Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. О. Горчинский, Адельная резольвента для пучков гомологий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 6, 133–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:31:12

УДК 512.73

С. О. Горчинский

Адельная резольвента для пучков гомологий

Дано обобщение группы идеалей на многомерный случай, а именно построен некоторый адельный комплекс по пучку K -групп на произвольной схеме. Такие комплексы определены для любого пучка абелевых групп на схеме. Рассмотрен класс пучков, ассоциированных с предпучками теории гомологий, удовлетворяющих некоторым аксиомам, выполненным, в частности, для K -теории. В этом случае доказано, что адельный комплекс позволяет построить вялую резольвенту для описанных выше пучков на гладких многообразиях над бесконечным совершенным полем. Кроме того, естественный морфизм из адельного комплекса в комплекс Герстена оказывается квазиизоморфизмом. Основное преимущество адельной резольвенты заключается в ее мультипликативности и контравариантности. В частности, это позволяет доказать новым способом совпадение (с точностью до знака) пересечения в группах Чжоу и произведения в соответствующих K -когомологиях. Установлена связь спаривания Вейля и тройного произведения Масси в группах K -когомологий с некоторыми номерами.

Библиография: 32 наименований.

§ 1. Введение

Классические адели были определены А. Вейлем и К. Шевалле для глобального поля K следующим образом: *адели* – это элементы множества $\mathbf{A}_K = \prod_v K_v$; здесь v пробегает все нормирования поля K , K_v – пополнение K относительно нормирования v , а *ограниченное произведение* $\prod$ означает, что рассматриваются лишь такие наборы $\{f_v\} \in \prod_v K_v$, что $f_v \in \hat{\mathcal{O}}_v$ для почти всех v , где $\hat{\mathcal{O}}_v \subset K_v$ – полное локальное кольцо, соответствующее нормированию v . Множество аделей обладает естественной структурой топологического кольца. Его группа обратимых элементов называется *группой идеалей* и определяется равенством $\mathbf{A}_K^* = \prod_v K_v^*$, где ограниченное произведение берется в том же смысле, что и ранее, но K_v заменено на K_v^* , а $\hat{\mathcal{O}}_v$ – на $\hat{\mathcal{O}}_v^*$ (мы не обсуждаем здесь топологическую структуру группы идеалей). Группа идеалей играет центральную роль в классической одномерной теории полей классов. Одно из ключевых свойств идеалей заключается в наличии связи с группой классов идеалов $\text{Cl}(K)$ поля K : имеется сюръективный гомоморфизм $\mathbf{A}_K^* \rightarrow \text{Cl}(K)$, определяемый по формуле $\{f_v\} \mapsto \sum_v \nu_v(f) \cdot [v]$, где сумма берется по всем неархимедовым нормированиям v поля K , а ν_v – дискретное нормирование, соответствующее v .

Ж.-П. Серр [1] использовал *непополненные* адели на алгебраической проективной гладкой *кривой* X над полем k , чтобы доказать теорему Римана–Роха для X . Непополненные адели состоят из таких наборов $\{f_x\} \in \prod_{x \in X} k(X)$, что

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00095), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-1987.2008.1) и INTAS (грант № 05-1000008-8118).

$f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ для почти всех замкнутых точек $x \in X$, где $\mathcal{O}_{X,x} \subset k(X)$ – локальное кольцо на кривой X в точке x . Также можно рассматривать неполный вариант идеалей. Более того, Ж.-П. Серр на самом деле использовал некоторый комплекс, состоящий из аделей, хотя в [1] явным образом это не указывается.

А. Н. Паршин определил в [2] непополненные (названные им *рациональными*) адели на *поверхности* и построил из них некоторый *адельный комплекс*. В [3] был определен мультипликативный вариант полных аделей на поверхности, связанный с K_2 -группами, и было предложено двумерное обобщение классической теории полей классов. Позже А. А. Бейлинсон построил в [4] адельный комплекс $\mathbb{A}(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ для каждой нётеровой схемы X , используя симплициальный язык (на самом деле адельный комплекс определен для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X вместо структурного пучка $\mathcal{O}_X$). Также определен непополненный, или рациональный, вариант $a(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ адельного комплекса $\mathbb{A}(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$. Опишем явно комплексы рациональных аделей в малых размерностях для структурного пучка. Для кривой X над полем k рациональный адельный комплекс $a(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ имеет следующий вид:

$$0 \rightarrow k(X) \oplus \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \prod_{x \in X} k(X) \rightarrow 0,$$

где ограниченное произведение берется в указанном выше смысле, а дифференциал определяется по формуле $(f_X, \{f_x\}) \mapsto \{f_x - f_X\}$, использующей естественные вложения $k(X) \subset \prod_{x \in X} k(X)$ и $\prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \subset \prod_{x \in X} k(X)$. Для поверхности X рациональный адельный комплекс структурного пучка $a(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow k(X) \oplus \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \oplus \prod_{C \subset X} \mathcal{O}_{X,C} &\rightarrow \prod_{C \subset X} k(X) \oplus \prod_{x \in X} k(X) \\ &\oplus \prod_{x \in C} \mathcal{O}_{X,C} \rightarrow \prod_{x \in C \subset X} k(X) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где ограниченные произведения определяются некоторым явным образом в терминах полюсов функций, а дифференциалы определяются по формулам

$$\begin{aligned} (f_X, \{f_x\}, \{f_C\}) &\mapsto (\{f_C - f_X\}, \{f_x - f_X\}, \{f_x - f_C\}), \\ (\{f_{XC}\}, \{f_{Xx}\}, \{f_{Cx}\}) &\mapsto \{f_{Cx} - f_{Xx} + f_{XC}\}, \end{aligned}$$

используя соответствующие естественные вложения. Теорема Бейлинсона–Хубера утверждает, что для любой нётеровой схемы когомологии комплексов $\mathbb{A}(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ и $a(X, \mathcal{O}_X)^\bullet$ канонически изоморфны когомологиям $H^i(X, \mathcal{O}_X)$; см. [4], [5] (аналогичное утверждение справедливо для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X).

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы дать вариант этих конструкций для некоторого класса пучков абелевых групп на схемах, в частности для *пучков K -групп* $\mathcal{K}_n^X = \mathcal{K}_n(\mathcal{O}_X)$, ассоциированных с предпучками, задаваемыми по формуле $U \mapsto K_n(k[U])$, $n \geq 0$, где $U \subset X$ – произвольное открытое подмножество в схеме X , а $K_n(\cdot)$ – K -группы Квиллена. Напомним, что для регулярной отделимой схемы X конечного типа над полем определены комплексы Герстена $\text{Gers}(X, n)^\bullet$, $n \geq 0$ (являющиеся частным случаем комплексов

Кузена), группы когомологий которых равны $H^i(X, \mathcal{K}_n^X)$. С другой стороны, для регулярной кривой X имеется естественный квазиизоморфизм комплексов

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n(k(X)) \oplus \prod_{x \in C} K_n(\mathcal{O}_{X,x}) & \longrightarrow & \prod_{x \in X} K_n(k(X)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_n(k(X)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X} K_{n-1}(k(x)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где ограниченное произведение берется в том же смысле, что и для рациональных аделей, но при замене $k(X)$ на $K_n(k(X))$, а $\mathcal{O}_{X,x}$ – на $K_n(\mathcal{O}_{X,x})$, $k(x)$ – поле вычетов в точке x , нижний комплекс является комплексом Герстена $\text{Gers}(X, n)^\bullet$ на кривой X , первое вертикальное отображение равно проекции на первое слагаемое, а второе задается вычетами в K -группах. В статье дано многомерное обобщение этого примера.

Напомним, что для произвольного пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ на схеме X комплекс Кузена состоит из прямых сумм групп локальных когомологий по всем схемным точкам в X фиксированной коразмерности. Следуя общему определению аделей, мы заменяем данные прямые суммы на *адельные группы*, равные некоторым ограниченными произведениям по *флагам* фиксированной длины, т. е. по последовательностям схемных точек $\eta_0, \dots, \eta_p$ на X , для которых $\eta_i \in \tilde{\eta}_{i-1}$ при всех $1 \leq i \leq p$. Явное описание этих групп в простейших случаях дано в примере 2.32. Из аделей групп строится *адельный комплекс* $\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet$. При некоторых естественных ограничениях определен канонический морфизм комплексов $\nu_X: \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$, где $\text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$ – комплекс Кузена пучка $\mathcal{F}$ на X . Нами рассматривается один специальный класс абелевых пучков, а именно пучки, ассоциированные с предпучками теории гомологий, удовлетворяющей некоторому набору аксиом (см. п. 3.1). Основой результат настоящей работы заключается в том, что для таких пучков морфизм ν_X является квазиизоморфизмом на гладких многообразиях над бесконечным совершенным полем. В частности, доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Определен канонический морфизм комплексов*

$$\nu_X: \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet \rightarrow \text{Gers}(X, n)^\bullet.$$

Этот морфизм является квазиизоморфизмом, если X – гладкое многообразие над бесконечным совершенным полем.

Напомним, что одним из основных преимуществ комплекса Герстена является то, что он позволяет явно связать когомологии пучков K -групп, называемые *K -когомологиями*, и (алгебраическую) геометрию многообразия X . В частности, знаменитая формула Блоха–Квиллена [6] состоит в том, что $H^n(X, \mathcal{K}_n^X) = CH^n(X)$. Напомним также, что определено каноническое произведение между пучками K -групп, индуцированное произведением в самих K -группах. Данное произведение не может быть продолжено на комплекс Герстена, иначе существовала бы теория пересечений алгебраических циклов, не рассматривающая их ни по какому отношению эквивалентности. Также для любого морфизма гладких многообразий $f: X \rightarrow Y$ определен морфизм пучков $f^*: \mathcal{K}_n^Y \rightarrow f_* \mathcal{K}_n^X$. Данный морфизм продолжается на комплексы Герстена лишь тогда, когда морфизм f плоский.

Основным преимуществом адельной конструкции является то, что симплициальная структура на флагах, используемая в построении адельных комплексов, позволяет определить на них произведение, т. е. комплекс $\bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet$ является DG-кольцом. Также для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ определено отображение обратного образа $f^*: \mathbf{A}(Y, \mathcal{K}_n^Y)^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet$. Заметим, что общая теория пучков тоже позволяет строить контравариантные мультипликативные симплициальные резольвенты пучков, например резольвенты Чеха или Годемана (см. [7]). Тем не менее, по-видимому, такие резольвенты слишком общие, чтобы отражать алгебро-геометрическую структуру схемы, например связь K -когомологий с алгебраическими циклами или наличие прямого образа для собственных морфизмов. Несмотря на то, что для построенного нами адельного комплекса не определено отображение прямого образа, ковариантный комплекс Герстена оказывается правым DG-модулем над DG-кольцом аделей.

В целом, разница между адельным комплексом $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet$ и комплексом Герстена $\text{Gers}(X, n)^\bullet$ заключается в рассмотрении всех возможных систем локальных уравнений вдоль флагов со значениями в K -группах для каждого неприводимого подмногообразия на X . Таким образом, для определения произведения-пересечения на группах алгебраических циклов мы расширяем их системами локальных уравнений вместо того, чтобы рассматривать их по модулю некоторого отношения эквивалентности.

Анализ адельного комплекса позволяет вывести ожидаемые явные формулы для произведений в K -когомологиях, а также для некоторых высших произведений Масси в K -когомологиях. В частности, получается новое непосредственное доказательство совпадения (с точностью до знака) естественного произведения в K -когомологиях и произведения-пересечения на группах Чжоу, определяемого при помощи леммы о сдвиге и формулы Серра для локальных кратностей. Другой пример заключается в вычислении тройного произведения Масси $m_3(\alpha, l, \beta)$, где $\alpha \in \text{Pic}^0(X)_l$, $\beta \in CH^q(X)_l^0$, $d = \dim(X)$. Оказывается, что данное тройное произведение связано со спариванием Вейля $\psi_l(\alpha, \beta)$, определенным для l -кручения в двойственных абелевых многообразиях $\text{Alb}(X)$ и $\text{Pic}^0(X)$. В случае кривой равенство между соответствующей адельной формулой и спариванием Вейля было показано различными методами в [8]–[10].

Статья устроена следующим образом. Сначала в п. 2.1 определяются адельные группы для абелевых пучков на произвольных схемах и изучаются их основные свойства, в частности мультипликативность и контравариантность. В п. 2.2 показана связь между адельным комплексом и комплексом Кузена. В п. 2.3 доказывается адельный вариант формулы проекции. В пп. 2.4, 2.5 устанавливаются дальнейшие свойства адельных групп в предположении некоторых достаточно слабых условий, налагаемых на пучки. В п. 2.6 определяется еще один тип адельных групп, называемых $\mathbf{A}'$ -аделями, не обладающих мультипликативной структурой, но позволяющих построить вялую резольвенту для любого пучка Коэн–Маколея в смысле [11].

В п. 3.1 вводится понятие теории гомологий, локально ациклической в слоениях (л.а.с. теории гомологий), обсуждаются основные свойства л.а.с. теорий гомологий и определяются ассоциированные с ними пучки. Далее в п. 3.2 определяются сильно локально стираемые пары замкнутых подмногообразий на гладком многообразии относительно данной л.а.с. теории гомологий. Данное понятие возникает из обобщения метода доказательства гипотезы Герстена

в геометрическом случае, предложенного Квилленом в [6]. В п. 3.3 содержатся результаты о существовании и сложении сильно локально стираемых пар. В частности, доказывается некоторый равномерный вариант локальной точности резольвенты Герстена, представляющий интерес сам по себе (следствие 3.20). В п. 3.4 вводится понятие заклеивающей системы замкнутых подмногообразий на гладком многообразии. Данная конструкция является нашим основным инструментом при изучении связи между аделльным комплексом и резольвентой Герстена. В п. 3.5 содержится основной результат (теорема 3.34): для любой л.а.с. теории гомологий аделльный комплекс для пучков гомологий квазиизоморфен комплексу Герстена на гладком многообразии над бесконечным совершенным полем. После нескольких простых редукций доказательство основной теоремы сводится к некоторому утверждению об аппроксимации, а именно к лемме 3.37, в доказательстве которой используется определенное выше понятие заклеивающих систем. В п. 3.6 явно построены коциклы в аделльном комплексе, представляющие коциклы в комплексе Герстена.

Далее рассматривается один пример л.а.с. теории гомологий, а именно K' -теория схем. В п. 4.1 приводятся некоторые общие свойства K -пучков и K -когомологий. Также даются некоторые примеры явных K -аделльных коциклов и устанавливается связь между K -аделями и рациональными аделями Паршина–Бейлинсона для пучков дифференциальных форм. В п. 4.2 приводится явная конструкция отображения эйлеровой характеристики с носителем из K -групп точной категории комплексов когерентных пучков на схеме T , точных вне замкнутой подсхемы $S \subset T$, в K' -группы схемы S . Это отображение также может быть определено при помощи R -пространств, описанных в [12], или при помощи общих свойств K -теории Вальдхаузена совершенных комплексов, построенной в [13]. Далее в п. 4.3 приводятся явные формулы для произведений в K -когомологиях в терминах коциклов из комплекса Герстена, получаемые как следствие наличия мультипликативной структуры на аделльных комплексах (теорема 4.21). В п. 4.4 рассматриваются некоторые тройные произведения Масси. Показано их равенство со спариванием Вейля между дивизорами и нуль-циклами (предложение 4.27). В п. 4.5 для удобства читателя приводится определение высших произведений Масси.

Автор благодарит А. Н. Паршина за постоянное внимание к настоящей работе и многочисленные советы, К. Суле за полезные обсуждения, Д. Грейсона и Д. Каледина за важные замечания, возникшие после прочтения ими раннего варианта данной статьи, а также Математический институт Жюссье, во время визитов в который были написаны многие части настоящей работы.

§ 2. Общие свойства аделей

2.1. Определение и начальные свойства. Мы используем симплициальный подход Бейлинсона к многомерным аделям, впервые определенным Паршиным для двумерного случая (см. [2], [4]). Кроме того, мы будем следовать многим обозначениям, введенным в [5].

Для косимплициальной группы A^* обозначим через $A^\bullet$ ассоциированный коцепной комплекс. В тензорном произведении $A^\bullet \otimes B^\bullet$ комплексов $A^\bullet$ и $B^\bullet$ определим дифференциал по формуле

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes db.$$

Для схемы X через $X^{(p)}$ обозначим множество всех схемных точек коразмерности p в X .

Пусть X – схема и $P(X)$ – множество всех ее схемных точек. Через $\bar{\eta}$ обозначим замыкание точки $\eta \in P(X)$. Положим

$$S(X)_p = \{(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_p) : \eta_i \in P(X), \eta_i \in \bar{\eta}_{i-1} \text{ для всех } 1 \leq i \leq p\}.$$

Произвольный элемент $F = (\eta_0, \dots, \eta_p) \in S(X)_p$ называется *флагом длины p* . Отображение $X \mapsto S(X)_*$ задает ковариантный функтор из категории схем в категорию симплициальных множеств. Пусть $\delta_i^p : S(X)_p \rightarrow S(X)_{p-1}$, $0 \leq i \leq p$, и $\sigma_i^p : S(X)_p \rightarrow S(X)_{p+1}$, $0 \leq i \leq p$, – естественные отображения границы и вырождения соответственно.

Имеется аддитивный точный функтор $\mathcal{F} \mapsto S(X, \mathcal{F})$ из категории абелевых пучков на X в категорию когомологических абелевых систем коэффициентов на $S(X)_*$, задаваемый по формуле $S(X, \mathcal{F})(\eta_0, \dots, \eta_p) = \mathcal{F}_{\eta_0}$ для любого флага $(\eta_0, \dots, \eta_p) \in S(X)_p$. Через $C(X, \mathcal{F})^*$ обозначим косимплициальную группу, связанную с системой коэффициентов $S(X, \mathcal{F})$ на $S(X)_*$. Имеется равенство $C(X, \mathcal{F})^p = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p)} \mathcal{F}_{\eta_0}$. Дифференциал в комплексе $C(X, \mathcal{F})^\bullet$ задается по формуле

$$(df)_{\eta_0 \dots \eta_{p+1}} = \sum_{i=0}^p (-1)^i f_{\eta_0 \dots \hat{\eta}_i \dots \eta_{p+1}} \in F_{\eta_0}$$

для любого элемента $f \in C(X, \mathcal{F})^p$, где с “крышкой” обозначен элемент, пропущенный во флаге. Положим $C(M, \mathcal{F}) = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} \mathcal{F}_{\eta_0}$ для любого подмножества $M \subset S(X)_p$. В частности, $C(X, \mathcal{F})^p = C(S(X)_p, \mathcal{F})$.

Очевидно, что $S(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = S(X, \mathcal{F}) \otimes S(X, \mathcal{G})$ для любых двух пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на X (мы рассматриваем поточечное тензорное произведение для систем коэффициентов). Следовательно, имеется канонический морфизм комплексов $C(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes C(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow C(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$, задаваемый по формуле $(f \cdot g)_{\eta_0 \dots \eta_{p+q}} = f_{\eta_0 \dots \eta_p} \otimes g_{\eta_{p+1} \dots \eta_{p+q}}$ для любых двух элементов $f \in C(X, \mathcal{F})^p$, $g \in C(X, \mathcal{G})^q$.

Для каждого морфизма схем $f : X \rightarrow Y$ определен естественный морфизм систем коэффициентов $S(Y, f_* \mathcal{F}) \rightarrow f_* S(X, \mathcal{F})$ на $S(Y)_*$, где $f_* S(X, \mathcal{F})(G) = \prod_{F : f(F)=G} S(X, \mathcal{F})(F)$ для любого флага $G \in S(Y)_*$. Следовательно, существует морфизм косимплициальных групп $C(Y, f_* \mathcal{F})^* \rightarrow C(X, \mathcal{F})^*$.

Пусть $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп на схеме X . Положим $\mathcal{F}_U = (i_U)_* i_U^* \mathcal{F}$ для любого открытого вложения $i_U : U \hookrightarrow X$. Заметим, что $(\mathcal{F}_U)_V = \mathcal{F}_{U \cap V}$ для любых двух открытых подмножеств U и V в X . Для каждой точки $\eta \in X$ положим $[\mathcal{F}]_\eta = j_* j^* (\mathcal{F})$, где $j : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta}) \rightarrow X$ – естественный морфизм схем. Выполняется равенство $[\mathcal{F}]_\eta = \varinjlim \mathcal{F}_U$, где предел берется по всем открытым подмножествам $U \subset X$, содержащим точку η .

Для $M \subset S(X)_p$, $\eta \in P(X)$ будем обозначать через ${}_\eta M$ следующее множество:

$${}_\eta M = \{(\eta_1, \dots, \eta_p) \in S(X)_{p-1} : (\eta, \eta_1, \dots, \eta_p) \in M\}.$$

Определим индуктивно *адельные группы* $\mathbf{A}(M, \mathcal{F})$, $M \subset S(X)_p$, для пучка $\mathcal{F}$ на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для любого подмножества $M \subset P(X) = S(X)_0$ положим

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = C(M, \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in M} \mathcal{F}_\eta.$$

Для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ при $p > 0$ положим

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in P(X)} \tilde{\mathbf{A}}(\eta M, [\mathcal{F}]_\eta), \quad \tilde{\mathbf{A}}(M, [\mathcal{F}]_\eta) = \varinjlim_U \mathbf{A}(M, \mathcal{F}_U),$$

где предел берется по всем открытым подмножествам $U \subset X$, содержащим точку η . Также положим $\mathbf{A}(\emptyset, \mathcal{F}) = 0$. Элементы *адельных групп* $\mathbf{A}(M, \mathcal{F})$ называются *аделями*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Определение адельных групп не использует кольцевую структуру пучка $\mathcal{O}_X$. На самом деле, все общие факты об аделях, обсуждаемые далее, имеют место для пучков абелевых групп на любом локально нётеровом топологическом пространстве таком, что любое неприводимое замкнутое подмножество обладает единственной общей точкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Определение 2.1 аналогично определению аделей из [4]; основное различие заключается в следующем: мы заменяем когерентные пучки на пучки типа $\mathcal{F}_V$ и предложенная нами конструкция не использует пополнения. Как следствие, новое адельное условие более грубое: для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на нётеровой схеме X и подмножества $M \subset S(X)_p$ определенная выше группа $\mathbf{A}(M, \mathcal{F})$ содержит соответствующую группу *рациональных аделей* (см. [2] и [5]). Тем не менее, существует также сравнение и в обратном направлении (см. предложение 4.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Схема X не включена в наше обозначение для адельной группы $\mathbf{A}(M, \mathcal{F})$. В дальнейшем рассматриваемая схема X всегда может быть восстановлена из обозначения для пучка $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Из определения адельных групп следует, что для любого подмножества $M \subset S(X)_p$, $p > 0$, и для любого открытого подмножества $V \subset X$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}_V) = \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\eta M, \mathcal{F}_{V \cap U_\eta}) = \varinjlim_{\{U_\eta\}} \prod_{\eta \in P(X)} \mathbf{A}(\eta M, \mathcal{F}_{V \cap U_\eta}),$$

где второй предел берется по всем системам $\{U_\eta\}$ открытых подмножеств в X , параметризованных схемными точками $\eta \in P(X)$, таким, что $\eta \in U_\eta$ для любой точки $\eta \in P(X)$, причем $\{U_\eta\} \leq \{U'_\eta\}$ тогда и только тогда, когда $U_\eta \supseteq U'_\eta$ для всех $\eta \in P(X)$.

Ясно, что для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ соответствие $\mathcal{F} \mapsto \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$ является (неточным) ковариантным функтором из категории абелевых пучков на X в категорию абелевых групп. Легко показать, что $\mathbf{A}((\eta_0, \dots, \eta_p), \mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\eta_0}$ для любого элемента $(\eta_0, \dots, \eta_p) \in S(X)_p$. Для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ существует естественный морфизм

$$\theta: \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \rightarrow C(M, \mathcal{F}) = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} \mathcal{F}_{\eta_0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любых подмножеств $M, N \subset S(X)_p$, $p \geq 0$, таких, что $M \cap N = \emptyset$, выполняется разложение $\mathbf{A}(M \cup N, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \oplus \mathbf{A}(N, \mathcal{F})$;*

- (ii) для любого подмножества $M \subset S(X)_p$, $p > 0$, определены отображения границы $d_i^p: \mathbf{A}(\delta_i^{p+1}(M), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$, $0 \leq i \leq p$;
- (iii) для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ имеются изоморфизмы $s_i^p: \mathbf{A}(\sigma_i^p(M), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$, $0 \leq i \leq p$;
- (iv) для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ и для любых пучков $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ на X определен гомоморфизм $\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \otimes \mathbf{A}(M, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{A}(M, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$;
- (v) для любого подмножества $M \subset S(Y)_p$ и для любого морфизма схем $f: X \rightarrow Y$ определен гомоморфизм $f^*: \mathbf{A}(M, f_*\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}(f^{-1}(M), \mathcal{F})$;
- (vi) все отображения, описанные в (i)–(v), коммутируют через гомоморфизм θ с их естественными аналогами для соответствующих групп, являющихся прямыми произведениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства утверждения (i) и конструкции из утверждений (ii) и (iii) аналогичны доказательству предложения 2.1.5, определению 2.2.2 и доказательству предложения 2.3.1 из [5] соответственно; единственное отличие заключается в том, что мы используем пучки типа $\mathcal{F}_U$ вместо когерентных пучков.

Доказательство утверждения (iv) проводится индукцией по p и использует естественный морфизм пучков $\mathcal{F}_U \otimes \mathcal{G}_V \rightarrow (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{U \cap V}$ для любых открытых подмножеств $U, V \subset X$. Кроме того, при $p = 0$ гомоморфизм из (iv) равен поточечному умножению в слоях пучков.

Доказательство утверждения (v) также проводится индукцией по p и использует естественный морфизм пучков $\mathcal{F}_U \otimes \mathcal{G}_V \rightarrow (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{U \cap V}$ для любого открытого подмножества $U \subset Y$. Кроме того, при $p = 0$ гомоморфизм из (v) равен поточечному отображению на слоях пучков.

Доказательство утверждения (vi) очевидно.

Для замкнутой или открытой подсхемы $Y \subset X$ через i_Y обозначим соответствующее вложение. Для подмножества $M \subset S(X)_p$ выражение $M(Y)$ обозначает множество флагов на Y , принадлежащих M . Приведенные ниже следствия из предложения 2.6 будут использованы нами в дальнейшем.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) для любого открытого подмножества $U \subset X$ и для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M(U), \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M(U), i_U^* \mathcal{F}),$$

где правая часть является адельной группой на U , в частности $\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M(U), i_U^* \mathcal{F}) \oplus A$ для некоторой подгруппы $A \subset \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$;

- (ii) для любой схемной точки $\eta \in X$ и для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M(\eta), \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M(\eta), j_\eta^* \mathcal{F}),$$

где $j_\eta: X_\eta = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta}) \rightarrow X$ – естественный морфизм схем, $M(\eta)$ – множество флагов на X_η , принадлежащих M , а правая часть является адельной группой на X_η , в частности $\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M(\eta), j_\eta^* \mathcal{F}) \oplus B$ для некоторой подгруппы $B \subset \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$;

- (iii) для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ и для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M(Z), \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M(Z), i_Z^* \mathcal{F}),$$

где правая часть является адельной группой на Z , в частности для любого пучка $\mathcal{G}$ на Z выполняется $\mathbf{A}(M(Z), (i_Z)_*\mathcal{G}) = \mathbf{A}(M(Z), \mathcal{G})$;

(iv) пусть Y и Z – замкнутые подсхемы в X такие, что $X = Y \cup Z$; тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ на X и для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = [\mathbf{A}(M(Y), i_Y^*\mathcal{F}) \oplus \mathbf{A}(M(Z), i_Z^*\mathcal{F})] / \mathbf{A}(M(Y \cap Z), i_{Y \cap Z}^*\mathcal{F});$$

(v) пусть точка $\eta \in X$ и подмножество $M \subset S(X)_p$ такие, что любой флаг из M начинается с η ; тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ на X и для любого открытого подмножества $U \subset X$, содержащего η , выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M, \mathcal{F}_U).$$

Положим $\mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^p = \mathbf{A}(S(X)_p, \mathcal{F})$; используя предложение 2.6, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Справедливы следующие утверждения:

(i) на $\mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^*$ определена естественная структура косимплициальной группы такая, что отображение $\theta: \mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^* \rightarrow C(X, \mathcal{F})^*$ является морфизмом косимплициальных групп;

(ii) для любых двух пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на X определен морфизм комплексов $\mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}_s(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}_s(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$, который коммутирует относительно θ с морфизмом комплексов $C(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes C(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow C(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$;

(iii) для любого морфизма схем $f: X \rightarrow Y$ и для любого пучка $\mathcal{F}$ на X определен морфизм косимплициальных групп $\mathbf{A}_s(Y, f_*\mathcal{F})^* \rightarrow \mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^*$, который коммутирует относительно θ с морфизмом косимплициальных групп $C(Y, f_*\mathcal{F})^* \rightarrow C(X, \mathcal{F})^*$.

Для косимплициальной группы A^* положим $A_{\deg}^p = \sum_{i=0}^p \text{Im}(s_i^p)$, где $s_i^p: A^{p+1} \rightarrow A^p$ – отображения вырождения; тогда $A_{\deg}^\bullet$ является подкомплексом в комплексе $A^\bullet$ (аналогичного вложения косимплициальных групп не существует). Хорошо известно, что отображение факторизации $A^\bullet \rightarrow A^\bullet / A_{\deg}^\bullet$ является квазиизоморфизмом; положим $A_{\text{red}}^\bullet = A^\bullet / A_{\deg}^\bullet$. Любой морфизм косимплициальных групп $f: A^* \rightarrow B^*$ индуцирует морфизм комплексов $f: A_{\text{red}}^\bullet \rightarrow B_{\text{red}}^\bullet$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Для схемы X и для абелева пучка $\mathcal{F}$ на X адельный комплекс $\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet$ равен $\mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})_{\text{red}}^\bullet$.

Из следствия 2.8 вытекает, что для любых пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на X определен морфизм комплексов $\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$, а для любого морфизма схем $f: X \rightarrow Y$ определен морфизм комплексов $f^*: \mathbf{A}(Y, f_*\mathcal{F})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet$. В частности, если $\mathcal{A}$ – пучок ассоциативных колец на X , то $\mathbf{A}(X, \mathcal{A})^\bullet$ – дифференциальное градуированное кольцо (DG-кольцо). Для морфизма схем $f: X \rightarrow Y$ определен гомоморфизм DG-колец $\mathbf{A}(Y, f_*\mathcal{A})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{A})^\bullet$. Помимо этого, для любого абелева пучка $\mathcal{F}$ имеется естественное вложение $\Gamma(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet)$.

Предположим, что схема X нётерова и имеет конечную размерность d ; тогда легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s(X, \mathcal{F})^p &= \prod_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_p \leq d} \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}), \\ \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^p &= \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_p \leq d} \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}), \end{aligned}$$

где выражение $(i_0, \dots, i_p)$ обозначает множество флагов $(\eta_0, \dots, \eta_p)$ на X таких, что для любых j , $0 \leq j \leq p$, выполняется равенство $\text{codim}(\eta_j) = i_j$. Мы будем говорить, что такие флаги *имеют тип* $(i_0, \dots, i_p)$. Например,

$$\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^0 = \prod_{0 \leq p \leq d} \mathbf{A}((p), \mathcal{F}), \quad \mathbf{A}((p), \mathcal{F}) = C((p), \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathcal{F}_\eta.$$

Таким образом, адельный комплекс ограничен и имеет длину d .

Мы также можем рассмотреть пучковый вариант изложенной выше конструкции. Именно, для любой схемы X , абелева пучка $\mathcal{F}$ на X и подмножества $M \subset S(X)_p$ возникает абелев предпучок $\underline{\mathbf{A}}(M, \mathcal{F})$, определяемый по формуле $U \mapsto \mathbf{A}(M(U), i_U^* \mathcal{F})$ (см. следствие 2.7, (i)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Если схема X нётерова, то предпучок $\underline{\mathbf{A}}(M, \mathcal{F})$ является вялым пучком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2.7, (i) вытекает, что рассматриваемый предпучок является вялым. Ясно, что достаточно проверить свойство пучка для конечного открытого покрытия $\bigcup_\alpha V_\alpha$ схемы X . В этом случае доказательство ведется индукцией по p . При этом учитывается, что для любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset V_\alpha$, содержащих фиксированную точку $\eta \in X$, открытое подмножество $\bigcap_\alpha U_\alpha \subset X$ также содержит η .

Таким образом, для нётеровой схемы X мы получаем вялый косимплициальный абелев пучок $\underline{\mathbf{A}}_s(X, \mathcal{F})^\bullet$, а также комплексы вялых пучков $\underline{\mathbf{A}}_s(X, \mathcal{F})^\bullet$, $\underline{\mathbf{A}}_s(X, \mathcal{F})_{\text{deg}}^\bullet$ и $\underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$. Более того, имеется морфизм комплексов $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$, где $\mathcal{F}$ рассматривается как комплекс, сосредоточенный в степени нуль.

ВОПРОС 2.11. *При каких условиях на пучок $\mathcal{F}$ комплекс пучков $\underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$ является вялой резольвентой пучка $\mathcal{F}$?*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. (i) Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – два пучка на нётеровой схеме X ; тогда композиция морфизмов комплексов $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$ совпадает с описанным выше отображением.

