Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Эстеров, Плотности топологических инвариантов квазипериодических субаналитических множеств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 3, 183–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 06:59:18

УДК 515.142.324+519.218.84+515.171.5

А. И. Эстеров

Плотности топологических инвариантов квазипериодических субаналитических множеств

Доказано существование плотностей чисел Бетти и кручений замкнутых квазипериодических субаналитических множеств. В ходе доказательства введено понятие равномерно субаналитического множества, удобное для оценок плотностей топологических инвариантов.

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: квазипериодическая топология, квазипериодическая функция, трансверсальный объем, эргодическая теория.

§ 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Квазипериодическим субаналитическим множеством* называется прообраз субаналитического множества $M \subset \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ при гомоморфизме $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Плотностью числового топологического инварианта с множества $M \subset \mathbb{R}^k$ называется предел $c(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c(M \cap rB)}{r^k \text{Vol}(B)}$, где $B \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый шар с единичным радиусом и центром в нуле.*

В определении 1.2 и далее умножение подмножества векторного пространства на число означает гомотетию с центром в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Вместо шара в определении 1.2 и далее можно рассматривать любое ограниченное субаналитическое множество с непустой внутренностью.

ТЕОРЕМА 1.4. *Плотности всех чисел Бетти и кручений замкнутого квазипериодического субаналитического множества существуют.*

Мы получим более подробный результат (теорема 4.2), который позволяет вычислить плотности всех чисел Бетти приближенно, а в некоторых случаях и точно. Перед тем как сформулировать этот результат, приведем в качестве иллюстрации его очевидный аналог для конечных клеточных комплексов. Занумеруем клетки конечного клеточного комплекса в порядке неубывания размерности. Тогда подклейка d -мерной клетки к комплексу, состоящему из всех клеток с меньшими номерами, либо увеличит его d -мерное число Бетти на 1 (в этом случае назовем d -мерную клетку *клеткой типа 1*), либо уменьшит $(d-1)$ -мерное число Бетти на 1 (в этом случае назовем d -мерную клетку *клеткой типа 2*). Поэтому d -мерное число Бетти всего клеточного комплекса равно

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ-JSPS-06-01-91063, РФФИ-07-01-00593 и INTAS-05-7805.

разности количества d -мерных клеток типа 1 и количества $(d+1)$ -мерных клеток типа 2.

Чтобы применить это наблюдение к числам Бетти и кручениям квазипериодических множеств, его нужно обобщить в двух направлениях. Во-первых, в качестве кольца коэффициентов будут рассматриваться не только поля, поэтому подклейка новой клетки может изменить гомологии клеточного комплекса большим количеством способов, чем два упомянутых выше, и клетки придется рассортировать на большее количество типов. Во-вторых, роль клеток будут играть слои так называемых расслоенных клеток, занумерованные не конечным множеством номеров, а непрерывной функцией на базе расслоения. Поэтому вместо количества клеток данного типа в случае квазипериодических множеств будет фигурировать объем множества точек базы, слои над которыми являются клетками данного типа.

Понятия, необходимые для обобщения в этих двух направлениях, вводятся в § 2 и § 3 соответственно. В § 4 формулируется основной результат – теорема 4.2, которая сводится к более простым утверждениям – теоремам 4.6 и 4.7. Доказательство этих теорем дается в § 6 и опирается на связь усреднения по обмотке и трансверсального объема (теорема 5.2), описанную в § 5, где также описываются свойства равномерно субаналитических множеств (определение 5.6), с помощью которых в квазипериодической топологии удобно получать технические оценки сверху плотности и усреднения. В § 7 обсуждаются возможность и способы явного или приближенного вычисления плотностей топологических инвариантов с помощью теоремы 4.2; в частности, в более явном виде выражается плотность эйлеровой характеристики. В § 8 приводятся некоторые свойства плотности эйлеровой характеристики (теоремы 8.1 и 8.3), аналоги которых для плотностей чисел Бетти пока не доказаны.

Основные идеи, использованные в настоящей работе, заключены в применении определений 4.4, 5.6 и теоремы 2.5 к доказательству теорем 4.6 и 4.7.

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде и А. Г. Хованскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

§ 2. Числа Бетти и аннуляторы границ клеток

Доказательства лемм в этом параграфе не приводятся в силу их стандартности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Размерностью* модуля M над конечным кольцом G назовем число $\dim_G M = \log_{|G|} |M|$. Если кольцо G конечно или является полем, то *числом Бетти* $\beta_i(M; G)$ топологического пространства M называется число $\dim_G H_i(M; G)$.

