изометрическом погружении в $\mathbb{R}^2$ переходит в обычную кривизну кривой γ – образа $\partial\Omega$. Следовательно, на границе отображение $z = x + iy$ имеет вид

$$x = x_0 + \int_0^s \left(\cos \int_0^\sigma k_g(s) ds \right) d\sigma, \quad y = y_0 + \int_0^s \left(\sin \int_0^\sigma k_g(s) ds \right) d\sigma. \quad (27)$$

6*

Тогда для погружаемости метрики (13) необходимо и достаточно, чтобы на каждой граничной окружности было $x(0) = x(L_j)$, $y(0) = y(L_j)$, где L_j – длина окружности в метрике (13), а для вложимости (13) в $\mathbb{R}^2$ – чтобы каждая кривая $\gamma_j: x = x_j(s)$, $y = y_j(s)$ – образ Γ_j – была жордановой. Однако вычисление $x(s)$ и $y(s)$ по формуле (27) с учетом формулы (18) в точности сводится к формулам (21) и (25), поэтому практического преимущества формула (27) не дает. По-видимому, разумно использовать оба варианта решения в зависимости от задачи. Как пример приведем одно рассуждение, позволяющее предложить некоторый подход к уже давно сформулированной и до сих пор нерешенной проблеме нахождения условий на кривизну $k(s)$ как функции дуги кривой, при выполнении которых кривая оказывается без самопересечений.

Пусть $k = k(s)$ – кривизна кривой Γ как функция ее дуги s , $0 \leq s \leq L$. Если кривая Γ замкнутая и без самопересечений, то она ограничивает некоторую односвязную область D , которая однолистно конформно отображается на единичный круг Ω с границей $\gamma: \xi^2 + \eta^2 = 1$. Обратная функция $z = \Phi(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, определяет в Ω локально евклидову метрику (13) с коэффициентом $\Lambda(\zeta) = |\Phi'(\zeta)|$ или $\ln \Lambda = \operatorname{Re} \ln \Phi'(\zeta)$. Если мы найдем $\Phi'(\zeta)$, а затем и отображение $\Phi(\zeta)$, то условие его однолистности будет необходимым и достаточным условием жордановости кривой Γ с заданной кривизной $k = k(s)$.

Геодезическая кривизна k_g окружности γ в метрике (13) совпадает с обычной кривизной k кривой Γ . Пусть $s = s(\phi)$ определяет отображение окружности γ на Γ , где ϕ – полярный угол, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Тогда из формулы (18) получаем, что $\Phi'(t)$, $t = e^{i\phi}$, удовлетворяет следующему краевому условию:

$$\operatorname{Re}[t\Psi'(t)] = \Lambda(t)k_g - 1, \quad t = e^{i\phi},$$

где голоморфная в круге Ω функция $\Psi(\zeta)$ равна $\ln \Phi'(\zeta)$, а $k_g = k[s(\phi)]$ с $ds = \Lambda d\phi$. Решение этой краевой задачи дается интегралом Шварца (см. [15]):

$$\zeta\Psi'(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Lambda k_g - 1}{\tau - \zeta} d\tau. \quad (28)$$

Присутствующее в общей формуле постоянное слагаемое $-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Lambda k_g - 1) d\phi$ в нашем случае равно нулю в силу необходимого условия жордановости Γ :

$$\int_0^{2\pi} \Lambda k_g d\phi = \int_0^L k_g ds = 2\pi.$$

Так как

$$\oint_{\gamma} \frac{\Lambda k_g - 1}{\tau} d\tau = 0,$$

то, вычитая из правой части формулы (28) этот интеграл, получаем

$$\Psi'(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Lambda k_g - 1}{\tau(\tau - \zeta)} d\tau,$$

откуда

$$\Psi(\zeta) = \ln \Phi'(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Lambda k_g - 1}{\tau} \ln \frac{\tau}{\tau - \zeta} d\tau + C. \quad (29)$$

Легко проверить, что

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\tau}{\tau - \zeta} d\tau = 0,$$