(ii) Пусть $f: X \rightarrow Y$ – морфизм нётеровых схем, $\mathcal{F}$ – пучок на X ; тогда композиция морфизмов комплексов $f_* \mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(Y, f_* \mathcal{F})^\bullet \rightarrow f_* \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$ совпадает со значением функтора f_* на описанном выше морфизме $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$.

В частности, для пучка ассоциативных колец $\mathcal{A}$ отображение

$$\bigoplus_{i \geq 0} H^i(X, \mathcal{A}) \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} H^i(\mathbf{A}(X, \mathcal{A})^\bullet)$$

является гомоморфизмом колец.

Мы будем использовать одно явное описание адельных групп на нётеровых схемах. Введем следующее обозначение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Для замкнутой подсхемы Z на нётеровой схеме X и для схемной точки $\eta \in X$ через $Z(\eta) \subset X^{(1)}$ обозначим *множество неприводимых приведенных дивизоров* на X , содержащихся в Z и проходящих через η . Аналогично, для замкнутого подмножества $W \subset X$ через $Z(W) \subset X^{(1)}$ будем обозначать *множество неприводимых дивизоров* на X , содержащихся в Z и содержащих W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполнено равенство

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\{D_{\eta_0 \dots \eta_k}\}} \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} (\mathcal{F}_{X \setminus D_{\eta_0 \dots \eta_{p-1}}})_{\eta_p},$$

где предел берется по всем системам $\{D_{\eta_0 \dots \eta_k}\}$, $0 \leq k < p$, состоящим из эффективных приведенных, возможно, приводимых дивизоров на X , параметризованных флагами $(\eta_0, \dots, \eta_k)$, которые могут быть продолжены направо до флага из M и которые обладают следующим свойством: для любого числа k , $0 < k < p$, и для любой “левой части” $(\eta_0, \dots, \eta_k)$ некоторого флага из M выполняется условие

$$D_{\eta_0 \dots \eta_{k-1}}(\eta_k) \supseteq D_{\eta_0 \dots \eta_{k-1} \eta_k}(\eta_k), \quad (2.1)$$

а также $D_{\eta_0}(\eta_0) = \emptyset$. Частичный порядок на системах дивизоров $\{D_{\eta_0 \dots \eta_k}\}$, $0 \leq k < p$, задается пофлаговым вложением дивизоров на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя замечание 2.5, можно показать индукцией по p , что

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\{U_{\eta_0 \dots \eta_k}\}} \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} (\mathcal{F}_{U_{\eta_0} \cap \dots \cap U_{\eta_0 \dots \eta_{p-1}}})_{\eta_p},$$

где предел берется по всем системам $\{U_{\eta_0 \dots \eta_k}\}$, $0 \leq k < p$, состоящим из открытых подмножеств в X , параметризованных “левыми частями” флагов из M так, что для любой “левой части” $(\eta_0, \dots, \eta_k)$ некоторого флага из M выполняется условие $\eta_k \in U_{\eta_0 \dots \eta_k}$. Частичный порядок на системах открытых подмножеств $\{U_{\eta_0 \dots \eta_k}\}$, $0 \leq k < p$, является обратным к пофлаговому вложению открытых подмножеств в X .

Поскольку схема X нётерова, увеличивая дополнение $X \setminus U_{\eta_0 \dots \eta_k}$, можно считать, что оно приведено, имеет чистую коразмерность один в X и не содержит η_k . Наконец, положим $D_{\eta_0} = X \setminus U_{\eta_0}$ и $D_{\eta_0 \dots \eta_k} = D_{\eta_0 \dots \eta_{k-1}} \cup X \setminus U_{\eta_0 \dots \eta_k}$ для $1 \leq k < p$. Предложение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.15. Из условия (2.1) следует, что имеет место включение

$$D_{\eta_0 \dots \eta_k}(\eta_j) \supseteq D_{\eta_0 \dots \eta_k \dots \eta_{k+l}}(\eta_j)$$

для любых $0 \leq j \leq k+1$, $0 \leq l \leq p-k-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Каждый неприводимый дивизор $D \in D_{\eta_0 \dots \eta_k \eta_{k+1}}(\eta_j)$ содержит η_{k+1} и поэтому принадлежит $D_{\eta_0 \dots \eta_k}(\eta_{k+1})$. Более того, поскольку D содержит η_j , мы видим, что D также принадлежит $D_{\eta_0 \dots \eta_k}(\eta_j)$.

2.2. Связь с комплексом Кузена. Пусть X – нётерова катенарная схема, все неприводимые компоненты которой имеют одинаковую конечную размерность d . Для замкнутого подмножества $Z \subset X$ и пучка $\mathcal{F}$ на X будем обозначать через $\gamma_Z \mathcal{F}$ пучок на Z такой, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ группа $(\gamma_Z \mathcal{F})(U \cap Z)$ равна группе сечений из $\mathcal{F}(U)$ с носителем на $U \cap Z$. В частности, $R\gamma_Z = i_{Z*}$. Функторы $R^p \gamma_Z$ можно также применять к комплексам пучков на X . Следуя обозначениям из [11], для пучка $\mathcal{F}$ на X и произвольной точки $\eta \in X^{(p)}$ положим $H_\eta^p(X, \mathcal{F}) = (R^p \gamma_{\bar{\eta}} \mathcal{F})_\eta$. Через $\nu_{\eta\xi}: H_\eta^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_\xi^{p+1}(X, \mathcal{F})$ обозначим естественное отображение вычета,

определенное для произвольной пары точек $\eta, \xi \in X$ такой, что $\xi \in \bar{\eta}$ и $\bar{\xi}$ имеет коразмерность один в $\bar{\eta}$ (см. [11]). Пусть $\text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$ – комплекс Кузена пучка $\mathcal{F}$ на X :

$$\text{Cous}(X, \mathcal{F})^p = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} H_\eta^p(X, \mathcal{F}),$$

где дифференциал равен сумме отображений $\nu_{\eta\xi}$. Можно также рассмотреть пучковый вариант комплекса Кузена, а именно комплекс пучков $\underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet$, задаваемый по формуле

$$\underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^p = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} (i_{\bar{\eta}})_* H_\eta^p(X, \mathcal{F}),$$

где для каждой точки $\eta \in X^{(p)}$ мы рассматриваем $H_\eta^p(X, \mathcal{F})$ как постоянный пучок на $\bar{\eta}$. Имеется естественный морфизм комплексов $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet$, где $\mathcal{F}$ рассматривается как комплекс, сосредоточенный в нулевом члене.

Для строго возрастающей последовательности натуральных чисел $0 \leq i_0 < \dots < i_p$ при $i_0 = 0$ определим ее *глубину* как максимальное натуральное число $l \geq 0$ такое, что $(i_0, \dots, i_l) = (0, \dots, l)$. Если $i_0 > 0$, то положим глубину последовательности $(i_0, \dots, i_p)$ равной -1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Пусть $(i_0, \dots, i_p)$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $i_p \leq d$. Предположим, что глубина последовательности $(i_0, \dots, i_p)$ равна $l \geq 0$. Тогда существует каноническое отображение

$$\begin{aligned} \nu_{0\dots l}: \mathbf{A}((0, 1, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p), \mathcal{F}) \\ \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(l)}} \mathbf{A}((0, (i_{l+1} - l), \dots, (i_p - l)), R^l \gamma_{\bar{\eta}} \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet), \end{aligned}$$

где правая часть является прямой суммой аделных групп на $\eta \in X^{(l)}$. Более того, для любого аделя $f \in \mathbf{A}((0, 1, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p), \mathcal{F})$ и любого флага $(\eta_l, \eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})$ на X типа $(l, i_{l+1}, \dots, i_p)$ имеет место равенство

$$\theta(\nu_{0\dots l}(f))_{\eta_l \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}} = \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_l)} (\nu_{\eta_{l-1}\eta_l} \circ \dots \circ \nu_{\eta_0\eta_1})(\theta(f)_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}),$$

где сумма в правой части на самом деле конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство ведется индукцией по l . При $l = 0$ из следствия 2.7, (iii)–(v) вытекает существование отображения

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((0, i_1, \dots, i_p), \mathcal{F}) &= \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} \mathbf{A}((0, i_1, \dots, i_p)(\bar{\eta}), i_{\bar{\eta}}^* \mathcal{F}) \\ &= \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} \mathbf{A}((0, i_1, \dots, i_p), \gamma_{\bar{\eta}} \mathcal{F}) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} \mathbf{A}((0, i_1, \dots, i_p), \gamma_{\bar{\eta}} \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet). \end{aligned}$$

Заметим, что для композиции замкнутых вложений $Z' \subset Z \subset X$ такой, что Z имеет чистую коразмерность l в X , а Z' – чистую коразмерность один в Z , естественный морфизм комплексов

$$R^l \gamma_Z \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \gamma_Z \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet[l]$$

индуцирует морфизм пучков

$$\begin{aligned} R^1 \gamma_{Z'Z} (R^l \gamma_Z \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet) \\ \rightarrow R^1 \gamma_{Z'Z} (\gamma_Z \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet[l]) = R^{l+1} \gamma_{Z'} \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet. \end{aligned}$$

Следовательно, чтобы доказать предложение индукцией по l , достаточно рассмотреть случай, когда $l = 1$ и X неприводимо. Напомним, что для любой замкнутой подсхемы $D \subset X$ имеется морфизм пучков $\mathcal{F}_U \rightarrow (i_D)_* R^1 \gamma_D \mathcal{F}$, где $U = X \setminus D$. Поэтому, используя тот же аргумент, что и в случае $l = 0$, мы получаем отображение

$$\begin{aligned} \mathbf{A}((0, 1, i_2, \dots, i_p), \mathcal{F}) &= \varinjlim_U \mathbf{A}((1, i_2, \dots, i_p), \mathcal{F}_U) \\ &\rightarrow \varinjlim_{D=X \setminus U} \mathbf{A}((1, i_2, \dots, i_p), (i_D)_* R^1 \gamma_D \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_D \mathbf{A}((0, i_2 - 1, \dots, i_p - 1), R^1 \gamma_D \mathcal{F}) \\ &= \bigoplus_{\eta \in X^{(1)}} \mathbf{A}((0, i_2 - 1, \dots, i_p - 1), R^1 \gamma_{\bar{\eta}} \mathcal{F}) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(1)}} \mathbf{A}((0, i_2 - 1, \dots, i_p - 1), R^1 \gamma_{\bar{\eta}} \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet), \end{aligned}$$

где второй предел берется по всем замкнутым подсхемам $D \subset X$ чистой коразмерности один.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. По всей видимости, в формулировке предложения 2.16 невозможно заменить пучок $R^l \gamma_Z \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet$ на кажущийся более естественным пучок $R^l \gamma_Z \mathcal{F}$. По крайней мере, не удастся повторить приведенный выше индукционный переход, поскольку в общем случае нет отображения $R^1 \gamma_{Z'Z} (R^l \gamma_Z \mathcal{F}) \rightarrow R^{l+1} \gamma_{Z'} \mathcal{F}$ в обозначениях предложения 2.16.

ПРИМЕР 2.18. При $l = p$ получается отображение

$$\nu_p = \nu_{0\dots p}: \mathbf{A}((0, \dots, p), \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} H_{\eta}^p(X, \mathcal{F}).$$

Возникает морфизм комплексов $\nu_X: \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$, который в степени p равен отображению $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \nu_p$ на компоненте адельного комплекса типа $(0, \dots, p)$ и равен нулю на всех остальных компонентах адельного комплекса степени p .

Для любых двух пучков $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ на X и точки $\eta \in X^{(p)}$ имеется естественный морфизм

$$\begin{aligned} H_{\bar{\eta}}^p(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^q &= \mathbf{A}((p), (i_{\bar{\eta}})_* R^p \gamma_{\bar{\eta}} \mathcal{F}) \otimes \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^q \\ &\rightarrow \mathbf{A}(\bar{\eta}, R^p \gamma_{\bar{\eta}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}))^q \\ &\xrightarrow{\nu_{\bar{\eta}}} \bigoplus_{\xi \in \bar{\eta}^{(q)}} H_{\xi}^q(\bar{\eta}, R^p \gamma_{\bar{\eta}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})) \subset \bigoplus_{\xi \in X^{(p+q)}} H_{\xi}^{p+q}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Легко проверить, что это определяет морфизм комплексов

$$\mu: \text{Cous}(X, \mathcal{F})^{\bullet} \otimes \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^{\bullet} \rightarrow \text{Cous}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^{\bullet},$$

задаваемый по формуле

$$\mu(f \otimes g)_{\eta} = (-1)^{\varepsilon(p,q)} \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_{q-1})} (\nu_{\eta_{q-1}\eta} \circ \dots \circ \nu_{\eta_0\eta_1})(f_{\eta_0} \cdot \theta(g)_{\eta_0 \dots \eta_{q-1}\eta})$$

для любых элементов $f \in \text{Cous}(X, \mathcal{F})^p$, $g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^q$ и точки $\eta \in X^{(p+q)}$, где сумма берется по всем флагам $(\eta_0, \dots, \eta_{q-1})$ типа $(p, p+1, \dots, p+q-1)$ таким, что $\eta \in \bar{\eta}_{q-1}$, $f_{\eta_0} \cdot \theta(g)_{\eta_0 \dots \eta_{q-1}\eta} \in H_{\eta}^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, а $\varepsilon(p, q) = pq + \frac{q(q+1)}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.19. Аналогичное произведение будет также корректно определено, если заменить $\mathcal{F}$ на комплекс абелевых пучков $\mathcal{F}^{\bullet}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. Произведение между комплексом Кузена и адельным комплексом для когерентного пучка рассматривалось в [14].

ПРИМЕР 2.21. Умножение адельного комплекса справа на $1 \in \mathbb{Z} = \underline{\mathbb{Z}}(X)$ совпадает с морфизмом ν_X .

В частности, если $\mathcal{A}$ является пучком ассоциативных колец на X , то $\text{Cous}(X, \mathcal{A})^{\bullet}$ является правым DG-модулем над DG-кольцом $\mathbf{A}(X, \mathcal{A})^{\bullet}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.22. Рассмотрим индуцированный морфизм комплексов пучков $\nu_X: \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^{\bullet} \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^{\bullet}$. Предположим, что пучок $\mathcal{F}$ на X является пучком Коэн–Маколея в смысле [11], т.е. что композиция $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^{\bullet} \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^{\bullet}$ является квазиизоморфизмом. Тогда для любого $i \geq 0$ группа когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$ является прямым слагаемым в группе $H^i(\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^{\bullet})$. Можно ожидать, что отображение $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^{\bullet}$ является квазиизоморфизмом для любого пучка Коэн–Маколея $\mathcal{F}$. Частный случай этого установлен далее в теореме 3.34. В частности, если $\mathcal{A}$ является одновременно пучком Коэн–Маколея и пучком алгебр, то ассоциативное кольцо $\bigoplus_{i \geq 0} H^i(X, \mathcal{A})$ является прямым слагаемым в ассоциативном кольце $\bigoplus_{i \geq 0} H^i(\mathbf{A}(X, \mathcal{A})^{\bullet})$.

Следующее утверждение будет нами использовано в дальнейшем.

ЛЕММА 2.23. *Предположим, что X является нётеровой катенарной схемой, все неприводимые компоненты которой имеют одинаковую конечную размерность d . Пусть $\mathcal{F}$ – пучок Коэн–Маколея на X (см. [11]). Тогда для любого p , $0 \leq p \leq d$, отображение*

$$\nu_p: \bigoplus_{(\eta_0, \dots, \eta_p)} \mathcal{F}_{\eta_0} \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} H_{\eta}^p(X, \mathcal{F})$$

является сюръекцией, где первая прямая сумма берется по всем флагам типа $(0, \dots, p)$ на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется индукцией по p . Случай $p = 0$ тривиален. Предположим, что $p > 0$. Рассмотрим набор $\{f_\eta\} \in \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} H_\eta^p(X, \mathcal{F})$. Заметим, что для каждой точки $\eta \in X^{(p)}$ пучок $j_\eta^* \mathcal{F}$ является пучком Коэн–Маколея на X_η , где $j_\eta: X_\eta = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta}) \rightarrow X$ – естественный морфизм схем. Следовательно, для каждой точки $\eta \in X^{(p)}$ существует набор

$$\{g_\xi\}_{(\eta)} \in \bigoplus_{\xi \in X_\eta^{(p-1)}} H_\xi^{p-1}(X_\eta, j_\eta^* \mathcal{F})$$

такой, что $d_\eta \{g_\xi\}_{(\eta)} = f_\eta$, где d_η – дифференциал в комплексе Кузена на X_η . Можно полагать, что $\{g_\xi\}_{(\eta)} = 0$ для почти всех $\eta \in X^{(p)}$. По предположению индукции для каждой точки $\eta \in X^{(p)}$ существует набор $\{g_{\xi_0 \dots \xi_{p-1}}\}_{(\eta)} \in \bigoplus_{\xi_0, \dots, \xi_{p-1}} \mathcal{F}_{\xi_0}$ такой, что $\nu_{p-1} \{g_{\xi_0 \dots \xi_{p-1}}\}_{(\eta)} = \{g_\xi\}_{(\eta)}$, где прямая сумма берется по всем флагам типа $(0, \dots, p-1)$ на X_η . Вновь можно считать, что $\{g_{\xi_0 \dots \xi_{p-1}}\}_{(\eta)} = 0$ для почти всех $\eta \in X^{(p)}$. Наконец, положим $\{f_{\eta_0 \dots \eta_p}\} = \{g_{\eta_0 \dots \eta_{p-1}}\}_{(\eta_p)}$. Лемма доказана.

2.3. Формула проекции. Пусть X, Y – нётеровы катенарные неприводимые схемы, $f: X \rightarrow Y$ – морфизм схем такой, что для каждой точки $\eta \in X$ выполняется неравенство $\dim(\bar{\eta}) \geq \dim(\overline{f(\eta)})$. При этом предположении для каждого пучка $\mathcal{F}$ на X возникает морфизм комплексов Кузена $\text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \text{Cous}(Y, Rf_* \mathcal{F}[d])^\bullet$, где $d = \dim(f) = \dim(X) - \dim(Y)$. Определение этого морфизма использует вложение комплексов $\Gamma_Z(X, C(\mathcal{F})^\bullet) \hookrightarrow \Gamma_{\overline{f(Z)}}(Y, f_* C(\mathcal{F})^\bullet)$ для каждого замкнутого подмножества $Z \subset X$, где $C(\mathcal{F})^\bullet$ – некоторая являющая резольвента пучка $\mathcal{F}$ на X . Морфизм комплексов Кузена $\text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \text{Cous}(Y, Rf_* \mathcal{F}[d])^\bullet$ состоит из гомоморфизмов типа

$$f_*: H_\eta^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_{f(\eta)}^{p-d}(X, Rf_* \mathcal{F}[d]),$$

где $\dim(\bar{\eta}) = \dim(\overline{f(\eta)})$.

Имеет место следующая адельная формула проекции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.24. Пусть морфизм $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет указанным выше условиям, и пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ – два пучка на X . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}(Y, f_* \mathcal{G})^\bullet & = & \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}(Y, f_* \mathcal{G})^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}(X, \mathcal{G})^\bullet & & \text{Cous}(Y, Rf_* \mathcal{F}[d])^\bullet \otimes \mathbf{A}(Y, \mathcal{G})^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cous}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet & \longrightarrow & \text{Cous}(Y, Rf_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})[d])^\bullet \end{array}$$

коммутирует с точностью до знака $(-1)^{d \deg \mathbf{A}}$, где, как и раньше, $d = \dim(f)$, а $\deg \mathbf{A}$ обозначает степень компонент в адельном комплексе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $\eta \in X^{(p)}$ такой, что $\dim(\bar{\eta}) = \dim(\overline{f(\eta)})$, диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\eta}^p(X, \mathcal{F}) \otimes (f_*\mathcal{G})_{f(\eta)} & = & H_{\eta}^p(X, \mathcal{F}) \otimes (f_*\mathcal{G})_{f(\eta)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\eta}^p(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}_{\eta} & & H_{f(\eta)}^{p-d}(Y, Rf_*\mathcal{F}[d]) \otimes (f_*\mathcal{G})_{f(\eta)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\eta}^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) & = & H_{f(\eta)}^{p-d}(Y, Rf_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})[d])
 \end{array}$$

где $f(\eta) \in Y^{(q)}$, коммутует. Таким образом, предложение вытекает из следующей леммы и явной формулы для произведения между комплексом Кузена и адельным комплексом.

ЛЕММА 2.25. Пусть морфизм $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет указанным выше условиям, причем $\dim(X) = \dim(Y)$, $\mathcal{H}$ – пучок на X , а $(\xi_0, \dots, \xi_r)$ – флаг на Y такой, что $\xi_l \in Y^{(l)}$ для всех l , $0 \leq l \leq r$. Тогда для любого элемента h из слоя $\mathcal{H}_X$ пучка $\mathcal{H}$ в общей точке на X имеем

$$f_* \left(\sum_{(\eta_0, \dots, \eta_r)} \nu_{\eta_0 \dots \eta_r}(h) \right) = \nu_{\xi_0 \dots \xi_r}(f_*(h)),$$

где $f_*: H_{\eta}^*(X, \mathcal{H}) \rightarrow H_{f(\eta)}^{*-d}(Y, Rf_*\mathcal{H}[d])$ – естественные гомоморфизмы, а сумма берется по всем флагам $(\eta_0, \dots, \eta_r)$ на X таким, что $f(\eta_0, \dots, \eta_r) = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ и $\eta_l \in X^{(l)}$ для всех l , $0 \leq l \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется индукцией по r . Заметим, что имеется лишь конечное число схемных точек $\eta_1 \in X^{(1)}$ таких, что $f(\eta_1) = \xi_1$. Следовательно, если заменить X и Y на $\bar{\eta}_1$ и $\bar{\xi}_1$ соответственно, то станет видно, что индукционный переход равносильен случаю $r = 1$. С другой стороны, при $r = 1$ отображения вычета $\nu_{\eta_0 \eta_1}$ и $\nu_{\xi_0 \xi_1}$ соответствуют дифференциалам в комплексах Кузена $\text{Cous}(X, \mathcal{H})^{\bullet}$ и $\text{Cous}(Y, Rf_*\mathcal{H}[d])^{\bullet}$ соответственно. Следовательно, лемма равносильна тому указанному выше факту, что гомоморфизмы f_* определяют морфизм соответствующих комплексов Кузена.

2.4. Пучки с контролируемым носителем. В этом пункте вводится понятие пучков с контролируемым носителем и обсуждаются свойства соответствующих адельных комплексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.26. Будем говорить, что пучок $\mathcal{F}$ на схеме X имеет контролируемый носитель, если для любой точки $\eta \in X$ существует замкнутое подмножество $Z_{\eta} \subset X$ такое, что $\eta \notin Z_{\eta}$ и $\varinjlim (i_Z)_* \gamma_Z \mathcal{F} = (i_{Z_{\eta}})_* \gamma_{Z_{\eta}} \mathcal{F}$, где предел берется по всем замкнутым подмножествам $Z \subset X$ таким, что $\eta \notin Z$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.27. (i) Если $\mathcal{F}$ имеет контролируемый носитель, то для любого открытого подмножества $U \subset X$ пучок $\mathcal{F}_U$ также имеет контролируемый носитель (действительно, для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ выполняется равенство $(i_Z)_* \gamma_Z(\mathcal{F}_U) = ((i_Z)_* \gamma_Z \mathcal{F})_U$).

(ii) Любой подпучок пучка с контролируемым носителем также имеет контролируемый носитель.

ПРИМЕР 2.28. Приведем примеры пучков с контролируемым носителем.

1) Если X имеет конечное число неприводимых компонент, то постоянный пучок на X имеет контролируемый носитель.

2) Если $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на нётеровой схеме X , то $\mathcal{F}$ имеет контролируемый носитель. Действительно, все пучки $(i_Z)_*\gamma_Z\mathcal{F}$ из определения контролируемого носителя являются когерентными подпучками в когерентном пучке $\mathcal{F}$.

3) Любой пучок Коэн–Маколея на нётеровой схеме имеет контролируемый носитель.

4) Пусть X – неприводимая одномерная схема с бесконечным числом замкнутых точек. Рассмотрим пучок $\bigoplus_{x \in X} (i_x)_*\mathbb{Z}$, где x пробегает все замкнутые точки в X , а $i_x: \text{Спец}(k(x)) \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение точки. Тогда пучок $\bigoplus_{x \in X} (i_x)_*\mathbb{Z}$ не имеет контролируемого носителя.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.29. Если пучок $\mathcal{F}$ на схеме X имеет контролируемый носитель, то для любой точки $\eta \in X$ существует открытое подмножество $U_\eta \subset X$, содержащее η , такое, что для любых двух открытых подмножеств $V \subset U \subset U_\eta$, содержащих η , естественный морфизм пучков $\mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F}_V$ инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется равенство $\text{Ker}\{\mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F}_V\} = ((i_Z)_*\gamma_Z\mathcal{F})_U$, где $Z = X \setminus V$. Положим $U_\eta = X \setminus Z_\eta$. Тогда, поскольку $Z_\eta \subset Z$ и $U \subset X \setminus Z_\eta$, мы получаем $((i_Z)_*\gamma_Z\mathcal{F})_U = ((i_{Z_\eta})_*\gamma_{Z_\eta}\mathcal{F})_U = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.30. Предположим, что пучок $\mathcal{F}$ на схеме X имеет контролируемый носитель. Тогда отображение θ инъективно для любого подмножества $M \subset S(X)_p$:

$$\theta: \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \hookrightarrow C(M, \mathcal{F}) = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} \mathcal{F}_{\eta_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство ведется индукцией по p . Случай $p = 0$ тривиален. Предположим, что $p > 0$. Тогда по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) &= \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \hookrightarrow \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} \prod_{(\eta_1, \dots, \eta_p) \in {}_\eta M} (\mathcal{F}_{U_\eta})_{\eta_1} \\ &\hookrightarrow \prod_{\eta \in P(X)} \prod_{(\eta_1, \dots, \eta_p) \in {}_\eta M} \varinjlim_{U_\eta} (\mathcal{F}_{U_\eta})_{\eta_1} = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} \mathcal{F}_{\eta_0}, \end{aligned}$$

где инъективность второго отображения следует из утверждения 2.29.

Таким образом, для пучка с контролируемым носителем $\mathcal{F}$ каждый адель $f \in \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$ однозначно определяется своими компонентами $f_{\eta_0 \dots \eta_p} \in \mathcal{F}_{\eta_0}$, где $(\eta_0, \dots, \eta_p)$ – все флаги в M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.31. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок с контролируемым носителем на схеме X . Тогда для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ имеется естественное вложение $\bigoplus_{(\eta_0, \dots, \eta_p) \in M} \mathcal{F}_{\eta_0} \subset \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$.

ПРИМЕР 2.32. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок с контролируемым носителем на X . Для неприводимого замкнутого подмножества $Z \subset X$ будем обозначать через $\mathcal{F}_Z$ слой пучка $\mathcal{F}$ в общей точке множества Z .

1) Предположим, что $\dim X = 1$; тогда адельная группа $\mathbf{A}((0, 1), \mathcal{F}) \subset \prod_{x \in X} \mathcal{F}_X$ состоит из всех наборов $\{f_{Xx}\} \in \prod_{x \in X} \mathcal{F}_X$ таких, что $f_{Xx} \in \text{Im}(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_X)$ для почти всех $x \in X$. В частности, мы получаем рациональные адели на кривой, если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ (см. [1], где рациональные адели называются *распределениями*).

2) Предположим, что $\dim X = 2$. Опишем явно возникающие адельные группы. Группа $\mathbf{A}((0, 1), \mathcal{F}) \subset \prod_{C \subset X} \mathcal{F}_X$ состоит из всех наборов $\{f_{XC}\}$ таких, что $f_{XC} \in \text{Im}(\mathcal{F}_C \rightarrow \mathcal{F}_X)$ для почти всех неприводимых кривых $C \in X$. Группа $\mathbf{A}((1, 2), \mathcal{F}) \subset \prod_{x \in C} \mathcal{F}_C$ состоит из всех наборов $\{f_{Cx}\}$ таких, что $f_{Cx} \in \text{Im}(\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_C)$ для почти всех точек $x \in C$ на любой фиксированной кривой C . Группа $\mathbf{A}((0, 2), \mathcal{F}) \subset \prod_{x \subset X} \mathcal{F}_X$ состоит из всех наборов $\{f_{Xx}\}$, для которых существует дивизор $D \subset X$ такой, что $f_{Xx} \in \text{Im}((\mathcal{F}_{X \setminus D})_x \rightarrow \mathcal{F}_X)$ для любой замкнутой точки $x \in X$. Адельная группа $\mathbf{A}((0, 1, 2), \mathcal{F}) \subset \prod_{x \in C \subset X} \mathcal{F}_X$ состоит из всех наборов $\{f_{XCx}\}$, удовлетворяющих следующему условию: существует дивизор $D \subset X$ и для каждой неприводимой кривой $C \subset X$ определен дивизор D_C на X так, что $D_C(C) = D(C)$ (см. определение 2.13) и $f_{XCx} \in \text{Im}((\mathcal{F}_{X \setminus D_C})_x \rightarrow \mathcal{F}_X)$ для всех флагов $x \in C \subset X$. Это условие аналогично конструкции, данной в [2, с. 751].

2.5. 1-чистые пучки. В этом пункте вводится понятие 1-чистых пучков и обсуждаются свойства соответствующих адельных комплексов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.33. Пучок $\mathcal{F}$ на нётеровей схеме X называется *1-чистым*, если для любой схемной точки $\eta \in X^{(i)}$ выполняется условие $H_\eta^0(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i \geq 1$ или $H_\eta^1(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i \geq 2$.

Другими словами, пучок $\mathcal{F}$ 1-чистый, если следующая последовательность пучков точна:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^0 \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.34. Для любого открытого подмножества $U \subset X$, любой точки $\xi \in P(X)$ и любого 1-чистого пучка $\mathcal{F}$ на X имеются точные последовательности пучков

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}_U &\rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} (i_{\bar{\eta}})_* \mathcal{F}_\eta \rightarrow \bigoplus_{\eta \in D(X \setminus U)} (i_{\bar{\eta}})_* H_\eta^1(X, \mathcal{F}), \\ 0 \rightarrow [\mathcal{F}]_\xi &\rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} (i_{\bar{\eta}})_* \mathcal{F}_\eta \rightarrow \bigoplus_{\eta \in D(\xi)} (i_{\bar{\eta}})_* H_\eta^1(X, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

где $D(X \setminus U)$ – множество точек коразмерности один на X , которые принадлежат дополнению $X \setminus U$, а $D(\xi)$ – множество точек η коразмерности один на X таких, что $\xi \in \bar{\eta}$. В частности, пучки $\mathcal{F}_U$ и $[\mathcal{F}]_\xi$ являются 1-чистыми для любого 1-чистого пучка $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.35. Легко показать, что для любого пучка $\mathcal{F}$ на нётеровой схеме X пучок $\bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} (i_{\bar{\eta}})_* \mathcal{F}_\eta$ имеет контролируемый носитель. Следовательно, любой 1-чистый пучок на нётеровой схеме имеет контролируемый носитель.

Для любого флага $F = (\eta_0, \dots, \eta_i)$ и любого подмножества $M \subset S(X)_p$ положим ${}_FM = {}_{\eta_i}({}_{\eta_{i-1}}(\dots {}_{\eta_0}(M)))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.36. Пусть $\mathcal{F}$ – 1-чистый пучок на нётеровой неприводимой схеме X . Предположим, что подмножества $M \subset S(X)_p$ и натуральное число l , $0 \leq l \leq p$, удовлетворяют следующему условию: либо $p \leq l + 1$, либо для любого флага $F = (\eta_0, \dots, \eta_{l+1}) \in S(X)_{p+1}$ выполняется или равенство ${}_FM = {}_{\eta_{l+1}}(\delta_0^{p-l}, \dots, \delta_l^p(M))$, или ${}_FM = \emptyset$. Тогда отображения границы $C(\delta_l^p(M), \mathcal{F}) \rightarrow C(M, \mathcal{F})$ и $\mathbf{A}(\delta_l^p(M), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}(M, \mathcal{F})$, $0 \leq l \leq p$ (см. предложение 2.6, (ii)), инъективны и имеет равенство

$$\mathbf{A}(\delta_l^p(M), \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \cap C(\delta_l^p(M), \mathcal{F}),$$

где пересечение берется внутри группы $C(M, \mathcal{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку X неприводимо, пучок $\mathcal{F}$ является подпучком в постоянном пучке, и для любых точек $\eta, \xi \in X$ и открытого подмножества U таких, что $\xi \in \bar{\eta}$, $\eta \in U$ и U связно, естественные морфизмы $\mathcal{F}_\xi \rightarrow \mathcal{F}_\eta$ и $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_\eta$ инъективны. Таким образом мы получаем инъективность отображений границы для групп, являющихся прямым произведением, следовательно, из предложения 2.30 мы получаем инъективность отображений границы для адельных групп. В частности, левая часть требуемого равенства содержится в правой части.

Для того чтобы доказать обратное включение, будем использовать индукцию по p и l . При $p = 1$ и $l = 0, 1$ имеем равенство $\mathbf{A}(\delta_l^1(M), \mathcal{F}) = C(\delta_l^1(M), \mathcal{F})$ и доказательство очевидно.