В этих обозначениях остается верным равенство $\dim_G A + \dim_G C = \dim_G B$ для точной тройки $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ и все его следствия, например:

ЛЕММА 2.2 (неравенство треугольника для точных последовательностей). *Если $0 \rightarrow \dots \rightarrow A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow \dots \rightarrow 0$ – точная последовательность векторных пространств над полем G или модулей над конечным кольцом G , то*

$$\sum_i |\dim_G A_i - \dim_G B_i| \leq \sum_i \dim_G C_i.$$

Рис. 1

Уточним терминологию: для клетки $f: D \rightarrow M$, где $D \subset \mathbb{R}^d$ – замкнутый шар, а M – топологическое пространство, *открытой клеткой* будем называть множество $f(\text{int } D) \subset M$, а *границей* – множество $\partial f = f(\partial D) \subset M$ с гомологическим циклом $f_*([\partial D]) \in H(\partial f, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Аннулятором* границы клетки $f: D \rightarrow M$ в гомологиях множества $N \subset M$, содержащего $f(\partial D)$, с коэффициентами в поле или конечном кольце G называется множество элементов $g \in G$ таких, что $g \cdot f_*([\partial D]) \in H(N; G)$ – нулевой элемент.

Изменение размерности гомологий при подклейке клетки выражается в терминах размерности аннулятора ее границы.

ЛЕММА 2.4. *Пусть G – поле или конечное кольцо и размерность аннулятора границы клетки $f: \partial D^d \rightarrow M$ в гомологиях $H_{d-1}(M; G)$ равна α . Тогда*

$$\dim_G H_{d-1} \left(M \bigcup_f D^d; G \right) - \dim_G H_{d-1}(M; G) = -1 + \alpha,$$

$$\dim_G H_d \left(M \bigcup_f D^d; G \right) - \dim_G H_d(M; G) = \alpha;$$

$$\dim_G H_{d'} \left(M \bigcup_f D^d; G \right) = \dim_G H_{d'}(M; G)$$

в других размерностях d' (пример – рис. 1).

Таким образом, числа Бетти клеточного комплекса получаются суммированием размерностей аннуляторов границ его клеток. Более того, при малом изменении клеточного комплекса мало изменяются не только эти суммы, но и все их слагаемые.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть G – поле или конечное кольцо, и пусть компактный клеточный комплекс X представлен в виде объединения $Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^I \sigma_i$, где σ_i – открытые клетки и $Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i$ замкнуто для любого j . Для каждой клетки σ_j рассмотрим аннуляторы $A^j \subset G$ и $A_j \subset G$ границы σ_j в гомологиях множеств $Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{j-1} \sigma_i$ и $\partial Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{j-1} \sigma_i$ соответственно. Тогда:*

- 1) $\dim_G H_i(X; G) = \dim_G H_i(Y; G) + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \dim \sigma_j = i}} \dim_G A^j - \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ \dim \sigma_j = i+1}} 1 - \dim_G A^j;$
- 2) $\sum_j (\dim_G A^j - \dim_G A_j) \leq \sum_i \dim_G H_i(Y, \partial Y; G).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что разность

$$\dim_G H_i \left(Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i; G \right) - \dim_G H_i \left(Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{j-1} \sigma_i; G \right)$$

по лемме 2.4 равна $\dim_G A^j$ при $\dim \sigma_j = i$, равна $\dim_G A^j - 1$ при $\dim \sigma_j = i + 1$ и равна нулю во всех других случаях (нужно просуммировать эти равенства по всем j).

Для доказательства утверждения 2) рассмотрим функцию

$$\phi(j) = \sum_i \dim_G H_i \left(Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i; G \right) - \dim_G H_i \left(\partial Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i; G \right).$$

Эта функция не убывает, причем $\phi(j) - \phi(j-1) = 2(\dim_G A^j - \dim_G A_j)$, поэтому

$$\sum_j (\dim_G A^j - \dim_G A_j) \leq \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2} \leq \frac{|\phi(+\infty)| + |\phi(-\infty)|}{2}.$$

Применяя лемму 2.2 к точной последовательности пары $(Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i, \partial Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i)$, получаем, что

$$|\phi| \leq \sum_i \dim_G H_i \left(Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i, \partial Y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^j \sigma_i; G \right) = \sum_i \dim_G H_i(Y, \partial Y; G).$$

Из следующей леммы получаем оценки сверху и снизу аннулятора границы клетки f клеточного комплекса Q в пространстве $\mathbb{R}^k$ исходя из устройства комплекса в окрестности клетки (в обозначениях леммы роль окрестности играет компонента связности дополнения к Q_1). Лемма утверждает также, что эта оценка уточняется с увеличением окрестности (с переходом от Q_1 к Q_2 в обозначениях леммы).