поэтому из (29) с учетом равенства $\Lambda = |\Phi'(\zeta)|$ имеем

$$\Lambda(\zeta) = C \exp \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\Lambda k_g}{\tau} \ln \frac{\tau}{\tau - \zeta} d\tau \right), \quad C = \Lambda(0) > 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) дает нам представление коэффициента $\Lambda(\zeta)$ локально евклидовой метрики (13) в единичном круге через значения Λ на границе и геодезическую кривизну границы. Проблема использования этой формулы в нашем случае заключается в том, что мы не знаем функции $s = s(\phi)$, которая является аргументом для $k_g = k[s(\phi)]$. Введем обратную функцию $\phi = \phi(s)$ с $\phi(0) = 0$, $\phi(L) = 2\pi$. Так как $\Lambda(\tau(s)) d\phi = ds$ и $d\tau/\tau = i d\phi$, то, переходя в (30) к пределу при $\zeta \rightarrow t \in \gamma$, получаем уравнение для $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t) = C \exp \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^L k(\sigma) \ln \frac{e^{i\phi(\sigma)}}{e^{i\phi(\sigma)} - t} d\sigma \right), \quad t = e^{i\phi(s)}, \quad \tau = e^{i\phi(\sigma)}. \quad (31)$$

Умножая полученное равенство на ϕ'_s и найдя постоянную C из условия

$$\int_0^{2\pi} \Lambda(t) d\phi = L,$$

приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению для $\phi(s)$:

$$\phi'(s) = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \exp \left(\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^L k(\sigma) \ln \frac{e^{i\phi(\sigma)} - e^{i\phi(s)}}{e^{i\phi(\sigma)} - e^{i\psi}} d\sigma \right) d\psi \quad (32)$$

с граничными условиями $\phi(0) = 0$, $\phi(L) = 2\pi$. Если мы решим уравнение (32) относительно $\phi(s)$ с указанными граничными условиями, то, найдя $\Lambda(t)$ из (31), вычислим $\Lambda(\zeta)$ по (30) и далее по формуле (16) найдем искомое отображение $\Phi(\zeta)$. Его однолистность является необходимым и достаточным условием для жордановости кривой Γ с данной кривизной $k = k(s)$. Заметим, что мы одновременно указали способ нахождения конформного отображения круга на область, ограниченную жордановой кривой Γ . Но, конечно, исследование разрешимости и нахождение решения нелинейного уравнения (32) представляют собой совсем нелегкую задачу.

Список литературы

1. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.Г.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН. 1975. Т. 30. № 4. С. 3–60.
2. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. V. 3. Paris, 1894.
3. *Hartman Ph., Wintner A.* Gaussian curvature and local embedding // Amer. J. of Math. 1951. V. 73. № 4. P. 876–882.
4. *Савитов И.Х.* К вопросу о гладкости изометрий // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 4. С. 169–176.
5. *Савитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения локально евклидовых метрик в $\mathbb{R}^2$ // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1988. Т. 23. С. 147–156.
6. *Савитов И.Х.* Локально евклидовы метрики: характеристические признаки и погружения и вложения в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$: Тез. докладов. Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск 1982. С. 97–98.
7. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
8. *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
9. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций. М.: Наука, 1966.
10. *Kaplan W.* Close-to-convex schlicht functions // Michigan math. J. 1952. V. 1. № 2. P. 169–185.
11. *Titus C.J.* A theory of normal curves and some applications // Pacif. J. of Math. 1960. V. 10. № 3. P. 1083–1096.
12. *Biernacki M.* Sur les fonctions univalentes // Matematica (Cluj). 1936. V. 12. P. 49–64.
13. *Базилевич И.Е.* Области начальных коэффициентов ограниченных однолистных функций n -кратной симметрии // Матем. сб. 1957. Т. 43. № 4. С. 409–428.
14. *Решетняк Ю.Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. I // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1. № 1. С. 88–116; II // там же. 1960. Т. 1. № 2. С. 248–276.
15. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступило в редакцию
20.X.1998