Предположим теперь, что $p > 1$, $l = 0$. Обозначим через A правую часть требуемого равенства. Для каждой точки $\eta \in P(X)$ рассмотрим образ A_η группы A относительно естественного отображения $C(\delta_0^p(M), \mathcal{F}) \rightarrow C({}_\eta M, \mathcal{F})$ (см. предложение 2.6, (i)). Группа A_η совпадает с проекцией группы A на η -компоненту в прямом произведении $C(M, \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in P(X)} C({}_\eta M, [\mathcal{F}]_\eta)$, и поэтому $A_\eta = \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \cap C({}_\eta M, \mathcal{F})$, где пересечение берется в группе $C({}_\eta M, [\mathcal{F}]_\eta)$. Следовательно, по лемме 2.40 (см. далее) имеем равенство $A_\eta = \mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F})$. Заметим, что $\delta_0^p(M) = \bigcup_{\eta \in P(X)} {}_\eta M$ и для любой точки $\xi \in P(X)$ существует точка $\eta \in P(X)$ такая, что $\xi({}_\eta M) = \xi(\delta_0^p(M))$. Из леммы 2.41 получаем $A = \mathbf{A}(\delta_0^p(M), \mathcal{F})$.

Предположим, что $p > 1$, $l > 0$. Тогда по определению правая часть требуемого равенства имеет вид

$$\begin{aligned} & \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \cap C(\delta_l^p(M), \mathcal{F}) \\ &= \prod_{\eta \in P(X)} \left(\varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \cap C({}_\eta \delta_l^p(M), [\mathcal{F}]_\eta) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $l > 0$, для любой точки $\eta \in P(X)$ выполняется равенство ${}_\eta \delta_l^p(M) = \delta_{l-1}^p({}_\eta M)$. С другой стороны, из предложения 2.30 вытекает, что $\mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \subset C({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta})$ и пересечение, соответствующее точке η , на самом деле содержится в подгруппе $\varinjlim_{U_\eta} C(\delta_{l-1}^p({}_\eta M), \mathcal{F}_{U_\eta}) \subset C(\delta_{l-1}^p({}_\eta M), [\mathcal{F}]_\eta)$. Следовательно, по

предположению индукции для $\mathcal{F}_{U_\eta}$, ${}_\eta M$, $p - 1$ и $l - 1$ рассматриваемое выше пересечение имеет вид

$$\begin{aligned} & \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} (\mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \cap C(\delta_{l-1}^p({}_\eta M), \mathcal{F}_{U_\eta})) \\ &= \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\delta_{l-1}^p({}_\eta M), \mathcal{F}_{U_\eta}) = \mathbf{A}(\delta_l^p(M), \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.37. Из доказательства предложения 2.36 следует, что для любого подпучка $\mathcal{F}$ в постоянном пучке на схеме X с конечным числом неприводимых компонент, любого $M \subset S(X)_p$ и любого числа l , $0 \leq l \leq p$, имеется вложение

$$\mathbf{A}(\delta_l^p(M), \mathcal{F}) \subset \mathbf{A}(M, \mathcal{F}) \cap C(\delta_l^p(M), \mathcal{F}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.38. Условие в предложении 2.36, что $\mathcal{F}$ является 1-чистым пучком, может быть заменено более слабым условием, но такое усиление предложения 2.36 нам не потребуется: все рассматриваемые нами в дальнейшем пучки являются 1-чистыми; аналогичное верно и для условия, налагаемого на множество M .

ПРИМЕР 2.39. Пусть X – неприводимая схема, $\dim(X) = 2$, и $D \subset X$ – замкнутое неприводимое подмножество в X коразмерности один с бесконечным числом замкнутых точек. Положим $G = \bigoplus_{y \in D} \mathbb{Z}$, где прямая сумма берется по всем замкнутым точкам y на D . Пусть $\mathcal{F}$ – ядро естественного морфизма $\underline{G} \rightarrow \bigoplus_{y \in D} (i_y)_* \mathbb{Z}$ пучков на X . Тогда $\mathcal{F}$ является подпучком в постоянном пучке, но не является 1-чистым пучком на X . Рассмотрим адель $f \in C((1, 2), \mathcal{F})$, определяемый равенством $f_{Cx} = \{1_x\} \in G$ для $C = D$ и равенством $f_{Cx} = 0$ в противном случае. Для $C = D$ выполняется условие $f_{Cx} \in (\mathcal{F}_{X \setminus \{x\}})_x$ и имеются два вложения $(\mathcal{F}_{X \setminus \{x\}})_x \subset (\mathcal{F}_{X \setminus C})_x$ и $(\mathcal{F}_{X \setminus \{x\}})_x \subset \mathcal{F}_C$. Следовательно, $f \in \mathbf{A}((0, 1, 2), \mathcal{F}) \cap C((1, 2), \mathcal{F})$, но $f \notin \mathbf{A}((1, 2), \mathcal{F})$.

ЛЕММА 2.40. Пусть $\mathcal{F}$ – 1-чистый пучок на нётеровой схеме X . Рассмотрим пучок $\mathcal{G} = \mathcal{F}_V$ для некоторого открытого подмножества $V \subset X$. Тогда для любого подмножества $M \subset S(X)_p$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{G}) \cap C(M, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(M, \mathcal{F}),$$

где пересечение берется внутри группы $C(M, \mathcal{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется индукцией по p . Случай $p = 0$ тривиален. Предположим, что $p > 0$. Тогда по определению левая часть равна

$$\prod_{\eta \in P(X)} \left(\varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}({}_\eta M, \mathcal{G}_{U_\eta}) \cap C({}_\eta M, [\mathcal{F}]_\eta) \right).$$

Рассмотрим произвольную точку $\eta \in P(X)$ и открытое подмножество $U \subset X$, содержащее η . Предположим, что U настолько мало, что все неприводимые компоненты дополнения $U \setminus V$ содержат η и естественные морфизмы $\mathcal{F}_U \rightarrow [\mathcal{F}]_\eta$, $\mathcal{G}_U \rightarrow [\mathcal{G}]_\eta$ инъективны. Из явного описания этих пучков, данного в замечании 2.34, следует, что $\mathcal{G}_U \cap [\mathcal{F}]_\eta = \mathcal{F}_U$, где пересечение берется внутри пучка $[\mathcal{G}]_\eta$.

Таким образом, $C(N, \mathcal{G}_U) \cap C(N, [\mathcal{F}]_\eta) = C(N, \mathcal{F}_U)$ для любого подмножества $N \subset S(X)_q$.

Как следствие, пересечение $\varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\eta M, \mathcal{G}_{U_\eta}) \cap C(\eta M, [\mathcal{F}]_\eta)$ на самом деле содержится в подгруппе $\varinjlim_{U_\eta} C(\eta M, \mathcal{F}_{U_\eta}) \subset C(\eta M, [\mathcal{F}]_\eta)$, и по предположению индукции мы получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 2.41. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок с контролируемым носителем на схеме X , и пусть N – подмножество в $S(X)_p$ такое, что $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$, где $N_\alpha \subset S(X)_p$ для любого индекса α . Предположим, что для любой точки $\eta \in P(X)$ существует α такое, что $\eta(N_\alpha) = \eta N$. Пусть A – подгруппа в $C(N, \mathcal{F})$ такая, что для любого α образ A относительно естественного отображения $C(N, \mathcal{F}) \rightarrow C(N_\alpha, \mathcal{F})$ содержится в $\mathbf{A}(N_\alpha, \mathcal{F})$. Тогда $A \subset \mathbf{A}(N, \mathcal{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $\eta \in P(X)$ выберем α такое, что $\eta(N_\alpha) = \eta N$. Тогда образ проекции подгруппы A на группу $C(\eta N, [\mathcal{F}]_\eta) = C(\eta(N_\alpha), [\mathcal{F}]_\eta)$ из прямого произведения $C(N, \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in P(X)} C(\eta N, [\mathcal{F}]_\eta)$ содержится в группе $\varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\eta(N_\alpha), \mathcal{F}_{U_\eta}) = \varinjlim_{U_\eta} \mathbf{A}(\eta N, \mathcal{F}_{U_\eta})$. Таким образом, мы получаем, что $A \subset \mathbf{A}(N, \mathcal{F})$. Лемма доказана.

Пусть X – нётерова схема. Рассмотрим неубывающую последовательность натуральных чисел $i_0 \leq \dots \leq i_p$. Напомним, что $(i_0, \dots, i_p)$ – множество флагов в $S(X)_p$ типа $(i_0, \dots, i_p)$. Для любого числа l , $0 \leq l \leq p$, имеется равенство $\delta_l^p(i_0, \dots, i_p) = (i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_p)$. Из этого можно вывести, что подмножество $(i_0, \dots, i_p) \subset S(X)_p$ удовлетворяет условию из предложения 2.36 для любого l , $0 \leq l \leq p$. Пусть $(j_0, \dots, j_q)$ – подпоследовательность в $(i_0, \dots, i_p)$, $q \leq p$. Имеются канонические отображения $\alpha: C((j_0, \dots, j_q), \mathcal{F}) \rightarrow C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$ и $\beta: \mathbf{A}((j_0, \dots, j_q), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$, определяемые как композиция соответствующих отображений границы. Из предложения 2.36 мы получаем следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 2.42. Пусть $\mathcal{F}$ – 1-чистый пучок на нётеровой неприводимой схеме X . Тогда для любых последовательностей $(i_0, \dots, i_p)$ и $(j_0, \dots, j_q)$, удовлетворяющих описанному выше условию, отображения α и β инъективны и выполняется равенство

$$\mathbf{A}((j_0, \dots, j_q), \mathcal{F}) = \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}) \cap C((j_0, \dots, j_q), \mathcal{F}),$$

где пересечение берется внутри группы $C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$.

В дальнейшем мы будем всегда подразумевать вложение β , когда будем сравнивать адельные группы с разными типами.

2.6. А'-адельные группы. Определим еще один вид адельных групп. Пусть X – нётерова катенарная схема, все неприводимые компоненты которой имеют одинаковую конечную размерность d , а $\mathcal{F}$ – абелев пучок на X .

Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $(i_0, \dots, i_p)$ такую, что $i_p \leq d$. Напомним, что $C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}) = \prod_{(\eta_0, \dots, \eta_p)} \mathcal{F}_{\eta_0}$, где произведение берется по всем флагам типа $(i_0, \dots, i_p)$ на X . Пусть l равно глубине последовательности $(i_0, \dots, i_p)$ (см. предложение 2.16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.43. Рассмотрим подгруппу $\mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}) \subseteq C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$, состоящую из всех элементов $f \in C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$ таких, что для любого натурального числа m , $0 \leq m \leq l$, и флага $(\eta_{m+1}, \dots, \eta_p)$ типа $(i_{m+1}, \dots, i_p)$ на X существует лишь конечное число флагов $(\eta_0, \dots, \eta_m)$ типа $(0, \dots, m)$ на X , для которых композиция вычетов $(\nu_{\eta_{m-1}\eta_m} \circ \dots \circ \nu_{\eta_0\eta_1})(f_{\eta_0 \dots \eta_m \eta_{m+1} \dots \eta_p}) \in H_{\eta_m}^m(X, \mathcal{F})$ не равна нулю. Такие новые адельные группы будем называть $\mathbf{A}'$ -адельными группами, в то время как старые адельные группы будут называться $\mathbf{A}$ -адельными группами.

При $l = -1$ выполняется равенство $\mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}) = C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$. При $l \geq 0$ для любого натурального числа m , $0 \leq m \leq l$, корректно определено отображение

$$\nu'_{0 \dots m}: \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{(\eta_{m+1}, \dots, \eta_p)} \left(\bigoplus_{\eta \in X^{(m)}} H_{\eta}^m(X, \mathcal{F}) \right),$$

где для каждого флага $(\eta_{m+1}, \dots, \eta_p)$ типа $(i_{m+1}, \dots, i_p)$ на X прямая сумма берется по всем точкам $\eta \in X^{(m)}$ таким, что $\eta_{m+1} \in \bar{\eta}$ (ср. с предложением 2.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.44. (i) Из предложения 2.16 следует, что образ $\theta(\mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})) \subset C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$ содержится в $\mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$.

(ii) Легко видеть, что для $\mathbf{A}'$ -адельных групп выполняются аналоги следствия 2.7, (i), (ii) при $M = (i_0, \dots, i_p)$.

(iii) Из закона взаимности следует, что для любого числа j , $0 \leq j \leq p$, отображение границы

$$d_j^p: C((i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p), \mathcal{F}) \rightarrow C((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F})$$

индуцирует отображение между соответствующими $\mathbf{A}'$ -адельными группами. Определим $\mathbf{A}'$ -адельный комплекс $\mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^\bullet$ по формуле

$$\mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^p = \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_p \leq d} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}),$$

а дифференциал положим равным ограничению дифференциала в комплексе $C(X, \mathcal{F})_{\text{red}}^\bullet$. Имеется морфизм комплексов

$$\mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^\bullet \xrightarrow{\nu'_X} \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet,$$

определяемый таким же образом, что и для $\mathbf{A}$ -адельного комплекса. Композиция $\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$ равна ν_X .

(iv) Для любых двух пучков $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ на X морфизм комплексов $C(X, \mathcal{F})_{\text{red}}^\bullet \otimes C(X, \mathcal{G})_{\text{red}}^\bullet \rightarrow C(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_{\text{red}}^\bullet$ не индуцирует морфизм комплексов $\mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbf{A}'(X, \mathcal{G})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}'(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})^\bullet$; также для $\mathbf{A}'$ -адельных групп не выполнен аналог следствия 2.42.

(v) Можно рассматривать пучковый вариант $\underline{\mathbf{A}}'(X, \mathcal{F})^\bullet$ для $\mathbf{A}'$ -адельного комплекса; имеется естественный морфизм комплексов пучков $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}'(X, \mathcal{F})^\bullet$.

ЛЕММА 2.45. Для любых натуральных чисел $i_0, \dots, i_l, p$ таких, что $0 \leq i_0 < \dots < i_l < p \leq d$ и $(i_0, \dots, i_l) \neq (0, \dots, p-1)$, выполняется равенство

$$\mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l, p), \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l, \eta), \mathcal{F}),$$

где индекс $(i_0, \dots, i_l, \eta)$ обозначает множество флагов $(\eta_0, \dots, \eta_l, \eta_p)$ на X типа $(i_0, \dots, i_l, p)$ таких, что $\eta_p = \eta$. Также имеется соотношение

$$\mathbf{A}'((0, \dots, p-1, p), \mathcal{F}) = \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathbf{A}'((0, \dots, p-1, \eta), \mathcal{F}),$$

где ограниченное произведение обозначает, что мы рассматриваем множество, состоящее из всех наборов $\{f_\eta\} \in \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathbf{A}'((0, \dots, p-1, \eta), \mathcal{F})$ таких, что $\mathbf{A}'$ -адель $f_\eta \in \mathbf{A}'((0, \dots, p-1, \eta), \mathcal{F}) \subset \mathbf{A}'((0, \dots, p-1, p), \mathcal{F})$ принадлежит ядру $\text{Ker}(\nu_{0\dots p})$ для почти всех точек $\eta \in X^{(p)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это немедленно следует из определения $\mathbf{A}'$ -адельных групп и из $\mathbf{A}'$ -аналога следствия 2.7, (ii) (см. замечание 2.44, (ii)).

Отсутствие мультипликативной структуры является основным недостатком $\mathbf{A}'$ -адельного комплекса (см. замечание 2.44, (iv)). Тем не менее, его основное преимущество заключается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2.46. Пусть X – нётерова катенарная схема, все неприводимые компоненты которой имеют одинаковую конечную размерность d , а $\mathcal{F}$ – абелев пучок на X , являющийся пучком Коэн–Маколея в смысле [11]. Тогда морфизм комплексов пучков $\nu'_X: \underline{\mathbf{A}}'(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F})^\bullet$ является квазиизоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 2.47. В предположениях теоремы 2.46 естественный морфизм комплексов пучков $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}'(X, \mathcal{F})^\bullet$ является квазиизоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.46. Достаточно доказать, что морфизм комплексов абелевых групп $\nu'_U: \mathbf{A}'(U, \mathcal{F}|_U)^\bullet \rightarrow \text{Cous}(U, \mathcal{F}|_U)^\bullet$ является квазиизоморфизмом для любого открытого подмножества $U \subset X$. Пучок $\mathcal{F}|_U$ является пучком Коэн–Маколея на U , поэтому можно предполагать, что $U = X$.

Используя несколько промежуточных комплексов, преобразуем $\mathbf{A}'$ -адельный комплекс в комплекс Кузена. Для каждого числа p , $0 \leq p \leq d$, рассмотрим комплекс

$$\begin{aligned} C_p^\bullet: 0 \rightarrow \prod_{0 \leq i \leq p} \mathbf{A}'((i), \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_l \leq p} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l), \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathbf{A}'((0, \dots, p), \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(p+1)}} H_\eta^{p+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(d)}} H_\eta^d(X, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Дифференциал в первой части этого комплекса совпадает с дифференциалом в $\mathbf{A}'$ -адельном комплексе, дифференциал во второй части совпадает с дифференциалом в комплексе Кузена, а дифференциал в середине

$$\mathbf{A}'((0, \dots, p), \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{\eta \in X^{(p+1)}} H_\eta^{p+1}(X, \mathcal{F})$$

равен композиции отображения границы $\mathbf{A}'((0, \dots, p), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}'((0, \dots, p, p+1), \mathcal{F})$ и отображения $\nu'_{0\dots(p+1)}$. Таким образом, $C_0^\bullet = \text{Cous}(X, \mathcal{F})^\bullet$, а $C_d^\bullet = \mathbf{A}'(X, \mathcal{F})^\bullet$.

Для каждого числа p , $1 \leq p \leq d$, имеется естественный морфизм комплексов $\varphi_p: C_p^\bullet \rightarrow C_{p-1}^\bullet$, который равен соответствующей проекции на первой части

комплекса $C_p^\bullet$, равен $\nu'_{0\dots p}$ в p -м члене комплекса $C_p^\bullet$ и равен тождественному отображению на второй части комплекса $C_p^\bullet$. Заметим, что $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d = \nu'_X$. Мы докажем индукцией по p , что морфизм φ_p на самом деле является квази-изоморфизмом для всех X и $\mathcal{F}$, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Случай $p = 0$ тривиален. Предположим, что $1 \leq p \leq d = \dim(X)$. Из леммы 2.23 следует, что морфизм φ_p сюръективен. Поэтому нам достаточно показать, что ядро морфизма φ_p является точным комплексом. По построению ядро $\text{Ker}(\varphi_p)^\bullet$ равно комплексу

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{A}'((p), \mathcal{F}) &\rightarrow \prod_{0 \leq i < p} \mathbf{A}'((i, p), \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_l < p} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l, p), \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \prod_{0 \leq i < p} \mathbf{A}'((0, \dots, \widehat{i}, \dots, p), \mathcal{F}) \rightarrow \text{Ker}(\nu'_{0\dots p}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для каждой схемной точки $\eta \in X^{(p)}$ рассмотрим естественный морфизм схем $j_\eta: X_\eta = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta}) \rightarrow X$. Заметим, что $j_\eta^* \mathcal{F}$ является пучком Коэн–Маколея на X_η . Следовательно, по предположению индукции комплекс

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{F}_\eta &\rightarrow \prod_{0 \leq i < p} \mathbf{A}'((i), j_\eta^* \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow \prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_l < p} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l), j_\eta^* \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \mathbf{A}'((0, \dots, p-1), j_\eta^* \mathcal{F}) \rightarrow H_\eta^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

точен.

Рассмотрев произведение этих комплексов по всем точкам $\eta \in X^{(k)}$, получаем следующий комплекс:

$$\begin{aligned} B_p^\bullet: 0 \rightarrow \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathcal{F}_\eta &\rightarrow \dots \rightarrow \prod_{\eta \in X^{(p)}} \left(\prod_{0 \leq i_0 < \dots < i_l < p} \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_l, \eta), j_\eta^* \mathcal{F}) \right) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \prod_{\eta \in X^{(p)}} \mathbf{A}'((0, \dots, p-1, \eta), j_\eta^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\nu'_{0\dots p}} \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} H_\eta^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где ограниченное произведение берется в том же смысле, что и в лемме 2.45, и, как и раньше, индекс $(i_0, \dots, i_l, \eta_p)$ обозначает, что мы рассматриваем множество всех флагов $(\eta_0, \dots, \eta_l, \eta_p)$ на X типа $(i_0, \dots, i_l, p)$ с фиксированной точкой η_p . Наконец, из леммы 2.45 следует равенство $\text{Ker}(\varphi_p)^\bullet = \tau_{\leq p}(B_p^\bullet)$, где $\tau_{\leq p}$ – каноническое обрезание комплексов. Таким образом, мы получаем точность комплекса $\text{Ker}(\varphi_p)^\bullet$.

Следующий технический результат понадобится нам в дальнейшем. Для любых аделя h и возрастающей последовательности натуральных чисел $(j_0, \dots, j_q)$ будем обозначать через $h_{j_0 \dots j_q}$ компоненту аделя h , которая имеет тип $(j_0, \dots, j_q)$.

ЛЕММА 2.48. В предположениях теоремы 2.46 рассмотрим возрастающую последовательность чисел $(0, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p)$ глубины l и адель

$$g \in \mathbf{A}'((0, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p), \mathcal{F})$$

такой, что $\nu'_{0\dots(l+1)}(g) = 0$. Тогда существует адель

$$h \in \prod_{0 \leq i \leq l} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p), \mathcal{F})$$

такой, что $(dh)_{0\dots li_{l+1}\dots i_p} = g$, где d – дифференциал в $\mathbf{A}'$ -адельном комплексе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем конструкцию и обозначения из доказательства теоремы 2.46. Зафиксируем флаг $(\eta_{l+1}, \dots, \eta_p)$ типа $(i_{l+1}, \dots, i_p)$. Имеем $g_{0\dots l\eta_{l+1}\dots\eta_p} \in \mathbf{A}'((0, \dots, l), j_{\eta_{l+1}}^* \mathcal{F})$. По условию леммы $g_{0\dots l\eta_{l+1}\dots\eta_p}$ является коциклом степени l в комплексе $C_l^\bullet$, построенном для локальной схемы $X_{\eta_{l+1}}$ и пучка $j_{\eta_{l+1}}^* \mathcal{F}$. Из доказательства теоремы 3.34 (см. далее) следует, что комплекс $C_l^\bullet$ точен для $X_{\eta_{l+1}}$ и $j_{\eta_{l+1}}^* \mathcal{F}$. Следовательно, существует адель $h_{\eta_{l+1}\dots\eta_p} \in \prod_{0 \leq i \leq l} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, l), j_{\eta_{l+1}}^* \mathcal{F})$ такой, что $d_{\eta_{l+1}}(h_{\eta_{l+1}\dots\eta_p})_{0\dots l} = f_{0\dots l\eta_{l+1}\dots\eta_p}$, где $d_{\eta_{l+1}}$ – дифференциал в $\mathbf{A}'$ -адельном комплексе на $X_{\eta_{l+1}}$. По лемме 2.45 набор

$$h = \{h_{\eta_{l+1}\dots\eta_p}\} \in \prod_{(\eta_{l+1}, \dots, \eta_p)} \prod_{0 \leq i \leq l} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, l), j_{\eta_{l+1}}^* \mathcal{F})$$

принадлежит $\mathbf{A}'$ -адельной группе $\prod_{0 \leq i \leq l} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p), \mathcal{F})$ и h удовлетворяет необходимому условию.

§ 3. Адели для пучков гомологий

Мы рассмотрим некоторый класс пучков на гладком многообразии X над некоторым полем такой, что для любого пучка $\mathcal{F}$ из этого класса морфизм комплексов пучков $\mathcal{F} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F})^\bullet$ является квайзизоморфизмом, т.е. адельный комплекс является вялой резольвентой пучка $\mathcal{F}$. Данный класс пучков возникает из рассмотрения теорий гомологий. Отметим также, что все пучки из этого класса являются пучками Коэн–Маколея в смысле [11] (см. далее следствие 3.9, (i)).

3.1. Теории гомологий. Для произвольного поля k через $\mathcal{V}_k$ обозначим категорию многообразий над k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Слабая гомологическая теория над полем k – это предпучок F_* в топологии Зариского на $\mathcal{V}_k$ со значениями в категории градуированных абелевых групп, $X \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n(X)$, $(j: U \hookrightarrow X) \mapsto (j^*: F_n(X) \rightarrow F_n(U))$, такой, что для любого замкнутого вложения $f: X' \hookrightarrow X$ функториально определен гомоморфизм градуированных групп $f_*: F_n(X') \rightarrow F_n(X)$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

(WH1) для любого открытого вложения $j: U \hookrightarrow X$ и замкнутого вложения $f: X' \hookrightarrow X$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_n(U') & \xleftarrow{(j')^*} & F_n(X') \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ F_n(U) & \xleftarrow{j^*} & F_n(X) \end{array}$$

коммутативна, где $j': U' = f^{-1}(U) \hookrightarrow X'$ – открытое вложение;

(WH2) для любого замкнутого вложения $i: Z \hookrightarrow X$ определена длинная точная последовательность локализации

$$\cdots \rightarrow F_n(Z) \xrightarrow{i_*} F_n(X) \xrightarrow{j^*} F_n(X \setminus Z) \xrightarrow{\partial_{XZ}} F_{n-1}(Z) \rightarrow \cdots,$$

где $j: X \setminus Z \hookrightarrow X$ – открытое вложение; кроме того, для любого замкнутого вложения $f: X' \hookrightarrow X$ и пары замкнутых подмножеств $i: Z \hookrightarrow X$ и $i': Z' \hookrightarrow X'$ таких, что $f(Z') \subseteq Z$, диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_n(Z') & \xrightarrow{i'_*} & F_n(X') & \xrightarrow{(j')^*} & F_n(X' \setminus Z') \xrightarrow{\partial_{X'Z'}} F_{n-1}(Z') \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \alpha^* \\ \cdots & \longrightarrow & F_n(Z) & \xrightarrow{i_*} & F_n(X) & \xrightarrow{j^*} & F_n(X \setminus Z) \xrightarrow{\partial_{XZ}} F_{n-1}(Z) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

коммутативна, где $\alpha: f^{-1}(X \setminus Z) \hookrightarrow X \setminus Z$ – открытое вложение.

Отметим, что определение 3.1 является немного измененным понятием скрученной теории гомологий из [15].

Пусть F_* – слабая теория гомологий над полем k . Для неприводимого многообразия X над k и $n \in \mathbb{Z}$ положим $F_n(k(X)) = \varinjlim_U F_n(U)$, где предел берется по всем открытым непустым подмножествам $U \subset X$. Очевидно, что это определение корректно, т.е. $F_n(k(X))$ зависит только от бирационального класса многообразия X .

Такое же рассуждение, как в [15, предложение 3.7], показывает, что для любого многообразия X имеется спектральная последовательность гомологического типа с $E_{p,q}^1(X, F_*) = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} F_{p+q}(k(\eta)) \Rightarrow F_{p+q}(X)$, где $X^{(p)}$ – множество схемных точек η на X , для которых $\dim(\bar{\eta}) = p$. Соответствующая возрастающая фильтрация на $F_n(X)$ задается по формуле

$$\text{Im} \left(\varinjlim_{Z \in X_{\leq p}} F_n(Z) \rightarrow F_n(X) \right) \subseteq F_n(X),$$

где $X_{\leq p}$ – множество всех замкнутых подмногообразий Z в X , размерность которых не превосходит p . Для $p, q \in \mathbb{Z}$ положим $\text{Gers}(X, F_*, q)_p = E_{p,q}^1(X, F_*)$. Таким образом, $\text{Gers}(X, F_*, q)_\bullet$ является комплексом гомологического типа.

Будем говорить, что многообразие X *равноразмерно*, если все его неприводимые компоненты имеют одинаковые размерности. Для равноразмерного многообразия X размерности d положим

$$\text{Gers}(X, F_*, n)^p = E_{d-p, n-d}^1(X, F_*) = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} F_{n-p}(k(\eta)).$$

Комплекс когомологического типа $\text{Gers}(X, F_*, n)_\bullet$ называется *комплексом Герстена*, построенным по слабой теории гомологий F_* . Для каждого набора $\{f_\eta\} \in \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} F_{n-p}(k(\eta))$ множество схемных точек $\eta \in X^{(p)}$, для которых $f_\eta \neq 0$, будем называть *носителем* набора $\{f_\eta\}$.

Ясно, что для любого числа $q \in \mathbb{Z}$ функторы $F(q)_n(X) = H_n(\text{Gers}(X, F_*, q)_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, также образуют слабую теорию гомологий. Для неприводимого многообразия X размерности d имеем $F(q)_d(k(X)) = F_{d+q}(k(X))$ и $F(q)_n(k(X)) = 0$ при $n \neq d$. Следовательно, $\text{Gers}(X, F(q)_*, 0)_\bullet = \text{Gers}(X, F_*, q)_\bullet$ и $\text{Gers}(X, F(q)_*, m)_\bullet = 0$ при $m \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пучками гомологий $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, называются пучки в топологии Зариского на $\mathcal{V}_k$, ассоциированные с соответствующими предпучками F_n , $n \in \mathbb{Z}$.

В случае, когда необходимо различать пучки на разных пространствах, будем обозначать через $\mathcal{F}_n^X$ ограничение пучка $\mathcal{F}_n$ на многообразие X . В частности, для любого неприводимого многообразия X имеем $(\mathcal{F}_n^X)_X = F_n(k(X))$. Заметим, что для любого открытого вложения $i_U: U \hookrightarrow X$ выполняется равенство $(i_U)^*\mathcal{F}_n^X = \mathcal{F}_n^U$. Будем также обозначать через $\mathcal{F}_n^U$ пучок $(\mathcal{F}_n^X)_U = (i_U)_*\mathcal{F}_n^U$ на X .

По определению для неприводимого многообразия X размерности d и $q \in \mathbb{Z}$ пучок $\mathcal{F}(q)_d^X$ является 1-чистым пучком (см. п. 2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть X – равноразмерное многообразие над k размерности d , η – схемная точка на X , а $D \subset X$ – дивизор. Тогда любой элемент $f \in (\mathcal{F}(n)_d^{X \setminus D})_\eta$, $n \in \mathbb{Z}$, является ограничением некоторого элемента из $F_{n+d}(X_\eta \setminus (D \cup R))$, где R – замкнутое подмножество в X коразмерности не меньше, чем два. Это следует непосредственно из определений и длинной точной последовательности локализации.

Для равноразмерного многообразия X можно также рассматривать пучковый вариант комплекса Герстена $\underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet$, а именно

$$\underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^p = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} (i_{\bar{\eta}})_* F_{n-p}(k(\eta)),$$

где $F_{n-p}(k(\eta))$ рассматривается как постоянный пучок на $\bar{\eta}$ для каждой схемной точки $\eta \in X^{(p)}$. Имеется морфизм комплексов пучков

$$\mathcal{F}_n^X \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet \rightarrow \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet,$$

где $\mathcal{F}_n^X$ рассматривается как комплекс, сосредоточенный в степени нуль. Также выполняется равенство $H^q(\underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet) = \mathcal{F}(n-d)_{d-q}^X$ и имеется естественный морфизм пучков $\mathcal{F}_n^X \rightarrow \mathcal{F}(n-d)_d^X$, где $d = \dim(X)$.

Для любого равноразмерного замкнутого подмножества $Z \subset X$ коразмерности p в X имеем

$$\gamma_Z \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet = \underline{\text{Gers}}(Z, F_*, n-p)^\bullet[-p].$$

В частности, $R^q \gamma_Z \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n) = \mathcal{F}(n-d)_{d-q}^Z$, где $d = \dim(X)$. Также имеются естественные морфизмы пучков

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n-p}^Z &\rightarrow R^p \gamma_Z \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n) = \mathcal{F}(n-d)_{d-p}^Z, \\ R^p \gamma_Z \mathcal{F}_n^X &\rightarrow R^p \gamma_Z \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n). \end{aligned}$$

Тем не менее, в общем случае не существует естественного нетривиального морфизма между пучками $\mathcal{F}_{n-p}^Z$ и $R^p \gamma_Z \mathcal{F}_n^X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Слабая теория гомологий F_* над полем k является теорией гомологий, локально ациклической в слоениях (л.а.с. теорией гомологий), если выполняются следующие условия:

(Н) для любого конечного морфизма $f: X' \rightarrow X$ функториально определен гомоморфизм градуированных групп $f_*: F_n(X') \rightarrow F_n(X)$, расширяющий соответствующий гомоморфизм для замкнутых вложений и такой, что имеют место аналоги аксиом (WH1) и (WH2), в которых f следует положить равным произвольному конечному морфизму;

(LAF) если для замкнутого вложения $i: Z \hookrightarrow X$ и некоторого конечного подмножества $S \subset Z$, состоящего из схемных точек в Z , задан такой гладкий в S морфизм $\pi: X \rightarrow Z$, что $\pi \circ i = \text{id}_Z$, то существует открытое подмножество $U \subset X$, содержащее S , для которого композиция $F_n(Z) \rightarrow F_n(X) \rightarrow F_n(U)$ равна нулю при любом $n \in \mathbb{Z}$.

Будем говорить, что схема Y *геометрического типа* над полем k , если $Y = \bigcap_{\alpha} U_{\alpha}$, где $\{U_{\alpha}\}$ – семейство открытых подмножеств в некотором многообразии X над полем k . Для таких Y положим $F_n(Y) = \varinjlim_U F_n(U)$, где предел берется по всем открытым подмножествам $U \subset X$, содержащим Y ; можно показать, что определение $F_n(Y)$ корректно. Для равноразмерной схемы Y геометрического типа над полем k положим $F_n(Y^{\geq p}) = \varinjlim_Z F_n(Z)$, где предел берется по всем замкнутым подмножествам $Z \subset Y$ таким, что все неприводимые компоненты Z имеют коразмерность не меньше p в Y .