ЛЕММА 2.6. Пусть граница клетки $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$ содержится в множестве $Q \subset \mathbb{R}^k$, локально стягиваемое множество $Q_1 \subset \mathbb{R}^k$ не пересекается с $f(D)$ и множество $Q_2 \subset \mathbb{R}^k$ не пересекается с компонентой связности $\mathbb{R}^k \setminus Q_1$, содержащей $f(D)$. Обозначим через $\Lambda_1, \dots, \Lambda_5$ аннуляторы границы f в гомологиях множеств $Q \setminus Q_1$, $Q \setminus Q_2$, Q , $Q \cup Q_2$ и $Q \cup Q_1$ соответственно. Тогда $\Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, если $\mathbb{R}^k \setminus Q_1$ состоит из одной компоненты связности. Общий случай сводится к этому, так как аннуляторы $\Lambda_1, \dots, \Lambda_5$ не изменятся, если к Q_1 добавить все компоненты связности $\mathbb{R}^k \setminus Q_1$, кроме компоненты C , содержащей клетку $f(D)$. Для $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$ последний факт очевиден,

Рис. 2

а для Λ_5 он следует из теоремы Майера–Вьеториса, примененной к разбиению множества $Q \cup Q_1$ на множества U и V такие, что

$$U \cap V = Q_1, \quad U \setminus V \subset C, \quad V \setminus U \subset (\mathbb{R}^k \setminus Q_1) \setminus C.$$

Рис. 2 поясняет обозначения, использованные в формулировке и доказательстве леммы.

Заметим, что без предположения о локальной стягиваемости Q_1 теорема Майера–Вьеториса и последнее включение в утверждении леммы 2.6 не всегда имеют место. Все рассматриваемые ниже множества субаналитичны и, следовательно, локально стягиваемы.

§ 3. Расслоенные клеточные разбиения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Обмоткой тора* называется отображение $j + c: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, где $c \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ и $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – инъективный гомоморфизм, образ которого всюду плотен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Любое квазипериодическое субаналитическое множество представимо как прообраз субаналитического множества при обмотке тора.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называется *расслоенной клеткой размерности d* относительно обмотки $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, если его пересечения с образами всех обмоток, параллельных данной, дают непрерывное семейство клеток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Представим обмотку $j + c: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ в виде композиции

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{j+c} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n,$$

где отображение $\tilde{j}$ линейно и $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – естественная проекция. Пусть $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\tilde{j}(\mathbb{R}^k)$ – естественная проекция и $A \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное субаналитическое множество такое, что ограничение $\pi|_A$ инъективно и каждый слой проекции $\pi_j|_A$ является открытой d -мерной клеткой в $\mathbb{R}^n$ (см. далее рис. 3). В этих предположениях образ $\pi(A)$ называется *расслоенной субаналитической открытой d -мерной клеткой* в торе $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ относительно обмотки $j + c$, образ $\pi_j(A)$ называется *базой* расслоенной клетки, открытая клетка

Рис. 3

$\pi(\pi_j^{(-1)}(a) \cap A)$ – *слоем*, соответствующим точке a базы, объединение границ всех слоев – *послойной границей*. *Формой трансверсального объема* на базе называется $(n - k)$ -форма $dx/(\tilde{j}_* dy)$ на $\mathbb{R}^n/\tilde{j}(\mathbb{R}^k)$, где dx и dy – стандартные формы объема на $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Расслоенным клеточным разбиением* $\widetilde{M}$ множества $M \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ относительно данной обмотки $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называется разбиение M на конечное число таких непересекающихся открытых расслоенных клеток относительно данной обмотки, что послойная граница каждой расслоенной клетки содержится в объединении расслоенных клеток меньшей размерности. *Базой* $P_{\widetilde{M}}$ расслоенного клеточного разбиения $\widetilde{M}$ называется несвязное объединение баз его расслоенных клеток. Объединение баз d -мерных расслоенных клеток обозначается $P_{\widetilde{M}}^d$. *Форма трансверсального объема* на $P_{\widetilde{M}}$, перенесенная с баз расслоенных клеток, обозначается $d \text{ Vol}_j$. Слой расслоенной клетки разбиения, соответствующий точке $p \in P_{\widetilde{M}}$ из базы этой расслоенной клетки, обозначается $\text{fiber } p$ (рис. 3).

ЛЕММА 3.5. *Любое замкнутое субаналитическое множество $M \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ допускает расслоенное клеточное разбиение относительно любой обмотки $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_{2^n}$ – стандартное клеточное разбиение тора $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, клетки которого $\sigma_i: [0, 1]^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ занумерованы в порядке невозрастания размерности, и $a_{i,q}: [0, 1]^{d_i} \hookrightarrow [0, 1]^{d_q}$, $q < i$, – отображения примыкания. Применим последовательно ко всем клеткам σ_i следующую процедуру:

1) построим субаналитическое клеточное разбиение множества $\sigma_i^{(-1)}(M)$, вписанное в клеточные разбиения $a_{i,q}^{(-1)}(\tilde{\sigma}_q)$, где $\tilde{\sigma}_q$ – построенные на предыдущих шагах клеточные разбиения множеств $\sigma_q^{(-1)}(M)$, $q < i$, (такое разбиение существует, например, в силу [1, теорема 3.2.11]);

2) разобьем построенное в п. 1) клеточное разбиение множества $\sigma_i^{(-1)}(M) \subset [0, 1]^{d_i} \subset \mathbb{R}^{d_i}$ так, чтобы клетки этого подразбиения тривиально расслаивались естественной проекцией $\mathbb{R}^{d_i} \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}/L$, где $L - (k + d_i - n)$ -мерное аффинное подпространство такое, что $\sigma_i(L \cap [0, 1]^{d_i}) \subset j(\mathbb{R}^k)$ (это возможно, например, в силу [1, теорема 9.1.7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. *Нумерацией слоев* расслоенного клеточного разбиения $\widetilde{M}$ относительно обмотки $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называется субаналитическая функция на базе $N: P_{\widetilde{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что граница каждого слоя содержится в объединении слоев с меньшими номерами и $N(p_1) \neq N(p_2)$, если слои $\text{fiber } p_1$ и $\text{fiber } p_2$ содержатся в образе одной обмотки, параллельной $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

ЛЕММА 3.7. *Любое расслоенное клеточное разбиение допускает нумерацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, доказательство достаточно провести для одной расслоенной клетки. В обозначениях определения 3.3 множество $P_0 = \pi_j(\pi^{(-1)}(j(\mathbb{R}^k)))$ счетно, поэтому на пространстве $\mathbb{R}^n/\tilde{j}(\mathbb{R}^k)$ существует линейная функция l , обращающаяся в нуль только в одной точке множества P_0 . Ограничение l на базу клетки можно выбрать в качестве нумерации.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Во многих случаях существуют более удобные способы, чтобы получить расслоенное клеточное разбиение и его нумерацию, чем способ, описанный в доказательствах лемм 3.5 и 3.7. Например, если $M = \{f \leq c\}$, где f – аналитическая функция общего положения на торе, то M можно представить как объединение всех морсовских клеток ограничений f на все обмотки, параллельные данной, и эти морсовские клетки окажутся слоями конечного количества расслоенных клеток. Нумерация этих морсовских клеток дается значениями функции f в соответствующих критических точках. Эта конструкция использована в работах [2]–[4].

§ 4. Основной результат

На протяжении оставшейся части работы зафиксируем поле или конечное кольцо G , обмотку $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, расслоенное относительно j клеточное разбиение $\widetilde{M}$ замкнутого субаналитического множества $M \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ и его нумерацию N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $j_1: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – обмотка, параллельная j , в образе которой содержится слой $\text{fiber } p$, $p \in P_{\widetilde{M}}$. Через $M_p \subset \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ обозначим объединение слоев $\text{fiber } p'$ по всем $p' \in P_{\widetilde{M}}$ таким, что $N(p') < N(p)$. Типом $T(p) \subset G$ слоя $\text{fiber } p$ с коэффициентами в кольце G называется аннулятор границы клетки $j_1^{(-1)}(\text{fiber } p)$ в гомологиях $H(j_1^{(-1)}(M_p); G)$.

Пусть $\beta_d(j^{(-1)}M; G)$ – плотность d -мерного числа Бетти множества $j^{(-1)}M$ с коэффициентами в G , т.е. предел отношения $\beta_d(j^{(-1)}M \cap rB; G)/\text{Vol } rB$ при $r \rightarrow \infty$, где $B \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый единичный шар с центром в нуле и число Бетти с коэффициентами в конечном кольце такое, как введено в определении 2.1.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть G – поле или конечное кольцо и $\widetilde{M}$ – расслоенное относительно обмотки $j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ клеточное разбиение с нумерацией N . Тогда размерность $\varphi(p) = \dim_G T(p)$ интегрируема как функция от $p \in P_{\widetilde{M}}$, плотность $\beta_d(j^{(-1)}M; G)$ существует и равна $\int_{P_{\widetilde{M}}^d} \varphi \, d\text{Vol}_j - \int_{P_{\widetilde{M}}^{d+1}} (1 - \varphi) \, d\text{Vol}_j$.*

Теорема 1.4 – частный случай теоремы 4.2, так как кручение целочисленных гомологий выражается через числа Бетти гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/q^n\mathbb{Z}$, где q – простое число и $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства теоремы 4.2 нам понадобятся вспомогательные понятия и утверждения, сформулированные далее в настоящем параграфе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Субаналитическим (ограниченным субаналитическим) семейством квазипериодических множеств* называется семейство множеств $M_a = j_a^{(-1)}(M) \subset \mathbb{R}^k$, где $M \subset \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ – субаналитическое (ограниченное субаналитическое) множество и $j_a(x) = (a, j(x)) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ для $a \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^k$.

Для замкнутых квазипериодических множеств, образующих ограниченное субаналитическое семейство, предел в определении 1.2 сходится равномерно. Доказательство этого отличается от доказательства теоремы 4.2 только добавлением ко всем обозначениям параметра a , нумерующего множества этого субаналитического семейства.

Основная проблема при доказательстве теоремы 4.2 состоит в том, что функция φ из формулировки теоремы не субаналитическая и к ней априори не применима теорема 5.2 об усреднении. Поэтому мы будем оценивать φ сверху и снизу субаналитическими функциями, уточняющими сортировку слоев расслоенного клеточного разбиения по типам, приведенным в определении 4.1.