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 5.11 из [6] или теоремы 4.2 из [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть F_* – л.а.с. теория гомологий над полем k . Тогда для любой регулярной неприводимой локальной схемы Y геометрического типа над k и любого $n \in \mathbb{Z}$ имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow F_n(Y^{\geq p}) \rightarrow \bigoplus_{\eta \in Y^{(p)}} F_n(k(\eta)) \rightarrow F_{n-1}(Y^{\geq (p+1)}) \rightarrow 0,$$

где первое отображение сопоставляет элементу из $F_n(Z)$ его ограничение на общие точки неприводимых компонент в Z , коразмерность которых в Y равна p .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Дифференциал в комплексе Герстена на Y равен композиции двух соответствующих отображений в коротких точных последовательностях из предложения 3.5 для n и $n+1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. В обозначениях предложения 3.5 любой коцикл $\{f_{\eta}\} \in \bigoplus_{\eta \in Y^{(p)}} F_n(k(\eta))$ в комплексе Герстена на Y равен ограничению некоторого элемента $\alpha \in F_n(Z)$, где Z – замкнутое подмножество в Y , для которого множество неприводимых компонент коразмерности p в Y равно носителю $\{f_{\eta}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.5 любой коцикл

$$\{f_{\eta}\} \in \bigoplus_{\eta \in Y^{(p)}} F_n(k(\eta))$$

равен ограничению некоторого элемента $\alpha \in F_n(Z)$, где Z – замкнутое подмножество в Y коразмерности не меньше, чем p . Пусть $Z_0 \subset Z$ – неприводимая компонента в Z , коразмерность которой в Y равна p и которая не принадлежит носителю набора $\{f_{\eta}\}$. Заметим, что $F_n(k(Z_0)) = \varinjlim U F_n(U)$, где предел можно

брать по всем открытым подмножествам $U \subset Z_0$, которые открыты и в Z . Из последовательности локализации следует, что на самом деле $\alpha \in F_n(Z')$, где замкнутое подмножество $Z' \subset Z$ имеет те же самые неприводимые компоненты, что и Z , за исключением Z_0 , которое заменяется на собственное замкнутое подмножество. Это завершает доказательство.

Из предложения 3.5 вытекает следующий важный факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть F_* – л.а.с. теория гомологий над полем k . Тогда для любого равноразмерного регулярного многообразия X над k и любого $n \in \mathbb{Z}$ морфизм комплексов пучков $\mathcal{F}_n^X \rightarrow \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet$ является квазиизоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть F_* – л.а.с. теория гомологий над полем k , X – равноразмерное регулярное многообразие над k и $n \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) пучок $\mathcal{F}_n^X$ на X является пучком Коэн–Маколея в смысле [11], и естественный морфизм комплексов пучков $\text{Cous}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet \rightarrow \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet$ является изоморфизмом; в частности, пучки $\mathcal{F}_n^X$ являются 1-чистыми пучками на X ;

(ii) для любого равноразмерного замкнутого подмножества $Z \subset X$ коразмерности p естественный морфизм пучков

$$R^p \gamma_Z \mathcal{F}_n^X \rightarrow R^p \gamma_Z \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet = \mathcal{F}(n-d)_{d-p}^Z$$

является изоморфизмом; в частности, возникает морфизм пучков $\mathcal{F}_{n-p}^Z \rightarrow R^p \gamma_Z \mathcal{F}_n^X$, являющийся изоморфизмом в общих точках неприводимых компонент Z ;

(iii) для любого $q \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство $\mathcal{F}(q)_d^X = \mathcal{F}_{d+q}^X$ и $\mathcal{F}(q)_m^X = 0$ при $m \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть F_* – л.а.с. теория гомологий, а X – равноразмерное многообразие, регулярное вне замкнутого подмножества коразмерности два. Тогда для любой точки $\eta \in X$ и любого числа $n \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$(\mathcal{F}(n)_d^X)_\eta = \bigcap_D F_{n+d}(\mathcal{O}_{X,D}) \subset F_{n+d}(k(X)),$$

где $d = \dim(X)$, а D пробегает все неприводимые дивизоры на X , содержащие η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из регулярности колец дискретного нормирования $\mathcal{O}_{X,D}$ для любого дивизора D и точности комплекса Герстена на $X_D = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,D})$.

ПРИМЕР 3.11. Следующие примеры являются теориями гомологий, локально ациклическими в слоениях:

1) $F_n(X) = K'_n(X) = \pi_{n+1}(BQM(X))$ при $n \geq 0$ и $F_n(X) = 0$ при $n < 0$, где $\mathcal{M}(X)$ – точная категория когерентных пучков на X (см. [6, доказательство теоремы 5.11]);

2) $F_n(X) = H_n(X, i)$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$, где пара (H^*, H_*) является теорией с двойственностью Пуанкаре в смысле Блоха–Огуса (см. [15, предложение 4.5]);

3) $F_n(X) = A_n(X; M)$, где M – модуль циклов над полем k в смысле Роста (см. [16, доказательство предложения 6.4]); в этом случае $\text{Gers}(X, F_*, 0)_\bullet = C_\bullet(X; M)$ в обозначениях из [16] и $\text{Gers}(X, F_*, m)_\bullet = 0$ при $m \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Пучок $\mathcal{K}_n(\mathcal{O}_X)$ на регулярном многообразии X над полем k возникает как из примера 3.11, 1), так и из примера 3.11, 3) для $M = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ (ср. со следствием 3.9, (iii)).

В следующих трех пунктах мы развиваем технику, необходимую для доказательства леммы 3.37.

3.2. Сильно локально стираемые пары. Пусть F_* – теория гомологий над полем k , локально ацикличная в слоениях, X – равноразмерное многообразие. Рассмотрим равноразмерные подмногообразия $Z \subset X$ и $\tilde{Z} \subset X$ коразмерностей соответственно p и $p - 1$ в X такие, что $\tilde{Z} \supset Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. Предположим, что для любой (не обязательно замкнутой) точки $x \in Z$ и для любого открытого подмножества $V \subset X$, содержащего x , найдется меньшее открытое подмножество $W \subset X$, содержащее x и такое, что естественное отображение

$$F_n(V \cap Z) \rightarrow F_n(W \cap \tilde{Z})$$

равно нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, предположим, что для любого $q \geq 0$ определено соответствие $R \mapsto \Lambda(R)$, где R – равноразмерное подмногообразие коразмерности q в Z , $\Lambda(R)$ – равноразмерное подмногообразие коразмерности q в $\tilde{Z}$ такое, что $R \subset \Lambda(R)$, и для любой (не обязательно замкнутой) точки $x \in Z$ и открытого подмножества $V \subset X$, содержащего x , найдется меньшее открытое подмножество $W \subset X$, содержащее x и такое, что композиция

$$F_n(V \cap (Z \setminus R)) \rightarrow F_n(V \cap (Z \setminus \Lambda(R))) \rightarrow F_n(W \cap (\tilde{Z} \setminus \Lambda(R)))$$

равна нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$ (на самом деле, это условие надо добавлять к первому условию лишь в том случае, когда $x \in R$). Тогда такую пару подмногообразий $(Z, \tilde{Z})$ в X мы будем называть *сильно локально стираемой парой*, или *с.л.с. парой* (развивая терминологию из [15]).

Соответствие Λ в определении с.л.с. пары необходимо для установления связи с комплексом Герстена, как показано в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. *Предположим, что поле k бесконечно и совершенно. Пусть $(Z, \tilde{Z})$ – с.л.с. пара подмногообразий в гладком многообразии X над k , p равно коразмерности Z в X , а $x \in Z$ – произвольная (не обязательно замкнутая) точка. Предположим, что набор $\{f_z\} \in \bigoplus_{z \in Z_x^{(0)}} F_n(k(z))$ является коциклом в комплексе Герстена на $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, т.е. $d_x(\{f_z\}) = 0$, где d_x – дифференциал в комплексе $\text{Gers}(X_x, F_*, n + p)^\bullet$. Тогда существует набор $\{g_{\tilde{z}}\} \in \bigoplus_{\tilde{z} \in \tilde{Z}_x^{(0)}} F_{n+1}(k(\tilde{z}))$ такой, что $d_x(\{g_{\tilde{z}}\}) = \{f_z\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 3.7 набор $\{f_z\}$ является ограничением некоторого элемента $\alpha \in F_n((Z \cup S)_x)$, где каждая неприводимая компонента замкнутого подмножества $S \subset X$ имеет коразмерность не меньше $p + 1$ в X и не содержится в Z . Можно предполагать, что S равноразмерно коразмерности

$p+1$ в X ; тогда пересечение $Z \cap S$ содержится в некотором равноразмерном подмногообразии $R \subset Z$ коразмерности $p+2$ в X . Кроме того, $\alpha \in F_n(V \cap (Z \cup S))$ для некоторого открытого подмножества $V \subset X$, содержащего x .

По следствию 3.18 существует равноразмерное подмногообразие $\tilde{S}$ коразмерности p в X такое, что пара $(\Lambda(R) \cup S, \tilde{S})$ сильно локально стираемая. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_n(\Lambda(R) \cup S) & \longrightarrow & F_n(\tilde{S}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_n(Z \cup S) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z} \cup S) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z} \cup \tilde{S}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_n(Z \setminus R) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z} \setminus (\Lambda(R) \cup S)) & &
 \end{array}$$

где средний столбец точен в среднем члене, а отображение в нижней строке равно композиции

$$F_n(Z \setminus R) \rightarrow F_n(\tilde{Z} \setminus \Lambda(R)) \rightarrow F_n(\tilde{Z} \setminus (\Lambda(R) \cup S)).$$

Поскольку пары $(Z, \tilde{Z})$ и $(\Lambda(R) \cup S, \tilde{S})$ сильно локально стираемые, для точки $x \in Z$ и открытого подмножества $V \subset X$, рассматриваемого выше, найдется меньшее открытое подмножество $W \subset X$, содержащее x и такое, что отображение

$$F_n(V \cap (Z \cup S)) \rightarrow F_n(W \cap (\tilde{Z} \cup \tilde{S}))$$

равно нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, α является кограницей некоторого элемента $\beta \in F_{n+1}(W \cap ((\tilde{Z} \cup \tilde{S}) \setminus (Z \cup S)))$ в последовательности локализации, связанной с замкнутым вложением $W \cap (Z \cup S) \hookrightarrow W \cap (\tilde{Z} \cup \tilde{S})$. В частности, β определяет набор $\{g_{\tilde{z}}\} \in \bigoplus_{\tilde{z} \in \tilde{Z}^{(0)}} F_{n+1}(k(\tilde{z}))$. Заметим, что все неприводимые компоненты в $\tilde{Z} \cup \tilde{S}$ коразмерности $p-1$ в X содержатся в $\tilde{Z}$, в то время как все неприводимые компоненты в $Z \cup S$ коразмерности p в X содержатся в Z . Следовательно, $d_x(\{g_{\tilde{z}}\}) = \{f_z\}$, и предложение доказано.

3.3. Существование и сложение сильно локально стираемых пар.

Пусть F_* – л.а.с. теория гомологий над полем k , X – многообразие над k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.15. Пусть $r \geq 0$ – натуральное число, а $(Z, \tilde{Z})$ – с.л.с. пара на X . Предположим, что задано правило, которое сопоставляет каждому неприводимому подмногообразию $C \subset X$ и равноразмерному подмногообразию $R \subset Z$ коразмерности q в Z , не содержащему C , равноразмерное подмногообразие $\Lambda_C(R) \subset \tilde{Z}$ коразмерности q в $\tilde{Z}$, не содержащее C и содержащее R , такое, что выполняется следующее свойство: для любых r неприводимых подмногообразий $C_1, \dots, C_r \subset \tilde{Z}$, для любых r равноразмерных подмногообразий $R_1, \dots, R_r \subset Z$ (возможно, различной коразмерности в Z), удовлетворяющих условию $C_i \not\subset R_i$ при $1 \leq i \leq r$, для любой схемной точки $x \in Z$ и любого открытого подмножества $V \subset X$, содержащего x , найдется меньшее открытое подмножество $W \subset X$, содержащее x и такое, что естественное отображение

$$F_n(V \cap (Z \setminus (R_1 \cup \dots \cup R_r))) \rightarrow F_n(W \cap (\tilde{Z} \setminus (\Lambda_{C_1}(R_1) \cup \dots \cup \Lambda_{C_r}(R_r))))$$

равно нулю при любом $n \in \mathbb{Z}$. Тогда такая пара подмногообразий $(Z, \tilde{Z})$ называется *сильно локально стираемой парой со степенью свободы не меньше, чем r , или r -с.л.с. парой*. В частности, *сильно локально стираемая пара со степенью свободы не меньше, чем нуль*, – это то же самое, что *сильно локально стираемая пара*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.16. Если пара $(Z, \tilde{Z})$ является r -с.л.с. парой, а $Z' \subset Z$ – любое замкнутое равноразмерное подмножество той же размерности, что и Z , то пара $(Z', \tilde{Z})$ также является r -с.л.с. парой.

Ниже мы приводим теоремы о существовании сильно локально стираемых пар с любой заданной степенью свободы.

ТЕОРЕМА 3.17. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Пусть X – аффинное многообразие над k . Рассмотрим равноразмерное подмногообразие Z в X коразмерности $p \geq 2$ и конечное подмножество $T \subset X \setminus Z$, состоящее из замкнутых точек. Тогда для любого натурального числа $r \geq 0$ существует подмногообразие $\tilde{Z} \supset Z$, не содержащее ни одной точки из T и такое, что пара $(Z, \tilde{Z})$ сильно локально стираемая со степенью свободы не меньше, чем r .*

СЛЕДСТВИЕ 3.18. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Пусть X – гладкое многообразие над k . Рассмотрим равноразмерное подмногообразие Z в X коразмерности $p \geq 2$ и замкнутое подмножество $T \subset X$ коразмерности не больше, чем $p - 1$, в X , ни одна неприводимая компонента которого не содержится в Z . Тогда существует подмногообразие $\tilde{Z} \supset Z$, не содержащее ни одной неприводимой компоненты T и такое, что $(Z, \tilde{Z})$ является с.л.с. парой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конечное открытое аффинное покрытие $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$. Для каждого α и для каждой неприводимой компоненты в $T \cap U_{\alpha}$ выберем замкнутую точку на ней вне Z и получим конечное подмножество $T'_{\alpha} \subset U_{\alpha} \setminus Z$. Из теоремы 3.17, примененной для пересечения Z и T с U_{α} , следует существование замкнутого подмножества $\tilde{Z}_{\alpha} \subset U_{\alpha}$ такого, что $\tilde{Z}_{\alpha}$ не содержит ни одной точки из T'_{α} , а $(Z \cap U_{\alpha}, \tilde{Z}_{\alpha})$ является с.л.с. парой. Положим $\tilde{Z} = \bigcup_{\alpha} \overline{\tilde{Z}_{\alpha}}$, где черта обозначает замыкание в X . Из предположения о коразмерности T следует, что $\tilde{Z}$ не содержит ни одной неприводимой компоненты в T . Кроме того, $(Z, \tilde{Z})$ является с.л.с. парой, где для произвольного равноразмерного подмногообразия $R \subset Z$ следует положить $\Lambda(R)$ равным объединению по всем α замыканий $\Lambda_{\alpha}(R \cap U_{\alpha})$ в X .

СЛЕДСТВИЕ 3.19. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Пусть X – гладкое квазипроективное многообразие над k . Рассмотрим равноразмерное подмногообразие Z коразмерности $p \geq 2$ в X и замкнутое подмножество $T \subset X$, ни одна неприводимая компонента которого не содержится в Z . Тогда существует подмногообразие $\tilde{Z} \supset Z$, не содержащее ни одной неприводимой компоненты в T и такое, что $(Z, \tilde{Z})$ является с.л.с. парой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав для каждой неприводимой компоненты в T замкнутую точку на ней вне Z , мы получим конечное множество, состоящее из замкнутых точек $T' \subset X \setminus Z$. Поскольку X квазипроективно, существует конечное открытое аффинное покрытие $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ такое, что для каждого α

выполняется условие $T' \subset U_\alpha$. Для завершения доказательства остается повторить такое же рассуждение, как в доказательстве следствия 3.18.

Объединяя предложение 3.14 и следствие 3.18, получаем следующее утверждение, которое может рассматриваться как равномерный вариант гипотезы Герстена для гладких многообразий и представляет интерес само по себе.

СЛЕДСТВИЕ 3.20. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Пусть X – гладкое многообразие над k . Тогда для любого равноразмерного подмногообразия $Z \subset X$ коразмерности r в X существует равноразмерное подмногообразие $\tilde{Z} \supset Z$ коразмерности $r - 1$ в X со следующим свойством: для любых (не обязательно замкнутой) точки $x \in Z$ и набора $\{f_z\} \in \bigoplus_{z \in Z_x^{(0)}} F_n(k(z))$, являющегося коциклом в резольвенте Герстена $\text{Gers}(X_x, F_*, n + p)^\bullet$ на локальной схеме $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, найдется набор $\{g_{\tilde{z}}\} \in \bigoplus_{\tilde{z} \in \tilde{Z}_x^{(0)}} F_{n+1}(k(\tilde{z}))$ такой, что*

$$d_x(\{g_{\tilde{z}}\}) = \{f_z\},$$

где d_x – дифференциал в комплексе $\text{Gers}(X_x, F_*, n + p)^\bullet$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.21. Следствие 3.20 сильнее, чем теорема 4.2 в [15] или теорема 5.11 в [6]: в [15] аналогичный результат был показан для фиксированных точки $x \in Z$ и набора $\{f_z\}$ на Z_x . По всей видимости, из доказательства, данного в [15], не вытекает непосредственно следствие 3.20, поэтому мы используем некоторые другие геометрические методы в процессе доказательства теоремы 3.17.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.17. Доказательство проходит в два шага.

Шаг 1. Здесь под точкой всегда понимается замкнутая точка. Напомним, что $d = \dim X$. Будем говорить, что морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^{d-1}$ разрешает точку $x \in Z$, если он является гладким относительно размерности один в x , ограничение $\varphi = \pi|_Z$ является конечным морфизмом, $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$ и $\pi(T) \cap \pi(Z) = \emptyset$. Следующий геометрический результат является глобализацией конструкции Квиллена, использованной им в доказательстве гипотезы Герстена (см. [6, лемма 5.12] и [15, утверждение на с. 191]).

Напомним следующий факт из проективной геометрии.

ЛЕММА 3.22. *Пусть $Y \subset \mathbb{P}^N$ – проективное многообразие, $x \in Y$ – гладкая точка на Y . Предположим, что проективное подпространство $M \subset \mathbb{P}^N$ не пересекается с джойном $x * Y$. Тогда существует открытое подмножество $W \subset Y$, содержащее x и такое, что $\varphi^{-1}(\varphi(y)) = \{y\}$ для всех $y \in W$, где φ – ограничение на Y проекции π_M с центром в M .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.23. *Для любых r точек $y'_1, \dots, y'_r \in X \setminus Z$ и $r + 1$ замкнутых подмножеств $Z_0, \dots, Z_r \subset Z$ существуют непустые открытые подмножества $U_i \subset Z_i$, $0 \leq i \leq r$, и морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^{d-1}$, который разрешает все точки x из U_0 (относительно Z) и такой, что $\pi(y_i) \notin \pi(Z \setminus \{y_i\})$ для любой точки $y_i \in U_i$, $1 \leq i \leq r$, и $\pi(y'_i) \notin \pi(Z)$ для любых i , $1 \leq i \leq r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$ – проективное многообразие такое, что $X = \overline{X} \setminus H$, где $H \subset \mathbb{P}^N$ – гиперплоскость. В течение доказательства черта будет обозначать проективное замыкание в $\mathbb{P}^N$, а звезда будет обозначать джойн двух проективных подмногообразий в $\mathbb{P}^N$.

Без ограничения общности можно считать, что T содержит все точки $y'_1, \dots, \dots, y'_r$ и что Z_i неприводимы для всех i , $0 \leq i \leq r$. Пусть x'_i – произвольная гладкая точка на Z_i для каждого i , $0 \leq i \leq r$ (такие точки существуют вследствие совершенности основного поля k). Возникают следующие неравенства для размерности: $\dim(H \cap \bar{Z}) \leq d - 3$, $\dim(H \cap (T * \bar{Z})) \leq d - 2$, $\dim(H \cap \overline{T_{x'_0} X}) = d - 1$ и $\dim(H \cap \overline{T_{x'_i} Z_i}) \leq d - 3$ для всех i , $0 \leq i \leq r$. Поскольку основное поле бесконечно, существует проективное подпространство $L' \subset H$ коразмерности $d - 2$ в H такое, что L' не пересекается с $\bar{Z}$, пересекается с $T * \bar{Z}$ в конечном множестве точек, пересекает $\overline{T_{x'_0} X}$ по прямой и не пересекается с $\overline{T_{x'_i} Z_i}$ для всех $0 \leq i \leq r$. Заметим, что проекция $\pi_{L'}$ с центром в L' определяет на $\bar{Z}$ конечный морфизм $\varphi_{L'}$. Положим $Z'_i = \varphi_{L'}^{-1}(\varphi_{L'}(\bar{Z}_i)) \subset \bar{Z}$ для $0 \leq i \leq r$. Для каждого i , $0 \leq i \leq r$, выберем произвольную точку x_i на $Z_i \subset Z'_i$ такую, что x_i гладкая на Z'_i , $\overline{T_{x_i} Z_i}$ не пересекается с L' и $\overline{T_{x_0} X}$ пересекает L' по прямой.

Утверждается, что пересечение $L' \cap (x_i * Z'_i)$ состоит из конечного множества точек для каждого i , $0 \leq i \leq r$. Действительно, каждый джойн $x_i * Z'_i$ является объединением двух подмножеств. Первое является касательным пространством к Z'_i в точке x_i и не пересекается с L' . Второе подмножество является объединением прямых, проходящих через x_i и другие точки из Z'_i . Пересечение этого объединения прямых с L' соответствует слою точки x_i относительно конечного морфизма $\varphi_{L'}$ и поэтому конечно. Следовательно, существует гиперплоскость $L \subset L'$, которая не пересекается с джойнами $T * \bar{Z}$ и $x_i * Z'_i$ для каждого i , $0 \leq i \leq r$, и которая пересекает касательное пространство $\overline{T_{x_0} X}$ в одной точке. Поскольку многообразие X гладкое, проекция π_L с центром в L является гладким морфизмом в точке x_0 . Кроме того, отображение π_L не может склеивать точки из Z'_i с точками из $\bar{Z} \setminus Z'_i$ ни для какого i , $0 \leq i \leq r$. Следовательно, по лемме 3.22, примененной с $Y = Z'_i$, существуют непустые открытые подмножества $U_i \subset Z_i$, содержащие x_i и такие, что π_L разрешает все точки x из U_0 и $\varphi_L^{-1}(\varphi_L(y_i)) = \{y_i\}$ для всех точек y_i из U_i , $1 \leq i \leq r$, где $\varphi_L = \pi_L|_Z$. Кроме того, $\pi(T)$ не пересекается с $\pi(Z)$, и, в частности, $\pi(y'_i) \notin \pi(Z)$ для всех i , $1 \leq i \leq r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.24. В сделанных выше предположениях существует конечное множество Σ морфизмов $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^{d-1}$ таких, что для любых r точек $y_1, \dots, y_r \in X$ и любой точки $x \in Z$ существует $\pi \in \Sigma$, который разрешает x и удовлетворяет условию $\pi(y_i) \notin \pi(Z \setminus \{y_i\})$ для всех i , $1 \leq i \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждение 3.23, мы докажем убывающей индукцией по e , $-1 \leq e \leq r$, что для любых $e + 1$ неприводимых замкнутых подмножеств $Z_0, \dots, Z_e$ в Z существуют непустые открытые подмножества $U_0 \subset Z_0, \dots, U_e \subset Z_e$ и конечное множество морфизмов Σ такие, что предложение выполняется для любых наборов точек $(x, y_1, \dots, y_r, y'_1, \dots, y'_r)$, удовлетворяющих условиям $x \in U_0$, $y_i \in U_i$ для всех i , $1 \leq i \leq e$, $y_i \in Z$ для всех i , $e + 1 \leq i \leq r$, и $y'_i \in X \setminus Z$ для всех i , $0 \leq i \leq r$. Заметим, что при $e = -1$ из этого немедленно следует предложение.

Пусть $e = r$. Рассмотрим r произвольных точек $y'_1, \dots, y'_r$ в $X \setminus Z$. Применение утверждения 3.23 для точек $y'_1, \dots, y'_r$ и для замкнутых подмножеств $Z_0, \dots, Z_r$ в Z показывает существование непустых открытых подмножеств

$U_0 \subset Z_0, \dots, U_r \subset Z_r$ и морфизма π , удовлетворяющего условию из утверждения 3.23. Поскольку условия $y'_i \notin \pi^{-1}(\pi(Z))$, $1 \leq i \leq r$, открытые, существует конечное открытое покрытие $\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ прямого произведения $(X \setminus Z)^{\times r}$ такое, что для любого α каждый набор $(y'_1, \dots, y'_r)$ из открытого подмножества V_{α} удовлетворяет условиям из утверждения 3.23 относительно некоторых непустых открытых подмножеств $U_0^{\alpha} \subset Z_0, \dots, U_r^{\alpha} \subset Z_r$ и морфизма π^{α} . Рассматривая конечные пересечения $U_i = \bigcap_{\alpha} U_i^{\alpha}$ для каждого i , $0 \leq i \leq r$, мы получаем требуемые открытые подмножества Z_i , $0 \leq i \leq r$, в то время как требуемое конечное множество морфизмов есть $\Sigma = \{\pi_{\alpha}\}$.

Теперь проведем переход индукции от e к $e-1$. Выберем любую неприводимую компоненту C_1 в Z . По предположению индукции существуют непустые открытые подмножества $U_0^1 \subset Z_0, \dots, U_{e-1}^1 \subset Z_{e-1}, U_e^1 \subset C_1$ и конечное множество морфизмов Σ_1 , удовлетворяющие указанным выше условиям. Можно считать, что подмножество $U_e^1 \subset C_1$ открыто также и в Z . Пусть C_2 – одна из неприводимых компонент в $Z \setminus U_e^1$. Вновь по предположению индукции существуют другие открытые подмножества $U_0^2 \subset Z_0, \dots, U_{e-1}^2 \subset Z_{e-1}, U_e^2 \subset C_2$ и конечное множество морфизмов Σ_2 , удовлетворяющие указанным выше условиям. Будем повторять такое рассуждение до тех пор, пока мы не дойдем до конца получаемой конечной стратификации Z открытыми подмножествами U_e^j в C_j . Рассматривая конечные пересечения $U_i = \bigcap_j U_i^j$ для каждого i , $0 \leq i \leq e-1$, мы получаем требуемые открытые подмножества в Z_i , $0 \leq i \leq e$, в то время как требуемое конечное множество морфизмов равно конечному объединению $\Sigma = \bigcup_j \Sigma_j$.

Шаг 2. В обозначениях предложения 3.24 рассмотрим конечное множество Σ морфизмов $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^{d-1}$. Положим $\tilde{Z} = \bigcup \pi^{-1}(\pi(Z))$, где объединение берется по всем $\pi \in \Sigma$. По построению многообразие $\tilde{Z}$ не содержит ни одной точки из T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.25. *Пара $(Z, \tilde{Z})$ является r -с.л.с. парой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем идее доказательства теоремы 5.11 в [6], внося некоторые изменения.

Сначала заметим, что, выбрав подходящим образом замкнутую точку x' на $\bar{x} \subset Z$, можно предполагать, что заданное открытое подмножество $V \ni x$ на самом деле содержит x' . Поэтому можно считать, что точка x замкнута.

Выберем морфизм $\pi \in \Sigma$, разрешающий точку x , и, как и раньше, положим $\varphi = \pi|_Z$. Следуя конструкции Квиллена, рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi'} & X \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}^{d-1} \end{array}$$

Заметим, что отображение φ' конечно, $\varphi'(Y) = \pi^{-1}(\pi(Z))$ является замкнутым подмножеством в $\tilde{Z}$, а $(\varphi')^{-1}(x)$ состоит из одной точки, которую мы обозначим z . Кроме того, морфизм π' гладкий в z и обладает каноническим сечением $\sigma: Z \rightarrow Y$ (для которого $\sigma(x) = z$). Поскольку теория гомологий F_* локально ациклична в слоениях, композиция $F_n(Z) \xrightarrow{\sigma_*} F_n(Y) \rightarrow F_n(Y')$ равна нулю для

всех $n \in \mathbb{Z}$ и для некоторого открытого подмножества $Y' \subset Y$, содержащего z . Следовательно, отображение $F_n(Z) \rightarrow F_n(\tilde{Z} \cap U)$ также равно нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$ и для открытого подмножества $U \subset X$, содержащего x и такого, что $(\varphi')^{-1}(U) \subset Y'$ (существование такого U следует из конечности отображения φ' и из того, что $(\varphi')^{-1}(x) = \{z\}$).

Рассмотрим теперь произвольное открытое подмножество $V \subset X$, содержащее x . Поскольку $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$ и отображение φ конечно, существует открытое подмножество $D \subset \mathbb{A}^{d-1}$ такое, что $x \in \varphi^{-1}(D) \subset V$. Ограничивая декартов квадрат с $\mathbb{A}^{d-1}$ на D , мы получаем, что естественное отображение $F_n(V \cap Z) \rightarrow F_n(W \cap \tilde{Z})$ равно нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$ и некоторого подходящего открытого подмножества $W \subset V$, содержащего x .

Далее рассмотрим неприводимое подмногообразие $C \subset X$ и равноразмерное подмногообразие $R \subset Z$ коразмерности q в Z такое, что $C \not\subseteq R$. Положим

$$\Lambda_C(R) = \bigcup_{y \in C \setminus R} \left(\bigcup_{\pi \in \Sigma_y} \pi^{-1}(\pi(R)) \right),$$

где Σ_y является множеством отображений $\pi \in \Sigma$ таких, что $\pi(y) \notin \pi(Z \setminus \{y\})$. Например, если C не содержится в $\tilde{Z}$, то $\Lambda_C(R) = \bigcup \pi^{-1}(\pi(R))$, где объединение берется по всем отображениям $\pi \in \Sigma$. Для неприводимых $C_1, \dots, C_r$ в X и подмногообразий $R_1, \dots, R_r$ в Z , удовлетворяющих нужным условиям, выберем замкнутые точки $y_i \in C_i \setminus R_i$. По построению для любой замкнутой точки $x \in Z$ существует морфизм $\pi \in \Sigma$, который разрешает x и принадлежит $\Sigma_{y_1} \cap \dots \cap \Sigma_{y_r}$. Рассуждение о декартовом квадрате, аналогичное предыдущему, приводит к требуемому результату.

Итак, теорема 3.17 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.26. В условиях теоремы 3.17 можно также требовать, чтобы каждая неприводимая компонента в многообразии $\tilde{Z}$ содержала некоторую неприводимую компоненту в Z . Это следует из того, что для каждой неприводимой компоненты Z_0 в Z многообразие $\pi^{-1}(\pi(Z_0))$ неприводимо в окрестности точки x , где $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^{d-1}$ – морфизм, разрешающий точку x и, в частности, гладкий в x .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.27. При $p = 1$ рассуждение, аналогичное доказательству предложения 3.25, показывает, что единственная возможная пара (Z, X) является с.л.с. парой (см. [6], [15]). Отметим, что именно в этом случае используется то, что в определении л.а.с. теории гомологий (определение 3.4) при выполнении условия (LAF) рассматривается произвольное конечное подмножество S , а не одна схемная точка на Z , в то время как для $p \geq 2$ при доказательстве теоремы 3.17 условие (LAF) используется лишь для множеств S , состоящих из одной точки.

Следующее предложение позволяет суммировать сильно локально стираемые пары.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.28. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Пусть X – аффинное гладкое многообразие над k . Рассмотрим два равноразмерных подмногообразия Z_1 и Z_2 одинаковой коразмерности $p \geq 2$ в X . Пусть задано подмногообразие $\tilde{Z}_1 \supset Z_1$ такое, что $(Z_1, \tilde{Z}_1)$ является*

r -с.л.с. парой. Рассмотрим замкнутое подмножество $T \subset X$, все неприводимые компоненты которого имеют коразмерность в X не больше, чем $p - 1$, и неприводимое подмногообразие $K \subset X$, не содержащееся в Z_2 . Тогда существует подмногообразие $\tilde{Z}_2$, не содержащее K и ни одной неприводимой компоненты в T и такое, что $(Z_1 \cup Z_2, \tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2)$ является $(r - 1)$ -с.л.с. парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если K не содержится в Z_1 , то предложение немедленно следует из теоремы 3.17, после выбора по замкнутой точке на каждой неприводимой компоненте в T и на K вне $Z_1 \cup Z_2$ (в этом случае степень свободы не убывает). В противном случае мы используем такую же конструкцию, как в доказательстве предложения 3.14.