Для этого удобно иметь способ ставить в соответствие ограниченному подмножеству $A \subset \mathbb{R}^k$ точку center $A \in \bar{A}$ “каноническим образом” в том смысле, что если субаналитическое множество A_t субаналитически зависит от параметра t , то точка center A_t также субаналитически зависит от t . Определим, например, center A как лексикографически минимальную точку в $\bar{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. В обозначениях определения 4.1 для $p \in P_{\bar{M}}$ через $j_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ обозначим обмотку, параллельную j , для которой $j_p(0) = \text{center fiber } p$. Через $E \subset \mathbb{R}^k$ обозначим дополнение к открытому единичному шару с центром в нуле. Для положительного числа $R \in \mathbb{R}$ *нижним* $\underline{T}(R, p) \subset G$ и *верхним* $\bar{T}(R, p) \subset G$ *типами* слоя fiber p назовем аннуляторы границы клетки $j_p^{(-1)}(\text{fiber } p)$ в гомологиях множеств $j_p^{(-1)}(M_p) \setminus \text{int } RE$ и $j_p^{(-1)}(M_p) \cup RE$ соответственно. Определим функции $\bar{\varphi}(R, p) = \dim_G \bar{T}(R, p)$ и $\underline{\varphi}(R, p) = \dim_G \underline{T}(R, p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. По построению функции $\underline{\varphi}$ и $\bar{\varphi}$ субаналитические, принимают конечное количество значений, и по лемме 2.6 для любых $p \in P_{\bar{M}}$ и $R_1 < R_2$ выполняются неравенства

$$0 \leq \underline{\varphi}(R_1, p) \leq \underline{\varphi}(R_2, p) \leq \varphi(p) \leq \bar{\varphi}(R_2, p) \leq \bar{\varphi}(R_1, p) \leq 1,$$

где φ – функция, определенная в формулировке теоремы 4.2. На рис. 4, а, b имеем $\underline{\varphi}(R_1, p) = 0$ и $\bar{\varphi}(R_1, p) = 1$, но при этом в первом случае $\underline{\varphi}(R_2, p) = \varphi(p) = \bar{\varphi}(R_2, p) = 1$, а во втором случае $\underline{\varphi}(R_2, p) = \varphi(p) = \bar{\varphi}(R_2, p) = 0$.

ТЕОРЕМА 4.6. *Имеет место равенство*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{P_{\bar{M}}} (\bar{\varphi}(R, \cdot) - \underline{\varphi}(R, \cdot)) \, d\text{Vol}_j = 0.$$

Обозначим через $\bar{\beta}_d(j^{(-1)}M; G)$ и $\beta_d(j^{(-1)}M; G)$ соответственно верхний и нижний пределы отношения $\beta_d(j^{(-1)}\bar{M} \cap rB; G) / \text{Vol } rB$ при $r \rightarrow \infty$, где $B \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый единичный шар с центром в нуле.

Рис. 4

ТЕОРЕМА 4.7. Для любого R имеем

$$\begin{aligned}\overline{\beta_d}(j^{(-1)}M; G) &\leq \int_{P_M^d} \overline{\varphi}(R, \cdot) d\text{Vol}_j - \int_{P_M^{d+1}} (1 - \overline{\varphi}(R, \cdot)) d\text{Vol}_j, \\ \underline{\beta_d}(j^{(-1)}M; G) &\geq \int_{P_M^d} \underline{\varphi}(R, \cdot) d\text{Vol}_j - \int_{P_M^{d+1}} (1 - \underline{\varphi}(R, \cdot)) d\text{Vol}_j.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2 следует из теорем 4.6, 4.7 и замечания 4.5.

Было бы полезно (см. § 7, 8) усилить теорему 4.6 следующим образом.

ГИПОТЕЗА 4.8. Существует конечное R такое, что $\overline{\varphi}(R, p) = \underline{\varphi}(R, p)$ для почти всех $p \in P_{\widetilde{M}}$.

§ 5. Усреднения и трансверсальные объемы

Доказательства теорем 4.6 и 4.7 основаны на понятии усреднения функции, определенной на базе расслоенного клеточного разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Усреднением $\text{dens}(F)$ субаналитической функции $F: P_{\widetilde{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ на базе расслоенного клеточного разбиения $\widetilde{M}$ называется предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(rB)}{r^k \text{Vol}(B)},$$

где $F(rB)$ – сумма значений $F(p)$ по всем $p \in P_{\widetilde{M}}$ таким, что $\text{fiber } p \subset j(rB)$ и $B \subset \mathbb{R}^k$ – единичный шар с центром в нуле.

В этих обозначениях основная теорема работы [5] имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 5.2 [5]. Для любой субаналитической функции $F: P_{\widetilde{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ усреднение $\text{dens}(F)$ существует и равно интегралу по трансверсальному объему $\int_{P_{\widetilde{M}}} F d\text{Vol}_j$.

Далее понадобится также способ оценки сверху вклада границы шара, по которому проводится усреднение, в плотность топологических инвариантов и в усреднение неотрицательных функций. Этот способ (лемма 5.9) основан на том, что для не слишком сложных семейств множеств (определение 5.6,

лемма 5.7) сложность их топологии (определение 5.3) равномерно ограничена объемом их окрестности (определение 5.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. *Сложностью* $\text{compl } M$ множества (пары множеств) $M \subset \mathbb{R}^k$ назовем сумму его (ее) чисел Бетти.

ЛЕММА 5.4. *Сложность объединения $\bigcup_i M_i$ не больше ab , где a – количество непустых пересечений вида $\bigcap_\alpha M_{i_\alpha}$ и b – максимум сложностей этих пересечений. Сложность пары $M \subset N$ не больше суммы сложностей границы M в N и замыкания $N \setminus M$ в N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из вычисления гомологий по Чеху.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. *Ограниченным субаналитическим семейством* подмножеств (соответственно, пар подмножеств) в $\mathbb{R}^k$ называется семейство слоев ограниченного субаналитического множества $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ (соответственно, пары субаналитических множеств $M \subset N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ такой, что $N \setminus M$ ограничено) при естественной проекции $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Сложность (пар) множеств ограниченного субаналитического семейства ограничена в совокупности (см., например, [1, теорема 9.1.7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. Назовем семейство (пар) множеств $N_\alpha \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha \in A$, *равномерно субаналитическим*, если семейство (пар) множеств $\{(N_\alpha - a) \cap [0, 1]^k \mid \alpha \in A, a \in \mathbb{R}^k\}$ содержится в некотором ограниченном субаналитическом семействе (пар) подмножеств пространства $\mathbb{R}^k$. (Через $N_\alpha - a$ мы обозначаем параллельный перенос множества N_α на вектор $-a$.)

Это определение не изменится, если куб $[0, 1]^k$ заменить на любое другое ограниченное субаналитическое подмножество в $\mathbb{R}^k$ с непустой внутренностью.

Равномерная субаналитичность множеств, которые мы будем рассматривать, доказывается следующей очевидной леммой (необходимые для ее доказательства элементарные свойства субаналитических множеств изложены, например, в [1]).

ЛЕММА 5.7. 1) *Если семейства множеств $M_\alpha \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha \in A$, и $M_\beta \subset \mathbb{R}^k$, $\beta \in B$, равномерно субаналитические, то семейства $\{M_\alpha \mid \alpha \in A \cup B\}$, $\{M_\alpha \cup M_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, $\{M_\alpha \cap M_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, $\{M_\alpha \setminus M_\beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, семейства замыканий, внутренностей, границ, связных компонент и ε -окрестностей множеств M_α и семейство пар множеств $\{(M_\alpha, M_\alpha \cap M_\beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$ равномерно субаналитические.*

2) *Ограниченное субаналитическое семейство квазипериодических множеств (определение 4.3) является равномерно субаналитическим. В частности, одно квазипериодическое субаналитическое множество является равномерно субаналитическим.*

3) *Семейство всех шаров в $\mathbb{R}^k$ является равномерно субаналитическим.*

Для нас будет важным следующее свойство равномерно субаналитических семейств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8. *Размером* $\text{size } M$ множества $M \subset \mathbb{R}^k$ (соответственно, пары $M \subset N \subset \mathbb{R}^k$) назовем количество элементарных кубов вида $([0, 1]^k + a) \subset \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{Z}^k$, с которыми пересекается множество M (соответственно, замыкание разности $N \setminus M$).

ЛЕММА 5.9. Для любого равномерно субаналитического семейства (пар) множеств $M_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что $\text{compl}(M_\alpha) < C \text{ size}(M_\alpha)$ для любого α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении леммы 5.4 к разбиению (пар) множеств M_α элементарными кубами вида $([0, 1]^k + a) \subset \mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{Z}^k$.

§ 6. Доказательство теорем 4.6 и 4.7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.7. Доказательство первой части теоремы состоит в применении следующей леммы (нужно разделить сформулированное в ней неравенство на r^k , r устремить к бесконечности и применить к правой части теорему 5.2). Вторая часть доказывается аналогично.

ЛЕММА 6.1. Существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $r > C$ и $R < r - C$

$$\dim_G H_i(j^{(-1)}(M) \cap rB; G) < CRr^{k-1} + \sum_{\substack{p \in P_{\widetilde{M}}^i \\ \text{fiber } p \subset j(rB)}} \overline{\varphi}(R, p) - \sum_{\substack{p \in P_{\widetilde{M}}^{i+1} \\ \text{fiber } p \subset j(rB)}} (1 - \overline{\varphi}(R, p)),$$

где $B \subset \mathbb{R}^k$ – единичный шар с центром в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении теоремы 2.5, 1) в случае, когда $X = j^{(-1)}(M) \cap rB$, а Y – окрестность пересечения X с границей rB , определенная ниже. На рис. 5, *a, b* множества X и Y изображены в случае, когда $j^{(-1)}(M) = \mathbb{R}^k$; “деформированная клетчатая бумага” изображает клеточное разбиение $j^{(-1)}(M)$, индуцированное расслоенным клеточным разбиением $\widetilde{M}$.