Предположим, что $K \subset Z_1$. Тогда существует подмногообразие Z'_2 коразмерности один в Z_1 , не содержащее K и содержащее пересечение Z_1 с каждой неприводимой компонентой в Z_2 , которая не содержится в Z_1 . Положим $Z_3 = \Lambda_K(Z'_2) \subset \tilde{Z}_1$. Из предположения для коразмерности T следует, что $Z_2 \cup Z_3$ не содержит ни одной неприводимой компоненты в T . Выбирая по замкнутой точке на каждой неприводимой компоненте в T и на K вне $Z_2 \cup Z_3$, мы видим, что по теореме 3.17 существует подмногообразие $\tilde{Z}_2 \subset X$ такое, что $(Z_2 \cup Z_3, \tilde{Z}_2)$ является $(r - 1)$ -с.л.с. парой, и $\tilde{Z}_2$ не содержит ни одной неприводимой компоненты в T и K .

Утверждается, что $(Z_1 \cup Z_2, \tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2)$ является с.л.с. парой. Это следует из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_n(Z_2 \cup Z_3) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_n(Z_1 \cup Z_2) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_1 \cup Z_2) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_n(Z_1 \setminus Z'_2) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_1 \setminus (Z_2 \cup Z_3)) & &
 \end{array}$$

в которой средний столбец точен в среднем члене, а отображение в нижней строке равно композиции

$$F_n(Z_1 \setminus Z'_2) \rightarrow F_n(\tilde{Z}_1 \setminus Z_3) \rightarrow F_n(\tilde{Z}_1 \setminus (Z_2 \cup Z_3)).$$

Поскольку $(Z_1, \tilde{Z}_1)$ и $(Z_2 \cup Z_3, \tilde{Z}_2)$ являются с.л.с. парами, для любой точки $x \in Z_1 \cup Z_2$ и открытого подмножества $V \subset X$, содержащего x , найдется меньшее открытое подмножество $W \subset X$, содержащее x и такое, что отображение

$$F_n(V \cap (Z_1 \cup Z_2)) \rightarrow F_n(W \cap (\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2))$$

равно нулю для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим неприводимое подмногообразие $C \subset X$ и равноразмерное подмногообразие $R \subset Z_1 \cup Z_2$ коразмерности q в $Z_1 \cup Z_2$, не содержащее C . Пусть R' равно объединению всех неприводимых компонент в R , не содержащихся в $Z'_2 \cup Z_2$, а $\Lambda'_C(R')$ равно объединению всех неприводимых компонент в $\Lambda_C(R') \subset \tilde{Z}_1$, не содержащихся в $Z_2 \cup Z_3$. Тогда существует равноразмерное

подмногообразие $R'' \subset Z_2 \cup Z_3$ коразмерности q в $Z_2 \cup Z_3$, содержащее пересечение $(\Lambda'_C(R') \cup R) \cap (Z_2 \cup Z_3)$ и не содержащее C . Рассмотрим $\Lambda_C(R'') \subset \tilde{Z}_2$, где теперь Λ_C берется относительно $(r-1)$ -с.л.с. пары $(Z_2 \cup Z_3, \tilde{Z}_2)$.

Утверждается, что $(Z_1 \cup Z_2, \tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2)$ является $(r-1)$ -с.л.с. парой относительно соответствия $(R, C) \mapsto \Lambda_C(R) = \Lambda'_C(R') \cup \Lambda_C(R'')$. Это следует из рассмотренной коммутативной диаграммы, аналогичной предыдущей и состоящей из двух частей:

$$\begin{array}{ccc} F_n((Z_1 \cup Z_2) \setminus \{R_i\}) & \longrightarrow & F_n((\tilde{Z}_1 \cup Z_2) \setminus \{\Lambda'_{C_i}(R'_i) \cup R_i\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n(Z_1 \setminus (Z'_2 \cup \{R_i\})) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_1 \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup \{\Lambda'_{C_i}(R'_i)\})) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} F_n((Z_2 \cup Z_3) \setminus \{\Lambda'_{C_i}(R'_i) \cup R_i\}) & \longrightarrow & F_n(\tilde{Z}_2 \setminus \{\Lambda_{C_i}(R_i)\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n((\tilde{Z}_1 \cup Z_2) \setminus \{\Lambda'_{C_i}(R'_i) \cup R_i\}) & \longrightarrow & F_n((\tilde{Z}_1 \cup \tilde{Z}_2) \setminus \{\Lambda_{C_i}(R_i)\}) \end{array}$$

Эти диаграммы склеиваются при помощи точной последовательности

$$\begin{aligned} F_n((Z_2 \cup Z_3) \setminus \{\Lambda'_{C_i}(R'_i) \cup R_i\}) &\rightarrow F_n((\tilde{Z}_1 \cup Z_2) \setminus \{\Lambda'_{C_i}(R'_i) \cup R_i\}) \\ &\rightarrow F_n(\tilde{Z}_1 \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup \{\Lambda'_{C_i}(R'_i)\})). \end{aligned}$$

Здесь $\{O_i\}$ – объединение объектов O_i по всем i , $1 \leq i \leq r-1$, а горизонтальные отображения в диаграммах являются композициями прямых образов при замкнутых вложениях и ограничений на открытые подмножества. Данная диаграмма анализируется точно так же, как и предыдущая.

3.4. Заклеивающие системы. Пусть k – поле, X – равноразмерное многообразие над k , а Z – равноразмерное подмногообразие в X коразмерности p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.29. Предположим, что система равноразмерных подмногообразий $\{Z_i^{1,2}\}$, $1 \leq i \leq p-1$, соответственно коразмерности i в X удовлетворяет следующим условиям:

- (i) многообразие Z содержится в каждом из многообразий Z_{p-1}^1 и Z_{p-1}^2 , а $Z_i^1 \cup Z_i^2$ содержится в каждом из многообразий Z_{i-1}^1 и Z_{i-1}^2 для всех i , $2 \leq i \leq p-1$;
- (ii) пары (Z, Z_{p-1}^1) , (Z, Z_{p-1}^2) , $(Z_i^1 \cup Z_i^2, Z_{i-1}^1)$ и $(Z_i^1 \cup Z_i^2, Z_{i-1}^2)$ являются сильно локально стираемыми со степенью свободы не меньше, чем r , для всех i , $2 \leq i \leq p-1$;
- (iii) многообразия Z_i^1 и Z_i^2 не имеют общих неприводимых компонент при всех i , $1 \leq i \leq p-1$.

Тогда такую систему подмногообразий $\{Z_i^{1,2}\}$, $1 \leq i \leq p-1$, мы будем называть *заклеивающей системой для подмногообразия Z со степенью свободы не меньше, чем r* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.30. *Предположим, что поле k бесконечное и совершенное. Тогда для любого натурального числа $r \geq 0$ и равноразмерного подмногообразия Z коразмерности r в аффинном гладком многообразии X над k существует заклеивающая система $\{Z_i^{1,2}\}$, $1 \leq i \leq p-1$, на X для подмногообразия Z со степенью свободы не меньше, чем r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим требуемую систему подмногообразий $\{Z_i^{1,2}\}$, используя убывающую индукцию по i , $1 \leq i \leq p-1$.

Пусть $i = p-1$. Применение теоремы 3.17 с пустым T показывает существование равноразмерного подмногообразия $Z_{p-1}^1 = \tilde{Z} \subset X$ коразмерности $p-1$ в X такого, что (Z, Z_{p-1}^1) является r -с.л.с. парой. Выбирая по замкнутой точке на каждой неприводимой компоненте в Z_{p-1}^1 , мы видим, что по теореме 3.17 существует равноразмерное подмногообразие $Z_{p-1}^2 = \tilde{Z}$ коразмерности $p-1$ в X такое, что Z_{p-1}^2 не имеет общих неприводимых компонент с Z_{p-1}^1 , а (Z, Z_{p-1}^2) является r -с.л.с. парой.

Индукционный переход от $i+1$ к i , $1 \leq i < p-1$, аналогичен случаю $i = p-1$ после замены Z на $Z_{i+1}^1 \cup Z_{i+1}^2$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.31. Используя следствие 3.18 вместо теоремы 3.17 в доказательстве предложения 3.30, можно показать, что для любого равноразмерного подмногообразия Z на (не обязательно аффинном) гладком многообразии X над бесконечным совершенным полем существует заклеивающая система со степенью свободы не меньше, чем нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.32. (i) Из замечания 3.26 следует, что в условиях предложения 3.30 можно также требовать, чтобы каждая неприводимая компонента в Z_{p-1}^1 и Z_{p-1}^2 содержала некоторую неприводимую компоненту в Z и чтобы для любого i , $1 \leq i \leq p-2$, каждая неприводимая компонента в Z_i^1 и Z_i^2 содержала бы некоторую неприводимую компоненту в $Z_{i+1}^1 \cup Z_{i+1}^2$.

(ii) Пусть $W \subset X$ – равноразмерное подмногообразие, пересекающееся собственно с Z ; если заклеивающая система $\{Z_i^{1,2}\}$ удовлетворяет условию, указанному в п. (i), то W пересекается собственно с Z_i^j при $j = 1, 2$ и при всех i , $1 \leq i \leq p-1$. Отсюда и из следствия 3.19 вытекает, что в условиях предложения 3.30 можно также требовать, чтобы ни одна неприводимая компонента в $W \cap Z_i^1$ не содержалась бы в Z_i^2 ни для какого i , $1 \leq i \leq p-1$.

Введем следующее обозначение. Пусть $Z_i \subset X$, $p \leq i \leq q$, – равноразмерные подмногообразия коразмерности i на равноразмерном многообразии X над k такие, что $Z_q \subset \dots \subset Z_p$. Рассмотрим набор $f = \{f_\eta\} \in \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} F_n(k(\eta))$. Положим

$$\nu_{Z_p \dots Z_q}(f) = \sum_{(z_p, \dots, z_q)} (\nu_{k(z_{q-1})k(z_q)} \circ \dots \circ \nu_{k(z_p)k(z_{p-1})})(f_{z_p}),$$

где $(z_p, \dots, z_q)$ пробегает все такие наборы общих точек неприводимых компонент в $Z_p, \dots, Z_q$ соответственно, что для любого i , $p < i \leq q$, выполняется условие $z_i \in \bar{z}_{i-1}$. Для $f \in F_n(k(X))$ через $\text{sing}(f)$ обозначим множество неприводимых дивизоров D на X таких, что $\nu_{XD}(f) \neq 0$.

Ниже приводится основное свойство заклеивающих систем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.33. *Пусть $\{Z_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, – заклеивающая система на X для равноразмерного подмногообразия $Z \subset X$ коразмерности p в X со*

степенью свободы не меньше, чем нуль, $x \in Z$ – произвольная (не обязательно замкнутая) точка. Предположим, что набор $g \in \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} F_{n-p}(k(\eta))$ – коцикл в резольвенте Герстена $\text{Gers}(X_x, F_*, n)^\bullet$ в x , где $X_x = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, и что носитель набора g содержится в Z . Тогда существует набор $f \in \bigoplus_{\eta \in X^{(0)}} F_n(k(\eta))$ такой, что подмногообразие $\text{sing}(\nu_{X Z_1^1 \dots Z_{r-1}^1}(f)) \subset Z_{r-1}^1$ содержится в $Z_r^1 \cup Z_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq p-1$, и $d_x \nu_{X Z_1^1 \dots Z_{p-1}^1}(f) = g$, где d_x – дифференциал в комплексе $\text{Gers}(X_x, F_*, n)^\bullet$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство ведется индукцией по $p \geq 1$. По замечанию 3.27 случай $p = 1$ тривиален.

Предположим, что $p > 1$. Тогда по предложению 3.14 существуют такие два набора $g^1, g^2 \in \bigoplus_{\eta \in X^{(p-1)}} F_{n-p+1}(k(\eta))$ с носителями на Z_{p-1}^1 и Z_{p-1}^2 соответственно, что $d_x(g^i) = g$ при $i = 1, 2$. Следовательно, $d_x(g^1 - g^2) = 0$, и по предположению индукции существует набор $f \in \text{Gers}(X, F_*, n)^0$ такой, что $\text{sing}(\nu_{X Z_1^1 \dots Z_{r-1}^1}(f)) \subset Z_r^1 \cup Z_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq p-2$, и $d_x \nu_{X Z_1^1 \dots Z_{p-2}^1}(f) = g^1 - g^2$, где $Z_{p-1} = Z_{p-1}^1 \cup Z_{p-1}^2$. Такой набор f удовлетворяет требуемым условиям относительно исходного набора g .

3.5. Основная теорема. Пусть F_* – локально ацикличная в слоениях теория гомологий над k .

ТЕОРЕМА 3.34. Предположим, что поле k бесконечное и совершенное и что X – неприводимое гладкое многообразие над k . Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ морфизм комплексов пучков

$$\underline{\nu}_X: \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet \rightarrow \underline{\text{Cous}}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet = \underline{\text{Gers}}(X, F_*, n)^\bullet$$

является квазиизоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 3.35. В предположениях теоремы 3.34 естественный морфизм $\mathcal{F}_n^X \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet$ является квазиизоморфизмом. В частности, группы когомологий $H^i(\underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet)$ канонически изоморфны группам когомологий $H^i(X, \mathcal{F}_n^X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.36. В условиях теоремы 3.34 сделано сильное ограничение на основное поле: оно должно быть бесконечным и совершенным. На самом деле эти свойства основного поля используются только при геометрическом доказательстве утверждения 3.23. Представляется возможным доказать аналогичный результат для гладких многообразий над конечным полем, а затем вывести из этого теорему для регулярных многообразий над произвольным полем при помощи стандартных соображений, использующих выбор модели многообразия. Тем не менее, отсутствие морфизмов прямого образа на рассматриваемых аделных комплексах (даже для случая расширения скаляров) не позволяет применить известное рассуждение с трансфером для случая конечных полей. С другой стороны, автору известно доказательство теоремы 3.34 при $\dim X \leq 3$ для регулярных многообразий над произвольным полем, не использующее утверждение 3.23.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.34. Достаточно доказать, что морфизм $\nu_U: \underline{\mathbf{A}}(U, \mathcal{F}_n^U) \rightarrow \underline{\text{Cous}}(U, \mathcal{F}_n^X)$ является квазиизоморфизмом для любого открытого

аффинного подмножества $U \subset X$. Поэтому можно положить $X = U$. Поскольку $\mathcal{F}_n^X$ – подпучок в постоянном пучке, из предложения 2.30 следует, что комплекс $\mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet$ является подкомплексом в $\mathbf{A}'(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet$. По замечанию 2.22 и теореме 2.46 достаточно показать, что для любого p , $0 \leq p \leq d$, естественный гомоморфизм $H^p(\mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet) \rightarrow H^p(\mathbf{A}'(X, \mathcal{F}_n^X)^\bullet)$ инъективен.

Случай $p = 0$ тривиален. Предположим, что $1 \leq p \leq d$, и рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^p$. Пусть $f = d(g')$, где $g' \in \mathbf{A}'(X, \mathcal{F}_n^X)^{p-1}$. Нам требуется показать существование аделя $g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^{p-1}$, для которого $d(g) = f$. Будем доказывать это индукцией по максимальной глубине l , $-1 \leq l \leq p-1$, ненулевых компонент в g' . Напомним, что для любого аделя h и возрастающей последовательности натуральных чисел $(j_0, \dots, j_q)$ через $h_{j_0 \dots j_q}$ обозначается компонента h , имеющая тип $(j_0, \dots, j_q)$.

Предположим, что $l = -1$. Пусть $(i_0, \dots, i_{p-1})$ – последовательность такая, что $g'_{i_0 \dots i_{p-1}} \neq 0$. Тогда $i_0 > 0$ и выполняется равенство

$$g'_{i_0 \dots i_{p-1}} = f_{0i_0 \dots i_{p-1}} \in \mathbf{A}((0, i_0, \dots, i_{p-1}), \mathcal{F}_n^X).$$

По следствию 2.42 имеем $g'_{i_0 \dots i_{p-1}} \in \mathbf{A}((i_0, \dots, i_{p-1}), \mathcal{F}_n^X)$ и, таким образом, $g' \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^{p-1}$.

Теперь предположим, что $l \geq 0$. Пусть $(0, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_{p-1})$ – такая последовательность, что $g'_{0 \dots li_{l+1} \dots i_{p-1}} \neq 0$. Предположим, что $l < p-1$. Объединяя предложение 2.16, следствие 3.9, (ii), мы видим, что элемент $\nu_{0 \dots (l+1)}(f_{0 \dots (l+1)i_{l+1} \dots i_{p-1}})$ принадлежит группе

$$\bigoplus_{\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}} \mathbf{A}((0, i_{l+1} - l - 1, \dots, i_{p-1} - l - 1), \mathcal{F}(n-d)_{d-l-1}^{\bar{\eta}_{l+1}}) \\ \subset \prod_{(\eta_{l+1}, \dots, \eta_{ip})} \left(\bigoplus_{\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}} F_{n-l-1}(k(\eta_{l+1})) \right),$$

где $d = \dim(X)$, а произведение берется по всем флагам $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})$ типа $(i_{l+1}, \dots, i_p)$ и с $\eta_{i_{l+1}} \in \bar{\eta}_{l+1}$. С другой стороны, из закона взаимности следует, что

$$\nu_{0 \dots (l+1)}(f_{0 \dots (l+1)i_{l+1} \dots i_{p-1}}) = \nu'_{0 \dots (l+1)}(-1)^{l+1} g'_{0 \dots li_{l+1} \dots i_{p-1}}.$$

По лемме 3.37 существует элемент $g^0 \in \mathbf{A}((0, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_{p-1}), \mathcal{F}_n^X)$ такой, что

$$\nu'_{0 \dots (l+1)}(g'_{0 \dots li_{l+1} \dots i_{p-1}} - g^0) = 0.$$

По лемме 2.48 существует элемент

$$h' \in \prod_{0 \leq i \leq l} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_{p-1}), \mathcal{F}_n^X)$$

такой, что $d(h')_{0 \dots li_{l+1} \dots i_{p-1}} = g'_{0 \dots li_{l+1} \dots i_{p-1}} - g^0$. Заметим, что $d(g' - g^0 - d(h')) \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^p$, а адель $g' - g^0 - d(h')$ имеет строго меньше ненулевых компонент глубины l , чем адель g' . Следовательно, по предположению индукции существует элемент $g^1 \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^{p-1}$ такой, что $d(g^1) = d(g' - g^0 - d(h'))$, и можно положить $g = g^0 + g^1$.

Теперь предположим, что $l = p - 1$. Тогда по лемме 2.23 существует элемент $g^0 \in \mathbf{A}((0, \dots, p-1), \mathcal{F}_n^X)$ такой, что $\nu'_{0\dots(p-1)}(g' - g^0) = 0$. По лемме 2.48 существует элемент $h' \in \prod_{0 \leq i < p-1} \mathbf{A}'((0, \dots, \hat{i}, \dots, p-1), \mathcal{F}_n^X)$ такой, что $d(h')_{0\dots(p-1)} = (g' - g^0)_{0\dots(p-1)}$. Заметим, что $d(g' - g^0 - d(h')) \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^p$ и адель $g' - g^0 - d(h')$ не имеет компонент глубины $p - 1$. Следовательно, по предположению индукции существует элемент $g^1 \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_n^X)^{p-1}$ такой, что $d(g^1) = d(g' - g^0 - d(h'))$, и можно положить $g = g^0 + g^1$.

Существенной частью в доказательстве теоремы 3.34 является следующая аппроксимационная лемма.

ЛЕММА 3.37. В предположениях теоремы 3.34 рассмотрим адель

$$f \in \mathbf{A}'((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}_n^X)$$

такой, что глубина l последовательности $(i_0, \dots, i_p)$ строго меньше, чем p , и выполняется условие

$$\begin{aligned} \nu'_{0\dots(l+1)}(f) &\in \bigoplus_{\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}} \mathbf{A}((0, i_{l+1} - l - 1, \dots, i_p - l - 1), \mathcal{F}(n - d)_{d-l-1}^{\bar{\eta}_{l+1}}) \\ &\subset \prod_{(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})} \left(\bigoplus_{\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}} F_{n-l-1}(k(\eta_{l+1})) \right), \end{aligned}$$

где $d = \dim(X)$, а произведение берется по всем флагам $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})$ типа $(i_{l+1}, \dots, i_p)$ и с $\eta_{i_{l+1}} \in \bar{\eta}_{l+1}$. Тогда существует адель $g \in \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}_n^X)$ типа, как и f , такой, что $\nu_{0\dots(l+1)}(g) = \nu'_{0\dots(l+1)}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В течение данного доказательства обозначение η_s соответствует точке на X коразмерности s в X (хотя иногда точки рассматриваются на собственных замкнутых подмногообразиях в X). Через d_{η_s} обозначен дифференциал в резольвенте Герстена в η_s , т.е. дифференциал в комплексе $\text{Gers}(X_{\eta_s}, F_*, n)^\bullet$. Для любых двух подмногообразий C_1, C_2 в X через $C_1 - C_2$ будем обозначать объединение всех неприводимых компонент в C_1 , которые не содержатся в C_2 . Заметим, что для любых двух подмногообразий C_1, C_2 в X выполняется равенство

$$(C_1 - C_2) \cup C_2 = C_1 \cup C_2.$$

Доказательство проходит в два шага.

Шаг 1. Рассмотрим набор $\mathbf{A}$ -аделей

$$\begin{aligned} \{h_{\eta_{l+1}(i_{l+1}-l-1)\dots(i_p-l-1)}\} &= \nu'_{0\dots(l+1)}(f) \\ &\in \bigoplus_{\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}} \mathbf{A}((0, i_{l+1} - l - 1, \dots, i_p - l - 1), \mathcal{F}_{n-l-1}^{\bar{\eta}_{l+1}}). \end{aligned}$$

Пусть $Z_{l+1} = \bigcup \bar{\eta}_{l+1}$ равно объединению замыканий по конечному множеству схемных точек $\eta_{l+1} \in X^{(l+1)}$ таких, что адель $h_{\eta_{l+1}(i_{l+1}-l-1)\dots(i_p-l-1)}$ не равен нулю на $\bar{\eta}_{l+1}$. Для каждой схемной точки $\eta_{l+1} \in Z_{l+1}^{(0)}$ рассмотрим систему дивизоров $\{D_{\eta_{l+1}}, D_{\eta_{l+1}\eta_{i_{l+1}}\dots\eta_{i_k}}\}$, $l+1 \leq k < p$, на $\bar{\eta}_{l+1}$, возникающую из адельного условия для $\mathbf{A}$ -аделя $h_{\eta_{l+1}(i_{l+1}-l-1)\dots(i_p-l-1)}$ на $\bar{\eta}_{l+1}$ (см. предложение 2.14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.38. Для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$, $l + 1 \leq k < p$, на Z_{l+1} существует равноразмерное подмногообразие $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} \subset X$ коразмерности $l + 1$ в X такое, что система подмногообразий $\{Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}\}$, $l + 1 \leq k < p$, на X удовлетворяет следующим условиям:

- (i) для любой точки $\eta_{i_{l+1}}$ на Z_{l+1} имеется вложение $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}}}(\eta_{i_{l+1}}) \subseteq Z_{l+1}(\eta_{i_{l+1}})$, а для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$, $l + 1 < k < p$, на Z_{l+1} имеется вложение $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}(\eta_{i_k}) \subseteq Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}}(\eta_{i_k})$;
- (ii) для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$, $l + 1 \leq k < p$, на Z_{l+1} подмногообразие $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - Z_{l+1}$ содержит равноразмерное подмногообразие

$$E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} = \bigcup_{\eta_{l+1} \in Z_{l+1}^{(0)}} (D_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - D_{\eta_{l+1}})$$

коразмерности $l + 2$ в X , и $(E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}, Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - Z_{l+1})$ является сильно локально стираемой парой со степенью свободы не меньше, чем $p - k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим систему подмногообразий $\{Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}\}$ индукцией по k , $l + 1 \leq k < p$.

Пусть $k = l + 1$. Поскольку для любой точки $\eta_{l+1} \in Z_{l+1}^{(0)}$ система дивизоров $\{D_{\eta_{l+1}}, D_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}\}$, $l + 1 \leq k < p$, на $\bar{\eta}_{l+1}$ удовлетворяет условию (2.1) из предложения 2.14, мы получаем, что ни для какой точки $\eta_{i_{l+1}}$ на X определенное выше подмногообразие $E_{\eta_{i_{l+1}}}$ не содержит $\eta_{i_{l+1}}$. Для каждой точки $\eta_{i_{l+1}}$ на Z_{l+1} выберем по замкнутой точке на каждой неприводимой компоненте Z_{l+1} и на $\bar{\eta}_{l+1}$ вне $E_{\eta_{i_{l+1}}}$; так возникает конечное множество замкнутых точек $T_{\eta_{i_{l+1}}} \subset X \setminus E_{\eta_{i_{l+1}}}$. Применение теоремы 3.17 при $f = p - l - 1$, $Z = E_{\eta_{i_{l+1}}}$ и $T = T_{\eta_{i_{l+1}}}$ показывает существование равноразмерного подмногообразия $z_{\eta_{i_{l+1}}} = \tilde{Z}$ коразмерности $l + 1$ в X , которое не содержит $\bar{\eta}_{i_{l+1}}$, не имеет общих неприводимых компонент с Z_{l+1} и такое, что $(E_{\eta_{i_{l+1}}}, z_{\eta_{i_{l+1}}})$ является $(p - l - 1)$ -с.л.с. парой. Положим $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}}} = Z_{l+1} \cup z_{\eta_{i_{l+1}}}$.

Теперь сделаем индукционный переход от $k - 1$ к k , $l + 1 < k < p$. Как и раньше, по условию (2.1) из предложения 2.14 ни для какого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$ на Z_{l+1} подмногообразие

$$E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} = \bigcup_{\eta_{l+1} \in Z_{l+1}^{(0)}} (D_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - (D_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} \cup D_{\eta_{l+1}}))$$

не содержит точку η_{i_k} . Для каждого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$ применение предложения 3.28 при

$$\begin{aligned} Z_1 &= E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}}, & Z_2 &= E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}}, \\ \tilde{Z}_1 &= Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} - Z_{l+1}, & T &= Z_{l+1}, & C &= \bar{\eta}_{i_k} \end{aligned}$$

показывает существование равноразмерного подмногообразия $z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} = \tilde{Z}_2$ коразмерности $l + 1$ в X , которое не содержит $\bar{\eta}_{i_k}$, не имеет общих неприводимых компонент с Z_{l+1} и такое, что

$$(E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} \cup E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}, (Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} - Z_{l+1}) \cup z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}})$$

является $(p - k)$ -с.л.с. парой. Положим $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} = Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}} \cup z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}$. Из замечания 3.16 следует, что

$$(E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}, Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} - Z_{l+1})$$

также является $(p - k)$ -с.л.с. парой и $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}(\eta_{i_k}) \subseteq Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}}(\eta_k)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.39. Для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})$ на Z_{l+1} существует набор

$$\{g_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\} \in \bigoplus_{\eta_{l+1} \in X_{\eta_{i_p}}^{(l+1)}} F_{n-l-1}(k(\eta_{l+1})),$$

удовлетворяющий следующим условиям (заметим, что замыкание точки η_{l+1} из индекса в наборе g не обязательно содержит $\eta_{i_{l+1}}$):

(i) $d_{\eta_{i_p}}(\{g_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}) = 0$;

(ii) если $\bar{\eta}_{l+1}$ содержит $\eta_{i_{l+1}}$, то $g_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}} = h_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}$;

(iii) носитель набора $\{g_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}$ содержится в подмногообразии $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{p-1}}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения из предложения 3.38. Поскольку $\mathbf{A}'$ -адель f имеет тип $(0, \dots, l, i_{l+1}, \dots, i_p)$, $i_{l+1} > l + 1$, из закона взаимности следует, что $d_{\eta_{i_{l+1}}}(\{h_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}) = 0$ для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_p})$ на Z_{l+1} , где $\{h_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}$ рассматривается как набор из $\text{Gers}(X_{\eta_{i_{l+1}}}, F_*, n)^{l+1}$. Следовательно, носитель набора

$$\{g_{\eta_{l+2}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\} = d_{\eta_{i_p}}(\{h_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}) \in \text{Gers}(X_{\eta_{i_p}}, F_*, n)^{l+2}$$

содержится в подмногообразии $E_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{p-1}}}$. Из предложений 3.14 и 3.38 следует, что существует набор $\{g'_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\} \in \text{Gers}(X_{\eta_p}, F_*, n)^{l+1}$ с носителем на $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{p-1}}} - Z_{l+1}$ такой, что $d_{\eta_{i_p}}(\{g'_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}) = g_{\eta_{l+2}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}$. Наконец, положим $g_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}} = \{h_{\eta_{l+1} \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\} - \{g'_{\eta_{l+1}; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_p}}\}$. Следствие доказано.

Шаг 2. По предложению 3.30 существует заклеивающая система $\{Z_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq l$, на X для подмногообразия Z_{l+1} со степенью свободы не меньше, чем $p - l$. Мы продолжим эту систему до заклеивающих систем для всех подмногообразий $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}$, $l + 1 \leq k < p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.40. Для любого k , $l + 1 \leq k < p$, и любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$ на Z_{l+1} существует заклеивающая система $Z_{r; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}^{1,2}$, $1 \leq r \leq l$, на X для подмногообразия $Z_{l+1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}$ со степенью свободы не меньше, чем $p - k$, удовлетворяющая следующему условию: для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$, $l + 1 \leq k < p$, на Z_{l+1} положим $D = Z_1^1 \cup Z_1^2$ и $D_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}} = Z_{1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}^1 \cup Z_{1; \eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}^2$. Тогда для любой точки $\eta_{i_{l+1}}$ на Z_{l+1} имеется вложение $D_{\eta_{i_{l+1}}}(\eta_{i_{l+1}}) \subseteq D(\eta_{i_{l+1}})$, а для любого флага $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$, $l + 1 < k < p$, на Z_{l+1} имеется вложение $D_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}(\eta_{i_k}) \subseteq D_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_{k-1}}}(\eta_{i_k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения из доказательства предложения 3.38. Доказательство ведется двойной индукцией по k и r , $l+1 \leq k < p$, $1 \leq r \leq l$, причем индукция по r убывающая, как в доказательстве предложения 3.30.

Предположим, что $k = l+1$, $r = l$. Для каждой точки η_{l+1} на Z_{l+1} применение предложения 3.28 с $Z_1 = Z_{l+1}$, $Z_2 = z_{l+1;\eta_{l+1}}$, $\tilde{Z}_1 = Z_l^1$, $T = Z_l^2$ и $C = \bar{\eta}_{l+1}$ показывает существование равноразмерного подмногообразия $z_{l;\eta_{l+1}}^1 = \tilde{Z}_2 \subset X$ коразмерности l в X , которое не содержит $\bar{\eta}_{l+1}$, не имеет общих неприводимых компонент с Z_l^2 и такое, что $(Z_{l+1;\eta_{l+1}}, Z_l^1 \cup z_{l;\eta_{l+1}}^1)$ является $(p-l-1)$ -с.л.с. парой. Положим $Z_{l;\eta_{l+1}}^1 = Z_l^1 \cup z_{l;\eta_{l+1}}^1$. Применяя предложение 3.28 при $Z_1 = Z_{l+1}$, $Z_2 = z_{l+1;\eta_{l+1}}$, $\tilde{Z}_1 = Z_l^2$, $T = Z_{l+1;\eta_{l+1}}^1$ и $C = \bar{\eta}_{l+1}$, мы получаем равноразмерное подмногообразие $z_{l;\eta_{l+1}}^2 = \tilde{Z}_2 \subset X$ коразмерности l в X , которое не содержит $\bar{\eta}_{l+1}$, не имеет общих неприводимых компонент с $Z_{l+1;\eta_{l+1}}^1$ и такое, что $(Z_{l+1;\eta_{l+1}}, Z_l^2 \cup z_{l;\eta_{l+1}}^2)$ является $(p-l-1)$ -с.л.с. парой. Положим $Z_{l;\eta_{l+1}}^2 = Z_l^2 \cup z_{l;\eta_{l+1}}^2$.

Индукционный переход от $r+1$ к r при $k = l+1$, $1 \leq r < l$ делается так же, как и выше, но с заменой Z_{l+1} на $Z_{r+1}^1 \cup Z_{r+1}^2$, $z_{l+1;\eta_{l+1}}$ на $z_{r+1;\eta_{l+1}}^1 \cup z_{r+1;\eta_{l+1}}^2$ и Z_l^j на Z_r^j при $j = 1, 2$.

Рассуждение для произвольного k , $l+1 < k < p$, такое же, как и при $k = l+1$, но с заменой подмногообразий $\bar{\eta}_{l+1}$, $Z_{l+1;\eta_{l+1}}$ и $z_{l+1;\eta_{l+1}}$ на соответственно подмногообразия $\bar{\eta}_{i_k}$, $Z_{l+1;\eta_{l+1} \dots \eta_{i_k}}$ и $z_{l+1;\eta_{l+1} \dots \eta_{i_k}}$ для каждого флага $(\eta_{l+1}, \dots, \eta_{i_k})$ на Z_{l+1} и с заменой заклеивающей системы $\{Z_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq l$, на индуктивно определяемую заклеивающую систему $\{Z_{r;\eta_{l+1} \dots \eta_{i_k-1}}^{1,2}\}$.