Рис. 5

Обозначим через $E \subset \mathbb{R}^k$ дополнение к открытому единичному шару с центром в нуле, через $M'(r)$ – разность объединения всех открытых клеток вида $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$, $p \in P_{\widetilde{M}}$, которые пересекаются с rE , и внутренности rE . Обозначим через d верхнюю грань диаметров клеток $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$, $p \in P_{\widetilde{M}}$, через α количество значений параметра $p \in P_{\widetilde{M}}$, для которых клетка $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$ пересекается с $(r - R - d)E \setminus rE$ (такие клетки изображены на рис. 5, *c*).

По теореме 2.5, 1) разность $\dim_G H_i(j^{(-1)}(M) \cap Br; G) - \dim_G H_i(\overline{M}'(r); G)$ не больше чем на α превосходит сумму $\sum \overline{\varphi}(R, p) - \sum (1 - \overline{\varphi}(R, p))$ из формулировки

леммы. Действительно, в условии теоремы 2.5, 1) положим $X = j^{(-1)}(M) \cap rB$, $Y = \overline{M}'(r)$ и $\sigma_q = j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$, где p_q пробегает в порядке возрастания нумерации N все значения параметра $p \in P_{\widetilde{M}}$, для которых открытая клетка $\text{fiber } p_q$ содержится в $j(X \setminus Y)$. Тогда в обозначениях этой теоремы $\dim_G A^q \leq 1$ для всех p_q и, более того, по лемме 2.6 имеем $\dim_G A^q \leq \overline{\varphi}(R, p_q)$ для всех p_q таких, что клетка $j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$ не пересекается с $(r - R - d)E$. Число $r - R - d$ выбрано для того, чтобы шар с радиусом R и центром в точке клетки $j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$ не пересекался с Y , и в качестве Q_1 , Q_2 и Q в формулировке леммы 2.6 можно было взять границу этого шара, Y и $j^{(-1)}(M_{p_q})$ соответственно (обозначение M_{p_q} см. в определении 4.1). Таким образом, из утверждения теоремы 2.5, 1) следует оценка

$$\begin{aligned} & \dim_G H_i(j^{(-1)}(M) \cap Br; G) \\ &= \dim_G H_i(\overline{M}'(r); G) + \sum_{q \in \mathbb{N}, \dim \sigma_q = i} \dim_G A^q - \sum_{q \in \mathbb{N}, \dim \sigma_q = i+1} (1 - \dim_G A^q) \\ &\leq \dim_G H_i(\overline{M}'(r); G) + \sum_{p_q \in P_{\widetilde{M}}^i} \overline{\varphi}(R, p_q) - \sum_{p_q \in P_{\widetilde{M}}^{i+1}} (1 - \overline{\varphi}(R, p_q)) + \alpha. \end{aligned}$$

В свою очередь, $\dim_G H_i(\overline{M}'(r); G)$ оценивается сверху как Cr^{k-1} по лемме 5.9, так как семейство $\overline{M}'(r)$, $r \in \mathbb{R}$, равномерно субаналитично по лемме 5.7. По этой же причине α оценивается сверху как CRr^{k-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6 состоит в применении следующей леммы (нужно поделить сформулированное в ней неравенство на r^k , устремить r к бесконечности и применить к левой части теорему 5.2).

ЛЕММА 6.2. *Существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $r \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$ при $R > m\sqrt{k}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{\substack{p \in P_{\widetilde{M}} \\ \text{fiber } p \subset j(rB)}} (\overline{\varphi}(R, p) - \underline{\varphi}(R, p)) < \frac{Cr^k}{m},$$

где $B \subset \mathbb{R}^k$ – единичный шар с центром в нуле.

Решеткой $s \subset \mathbb{R}^k$ назовем множество всех точек, у которых хотя бы одна из координат целая. Через $E \subset \mathbb{R}^k$ обозначим дополнение к открытому единичному шару с центром в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2 основано на применении теоремы 2.5, 2) в случае, когда $X = j^{(-1)}(M) \cup rE \cup mc$, а Y – окрестность пересечения X с $rE \cup mc$, определенная ниже. На рис. 6, а, б множества X и Y изображены в случае, когда $j^{(-1)}(M) = \mathbb{R}^k$; “деформированная клетчатая бумага” изображает клеточное разбиение $j^{(-1)}(M)$, индуцированное расслоенным клеточным разбиением $\widetilde{M}$.

Обозначим через $M''(r, m)$ объединение множества $rE \cup mc$ и всех открытых клеток вида $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$, $p \in P_{\widetilde{M}}$, которые пересекаются с $rE \cup mc$. Разобьем сумму $\sum (\overline{\varphi}(R, p) - \underline{\varphi}(R, p))$ из формулировки леммы на две части:

- 1) слагаемые, для которых клетка $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$ содержится в замыкании $\overline{M}''(r, m)$;
- 2) все остальные слагаемые.