По построению система дивизоров $\{D, D_{\eta_{l+1} \dots \eta_{i_k}}\}$, $l+1 \leq k < p$, на X удовлетворяет требуемому условию. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.41. Для любого флага $(\eta_{l+1}, \dots, \eta_{i_p})$ на Z_{l+1} существует набор

$$\{g_{\eta_0; \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}}\} \in \bigoplus_{\eta_0 \in X^{(0)}} F_n(k(\eta_0))$$

такой, что $g_{\eta_0; \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}} \in (\mathcal{F}_n^{X \setminus D_{\eta_{l+1} \dots \eta_{i_p-1}}})_{\eta_{i_p}}$ и

$$d_{\eta_{l+1}} \nu_{X Z_{1;F}^1 \dots Z_{l;F}^1}(\{g_{\eta_0; \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}}\}) = \{h_{\eta_{l+1} \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует непосредственно из применения предложения 3.33 к набору $\{g_{\eta_{l+1}; \eta_{l+1} \dots \eta_{i_k}}\}$ из следствия 3.39 и заклеивающей системе $\{Z_{r;\eta_{l+1} \dots \eta_{i_p-1}}^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq l$, из предложения 3.40.

Теперь мы готовы построить требуемый адель $g \in \mathbf{A}((i_0, \dots, i_p), \mathcal{F}_n^X)$. Пусть $(\eta_0, \dots, \eta_l, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{i_p})$ – флаг типа $(i_0, \dots, i_p)$ на X . Положим $g_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}} = g_{\eta_0; \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}}$, если $(\eta_{l+1}, \dots, \eta_{i_p})$ является флагом на Z_{l+1} и $\eta_r \in (Z_{r;F}^1)^{(0)}$ при всех $1 \leq r \leq l$. Иначе положим $g_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{l+1} \dots \eta_{i_p}} = 0$.

Для любого флага $(\eta_0, \dots, \eta_k)$ на X типа $(i_0, \dots, i_k)$, $0 \leq k \leq l$, положим $D_{\eta_0 \dots \eta_k} = D$, а для любого флага $(\eta_0, \dots, \eta_l, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{i_k})$ на X типа $(i_0, \dots, i_k)$,

$l+1 \leq k < p$, положим $D_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{l+1} \dots \eta_k} = D_{\eta_{i_{l+1}} \dots \eta_{i_k}}$, если $(\eta_{i_{l+1}}, \dots, \eta_{i_k})$ является флагом на Z_{l+1} . Иначе положим $D_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{l+1} \dots \eta_k} = \emptyset$.

По предположению 3.40 система дивизоров $D_{\eta_0 \dots \eta_k}$, $0 \leq k < p$, на X удовлетворяет условию (2.1) из предложения 2.14. По следствию 3.41 распределение g удовлетворяет аделльному условию относительно системы дивизоров $D_{\eta_0 \dots \eta_k}$, $0 \leq k < p$, на X . Кроме того, имеется равенство $\nu_{0 \dots (l+1)}(g) = \nu'_{0 \dots (l+1)}(f)$. Это завершает доказательство леммы 3.37.

3.6. Явные коциклы. Построим явно некоторые коциклы в аделльном комплексе, соответствующие заданным коциклам в комплексе Герстена. Предположим, что поле k бесконечное и совершенное, F_* – л.а.с. теория гомологий над k , X – неприводимое гладкое многообразие над k , а $Y \subset X$ – равномерное подмногообразие коразмерности p в X . Рассмотрим набор $\{f_y\} \in \bigoplus_{y \in Y^{(0)}} F_m(k(y))$, являющийся коциклом в комплексе Герстена $\text{Gers}(X, F_*, p+m)^\bullet$ на X . По замечанию 3.31 существует заклеивающая система $Y_r^{1,2}$, $1 \leq r \leq p-1$, на X для подмногообразия Y со степенью свободы не меньше, чем нуль. Положим $Y_p^1 = Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.42. *Существует адель $f = [\{f_y\}] \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_{p+m}^X)^p$, являющийся коциклом в аделльном комплексе $\mathbf{A}(X, \mathcal{F}_{p+m}^X)^\bullet$, такой, что $\nu_X(f) = \{f_y\}$, где $\nu_X: \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_{p+m}^X)^\bullet \rightarrow \text{Gers}(X, F_*, p+m)^\bullet$ – морфизм из теоремы 3.34, и удовлетворяющий следующим условиям для любого флага $(\eta_{i_0}, \dots, \eta_{i_p})$ на X :*

- (i) $f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}} = 0$, если $\eta_{i_r} \notin Y_r^1$ для хотя бы одного r , $1 \leq r \leq p$;
- (ii) предположим, что $\eta_{i_0} \notin Y_1^1$, $\eta_{i_r} \in Y_r^1$, $\eta_{i_r} \notin Y_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq p-1$, и что $\eta_{i_p} \in Y$; тогда $f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}} = \tilde{f}_{\eta_{i_p}} \in F_{p+m}(k(X))$, где элемент $\tilde{f}_{\eta_{i_p}}$ зависит лишь от η_{i_p} и удовлетворяет условию $d_{\eta_{i_p}} \nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_p}}) = \{f_y\}_{\eta_{i_p}}$, где $d_{\eta_{i_p}}$ равно дифференциалу в резольвенте Герстена на $X_{\eta_{i_p}} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \eta_{i_p}})$, обозначение $\nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1}$ было введено в п. 3.4, а индекс η_{i_p} для произвольного набора обозначает, что рассматривается ограничение данного набора на $X_{\eta_{i_p}}$;
- (iii) имеется вложение $\text{sing}(\nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1}(f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}})) \subset Y_r^1 \cup Y_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq l$, где l равно глубине типа $(i_0, \dots, i_p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.43. Поскольку $d(f) = 0$, для любого целого числа l , $0 \leq l \leq p-1$, выполняется равенство $\nu_{0 \dots (l+1)}(d(f)) = 0$. Явным образом для любого флага $(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_{p-l+1}})$ на X типа $(i_1, \dots, i_{p-l+1})$ при $i_1 > l$ имеется равенство

$$0 = d_{\eta_{i_1}} \nu_{0 \dots l} \left(\sum_{j=1}^{p-l+1} (-1)^{j+1} f_{01 \dots l \eta_{i_1} \dots \hat{\eta}_{i_j} \dots \eta_{i_{p-l+1}}} \right) \in \bigoplus_{\eta \in X_{\eta_{i_1}}^{(l+1)}} F_{p+m-l-1}(k(\eta)), \quad (3.1)$$

где для произвольного флага Φ на X типа T индекс $(0, \dots, l, \Phi)$ обозначает, что рассматривается множество всех флагов $(\eta_0, \dots, \eta_l, \Phi)$ типа $(0, \dots, l, T)$ на X с фиксированной T -частью Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.42. Определим компоненты аделя f убывающей индукцией по глубине l , $-1 \leq l \leq p$, типов его компонент. Более того, расширим индукционное предположение условием (3.1).

Пусть $(\eta_0, \dots, \eta_{p-1}, \eta_i)$ – флаг на X с глубиной, равной $l \geq p-1$, т.е. такой, что $i \geq p$. Если $\eta_i \notin Y$, то положим $f_{\eta_0 \dots \eta_{p-1} \eta_i} = 0$. Предположим, что $\eta_i \in Y$;

тогда по предложению 3.33 существует элемент $\tilde{f}_{\eta_i} \in F_{p+m}(k(X))$ такой, что $\text{sing}(\nu_{XY_1^1 \dots Y_{r-1}^1}(\tilde{f}_{\eta_i})) \subset Y_r^1 \cup Y_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq p-1$, и выполняется условие

$$d_{\eta_i} \nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1}(\tilde{f}_{\eta_i}) = \{f_y\}_{\eta_i} \in \bigoplus_{\eta \in X_{\eta_i}^{(p)}} F_m(k(\eta)).$$

Положим $f_{\eta_0 \dots \eta_{p-1} \eta_i} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \tilde{f}_{\eta_i}$, если η_r является общей точкой некоторой неприводимой компоненты в Y_r^1 для всех r , $1 \leq r \leq p-1$. Иначе положим $f_{\eta_0 \dots \eta_{p-1} \eta_i} = 0$. Немедленно следует, что для определенной выше компоненты аделя f типа $(0, \dots, p-1, i)$ выполняются условия (i), (ii), а также условие (3.1) выполняется для $l = p-1$ и любого флага (η_{i_1}, η_{i_2}) типа (i_1, i_2) на X такого, что $i_1 > p-1$.

Выполним теперь индукционный переход от $l+1$ к l , $0 \leq l \leq p-2$. Пусть $(\eta_0, \dots, \eta_l, \eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_{p-l}})$ – флаг типа $(0, \dots, l, i_1, \dots, i_{p-l})$ на X с $i_1 > l+1$. Если $\eta_{i_1} \notin Y_{l+1}^1$, то положим $f_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} = 0$. Пусть $\eta_{i_1} \in Y_{l+1}^1$; тогда по предположению индукции и предложению 3.33, примененному к заклеивающей системе $Y_r^{1,2}$, $1 \leq r \leq l$, на X для подмногообразия Y_{l+1}^1 и точки η_{i_1} , существует элемент $\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} \in F_{p+m}(k(X))$ такой, что $\text{sing}(\nu_{XY_1^1 \dots Y_{r-1}^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}})) \subset Y_r^1 \cup Y_r^2$ для всех r , $1 \leq r \leq l$, и выполняется условие

$$\begin{aligned} d_{\eta_{i_1}} \nu_{XY_1^1 \dots Y_l^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}}) &= \nu_{l+1} \left(\sum_{j=1}^{p-l} (-1)^{j+1} f_{0 \dots (l+1) \eta_{i_1} \dots \hat{\eta}_{i_j} \dots \eta_{i_{p-l}}} \right)_{\eta_{i_1}} \\ &\in \bigoplus_{\eta \in X_{\eta_{i_1}}^{(l+1)}} F_{p+m-l-1}(k(\eta)). \end{aligned}$$

Положим $f_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} = \tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}}$, если η_r является общей точкой некоторой неприводимой компоненты в Y_r^1 для всех r , $1 \leq r \leq l$. Иначе положим $f_{\eta_0 \dots \eta_l \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} = 0$.

В введенных выше обозначениях предположим, что $\eta_{i_r} \notin Y_{l+r}^1$ для некоторого r , $1 < r \leq p-l$. Поскольку для любого j , $1 \leq j < r$, выполняется условие $\eta_{i_r} \notin Y_{l+r}^1$, а для любого j , $r \leq j \leq p-l$, выполняется условие $\eta_{i_{r-1}} \notin Y_{l+r}^1$, по предположению индукции мы получаем, что $f_{0 \dots (l+1) \eta_{i_1} \dots \hat{\eta}_{i_j} \dots \eta_{i_{p-l}}} = 0$ для всех j , $1 \leq j \leq p-l$. Следовательно, можно положить $\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} = 0$, и компонента аделя f типа $(0, \dots, l, i_1, \dots, i_{p-l})$ будет удовлетворять условию (i).

Далее предположим, что $\eta_{i_r} \in Y_{l+r}^1$, $\eta_{i_r} \notin Y_{l+r}^2$ для всех r , $1 \leq r \leq p-1$, и $\eta_{i_p} \in Y$. Тогда $\eta_{i_1} \notin Y_{l+2}^1$ и по предположению индукции

$$f_{0 \dots (l+1) \eta_{i_1} \dots \hat{\eta}_{i_j} \dots \eta_{i_{p-l}}} = 0$$

для всех j , $1 < j \leq p-l$, а $\tilde{f}_{0 \dots (l+1) \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{p-l}}} = \tilde{f}_{\eta_{i_{p-l}}}$, где $\tilde{f}_{\eta_{i_{p-l}}} \in F_{p+m}(k(X))$ удовлетворяет условию (ii). Следовательно, выполняется равенство

$$d_{\eta_{i_1}} \nu_{XY_1^1 \dots Y_l^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}}) = \nu_{XY_1^1 \dots Y_{l+1}^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_{p-l}}}).$$

По предположению индукции имеется вложение $\text{sing}(\nu_{XY_1^1 \dots Y_l^1}(\tilde{f}_{\eta_{i_{p-l}}})) \subset Y_{l+1}^1 \cup Y_{l+1}^2$. Следовательно, можно положить $\tilde{f}_{\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{p-l}}} = \tilde{f}_{\eta_{i_{p-l}}}$, и компонента аделя f типа $(0, \dots, l, i_1, \dots, i_{p-l})$ будет удовлетворять условию (ii).

Как и раньше, простая проверка показывает, что условие (3.1) выполняется для $l-1$ и любого флага $(\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_{p-l-1}})$ типа $(i_1, \dots, i_{p-l-1})$ на X такого, что $i_1 > l-1$.

Наконец, положим

$$f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}} = \sum_{j=0}^p (-1)^j f_{0\eta_{i_0} \dots \hat{\eta}_{i_j} \dots \eta_{i_p}}$$

для каждого флага $(\eta_{i_0}, \dots, \eta_{i_p})$ на X типа $(i_0, \dots, i_p)$ при $i_0 > 0$. По предположению индукции имеем $f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}} \in (\mathcal{F}_{p+m}^X)_{\eta_{i_0}}$. Такое же рассуждение, как и раньше, показывает, что условия (i) и (ii) выполняются для компоненты адела f типа $(i_0, \dots, i_p)$.

Поскольку $\text{sing}(f_{\eta_{i_0} \dots \eta_{i_p}}) \subset Y_1^1 \cup Y_1^2$ для любого флага $(\eta_{i_0}, \dots, \eta_{i_p})$ на X , распределение f удовлетворяет аделльному условию относительно постоянной системы дивизоров $Y_1^1 \cup Y_1^2$. Таким образом, мы построили требуемый коцикл $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_{p+m}^X)^p$.

Следующее утверждение используется для доказательства теоремы 4.21.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.44. *В сделанных выше предположениях рассмотрим схемную точку $\eta \in Y$ и предположим, что коцикл $\{f_y\}_\eta \in \text{Gers}(X_\eta, F_*, p+m)^p$ в локальной резольвенте Герстена на X_η является ограничением элемента $\alpha \in F_m(Y_\eta)$. Тогда элемент $\tilde{f}_\eta \in F_{p+m}(k(X))$ в условии (ii) из предложения 3.42 может быть выбран так, что набор $d_\eta \nu_{XY_1^1 \dots Y_{r-1}^1}(\tilde{f}_\eta)$ будет ограничением некоторого элемента $\alpha_r \in F_{p+m-r}((Y_r^1 \cup Y_r^2)_\eta)$ для всех r , $1 \leq r \leq p-1$. Более того, для любого r , $1 \leq r < p-1$, ограничение элемента α_r на $F_{p+m-r}((Y_r^1)_\eta \setminus Y_r^2)$ будет равно ограничению некоторого элемента из $F_{p+m-r}((Y_r^1)_\eta \setminus (Y_{r+1}^1 \cup Y_{r+1}^2))$, а ограничение элемента α_{p-1} на $F_{p+1}((Y_{p-1}^1)_\eta \setminus Y_{p-1}^2)$ будет равно ограничению некоторого элемента из $F_{p+1}((Y_{p-1}^1)_\eta \setminus Y)$, наконец, $\tilde{f}_\eta$ будет являться ограничением некоторого элемента $\alpha_0 \in F_{p+m}(X_\eta \setminus (Y_1^1 \cup Y_1^2))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ведется убывающей индукцией по r , $1 \leq r \leq p-1$.

Предположим, что $r = p-1$. Поскольку $Y_r^{1,2}$ являются заклеивающими системами со степенью свободы не меньше, чем нуль, мы видим, что естественные отображения $F_m(Y_\eta) \rightarrow F_m((Y_{p-1}^1)_\eta)$ и $F_m(Y_\eta) \rightarrow F_m((Y_{p-1}^2)_\eta)$ равны нулю. Поэтому существуют элементы $\alpha_{p-1}^i \in F_{m+1}((Y_{p-1}^i)_\eta \setminus Y)$ при $i = 1, 2$ такие, что их кограница равна $\alpha \in F_m(Y_\eta)$. Последовательность локализации, связанная с замкнутым вложением

$$Y_{p-1}^1 \cap Y_{p-1}^2 \hookrightarrow Y_{p-1}^1 \cup Y_{p-1}^2,$$

показывает, что элементы α_{p-1}^1 и α_{p-1}^2 являются ограничениями одного элемента $\alpha_{p-1} \in F_{m+1}((Y_{p-1}^1 \cup Y_{p-1}^2)_\eta)$.

Индукционный переход от $r+1$ к r , $1 \leq r < p-1$, аналогичен случаю $r = p-1$, но с подмногообразиями Y и $Y_{p-1}^{1,2}$, замененными на подмногообразия $Y_{r+1}^1 \cup Y_{r+1}^2$ и $Y_r^{1,2}$ соответственно. При $r = 0$ мы тоже повторяем аналогичное рассуждение, но с Y и $Y_{p-1}^{1,2}$, замененными на $Y_1^1 \cup Y_1^2$ и X соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.45. Условие из утверждения 3.44 выполняется для всех $\eta \in X^{(p)}$. Действительно, в этом случае можно положить $\alpha = f_\eta \in F_m(k(\eta)) = F_m(Y_\eta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.46. Пусть $\{f_y\} \in \text{Gers}(X, F_*, p+m)^p$ – коцикл в комплексе Герстена, а $\{Y_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, – заклеивающая система для его носителя Y на X со степенью свободы не меньше нуля. Тогда коцикл $\{\{f_y\}\} \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_{p+m}^X)^p$ называется *хорошим коциклом* для $\{f_y\} \in \text{Gers}(X, F_*, p+m)^p$ относительно заклеивающей системы $Y_r^{1,2}$, $1 \leq r \leq p-1$, если для него выполняются все условия из предложения 3.42 и утверждения 3.44 (для каждой точки $\eta \in Y$).

Из предложения 3.42 и утверждения 3.44 следует существование хороших коциклов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.47. Пусть X – гладкое многообразие над бесконечным совершенным полем. Тогда для любых заданного коцикла $\{f_y\} \in \text{Gers}(X, F_*, m)^p$ в комплексе Герстена и заклеивающей системы $\{Y_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, для носителя Y коцикла $\{f_y\}$ существует хороший коцикл $\{\{f_y\}\} \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^p$ для коцикла $\{f_y\}$ относительно заклеивающей системы $\{Y_r^{1,2}\}$.

Следующая техническая лемма отражает наличие достаточно большой свободы выбора при работе с аделями.

ЛЕММА 3.48. Пусть X – гладкое многообразие над бесконечным совершенным полем, и пусть набор $\{f_y\} \in \text{Gers}(X, F_*, m)^p$ имеет носителем равномерное подмногообразие $Y \subset X$. Предположим, что $d\{\tilde{f}_{\tilde{y}}\} = \{f_y\}$, где $\{\tilde{f}_{\tilde{y}}\} \in \text{Gers}(X, F_*, m)^{p-1}$, и что адель $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^p$ удовлетворяет условиям $\nu_X(f) = \{f_y\}$ и $f_U = 0$, где $f_U \in \mathbf{A}(U, \mathcal{F}_m^U)^p$ – ограничение f на $U = X \setminus Y$. Пусть $\{Y_r^{1,2}\}$ – заклеивающая система для Y на X . Тогда существует адель $\tilde{f} \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^{p-1}$ такой, что $d\tilde{f} = f$, $\nu_X(\tilde{f}) = \{\tilde{f}_{\tilde{y}}\}$ и $\tilde{f}_U$ является хорошим адельным коциклом относительно ограничения заклеивающей системы $\{Y_r^{1,2}\}$ на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$B^\bullet = \text{Ker}(\nu_X: \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^\bullet \rightarrow \text{Gers}(X, F_*, m)^\bullet).$$

Поскольку отображение ν_X сюръективно (см. лемму 2.23), мы видим, что комплекс $B^\bullet$ точен по теореме 3.34. Выберем произвольный адель $\tilde{f}_1 \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^{p-1}$, для которого $\nu_X(\tilde{f}_1) = \{\tilde{f}_{\tilde{x}}\}$. Поскольку выполняются условия $d(d(\tilde{f}_1) - f) = 0$, $\nu_X(d(\tilde{f}_1) - f) = 0$, существует такой элемент $h \in B^{p-1}$, что $dh = d(\tilde{f}_1) - f$. Адель $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 - h$ удовлетворяет условиям $d\tilde{f}_2 = f$, $\nu_X(\tilde{f}_2) = \{\tilde{f}_{\tilde{y}}\}$.

Если $p = 1$, то адель $(\tilde{f}_2)_U$ уже является хорошим коциклом для коцикла в комплексе Герстена $\{\tilde{f}_{\tilde{y}}\}_U \in \text{Gers}(U, m)^{p-1}$ на U . Предположим, что $p \geq 2$. Выберем произвольный хороший коцикл $\tilde{f}_3 \in \mathbf{A}(U, \mathcal{F}_m^U)^{p-1}$ для коцикла в комплексе Герстена $\{\tilde{f}_{\tilde{y}}\}_U \in \text{Gers}(U, m)^{p-1}$ на U относительно ограничения заклеивающей системы $\{Y_r^{1,2}\}$ на U . Выполняются условия $d_U(\tilde{f}_3 - (\tilde{f}_2)_U) = -f_U = 0$ и $\nu_U(\tilde{f}_3 - (\tilde{f}_2)_U) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $h \in B_U^{p-2}$, что $d_U(h) = \tilde{f}_3 - (\tilde{f}_2)_U$, где $B_U^\bullet = \text{ker}(\nu_U)$, а d_U – дифференциал в адельном

комплексе на U . Пусть $h' \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^{p-2}$ – продолжение нулем элемента h с U на X , т. е. $h'_{\eta_0 \dots \eta_{p-2}} = h_{\eta_0 \dots \eta_{p-2}}$, если $(\eta_0, \dots, \eta_{p-2})$ является флагом на U , и $h'_{\eta_0 \dots \eta_{p-2}} = 0$ в противном случае (см. следствие 2.7, (i)). Легко видеть, что $h' \in B^{p-2}$, а ограничение h' с X на U равно h . Таким образом, адель $\tilde{f} = \tilde{f}_2 + dh' \in \mathbf{A}(X, \mathcal{F}_m^X)^{p-1}$ удовлетворяет необходимым условиям. Лемма доказана.

§ 4. Приложения к K -когомологиям

4.1. Общие свойства K -когомологий и K -аделей. Напомним несколько стандартных фактов о пучках K -групп и K -когомологиях.

Рассмотрим слабую теорию гомологий для нётеровых схем, задаваемую по формуле $F_* = K'_*$. Соответствующие пучки гомологий в топологии Зариского будут обозначаться через $\mathcal{K}'_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Положим $\text{Gers}(X, n)^\bullet = \text{Gers}(X, \mathcal{K}'_n)^\bullet$, т. е.

$$\text{Gers}(X, n)^p = \bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} K_{n-p}(k(\eta)).$$

Для схемы X и целого числа $n \geq 0$ через $\mathcal{K}_n^X$ будем обозначать пучок, ассоциированный с предпучком, задаваемым по формуле $U \mapsto K_n(U)$ для любого открытого подмножества $U \subset X$, где $K_n(U) = \pi_{n+1}(BQ\mathcal{P}(U))$, а $\mathcal{P}(U)$ – точная категория когерентных локально свободных пучков на U . Когомологии Зариского $H^\bullet(X, \mathcal{K}_n^X)$ называются *K -когомологиями* схемы X . Очевидно, существует канонический морфизм пучков $\mathcal{K}_n^X \rightarrow (\mathcal{K}'_n)^X$ для любого $n \geq 0$, являющийся изоморфизмом, когда схема X регуляльна и отделима. Пучок $\mathcal{K}^X = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{K}_n^X$ является пучком суперкоммутативных ассоциативных колец. Любой морфизм схем $f: X \rightarrow Y$ определяет гомоморфизм пучков алгебр $f^*: \mathcal{K}^Y \rightarrow f_*\mathcal{K}^X$.

Для любых целых чисел $m, n \geq 0$ имеется морфизм комплексов пучков

$$\text{Gers}(X, m)^\bullet \otimes \mathcal{K}_n^X \rightarrow \text{Gers}(X, m+n)^\bullet,$$

задаваемый по формуле $\{f_\eta\} \otimes g \mapsto \{f_\eta \cdot i_\eta^* g\}$, где i_η^* – естественный морфизм пучков $i_\eta^*: \mathcal{K}_n^X \rightarrow (i_\eta)_* \mathcal{K}_n(k(\eta))$, $i_\eta: \bar{\eta} \hookrightarrow X$. Таким образом, комплекс пучков

$$\text{Gers}(X)^\bullet = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Gers}(X, m)^\bullet$$

является правым модулем над пучком ассоциативных колец $\mathcal{K}^X$, а естественный морфизм $\bigoplus_{m \geq 0} (\mathcal{K}'_m)^X \rightarrow \text{Gers}(X)^\bullet$ является гомоморфизмом $\mathcal{K}^X$ -модулей. Для каждого собственного морфизма $f: X \rightarrow Y$ неприводимых схем определен морфизм комплексов пучков

$$Rf_* \text{Gers}(X)^\bullet[d] = f_* \text{Gers}(X)^\bullet[d] \xrightarrow{f_*} \text{Gers}(Y)^\bullet,$$

где $d = \dim(f) = \dim(X) - \dim(Y)$. Из формулы проекции следует, что этот морфизм является гомоморфизмом $\mathcal{K}^Y$ -модулей относительно гомоморфизма $\mathcal{K}^Y \rightarrow f_*\mathcal{K}^X$. Таким образом, из общих свойств резольвент пучков вытекает следующий факт (см. определение высших произведений Масси в п. 4.5).

ЛЕММА 4.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – собственный морфизм схем, и пусть $a_1 \in H^{p_1}(X, \underline{\text{Gers}}(X)^\bullet) = H^{p_1}(Y, Rf_* \underline{\text{Gers}}(X)^\bullet)$, $b_i \in H^{p_i}(Y, \mathcal{K}^Y)$, $2 \leq i \leq k$, – классы в K -когомологиях, для которых определено k -е высшее произведение $t_k(a_1, b_2, \dots, b_k)$, где $Rf_* \underline{\text{Gers}}(X)^\bullet$ рассматривается как модуль над $\mathcal{K}^Y$ относительно гомоморфизма $\mathcal{K}^Y \rightarrow f_* \mathcal{K}^X \rightarrow Rf_* \mathcal{K}^X$. Тогда также определены высшие произведения $t_k(a_1, f^*(b_2), \dots, f^*(b_k))$ и $t_k(f_*(a_1), b_2, \dots, b_k)$ и выполняется равенство

$$f_*(t_k(a_1, f^*(b_2), \dots, f^*(b_k))) = (-1)^{d(p_2 + \dots + p_k)} t_k(f_*(a_1), b_2, \dots, b_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Другой, непосредственный, способ доказательства леммы 4.1 для гладких многообразий над совершенным бесконечным полем заключается в использовании теоремы 3.34 и адельной формулы проекции из предложения 2.24.

Если схема X регулярная и конечного типа над полем, то $\mathcal{K}_n^X = (\mathcal{K}'_n)^X$, комплекс пучков $\underline{\text{Gers}}(X, n)^\bullet$ квазиизоморфен $\mathcal{K}_n^X$ и $H^n(X, \mathcal{K}_n^X) = CH^n(X)$ для любого $n \geq 0$ (см. [6], а также предложение 3.8).

Из всего сказанного в п. 2.1 следует, что комплекс $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}^X)^\bullet$ является DG-кольцом, каждый морфизм схем $f: X \rightarrow Y$ определяет DG-гомоморфизм $\mathbf{A}(Y, \mathcal{K}^Y)^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{K}^X)^\bullet$, а комплекс $\text{Gers}(X)^\bullet$ является правым DG-модулем над DG-кольцом $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}^X)^\bullet$. По предложению 2.24 для любого собственного морфизма $f: X \rightarrow Y$ неприводимых схем морфизм $\text{Gers}(X)^\bullet[d] \rightarrow \text{Gers}(Y)^\bullet$ является гомоморфизмом правых DG-модулей над $\mathbf{A}(Y, \mathcal{K}^Y)^\bullet$ относительно гомоморфизма $\mathbf{A}(Y, \mathcal{K}^Y)^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(X, \mathcal{K}^X)^\bullet$, где $d = \dim(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. По всей видимости, не существует способа определить отображение прямого образа на адельных комплексах $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}^X)^\bullet$ относительно собственных морфизмов многообразий. Это становится видно уже на простейших примерах конечных морфизмов или замкнутых вложений. Тем не менее, ожидается существование *пополненного* варианта K -аделей, для которых (не каноническим образом) будет определено отображение прямого образа. Пополненные K -адели также должны служить описанию глобальной теории полей классов арифметических схем (см. [3]). Некоторые частные случаи были рассмотрены в работе [17]. Однако “пополненная” теория еще далека от своего построения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Из сказанного выше следует, что для каждого $p \geq 0$ имеется каноническое отображение α_p из $H^p(\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p^X)^\bullet)$ в бивариантную группу Чжоу $A^p(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ (см. [18]). Кроме того, каноническое отображение $\beta_p: H^p(X, \mathcal{K}_p) \rightarrow A^p(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ пропускается через α_p .

ВОПРОС 4.5. Существует ли особое многообразие X , для которого образ

$$\text{Im}(\alpha_p: H^p(\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p^X)^\bullet) \rightarrow A^p(X \xrightarrow{\text{id}} X))$$

строго больше, чем образ $\text{Im}(\beta_p: H^p(X, \mathcal{K}_p) \rightarrow A^p(X \xrightarrow{\text{id}} X))$, т. е. такое особое многообразие, для которого адельные коциклы определяют новые элементы в бивариантных группах Чжоу?

Зафиксируем теперь бесконечное и совершенное поле k и будем рассматривать K'_* как л.а.с. теорию гомологий над k (см. пример 3.11, 1)). Пусть

X – неприводимое гладкое многообразие над k ; тогда по предложению 3.42 и утверждению 3.44 для любого алгебраического цикла $Y = \sum n_i Y_i$ на X коразмерности p существует хороший коцикл $[Y] = [\{1_Y\}] \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p^X)^p$, где $\{1_Y\}$ обозначает набор из $\bigoplus_{\eta \in X^{(p)}} \mathbb{Z}$, который равен $n_i \in \mathbb{Z}$ для общей точки η_i в Y_i и равен 0 $\in \mathbb{Z}$ для всех остальных точек $\eta \in X^{(p)}$. Рассмотрим два примера аделльных коциклов.

Пусть D является (не обязательно приведенным или эффективным) дивизором на X , $d = \dim(X)$. Для каждой схемной точки $\eta \in X$ выберем локальное уравнение $s_\eta \in k(X)^*$ для D на $X_\eta = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\eta})$. Очевидно, что $s_\xi/s_\eta \in \mathcal{O}_{X,\eta}^*$, если $\xi \in \bar{\eta}$. Таким образом, мы получаем 1-коцикл $[D] \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_1^X)^1$, для которого $(X\eta)$ -компонента равна s_η^{-1} для $\eta \neq X$, а $(\eta\xi)$ -компонента равна s_η/s_ξ для $\eta \neq X$, $\xi \in \bar{\eta}$, $\xi \neq \eta$. По построению класс $[D]$ в $H^1(\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_1^X)^\bullet) = CH^1(X)$ совпадает с классом D в $CH^1(X)$ относительно отображения ν_X . В [19], [20], а также в следствии 4.22 доказано, что пересечение в группах Чжоу совпадает с точностью до знака с естественным произведением в соответствующих K -когомологиях. Таким образом, мы получаем следующую аделльную формулу для индекса пересечения дивизоров $D_1, \dots, D_d$, когда многообразие X собственное:

$$\begin{aligned} (D_1, \dots, D_d) &= - \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_d)} [k(\eta_d) : k] \nu_{\eta_0 \dots \eta_d} \{s_{1,\eta_1}^{-1}, s_{2,\eta_1}/s_{2,\eta_2}, \dots, s_{d,\eta_{d-1}}/s_{d,\eta_d}\} \\ &= - \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_d)} [k(\eta_d) : k] \nu_{\eta_0 \dots \eta_d} \{s_{1,\eta_1}^{-1}, s_{2,\eta_2}^{-1}, \dots, s_{d,\eta_d}^{-1}\}, \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из закона взаимности. Эта формула была доказана другими методами сначала для случая $d = 2$ в [21], а затем для произвольного d в [22]. Мы обобщаем явные вычисления из [21] и [22] при доказательстве теоремы 4.21.

Следующий пример рассматривает пересечение 1-цикла C и дивизора D на трехмерном неприводимом гладком многообразии X над k . Опишем явно 2-коцикл $[C]$ в аделльном комплексе $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_2^X)^\bullet$, представляющий C . Выберем эффективный приводимый дивизор E со следующими свойствами: для любой схемной точки $\eta \in X$ коразмерности не больше, чем два, в X существует элемент $t_\eta \in K_2(k(X))$ и поддивизор $E_\eta \subset E$ такие, что $\operatorname{sing}(t_\eta) \subset E$ и $d_\eta(\nu_{X E_\eta}(t_\eta)) = C_\eta$. Напомним, что $\nu_{X E_\eta}$ обозначает отображение вычета из $K_2(k(X))$ в прямую сумму мультипликативных групп полей рациональных функций на всех неприводимых компонентах в E_η (см. п. 3.4), C_η обозначает ограничение C на X_η , а d_η – дифференциал в резольвенте Герстена на X_η . Существование такого дивизора E следует из предложения 3.14 и замечания 3.31. Далее определим адели f_{012} и f_{013} по формуле $f_{X E_\eta \eta} = t_\eta^{-1} \in K_2(k(X))$, где t_η – такое же, как и выше, а все остальные компоненты в f_{012} и f_{013} положим равными произвольным элементам из $(\mathcal{K}_2^X)_\eta = K_2(\mathcal{O}_{X,\eta})$. Для каждого флага (η, ξ) типа $(2, 3)$ выполняется условие

$$d_\eta(\nu_{X E_\eta}(t_\eta)/\nu_{X E_\xi}(t_\xi)) = 0,$$

поэтому существует элемент $t_{\eta\xi} \in K_2(k(X))$ такой, что

$$d_\eta(t_{\eta\xi}) = \nu_{X E_\eta}(t_\eta)/\nu_{X E_\xi}(t_\xi).$$

Это определяет адель f_{023} . Наконец для каждого флага (μ, η, ξ) типа $(1, 2, 3)$ произведение $f_{\mu\eta\xi} = f_{X\eta\xi} f_{X\mu\xi}^{-1} f_{X\mu\eta}$ принадлежит $(\mathcal{K}_2^X)_\mu$ и также является аделем. Таким образом, мы определили коцикл $[C] = f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_2^X)^2$ такой, что $[C]$ представляет класс C в $H^2(\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_2^X)^\bullet) = CH^2(X)$ относительно отображения ν_X . Из этого мы получаем следующую формулу пересечения, когда многообразие X собственное:

$$(D, C) = \sum_{(\mu, \eta, \xi)} [k(\xi) : k] \nu_{X\mu\eta\xi} \{s_\mu^{-1}, f_{\mu\eta\xi}\} = \sum_{(\mu, \eta, \xi)} [k(\xi) : k] \nu_{X\mu\eta\xi} \{s_\mu^{-1}, t_{\eta\xi}\},$$

где, как и раньше, s_μ является локальным уравнением дивизора D в точке μ , а (μ, η, ξ) пробегает все флаги типа $(1, 2, 3)$ в X . Как и в предыдущем случае, последнее равенство следует из закона взаимности.

Укажем связь между адельным комплексом $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet$ и когерентными аделями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть X – гладкое многообразие над произвольным полем k . Тогда для любого $n \geq 0$ определен естественный морфизм комплексов

$$\mathrm{dlog} : \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet \rightarrow a(X, \Omega_X^n)^\bullet,$$

где $a(X, \Omega_X^n)^\bullet$ – комплекс рациональных аделей (см. [2] и [5, предложение 5.2.1]), а локальная компонента этого морфизма во флаге $(\eta_0, \dots, \eta_p)$ равна каноническому отображению $K_n(\mathcal{O}_{\eta_0}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{\eta_0}/k}^n$ (см. [23]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по p , что для любого натурального числа $p \geq 0$, подмножества $M \subset S(X)_p$ и открытого подмножества $U \subset X$ отображение $\mathrm{dlog} : \mathbf{A}(M, \mathcal{K}_n^U) \rightarrow a(M, \Omega_U^n)$ корректно определено. Поскольку пучок Ω_X^n локально свободен на гладкой схеме, он является 1-чистым пучком, и можно предполагать, что дополнение $X \setminus U = D$ – дивизор.

Пусть $p = 0$; тогда

$$\mathbf{A}(M, \mathcal{K}_n^U) = \prod_{\eta \in M} (\mathcal{K}_n^U)_\eta, \quad \mathbf{A}(M, \Omega_U^n) = \varinjlim_{l \geq 0} \prod_{\eta \in M} (\Omega_X^n(lD))_\eta,$$

и по лемме 4.7 требуемое утверждение доказано. При $p > 0$ выполняется равенство

$$a(M, \Omega_U^n) = \prod_{\eta \in P(X)} a(\eta M, (\Omega_U^n)_\eta) = \prod_{\eta \in P(X)} \varinjlim_V a(\eta M, \Omega_{U \cap V}^n),$$

где для каждой схемной точки $\eta \in P(X)$ предел берется по всем открытым подмножествам $V \subset X$, содержащим η (второе равенство использует тот факт, что функтор взятия аделей коммутирует с прямыми пределами квазикогерентных пучков). Поскольку аналогичное равенство выполняется для адельных групп пучка $\mathcal{K}_n^X$, переход индукции доказан.

Автор благодарит К. Суле за объяснение доказательства следующей леммы.

ЛЕММА 4.7. Рациональные дифференциальные формы из образа отображения $K_n(k(X)) \rightarrow \Omega_{k(X)/k}^n$ имеют полюс не выше первого порядка, вдоль любого неприводимого дивизора $D \subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним определение отображения $K_n(R) \rightarrow \Omega_{R/\mathbb{Z}}^n$ и его свойства. Существуют универсальные классы $c_n \in \varprojlim H^n(\mathrm{GL}_m(R), \Omega_{R/\mathbb{Z}}^n)$, где предел берется по $m \geq 0$; они определяют канонические отображения

$$K_n(R) \rightarrow H_n(\mathrm{GL}(R), \mathbb{Z}) \xrightarrow{c_n} \Omega_{R/\mathbb{Z}}^n.$$

Отображение c_n тривиально на $H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(R), \mathbb{Z})$. Более того, композиция

$$\begin{aligned} R^* \times \cdots \times R^* &\rightarrow H_1(\mathrm{GL}_1(R), \mathbb{Z}) \times \cdots \times H_1(\mathrm{GL}_1(R), \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H_n(\mathrm{GL}_n(R), \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathrm{GL}(R), \mathbb{Z}) \xrightarrow{c_n} \Omega_{R/\mathbb{Z}}^n \end{aligned}$$

задается по формуле

$$(r_1, \dots, r_n) \mapsto \frac{dr_1}{r_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dr_n}{r_n}.$$

Поскольку можно считать, что $\dim X > 0$, поле $F = k(X)$ бесконечно. В [24] доказано, что имеется изоморфизм $H_n(\mathrm{GL}_n(F), \mathbb{Z}) \cong H_n(\mathrm{GL}(F), \mathbb{Z})$ и построенное выше отображение $F^* \times \cdots \times F^* \rightarrow H_n(\mathrm{GL}_n(F), \mathbb{Z})$ индуцирует изоморфизм

$$K_n^M(F) \cong H_n(\mathrm{GL}_n(F), \mathbb{Z}) / H_n(\mathrm{GL}_{n-1}(F), \mathbb{Z}).$$

Теперь лемма следует из того, что для любых ненулевых рациональных функций $f_1, \dots, f_n \in k(X)^*$ дифференциальная форма $\frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n}$ имеет полюс не выше первого порядка, вдоль любого неприводимого дивизора $D \subset X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Из [24] следует, что для любого поля F естественная композиция $K_n^M(F) \rightarrow K_n(F) \rightarrow \Omega_{F/\mathbb{Z}}^n$ задается по формуле

$$\{f_1, \dots, f_n\} \mapsto (-1)^n (n-1)! \frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_n}{f_n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Выполняется равенство

$$\mathrm{dlog}(f \cdot g) = -\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \mathrm{dlog}(f) \cdot \mathrm{dlog}(g),$$

где $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_m^X)^\bullet$, $g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_n^X)^\bullet$ и справа рассматривается произведение в DG-кольце $\bigoplus_{n \geq 0} a(X, \Omega_X^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Пусть $Y \subset X$ – алгебраический цикл коразмерности p на гладком многообразии X над бесконечным совершенным полем k . Тогда существует явная конструкция класса Y в рациональной адельной группе $a(X, \Omega_X^p)^p$. Действительно, можно рассмотреть образ относительно отображения dlog для явного (хорошего) коцикла $[Y]$ в $\mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p^X)^p$, представляющего Y и построенного в предложении 3.42.

4.2. Характеристика Эйлера с носителем для K -групп. Конструкция и результаты, приведенные здесь, используются при доказательстве теоремы 4.21. Данные результаты не являются новыми: они немедленно следуют из рассмотрения K -теории Вальдхаузена категории совершенных комплексов,

развитой в [13], также их можно получить, используя R -пространства, построенные в [12]. Тем не менее, автор не нашел ссылки на явное описание требуемой конструкции.

Через ΩS обозначим пространство петель отмеченного топологического пространства (S, s_0) . Пусть $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ – непрерывное отображение отмеченных топологических пространств. Рассмотрим расслоение путей

$$M(f) = \{(x, \varphi) \mid x \in X, \varphi: I \rightarrow Y, \varphi(0) = f(x)\},$$

где I – отрезок $[0, 1]$. Напомним, что *гомотопическим слоем* $F(f)$ отображения f называется слой над y_0 естественного отображения $M(f) \rightarrow Y$, $(x, \varphi) \mapsto \varphi(1)$. Заметим, что $F(f)$ и $M(f)$ являются отмеченными пространствами с отмеченной точкой (x_0, φ_0) , где φ_0 – постоянное отображение в y_0 . Имеется естественное отображение $\Omega Y \rightarrow F(f)$, определяемое по формуле $\gamma \mapsto (x_0, \gamma)$. Более того, композиция $\Omega X \rightarrow \Omega Y \rightarrow F(f)$ канонически гомотопна постоянному отображению в $(x_0, \varphi_0) \in F(f)$. Действительно, явная гомотопия

$$G: \Omega X \times I \rightarrow F(f)$$

задается по формуле $(\gamma, t) \mapsto (\gamma(t), \varphi_t)$, где $\varphi_t(s) = (f \circ \gamma)(t + s(1 - t))$.

Пусть $\mathcal{M}$ – точная категория, $\mathcal{E}_3$ – точная категория коротких точных последовательностей объектов из $\mathcal{M}$. Точные функторы

$$\begin{aligned} \{0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0\} &\mapsto (M', M''), \\ (M', M'') &\mapsto \{0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0\} \end{aligned}$$

индуцируют отображения $BQ\mathcal{E}_3 \rightarrow BQM \times BQM$ и $BQM \times BQM \rightarrow BQ\mathcal{E}_3$ соответственно. Известный результат Квиллена заключается в том, что эти отображения отмеченных пространств гомотопически обратны друг к другу (см. [6, теорема 2]). Пусть $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ – две точные подкатегории в $\mathcal{M}$, и пусть $\mathcal{E}'_3$ – точная категория коротких точных последовательностей объектов из $\mathcal{M}$ таких, что во введенных выше обозначениях объект M' принадлежит категории $\mathcal{M}'$, а объект M'' принадлежит категории $\mathcal{M}''$. Тогда, аналогично, отмеченное пространство $BQ\mathcal{E}'_3$ гомотопически эквивалентно $BQM' \times BQM''$.

В дальнейшем мы будем предполагать для простоты, что категория $\mathcal{M}$ абелева (этого будет достаточно для дальнейших приложений).

ЛЕММА 4.11. Пусть $\mathcal{C}_n$ – точная категория комплексов длины n объектов из $\mathcal{M}$, и пусть $\mathcal{E}_n$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}_n$, состоящая из точных комплексов. Положим $B^i = \text{Im}(M^{i-1} \rightarrow M^i)$ для произвольного комплекса $M^\bullet$. Тогда естественные отображения $BQ\mathcal{C}_n \rightarrow BQM^{n+1}$, $BQ\mathcal{E}_n \rightarrow BQM^n$, индуцированные точными функторами

$$\begin{aligned} \{0 \rightarrow M^0 \rightarrow \dots \rightarrow M^n \rightarrow 0\} &\mapsto (M^0, \dots, M^n), \\ \{0 \rightarrow M^0 \rightarrow \dots \rightarrow M^n \rightarrow 0\} &\mapsto (B^1, \dots, B^n) \end{aligned}$$

соответственно, являются гомотопическими эквивалентностями. Более того, диаграмма отмеченных пространств

$$\begin{array}{ccc} BQ\mathcal{E}_n & \longrightarrow & BQM^n \\ \downarrow & & \downarrow i \\ BQ\mathcal{C}_n & \longrightarrow & BQM^{n+1} \end{array} \quad (4.1)$$

коммутативна с точностью до гомотопии, где горизонтальные отображения совпадают с определенными выше, левое вертикальное отображение является естественным вложением, а i индуцировано точным функтором

$$(B^1, \dots, B^n) \mapsto (B^1, B^1 \oplus B^2, \dots, B^{n-1} \oplus B^n, B^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем доказательству теоремы 1.11.7 из [13]. Тем не менее, мы не используем язык спектров K -теории для категорий Вальдхаузена.

Доказательство ведется индукцией по $n \geq 3$. Случай $n = 3$ является указанным выше результатом Квиллена. Для произвольного $n \geq 4$ рассмотрим естественные вложения категорий $\mathcal{E}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{E}_n$ и $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{E}_n$, заданные функторами

$$\begin{aligned} \{0 \rightarrow M^0 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \rightarrow 0\} &\mapsto \{0 \rightarrow M^0 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0\}, \\ M &\mapsto \{0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0\} \end{aligned}$$

соответственно. Категория $\mathcal{E}_n$ эквивалентна категории коротких точных последовательностей объектов из $\mathcal{E}_n$, которые начинаются с объекта из $\mathcal{E}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{E}_n$ и заканчиваются объектом из $\mathcal{E}_2 = \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{E}_n$. Действительно, данная эквивалентность задается явно функтором

$$M^\bullet \mapsto \{0 \rightarrow \tau_{\leq (n-1)}(M^\bullet) \rightarrow M^\bullet \rightarrow \{0 \rightarrow B^n \rightarrow B^n \rightarrow 0\}\},$$

где $\tau_{\leq i}$ является обычным функтором обрезания, связанным с канонической фильтрацией на комплексах. Таким образом, применяя рассмотренный выше вариант результата Квиллена, мы получаем, что пространство $BQ\mathcal{E}_n$ гомотопически эквивалентно произведению $BQ\mathcal{E}_{n-1} \times BQ\mathcal{E}$ пространств. Объединяя явный вид этой гомотопии и предположение индукции, мы получаем требуемый результат для категории $\mathcal{E}_n$.

Аналогичное рассуждение также приводит к требуемому результату для категории $\mathcal{C}_n$ после замены канонической фильтрации на “глупую” и рассмотрения вложения категорий $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}_n$, задаваемого функтором

$$M \mapsto \{0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0\}.$$

Наконец, для любого точного комплекса $M^\bullet$ из $\mathcal{E}_n$ имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow B^i \rightarrow M^i \rightarrow B^{i+1} \rightarrow 0$$

для всех i , $0 < i < n$. Согласно доказательству следствия 1 из [6, § 3] получаем, что это приводит к требуемой гомотопической эквивалентности в диаграмме (4.1).

Пусть F – гомотопический слой естественного отображения $BQ\mathcal{E}_n \rightarrow BQ\mathcal{C}_n$, положим $\mathbf{KN} = \Omega BQ\mathcal{N}$ для любой точной категории $\mathcal{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.12. Вложение категорий $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}_n$, задаваемое функтором $M \mapsto \{0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0\}$, индуцирует отображение $\mathbf{KM} \rightarrow \mathbf{KC}_n \rightarrow F$ такое, что композиция является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем явно индуцированное отображение на гомотопических группах. По лемме 4.11 для любого $i \geq 0$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(\mathbf{K}\mathcal{E}_n) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(BQM)^n \\ \downarrow & & \downarrow i_* \\ \pi_i(\mathbf{K}\mathcal{C}_n) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(BQM)^{n+1} \end{array}$$

где горизонтальные отображения являются изоморфизмами, индуцированными отображениями, описанными в лемме 4.11. Таким образом, имеется канонический изоморфизм $\pi_i(F) \cong \pi_{i+1}(BQM)$, задаваемый альтернированной суммой гомоморфизмов проекций $\pi_{i+1}(BQM)^{n+1} \rightarrow \pi_{i+1}(BQM)$. Более того, композиция

$$\pi_{i+1}(BQM) \cong \pi_i(\mathbf{K}\mathcal{M}) \rightarrow \pi_i(\mathbf{K}\mathcal{C}_n) \rightarrow \pi_i(F) \cong \pi_{i+1}(BQM)$$

является тождественным отображением. Поскольку по одному результату Милнора пространство $\mathbf{K}\mathcal{M}$ имеет гомотопический тип CW-комплекса (см. [25], а также [26, аппендикс A]), мы завершаем доказательство при помощи известной теоремы Уайтхеда (см. [27]).

Через $\mathcal{M}(S)$ обозначим абелеву категорию когерентных пучков на схеме S . Положим $\mathcal{E}_n(S) = \mathcal{E}_n$, $\mathcal{C}_n(S) = \mathcal{C}_n$, $F(S) = F$ и $\mathbf{K}(S) = \mathbf{K}\mathcal{M}$ для $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.13. Пусть S – замкнутая подсхема в схеме T , и пусть $\mathcal{C}_n(T, S)$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}_n(T)$, состоящая из комплексов, пучки гомотологий которых имеют носитель на S , т.е. из комплексов, ограничение которых на $T \setminus S$ лежит в $\mathcal{E}_n(T \setminus S)$. Тогда существует корректно определенное с точностью до гомотопии отображение “эйлеровой характеристики с носителем” $\chi: \mathbf{K}\mathcal{C}_n(T, S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$ со следующими свойствами:

(i) индуцированный гомоморфизм $\chi_*: K_0(\mathcal{C}_n(T, S)) \rightarrow K'_0(S)$ задается по формуле

$$[\mathcal{F}^\bullet] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [H^i(\mathcal{F}^\bullet)],$$

где $\mathcal{F}^\bullet$ лежит в $\mathcal{C}_n(T, S)$ (здесь подразумевается канонический изоморфизм $K'_0(S) \cong K'_0(\tilde{S})$, индуцированный замкнутыми вложениями $S_{\text{red}} \hookrightarrow S$ и $\tilde{S}_{\text{red}} \hookrightarrow \tilde{S}$ для каждой замкнутой подсхемы $\tilde{S}$ в T такой, что $S_{\text{red}} = \tilde{S}_{\text{red}}$);

(ii) χ коммутирует с прямым образом относительно замкнутого вложения: для замкнутого вложения схем $i: T' \hookrightarrow T$ положим $S' = S \times_T T'$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}\mathcal{C}_n(T, S) & \xrightarrow{\chi} & \mathbf{K}(S) \\ \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\ \mathbf{K}\mathcal{C}_n(T', S') & \xrightarrow{\chi} & \mathbf{K}(S') \end{array}$$

отмеченных пространств коммутативна с точностью до гомотопии;

(iii) χ коммутирует с ограничением на открытые подмножества: для открытого вложения $j: U \hookrightarrow T$ положим $V = S \times_T U$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{KC}_n(T, S) & \xrightarrow{\chi} & \mathbf{K}(S) \\ \downarrow j^* & & \downarrow j^* \\ \mathbf{KC}_n(U, V) & \xrightarrow{\chi} & \mathbf{K}(V) \end{array}$$

отмеченных пространств коммутативна с точностью до гомотопии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественное отображение $\mathbf{KC}_n(T, S) \rightarrow F(T \setminus S)$, определяемое диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{KC}_n(T, S) & \longrightarrow & \mathbf{KE}_n(T \setminus S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{KC}_n(T) & \longrightarrow & \mathbf{KC}_n(T \setminus S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(T) & \longrightarrow & F(T \setminus S) \end{array}$$

канонически гомотопически тривиально. Следовательно, однозначно с точностью до гомотопии определено отображение

$$\mathbf{KC}_n(T, S) \rightarrow F\{F(T) \rightarrow F(T \setminus S)\}.$$

С другой стороны, по следствию 4.12 и теореме Квиллена о локализации (см. [6]) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(T) & \longrightarrow & \mathbf{K}(T \setminus S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(T) & \longrightarrow & F(T \setminus S) \end{array}$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $\mathbf{K}(S) \rightarrow F\{F(T) \rightarrow F(T \setminus S)\}$. Это определяет отображение $\chi: \mathbf{KC}_n(T, S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$ однозначно с точностью до гомотопии.

Теперь докажем (i), т. е. найдем явно отображение χ_* на группах π_0 . Рассмотрим точку $[\mathcal{F}^\bullet]$ в $\mathbf{KC}_n(T, S)$, соответствующую петле в $BQC_n(T, S)$, определяемой стандартным образом по комплексу $\mathcal{F}^\bullet$ из $\mathcal{C}_n(T, S)$. Существует гомотопия в пространстве $BQC_n(T, S)$ между петлей $[\mathcal{F}^\bullet]$ и суммой петель

$$[\tau_{\leq (n-1)} \mathcal{F}^\bullet] + [\{0 \rightarrow \cdots \rightarrow B^n \rightarrow B^n \rightarrow 0\}] + [H^n(\mathcal{F}^\bullet)[-n]].$$

Кроме того, $[H^n(\mathcal{F}^\bullet)[-n]]$ гомотопно в пространстве $BQC_n(T, S)$ сумме

$$(-1)^n [H^n(\mathcal{F}^\bullet)] + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j [\{0 \rightarrow H^n(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow H^n(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow 0\}[-j]],$$

где короткие комплексы сконцентрированы в степенях 0 и 1. Продолжая отщеплять двучленные комплексы, мы получаем по индукции, что исходная петля гомотопна в пространстве $BQC_n(T, S)$ сумме $\sum (-1)^i [H^i(\mathcal{F}^\bullet)]$ и некоторой петле из $BQ\mathcal{E}_n(T)$. Очевидно, что классы точек из $\mathbf{KC}_n(T, S)$, соответствующих петлям из $BQ\mathcal{E}_n(T)$, лежат в ядре отображения χ_* на группах π_0 , и требуемый результат доказан.

Для доказательства (ii) и (iii) можно использовать, что естественные отображения

$$\begin{aligned} T' \setminus S' &= (T \setminus S) \times_T T' \hookrightarrow T \setminus S, \\ U \setminus V &= (T \setminus S) \times_T U \hookrightarrow T \setminus S \end{aligned}$$

являются замкнутым и открытым вложениями соответственно. Также следует использовать тот факт, что если в коммутативной диаграмме отмеченных пространств

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

вертикальные отображения являются гомотопическими эквивалентностями, то диаграмма остается коммутативной с точностью до гомотопии после обращения вертикальных гомотопических эквивалентностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.14. Похожий способ определения эйлеровой характеристики с носителем для K -групп $K_*(\mathcal{C}_n(T, S)) \rightarrow K_*(S)$ заключается в использовании конструкции R -пространства из [12, п. 1]. Напомним, что для любой точной категории $\mathcal{M}$ пространство $R\mathcal{M}$ имеет тот же гомотопический тип, что и BQM , а также является H -пространством с канонически (не только с точностью до гомотопии) определенным отображением взятия обратного. Таким образом, имеется отображение эйлеровой характеристики $RC_n(T, S) \rightarrow R\mathcal{M}(T)$ такое, что его композиция с естественным отображением $R\mathcal{M}(T) \rightarrow R\mathcal{M}(T \setminus S)$ канонически гомотопически тривиальна. Это позволяет определить отображение $RC_n(T, S) \rightarrow R\mathcal{M}(S)$ однозначно с точностью до гомотопии.

Теперь рассмотрим комплекс $\mathcal{P}^\bullet$ из $\mathcal{C}_n(T, S)$, состоящий из плоских пучков на T . Пусть отображение $* \cdot \mathcal{P}^\bullet: \mathbf{K}(T) \rightarrow \mathbf{K}(S)$ является композицией отображения, индуцированного точным функтором $* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet: \mathcal{M}(T) \rightarrow \mathcal{C}_n(T, S)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet$, и отображения $\chi: \mathbf{KC}_n(T, S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$ из предложения 4.13. Отображение $* \cdot \mathcal{P}^\bullet$ корректно определено с точностью до гомотопии. Стандартное рассуждение показывает, что отображения $* \cdot \mathcal{P}^\bullet$ и $* \cdot (\mathcal{P}')^\bullet$ гомотопически эквивалентны для квазиизоморфных комплексов $\mathcal{P}^\bullet$ и $(\mathcal{P}')^\bullet$. По предложению 4.13, (i) для любого класса $[\mathcal{F}]$ из $K'_0(T)$ выполняется равенство

$$[\mathcal{F}] \cdot \mathcal{P}^\bullet = \sum_i (-1)^i H^i(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet) \in K'_0(S).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.15. Пусть $\mathcal{P}^\bullet$ – конечная плоская резольвента пучка $\mathcal{O}_S$ на T (здесь комплекс $\mathcal{P}^\bullet$ сосредоточен в неположительных членах), и предположим, что на T есть обильное линейное расслоение (например, схема T квазипроективна). Тогда отображение $* \cdot \mathcal{P}^\bullet$ гомотопно отображению f^* , где $f: S \hookrightarrow T$ является замкнутым вложением (см. [6, § 7, п. 2.5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению Квиллена о резольвентах (см. [6, § 4, следствие 1]) пространство $BQM(T)$ гомотопически эквивалентно своему подпространству $BQF(T)$, где $F(T)$ – точная категория когерентных пучков на T , которые Тог-независимы с $\mathcal{O}_S$. Для $BQF(T)$ имеется точная последовательность функторов из $F(T)$ в $\mathcal{C}_n(T, S)$:

$$0 \rightarrow \tau'_{\leq 0}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet) \rightarrow * \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet \rightarrow * \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S \rightarrow 0,$$

где мы положили

$$\tau'_{\leq 0}(A^\bullet) = \{\cdots \rightarrow A^i \rightarrow \cdots \rightarrow A^{-1} \rightarrow B^0 \rightarrow 0\}$$

для произвольного комплекса $A^\bullet$. Из [6, § 3, доказательство следствия 1] вытекает, что отображение $\mathbf{K}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet)$ гомотопно отображению

$$\mathbf{K}(\tau'_{\leq 0}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet)) + \mathbf{K}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S),$$

где сумма берется относительно естественной H -структуры на $\mathbf{K}$ -пространствах точных категорий. Более того, образ отображения $\mathbf{K}(\tau'_{\leq 0}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{P}^\bullet))$ лежит в пространстве $\mathbf{K}(\mathcal{E}_n(T)) \subset \mathbf{K}(\mathcal{C}_n(T, S))$, а отображение $\mathbf{K}(* \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S)$ равно f^* на $\mathbf{K}(\mathcal{F}(T))$. Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.16. Для элементов из $K_*(T)$ отображение $* \cdot \mathcal{P}^\bullet$ равно композиции обычного ограничения элементов из K -группы на S и умножения на $\chi_*([\mathcal{P}^\bullet]) \in K'_0(S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.17. Пусть $i: T' \hookrightarrow T$ – замкнутое вложение, и положим $S' = S \times_T T'$, $j: U = T \setminus T' \hookrightarrow T$, $V = S \times_T U$. Рассмотрим произвольные элементы $x \in K'_m(S)$, $y \in K'_n(U)$, где $m, n \geq 0$, $m + n \geq 1$. Тогда выполняется равенство

$$\nu(x \cdot (y \cdot \mathcal{P}^\bullet)) = (-1)^m x \cdot (\nu(y) \cdot i^* \mathcal{P}^\bullet) \in K'_{m+n-1}(S'),$$

где $\nu: K'_*(U) \rightarrow K'_{*-1}(T')$ – обычное отображение границы (аналогично для V и S').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 4.13, (ii), (iii) оба квадрата в диаграмме пространств

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}(\mathcal{P}(S)) \wedge \mathbf{K}(T') & \xrightarrow{* \cdot \mathcal{P}^\bullet \otimes *} & \mathbf{K}(S') \\ \downarrow i_* \times \text{id} & & \downarrow i_* \\ \mathbf{K}(\mathcal{P}(S)) \wedge \mathbf{K}(T) & \xrightarrow{* \cdot \mathcal{P}^\bullet \otimes *} & \mathbf{K}(S) \\ \downarrow j^* \times \text{id} & & \downarrow j^* \\ \mathbf{K}(\mathcal{P}(S)) \wedge \mathbf{K}(U) & \xrightarrow{* \cdot \mathcal{P}^\bullet \otimes *} & \mathbf{K}(V) \end{array}$$

коммутативны с точностью до гомотопии, где $\mathcal{P}(S)$ – точная категория локально свободных когерентных пучков на S , а $\wedge$ – внешнее произведение отмеченных топологических пространств. Таким образом, доказательство следует из непосредственного применения [20, теорема 2.5].

Приведем также следующий простой факт.

ЛЕММА 4.18. Пусть $S \hookrightarrow T$ – замкнутое вложение, S_{red} – приведенная схема, а $j: S_{\text{red}} \rightarrow S$ – естественное отображение. Тогда $j_* \circ \nu_{\text{red}} = \nu$, где $\nu: K'_*(T \setminus S) \rightarrow K'_{*-1}(S)$, $\nu_{\text{red}}: K'_*(T \setminus S) \rightarrow K'_{*-1}(S_{\text{red}})$ являются отображениями границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это немедленно следует из коммутативности диаграммы CW-пространств

$$\begin{array}{ccc} BQM(S_{\text{red}}) & \xrightarrow{j_*} & BQM(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BQM(T) & \xrightarrow{=} & BQM(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BQM(T \setminus S_{\text{red}}) & \xrightarrow{=} & BQM(T \setminus S) \end{array}$$

после перехода к длинной гомотопической последовательности, связанной с вертикальными последовательностями, являющимися слоениями с точностью до гомотопии.

Из леммы 4.18 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.19. Предложение 4.17 остается верным после замены схемного пересечения $S' = S \times_T T'$ на его приведенную схему S'_{red} .

ПРИМЕР 4.20. Пусть k – поле, $T = (\mathbb{A}_k^2)_{(0,0)}$ – локальная схема с координатами (x, y) , $T' = \{xy = 0\}$, $S = \{x + y = 0\}$, $\mathcal{P}^\bullet = \{\mathcal{O}_T \xrightarrow{x+y} \mathcal{O}_T\}$. Пусть $f(x)$, $g(y)$ – рациональные функции на соответствующих неприводимых компонентах в T' такие, что $f(x)$ и $g(y)$ имеют противоположные нормирования в начале координат. Такая пара функций канонически определяет элемент $\alpha \in K'_1(T')$. Выполняется равенство $\alpha \cdot i^* \mathcal{P}^\bullet = a/b \in K_1(k)$, где a и b – главные части $f(x)$ и $g(y)$ относительно x и y соответственно.

4.3. Формула для произведения классов в K -когомологиях. Пусть X – неприводимое гладкое квазипроективное многообразие над бесконечным совершенным полем, Y, Z – два равноразмерных подмногообразия на X коразмерности p и q соответственно. Рассмотрим два коцикла

$$\{f_y\} \in \bigoplus_{y \in Y^{(0)}} K_m(k(y)), \quad \{g_z\} \in \bigoplus_{z \in Z^{(0)}} K_n(k(z))$$

в комплексах Герстена $\text{Gers}(X, p+m)^p$ и $\text{Gers}(X, q+n)^q$ соответственно.

Предположим, что подмногообразия Y и Z в X пересекаются собственнo. Кроме того, предположим, что для любой неприводимой компоненты w в пересечении $W = Y \cap Z$ наборы $\{f_y\}_w$ и $\{g_z\}_w$ представляются некоторыми элементами α_w и β_w из групп $K_m(Y_w)$ и $K'_n(Z_w)$ соответственно (напомним, что индекс w обозначает ограничение набора на $X_w = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,w})$).

Из замечания 3.31 и замечания 3.32 следует, что существуют заклеивающие системы $\{Y_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, и $\{Z_s^{1,2}\}$, $1 \leq s \leq q-1$, со степенью свободы

не меньше, чем нуль, на X для подмногообразий Y и Z соответственно, для которых выполняются следующие свойства:

(i) ни одна неприводимая компонента из $Y \cap Z_s^1$ не содержится в Z_s^2 при всех s , $1 \leq s \leq q-1$;

(ii) каждая неприводимая компонента в $Y_{p-1}^{1,2}$ содержит некоторую неприводимую компоненту в Y , каждая неприводимая компонента в $Y_r^{1,2}$, $2 \leq r \leq p-2$, содержит некоторую неприводимую компоненту в $Y_{r+1}^1 \cup Y_{r+1}^2$, и аналогичное свойство выполнено для заклеивающей системы $\{Z_s^{1,2}\}$, $1 \leq s \leq q-1$; в частности, подмногообразия $Y_r^{1,2}$ и Y пересекаются собственнo с подмногообразиями $Z_s^{1,2}$ и Z .

Пусть $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_{p+m}^X)^p$ и $g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_{q+n}^X)^q$ – хорошие коциклы для наборов $\{f_y\}$ и $\{g_z\}$ относительно заклеивающих систем $\{Y_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, и $\{Z_s^{1,2}\}$, $1 \leq s \leq q-1$, соответственно, удовлетворяющих двум указанным выше условиям (см. п. 3.6).

ТЕОРЕМА 4.21. Пусть $\mathcal{P}^\bullet \rightarrow \mathcal{O}_Y$ – конечная плоская резольвента пучка $\mathcal{O}_Y$ на X . В сделанных выше предположениях выполняется равенство

$$\nu_X(f \cdot g) = (-1)^{(p+m)q} \{ \bar{\alpha}_w \cdot (\beta_w \cdot i_Z^* \mathcal{P}^\bullet) \} \in \bigoplus_{w \in W^{(0)}} K_{m+n}(k(w)),$$

где $i_Z: Z \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение (рассматриваемое локально вокруг каждой точки w), а $\bar{\alpha}_w$ – образ α_w относительно естественного гомоморфизма $K_m(Y_w) \rightarrow K_m(k(w))$ для каждой точки w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\eta_0, \dots, \eta_{p+q})$ – флаг типа $(0, \dots, p+q)$ на X . По условию (i) из предложения 3.42 имеет место равенство $f_{\eta_0 \dots \eta_p} \cdot g_{\eta_{p+1} \dots \eta_{p+q}} = 0$, если η_r не является общей точкой ни одной из неприводимых компонент в Y_r^1 для некоторого r , $1 \leq r \leq p-1$, либо η_p не является общей точкой ни одной из неприводимых компонент в Y , либо η_{p+s} не является общей точкой ни одной из неприводимых компонент пересечения $Y \cap Z_s^1$ для некоторого s , $1 \leq s \leq q-1$, либо η_{p+q} не является общей точкой ни одной из неприводимых компонент пересечения $Y \cap Z$.

Предположим, что для флага $(\eta_0, \dots, \eta_{p+q})$ выполняется обратное условие. Объединяя предположение на заклеивающие системы $\{Y_r^{1,2}\}$, $1 \leq r \leq p-1$, и $\{Z_s^{1,2}\}$, $1 \leq s \leq q-1$, условие (ii) из предложения 3.42 и утверждение 3.44, мы видим, что

$$\begin{aligned} f_{\eta_0 \dots \eta_p} &= \tilde{f}_{\eta_p} \in K_{p+m}(X_{\eta_p} \setminus (Y_1^1 \cup Y_1^2)), \\ g_{\eta_{p+1} \dots \eta_{p+q}} &= \tilde{g}_{\eta_{p+q}} \in K_{q+n}(X_{\eta_{p+q}} \setminus (Z_1^1 \cup Z_1^2)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_{\eta_p} \nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1}(\tilde{f}_{\eta_p}) &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} f_{\eta_p} = \{f_y\}_{\eta_p}, \\ d_{\eta_{p+q}} \nu_{XZ_1^1 \dots Z_{q-1}^1}(\tilde{g}_{\eta_{p+q}}) &= (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} \{g_z\}_{\eta_{p+q}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\nu_{0 \dots p}(f \cdot g)_{\eta_p \dots \eta_{p+q}} = \nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1 \eta_p}(\tilde{f}_{\eta_p} \cdot \tilde{g}_{\eta_{p+q}})$.

Мы утверждаем, что вычет $\nu_{XY_1^1 \dots Y_{p-1}^1 \eta_p}(\tilde{f}_{\eta_p} \cdot \tilde{g}_{\eta_{p+q}})$ равен произведению

$$(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} f_{\eta_p} \cdot i_{\eta_p}^* \tilde{g}_{\eta_{p+q}} \in K_{m+q+n}(k(\eta_p)),$$

где $i_{\eta_p} : \text{Spec}(k(\eta_p)) \rightarrow X$ – естественный морфизм (заметим, что η_p не принадлежит $Z_1^1 \cup Z_1^2$). Это можно показать, используя предложение 4.17 сначала для $S = T = X_{\eta_p}$, $\mathcal{P}^\bullet = \mathcal{O}_S$, $T' = (Y_1^1 \cup Y_1^2)_{\eta_p}$, а потом индуктивно для $S = T = (Y_s^1)_{\eta_p}$, $\mathcal{P}^\bullet = \mathcal{O}_S$, $T' = (Y_{s+1}^1 \cup Y_{s+1}^2)_{\eta_p}$ при $1 \leq s \leq p-1$ (более точно, для шага индукции используется тот факт, что классы f и g удовлетворяют условиям из утверждения 3.44).

Кроме того, произведение $f_{\eta_p} \cdot i_{\eta_p}^* \tilde{g}_{\eta_{p+q}} \in K_{m+q+n}(k(\eta_p))$ равно ограничению на $\text{Spec}(k(\eta_p))$ произведения

$$\alpha_{\eta_{p+q}} \cdot i_Y^* \tilde{g}_{\eta_{p+q}} \in K_{m+q+n}(Y_{\eta_{p+q}} \setminus (Z_1^1 \cup Z_1^2)),$$

где $i_Y : Y \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение. Следовательно, выполняется равенство

$$\nu_{p+q}(f \cdot g)_w = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \nu_{Y \cap Z_1^1 \dots Y \cap Z_{q-1}^1 w}(\alpha_w \cdot i_Y^* \tilde{g}_w),$$

если w является общей точкой некоторой неприводимой компоненты в пересечении $W = Y \cap Z$. Иначе $\nu_{p+q}(f \cdot g)_w = 0$.

Пусть w – общая точка некоторой неприводимой компоненты в W . Далее все подсхемы в X будут рассматриваться локально вокруг точки w , т. е. будут рассматриваться их ограничения на $X_w = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,w})$, хотя обозначения останутся прежними. Положим $Z_0^1 = X$, $Z_q^1 = Z$, а через $i_s : Z_s^1 \hookrightarrow X$ обозначим естественное замкнутое вложение для каждого s , $0 \leq s \leq q$. По предложению 4.13 и следствию 4.19 диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K'_{*+m}(Y \cap (Z_s^1 \setminus (Z_{s+1}^1 \cup Z_{s+1}^2))) & \longleftarrow & K'_*(Z_s^1 \setminus (Z_{s+1}^1 \cup Z_{s+1}^2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K'_{*+m-1}(Y \cap (Z_{s+1}^1 \setminus Z_{s+1}^2)) & \longleftarrow & K'_{*-1}(Z_{s+1}^1 \setminus Z_{s+1}^2) \end{array}$$

коммутативна с точностью до знака $(-1)^m$ для всех s , $0 \leq s \leq q-1$, где вертикальные отображения являются композициями отображений границы с ограничениями на открытые подмножества, а горизонтальные отображения являются композициями отображения $* \cdot i_s^* \mathcal{P}^\bullet$ (соответственно, $* \cdot i_{s+1}^* \mathcal{P}^\bullet$) с умножением справа на ограничение элемента $\alpha_{\eta_{p+q}} \in K_m(Y)$ на соответствующее замкнутое подмножество в Y . Следовательно, по утверждению 3.44 и замечанию 4.16 мы получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \nu_{Y \cap Z_1^1 \dots Y \cap Z_{q-1}^1 w}(\alpha_w \cdot i_Y^* \tilde{g}_w) &= \nu_{Y \cap Z_1^1 \dots Y \cap Z_{q-1}^1 w}(\alpha_w \cdot (\tilde{g}_w \cdot \mathcal{P}^\bullet)) \\ &= \bar{\alpha}_w \cdot ((-1)^{mq} \nu_{X \cap Z_1^1 \dots X \cap Z_{q-1}^1 w}(\tilde{g}_w) \cdot i_Z^* \mathcal{P}^\bullet) = (-1)^{mq + \frac{q(q+1)}{2}} \bar{\alpha}_w \cdot (\beta_w \cdot i_Z^* \mathcal{P}^\bullet). \end{aligned}$$

Объединяя это с равенством $\nu_X = (-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} \nu_{p+q}$, мы завершаем доказательство теоремы.

Предположим, что рассматриваемые коциклы в комплексах Герстена $\{f_y\} \in \text{Gers}(X, p+m)^p$ и $\{g_z\} \in \text{Gers}(X, q+n)^q$ удовлетворяют еще одному дополнительному условию: для любой неприводимой компоненты w в пересечении $W = Y \cap Z$ набор $\{g_z\}_w$ является ограничением элемента β_w из группы $K_n(Z_w)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.22. В сделанных выше предположениях произведение классов $\{g_y\}$ и $\{h_z\}$ в K -когомологиях представляется следующим коциклом в соответствующем комплексе Герстена:

$$(-1)^{(p+m)q} \{(Y, Z; w) \bar{\alpha}_w \cdot \bar{\beta}_w\} \in \bigoplus_{w \in W^{(0)}} K_{m+n}(k(w)),$$

где $(Y, Z; w)$ – локальный индекс пересечения Y и Z в компоненте w . В частности, пересечение в группах Чжоу совпадает с точностью до знака с естественным произведением в соответствующих K -когомологиях (последнее утверждение было доказано другими методами в [19] и [20]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиция морфизмов комплексов

$$\mathcal{K}_n(\mathcal{O}_X) \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(X, \mathcal{K}_n)^\bullet \xrightarrow{\nu_X} \underline{\text{Gers}}(X, n)^\bullet$$

является тождественным отображением на (гипер)когомологиях. Поэтому произведение классов в K -когомологиях, заданных коциклами в комплексах Герстена, представляется образом относительно отображения ν_X адельного произведения соответствующих адельных коциклов.

С другой стороны, имеется равенство

$$(Y, Z; w) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i l(\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,w}}(\mathcal{O}_{Y,w}, \mathcal{O}_{Z,w})),$$

где $l(\cdot)$ – длина $\mathcal{O}_{X,w}$ -модуля, т. е. длина фильтрации, присоединенные факторы которой являются одномерными векторными пространствами над полем $k(w)$. Таким образом, лемма немедленно следует из теоремы 4.21 и замечания 4.16.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.23. Если для любой неприводимой компоненты пересечения $W = Y \cap Z$ ее общая точка w регулярна на Y и Z , то выполняются условия следствия 4.22.

4.4. Спаривание Вейля как тройное произведение Масси. В этом пункте мы применяем адельную резольвенту для вычисления некоторого тройного произведения Масси. Пусть X – гладкое многообразие размерности d над бесконечным совершенным полем k . Рассмотрим произвольные элементы $\alpha \in CH^p(X)_l = H^p(X, \mathcal{K}_p^X)_l$, $\beta \in CH^q(X)_l = H^q(X, \mathcal{K}_q^X)_l$ и $l \in H^0(X, \mathcal{K}_0^X) = \mathbb{Z}$, где $p + q = d + 1$. Тройка (α, l, β) удовлетворяет условию $\alpha \cdot l = l \cdot \beta = 0$ в K -когомологиях, и поэтому определено тройное произведение Масси

$$m_3(\alpha, l, \beta) \in H^d(X, \mathcal{K}_{d+1}) / (\alpha \cdot H^{q-1}(X, \mathcal{K}_q^X) + H^{p-1}(X, \mathcal{K}_p^X) \cdot \beta).$$

Вычислим это произведение явно. Представим классы $\alpha \in CH^p(X)_l$ и $\beta \in CH^q(X)_l$ алгебраическими циклами $Y = \sum_i m_i Y_i$ и $Z = \sum_j n_j Z_j$, где Y_i и Z_j – неприводимые подмногообразия в X коразмерности p и q соответственно, а $m_i, n_j \in \mathbb{Z}$. Поскольку $p + q = d + 1$, можно предполагать, что носители $|Y| = \bigcup_i Y_i$ и $|Z| = \bigcup_j Z_j$ не пересекаются. Рассмотрим два набора $\{f_{\tilde{y}}\} \in \text{Gers}(X, p)^{p-1}$ и $\{g_{\tilde{z}}\} \in \text{Gers}(X, q)^{q-1}$, для которых $d\{f_{\tilde{y}}\} = lY$, $d\{g_{\tilde{z}}\} = lZ$, и положим $\tilde{Y} \subset X$ и $\tilde{Z} \subset X$ равными носителям наборов $\{f_{\tilde{y}}\}$

и $\{g_{\tilde{z}}\}$ соответственно. Предположим, что пересечения $\tilde{Y} \cap |Z|$ и $|Y| \cap \tilde{Z}$ собственные, а функции $f_{\tilde{y}}$ и $g_{\tilde{z}}$ регулярные во всех точках из пересечений $\tilde{Y} \cap |Z|$ и $|Y| \cap \tilde{Z}$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.24. Из леммы о сдвиге для высших групп Чжоу (см. [28] и [29]) следует, что если многообразие X аффинное или проективное, то наборы $\{f_{\tilde{y}}\} \in \text{Gers}(X, p)^{p-1}$ и $\{g_{\tilde{z}}\} \in \text{Gers}(X, q)^{q-1}$ всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли указанным выше условиям.

В сделанных выше предположениях для каждой точки $x \in \tilde{Y} \cap |Z|$ положим $f(x) = \prod f_{\tilde{y}}^{(\tilde{y}, Z; x)}(x) \in k(x)^*$, где произведение берется по всем схемным точкам $\tilde{y}$, замыкания которых содержат точку x , а $(\tilde{y}, Z; x)$ равно кратности пересечения замыкания $\tilde{y}$ с Z в точке x . Аналогично определяется $g(x)$ для каждой точки $x \in |Y| \cap \tilde{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.25. В сделанных выше предположениях тройное произведение $m_3(\alpha, l, \beta)$ представляется коциклом в комплексе Герстена

$$(-1)^{pq}(\{f(x)\}_{x \in \tilde{Y} \cap |Z|} + \{g^{-1}(x)\}_{x \in |Y| \cap \tilde{Z}}) \in \text{Gers}(X, d+1)^d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замечания 3.31 и замечания 3.32 следует существование заклеивающих систем $\{Y_r^{1,2}\}$, $\{\tilde{Y}_r^{1,2}\}$, $\{Z_s^{1,2}\}$ и $\{\tilde{Z}_s^{1,2}\}$ на X для соответственно подмногообразий $|Y|$, $\tilde{Y}$, $|Z|$ и $\tilde{Z}$ таких, что пары заклеивающих систем $(\{Y_r^{1,2}\}, \{\tilde{Z}_s^{1,2}\})$ и $(\{\tilde{Y}_r^{1,2}\}, \{Z_s^{1,2}\})$ удовлетворяют условиям теоремы 4.21. Пусть $[Y] \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p)^p$ и $[Z] \in \mathbf{A}(X, q)^q$ – хорошие коциклы для Y и Z относительно заклеивающих систем соответственно $\{Y_r^{1,2}\}$ и $\{Z_s^{1,2}\}$ на X . По лемме 3.48 существуют адели $f \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_p^X)^{p-1}$ и $g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_q^X)^{q-1}$, для которых $df = l[Y]$, $dg = l[Z]$ и ограничения f_U и g_V являются хорошими коциклами для $\{f_{\tilde{y}}\}_U$ и $\{g_{\tilde{z}}\}_V$ относительно заклеивающих систем $\{\tilde{Y}_r^{1,2}\}_U$ и $\{\tilde{Z}_s^{1,2}\}_V$ соответственно, где $U = X \setminus |Y|$, а $V = X \setminus |Z|$. По определению тройное произведение Масси $m_3(\alpha, l, \beta)$ представлено коциклом Герстена $\nu_X(f \cdot [Z] - (-1)^p[Y] \cdot g)$. Поскольку $\nu_X(f \cdot [Z]) = \nu_U((f \cdot [Z])_U)$ и $\nu_X([Y] \cdot g) = \nu_V(([Y] \cdot g)_V)$, требуемый результат вытекает из теоремы 4.21 и следствия 4.22.

Предположим теперь, что X – гладкое проективное многообразие размерности d над полем k . Ясно, что для любого нуль-цикла степени нуль $\alpha \in CH^d(X)_0$ выполняется равенство $\pi_*(\alpha \cdot H^0(X, \mathcal{K}_1^X)) = \pi_*(\alpha \cdot \mathcal{O}^*(X)) = 1$, где $\pi_*: H^d(X, \mathcal{K}_{d+1}^X) \rightarrow k^*$ – отображение прямого образа, ассоциированное со структурным морфизмом $\pi: X \rightarrow \text{Spec}(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.26. Подгруппа $H^{d-1}(X, \mathcal{K}_d^X) \cdot \text{Pic}^0(X) \subset H^d(X, \mathcal{K}_{d+1}^X)$ лежит в ядре отображения прямого образа $\pi_*: H^d(X, \mathcal{K}_{d+1}^X) \rightarrow k^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав расширение скаляров, можно считать, что основное поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\{f_j\} \in \text{Gers}(X, d)^{d-1}$ – произвольный набор такой, что $\sum_j \text{div}(f_j) = 0$, где $f_j \in k(C_j)^*$, а $\{C_j\}$ – конечный набор неприводимых кривых на X . Рассмотрим гомоморфизм групп $\text{Pic}^0(X)(k) \rightarrow k^*$, определяемый по формуле $\beta \mapsto \pi_*\{f_j\} \cdot \beta$. Утверждается, что данный гомоморфизм индуцирован регулярным морфизмом из многообразия Пикара $\text{Pic}^0(X)$ в алгебраическую группу $\mathbb{G}_m$ и, следовательно, тождественно равен $1 \in k^*$.

Для каждого j обозначим через C'_j дополнение к дивизору функции f_j на кривой C_j . Для любой замкнутой точки $\gamma \in \text{Pic}^0(X)$ найдется рациональное сечение s линейного расслоения Пуанкаре на произведении $X \times \text{Pic}^0(X)$ такое, что ограничение D_γ дивизора $D = \sum m_i D_i$ сечения s на $X \times \{\gamma\}$ пересекается собственнo с кривой $C \times \{\gamma\}$, причем данное пересечение содержится в $C'_j \times \{\gamma\}$. Ясно, что это условие выполняется для всех замкнутых точек β из достаточно малой открытой окрестности U точки $\gamma \in \text{Pic}^0(X)$. Пусть a_{ij} равно степени естественного конечного отображения из $D_i \cap (C_j \times U)$ на U . Возникает регулярное отображение

$$\tilde{f}: U \rightarrow \prod_i \text{Sym}^{a_{ij}}(C'_j) \xrightarrow{f} \mathbb{G}_m,$$

где $f = \prod_i (\text{Sym}^{a_{ij}}(f_j))^{m_i}$. Для любой замкнутой точки $\beta \in U$ выполняется равенство

$$\tilde{f}(\beta) = \prod_{i,j} \prod_{x \in (D_i)_\beta \cap C_j} f_j^{m_i a_{ij}(x)}(x),$$

где $a_{ij}(x)$ равно кратности пересечения дивизора $(D_i)_\beta$ с C_j в точке x . По следствию 4.22 имеем $\pi_*(\{f_j\} \cdot \beta) = \tilde{f}(\beta)^{(-1)^d}$. Отсюда следует доказательство утверждения.

По предложению 4.26 для любых двух элементов $\alpha \in CH^d(X)_l$, $\beta \in \text{Pic}^0(X)_l$ корректно определен прямой образ тройного произведения Масси $\overline{m}_3(\alpha, l, \beta) = \pi_*(m_3(\alpha, l, \beta))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.27. Пусть X – гладкое проективное многообразие размерности d над полем k , а l – целое число, взаимно простое с $\text{char}(k)$. Тогда для любых двух элементов $\alpha \in CH^d(X)_l$, $\beta \in \text{Pic}^0(X)_l$ выполняется равенство

$$\overline{m}_3(\alpha, l, \beta) = \psi_l(\alpha, \beta)^{(-1)^d},$$

где ψ_l – спаривание Вейля между l -кручением в двойственных абелевых многообразиях $\text{Pic}^0(X)$ и $\text{Alb}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку обе части равенства не изменяются при расширении основного поля, мы можем считать, что поле k алгебраически замкнуто. Сначала предположим, что $\dim(X) = 1$, и рассмотрим элементы $\mathcal{L}, \mathcal{M} \in \text{Pic}^0(X)_l$. Выберем два адела (на самом деле, идея) $f, g \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_1^X)^1$, соответствующих $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$. Существуют два адела $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbf{A}(X, \mathcal{K}_1^X)^0$, для которых $d\tilde{f} = f^l$, $d\tilde{g} = g^l$ (мы записываем групповой закон для K_1 -групп мультипликативным образом). По определению выполняется равенство

$$\overline{m}_3(\mathcal{L}, l, \mathcal{M}) = \prod_{x \in X} (\tilde{f}_X, g_{Xx})_x (f_{Xx}, \tilde{g}_x)_x,$$

где $(\cdot, \cdot)_x$ – ручной символ в кольце дискретного нормирования $\mathcal{O}_{X,x}$. Можно считать, что носители дивизоров $D = -\text{div}(f)$ и $E = -\text{div}(g)$ не пересекаются. В этом случае получается равенство $\overline{m}_3(\mathcal{L}, l, \mathcal{M}) = f_X(E) \cdot g_X(-D)$ (это частный случай предложения 4.25). Данная формула для спаривания Вейля $\psi_l(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ элементов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ хорошо известна [8]–[10] (все три доказательства используют различные подходы).

Теперь пусть X не является кривой. Рассмотрим общее $(d - 1)$ -кратное гиперплоское сечение $i: C \hookrightarrow X$ проективного многообразия X и два элемента $\mathcal{M} \in \text{Pic}^0(C)_l$ и $\mathcal{L} \in \text{Pic}^0(X)_l$. Формула проекции для спаривания Вейля (вытекающая, например, из формулы проекции для этальных когомологий) показывает, что $\psi_l(i_*(\mathcal{M}), \mathcal{L}) = \psi_l(\mathcal{M}, i^*(\mathcal{L}))$. Из формулы проекции для высших произведений Масси, установленной в лемме 4.1, следует, что $\overline{m}_3(i_*(\mathcal{M}), l, \mathcal{L}) = \overline{m}_3(\mathcal{M}, l, i^*(\mathcal{L}))^{(-1)^{d-1}}$. С другой стороны, хорошо известно, что отображение $i_*: \text{Pic}^0(C)_l \rightarrow \text{Alb}(X)_l$ сюръективно, а также по теореме Ройтмана (см. [30] и [31]) гомоморфизм $CH^d(X)_l \rightarrow \text{Alb}(X)_l$ является изоморфизмом. Поэтому доказательство следует из уже доказанного случая кривой.

Объединяя предложение 4.25 и предложение 4.27, получаем следующую формулу для спаривания Вейля.

СЛЕДСТВИЕ 4.28. *Предположим, что класс $\alpha \in CH^d(X)_l$ представлен нуль-циклом $z = \sum_i m_i \cdot z_i$, а класс $\beta \in \text{Pic}^0(X)_l$ представлен дивизором D таким, что z не пересекается с D . Предположим, что $\text{div}(g) = lD$ и $d(\{f_m\}) = lz$, где $g \in k(X)^*$, d – дифференциал в комплексе Герстена на X , $f_m \in k(C_m)^*$, а $\{C_m\}$ – конечный набор неприводимых кривых на X . Предположим, что для каждого m рациональная функция f_m регулярна во всех точках из пересечения D с C_m . Тогда в обозначениях из предложения 4.25 имеет место следующая формула для спаривания Вейля α и β :*

$$\psi_l(\alpha, \beta) = \left(\prod_{x \in C \cap D} f(x) \cdot \prod_i g^{-m_i}(z_i) \right)^{(-1)^d}.$$

4.5. Высшие произведения Масси. В настоящем пункте мы приводим для удобства читателя определение высших произведений Масси в когомологиях пучков (более подробное изложение см. в [32]).

Пусть $A^\bullet$ – DG-кольцо. По определению это означает, что $A^\bullet$ является комплексом относительно некоторого дифференциала d и зафиксирован морфизм комплексов

$$A^\bullet \otimes A^\bullet \rightarrow A^\bullet,$$

удовлетворяющий условию ассоциативности. Пусть $M^\bullet$ – правый DG-модуль над $A^\bullet$, т. е. зафиксирован морфизм комплексов

$$M^\bullet \otimes A^\bullet \rightarrow A^\bullet,$$

удовлетворяющий естественным условиям структуры модуля.

Рассмотрим бикомплекс $C^{\bullet, \bullet}$, где $C^{p, q} = (M^\bullet \otimes (A^\bullet)^{\otimes(p-1)})^q$. Дифференциал $\partial: C^{p, q} \rightarrow C^{p-1, q}$ задается по формуле

$$\begin{aligned} \partial(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1}) &= m a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \\ &+ \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{p-1}, \end{aligned}$$

а дифференциал $C^{p, q} \rightarrow C^{p, q+1}$ индуцирован дифференциалами в комплексах $A^\bullet$ и $M^\bullet$.

Бикомплекс $C^{\bullet, \bullet}$ определяет спектральную последовательность $E_r^{p, q}$, где $E_1^{p, q} = H^q(M^\bullet \otimes (A^\bullet)^{\otimes(p-1)})$. Высшие дифференциалы в этой спектральной последовательности определяют высшие произведения Масси

$$m_k: (H^{i_1}(M^\bullet) \otimes H^{i_2}(A^\bullet) \otimes \dots \otimes H^{i_k}(A^\bullet))^\circ \rightarrow (E_1^{k, i_1+\dots+i_k})^\circ \rightarrow E_k^{k, i_1+\dots+i_k} \xrightarrow{d_k} E_k^{0, i_1+\dots+i_k-k+2} = {}^\circ(H^{i_1+\dots+i_k-k}(M^\bullet)),$$

где для произвольной группы G обозначение $(G)^\circ$ указывает на то, что рассматривается некоторая подгруппа в G , а обозначение ${}^\circ(G)$ указывает на то, что рассматривается некоторый фактор группы G . Операция m_k корректно определена для произведений классов в когомологиях $m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{k-1}$, если для любых l , $1 < l < k$, и i , $0 \leq i \leq k-1-l$, выполняется условие $m_l(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+l}) = 0$, где $a_0 = m$.

В частности, при $M^\bullet = A^\bullet$ мы получаем высшие произведения на группах когомологий $H^i(A^\bullet)$. Операция m_2 является обычным умножением в когомологиях. Операция m_3 определяется следующим образом. Рассмотрим элементы $a \in H^i(A^\bullet)$, $b \in H^j(A^\bullet)$ и $c \in H^k(A^\bullet)$. Предположим, что $a \cdot b = 0$ и $b \cdot c = 0$, где точка обозначает обычное произведение в когомологиях. Пусть $\tilde{a} \in A^i$, $\tilde{b} \in A^j$ и $\tilde{c} \in A^k$ – представители классов a , b и c соответственно. Тогда существуют элементы $\tilde{a}\tilde{b} \in A^{i+j-1}$ и $\tilde{b}\tilde{c} \in A^{j+k-1}$, для которых $d(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$ и $d(\tilde{b}\tilde{c}) = \tilde{b} \cdot \tilde{c}$, и выполняется равенство $m_3(a, b, c) = [\tilde{a}\tilde{b} \cdot \tilde{c} - (-1)^{\deg(a)} \tilde{a} \cdot \tilde{b}\tilde{c}]$, где $[\cdot]$ – класс в группе $H^{i+j+k-2}(A^\bullet)/(a \cdot H^{j+k-1}(A^\bullet) + H^{i+j-1}(A^\bullet) \cdot c)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.29. Пусть $\varphi: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ – гомоморфизм DG-колец; тогда высшие произведения Масси коммутируют с индуцированным отображением на когомологиях $\varphi_*: H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$. Пусть $f: M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ – морфизм правых DG-модулей над $A^\bullet$; тогда высшие произведения Масси коммутируют с индуцированным отображением на когомологиях $f_*: H^i(M^\bullet) \rightarrow H^i(N^\bullet)$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – пучок ассоциативных колец на топологическом пространстве X , $\mathcal{M}$ – пучок правых модулей над $\mathcal{A}$, и пусть $C(\mathcal{A})^\bullet$, $C(\mathcal{M})^\bullet$ – соответствующие резольвенты Годамана (см. [7, пп. 4.3, 6.6], где данные резольвенты называются “каноническими”). Резольвенты Годамана мультипликативны, т. е. определены морфизмы комплексов пучков $C(\mathcal{A})^\bullet \otimes C(\mathcal{A})^\bullet \rightarrow C(\mathcal{A})^\bullet$ и $C(\mathcal{M})^\bullet \otimes C(\mathcal{A})^\bullet \rightarrow C(\mathcal{M})^\bullet$, удовлетворяющие условиям ассоциативности и такие, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \longrightarrow & C(\mathcal{A})^\bullet \otimes C(\mathcal{A})^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & C(\mathcal{A})^\bullet \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \otimes \mathcal{A} & \longrightarrow & C(\mathcal{M})^\bullet \otimes C(\mathcal{A})^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & C(\mathcal{M})^\bullet \end{array}$$

коммукативны. Определим DG-кольцо $A^\bullet$ по формуле $A^p = \Gamma(X, C(\mathcal{A})^p)$ и правый DG-модуль $M^\bullet$ над $A^\bullet$ по формуле $M^p = \Gamma(X, C(\mathcal{M})^p)$. Заметим,

что $H^i(A^\bullet) = H^i(X, \mathcal{A})$ и $H^i(M^\bullet) = H^i(X, \mathcal{M})$. Таким образом, определены высшие произведения Масси на когомологиях $H^i(X, \mathcal{A})$ и $H^j(X, \mathcal{M})$.

Предположим, что заданы другие мультипликативные резольвенты $\tilde{C}(\mathcal{A})^\bullet$ и $\tilde{C}(\mathcal{M})^\bullet$ для пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Тогда из функториальности резольвент Годемана следует существование коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{A})^\bullet & \longrightarrow & C(\tilde{C}(\mathcal{A})^\bullet)^\bullet \longleftarrow \tilde{C}(\mathcal{A})^\bullet \\ C(\mathcal{M})^\bullet & \longrightarrow & C(\tilde{C}(\mathcal{M})^\bullet)^\bullet \longleftarrow \tilde{C}(\mathcal{M})^\bullet \end{array}$$

которые индуцируют аналогичные диаграммы в категориях DG-колец и DG-модулей после применения функтора $\Gamma(X, \cdot)$. Более того, левые гомоморфизмы в этих диаграммах являются квазиизоморфизмами DG-колец и DG-модулей. Следовательно, по замечанию 4.29 мы видим, что канонические отображения $H^i(\Gamma(X, \tilde{C}(\mathcal{A})^\bullet)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{A})$ и $H^i(\Gamma(X, \tilde{C}(\mathcal{M})^\bullet)) \rightarrow H^i(X, \mathcal{M})$ коммутируют с высшими произведениями Масси. Таким образом, высшие произведения Масси в когомологиях $H^i(X, \mathcal{A})$ и $H^j(X, \mathcal{M})$ не зависят от выбора ациклических мультипликативных резольвент для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$.

Список литературы

1. Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Actualités scientifiques et industrielles, Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII, Hermann, Paris, 1959.
2. А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:4 (1976), 736–773; англ. пер.: A. N. Paršin, “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:4 (1976), 695–729.
3. А. Н. Паршин, “Абелевы накрытия арифметических схем”, *Докл. АН СССР*, **243**:4 (1978), 855–858; англ. пер.: A. N. Parshin, “Abelian coverings of arithmetic schemes”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1438–1442.
4. А. А. Бейлинсон, “Вычеты и адели”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 44–45; англ. пер.: A. A. Beilinson, “Residues and adèles”, *Functional Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 34–35.
5. A. Huber, “On the Parshin–Beilinson adèles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61** (1991), 249–273.
6. D. Quillen, “Higher algebraic K-theory: I”, *Higher K-theories*, Proc. Conf., Battelle Memorial Inst. (Seattle, WA, 1972), Lecture Notes in Math., **341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 85–147.
7. Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Sci. Ind., **1252**, Hermann, Paris, 1958.
8. E. W. Howe, “The Weil pairing and the Hilbert symbol”, *Math. Ann.*, **305**:1 (1996), 387–392.
9. М. В. Мазо, “Спаривание Вейля и ручные символы”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 797–799; англ. пер.: M. V. Mazo, “Weil pairing and tame symbols”, *Math. Notes*, **77**:5–6 (2005), 735–738.
10. С. О. Горчинский, “Бирасширение Пуанкаре и иделы на алгебраической кривой”, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 25–38; англ. пер.: S. O. Gorchinskii, “Poincaré biextension and idèles on an algebraic curve”, *Sb. Math.*, **197**:1 (2006), 23–36.

11. R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, Lecture Note in Math., **20**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966.
12. S. Bloch, “Height pairing for algebraic cycles”, *J. Pure Appl. Algebra*, **34**:2–3 (1984), 119–145.
13. R. W. Thomason, Th. Trobaugh, “Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories”, *The Grothendieck Festschrift*, vol. III, Progr. Math., **88**, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 247–435.
14. A. Yekutieli, “The action of adèles on the residue complex”, *Comm. Algebra*, **31**:8 (2003), 4131–4151.
15. S. Bloch, A. Ogus, “Gersten’s conjecture and the homology of schemes”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **7** (1974), 181–202.
16. M. Rost, “Chow groups with coefficients”, *Doc. Math.*, **1**:16 (1996), 319–393.
17. Д. В. Осипов, “Адельные конструкции прямых образов дифференциалов и символов”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 59–84; англ. пер.: D. V. Osipov, “Adele constructions of direct images of differentials and symbols”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 697–723.
18. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
19. H. Gillet, “Comparison of K -theory spectral sequences, with applications”, *Algebraic K-theory* (Evanston, IL 1980), Lecture Notes in Math., **854**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 141–167.
20. D. R. Grayson, “Products in K -theory and intersecting algebraic cycles”, *Invent. Math.*, **47**:1 (1978), 71–83.
21. A. N. Parshin, “Chern classes, adèles and L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 174–192.
22. В. Г. Ломадзе, “Об индексе пересечения дивизоров”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:5 (1980), 1120–1130; англ. пер.: V. G. Lomadze, “On the intersection index of divisors”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:2 (1981), 343–352.
23. S. Bloch, “Algebraic K -theory and crystalline cohomology”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **47** (1977), 187–268.
24. A. A. Suslin, “Homology of GL_n , characteristic classes and Milnor K -theory”, *Lecture Notes in Math.*, **1046** (1984), 357–375.
25. J. Milnor, “On spaces having the homotopy type of CW -complexes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90**:2 (1959), 272–280.
26. V. Srinivas, *Algebraic K-theory*, Progr. Math., **90**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
27. G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Grad. Texts in Math., **61**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978.
28. S. Bloch, “Algebraic cycles and higher K -theory”, *Adv. in Math.*, **61**:3 (1986), 267–304.
29. M. Levine, *Mixed motives*, Math. Surveys Monogr., **57**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
30. S. Bloch, “Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman”, *Compositio Math.*, **39**:1 (1979), 107–127.
31. A. A. Rojzman, “The torsion in the groups of 0-cycles modulo rational equivalence”, *Ann. of Math. (2)*, **111**:3 (1980), 553–569.
32. C. Deninger, *Higher order operations in Deligne cohomology*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Munster 3. Ser., **3**, Univ. Münster, Münster, 1991.