Рис. 6

Сумма 2) оценивается сверху как

$$\sum_i \dim_G H_i(\overline{M}''(r, m), \overline{M}'''(r, m) \setminus M''(r, m); G)$$

с помощью теоремы 2.5, 2). Действительно, если в этой теореме положить $X = j^{(-1)}(M) \cup \overline{M}''(r, m)$, $Y = \overline{M}'''(r, m)$ и $\sigma_q = j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$, где p_q пробегает все значения параметра p , соответствующие слагаемым суммы 2) и упорядоченные по возрастанию нумерации N , то в обозначениях этой теоремы $\dim_G A^q \geq \overline{\varphi}(R, p_q) \geq \underline{\varphi}(R, p_q) \geq \dim_G A_q$ по лемме 2.6. Условие $R > m\sqrt{k}$ гарантирует, что ячейка решетки mc , содержащая клетку $j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$, не пересекается со сферой S , имеющей радиус R и центр в точке клетки $j^{(-1)}(\text{fiber } p_q)$ (см. рис. 6, c), и к этой клетке можно применить лемму 2.6, положив Q_1 , Q_2 и Q равными Y , S и $j^{(-1)}(M_{p_q})$ соответственно (обозначение M_{p_q} см. в определении 4.1). Таким образом, утверждение теоремы 2.5, 2) дает оценку

$$\begin{aligned} \sum_q (\overline{\varphi}(R, p_q) - \underline{\varphi}(R, p_q)) &\leq \sum_q (\dim_G A^q - \dim_G A_q) \\ &\leq \sum_i \dim_G H_i(\overline{M}''(r, m), \overline{M}'''(r, m) \setminus M''(r, m); G). \end{aligned}$$

В свою очередь, сумма

$$\begin{aligned} \sum_i \dim_G H_i(\overline{M}''(r, m), \overline{M}'''(r, m) \setminus M''(r, m); G) \\ = \sum_i \dim_G H_i(\overline{M}''(r, m) \setminus \text{int } rE, \overline{M}'''(r, m) \setminus M''(r, m); G) \end{aligned}$$

оценивается сверху как $\frac{Cr^k}{m}$ по лемме 5.9, так как семейство пар $(\overline{M}''(r, m) \setminus \text{int } rE, \overline{M}'''(r, m) \setminus M''(r, m))$, $r \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, равномерно субаналитично по лемме 5.7. По этой же причине количество слагаемых 1) в сумме оценивается сверху как $\frac{Cr^k}{m}$.

§ 7. Вопросы вычислимости

Теорема 4.2 представляет плотности топологических инвариантов квазипериодических множеств в виде линейной комбинации некоторых интегралов. Сформулируем утверждения, помогающие вычислять эти интегралы.

В обозначениях теоремы 4.2

$$\beta_d(j^{(-1)}M; G) = a_d + a_{d+1} - b_{d+1},$$

где

$$a_d = \int_{P_M^d} \varphi \, d\text{Vol}_j, \quad b_d = \int_{P_M^d} 1 \, d\text{Vol}_j, \quad 0 \leq a_d \leq b_d.$$

Числа b_d можно вычислить явно. Из их определения следует

ЛЕММА 7.1. Пусть $M_d \subset \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ – кусочно гладкое множество коразмерности k такое, что почти каждая точка множества M_d содержится в d -мерной расслоенной клетке, и для почти каждого $p \in P_M^d$ слой $\text{fiber } p$ содержит ровно одну точку множества M_d (“почти” означает “кроме $(n-k-1)$ -мерного множества”). Тогда

$$b_d = \int_{M_d} dx / (j_* dy),$$

где dx и dy – стандартные формы объема на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$.

Теоретически числа a_d могут быть вычислены конструктивно с любой заданной точностью при использовании следующей леммы, так как фигурирующие в ней функции $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ определяются по расслоенному клеточному разбиению $\widetilde{M}$ конструктивно (см. определение 4.4).

ЛЕММА 7.2. Для каждого расслоенного клеточного разбиения $\widetilde{M}$ существует такое C , что для любого $R \in \mathbb{R}$:

- 1) $\int_{P_M^d} \underline{\varphi}(R, \cdot) \, d\text{Vol}_j \leq a_d \leq \int_{P_M^d} \bar{\varphi}(R, \cdot) \, d\text{Vol}_j$;
- 2) $\int_{P_M^d} \bar{\varphi}(R, \cdot) \, d\text{Vol}_j - \int_{P_M^d} \underline{\varphi}(R, \cdot) \, d\text{Vol}_j < \frac{C}{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из замечания 4.5, утверждение 2) является более подробной формулировкой теоремы 4.6, в которой данная теорема и доказывается в § 6. В этом доказательстве, в частности, конструктивно определяется по $\widetilde{M}$ константа C .

Если верна гипотеза 4.8, то при большом R из п. 1) леммы 7.2 следует явная формула для числа a_d . Простейший случай, в котором эта гипотеза верна, описывается в следующей очевидной лемме.

ЛЕММА 7.3. Если для всех d -мерных слоев $\text{fiber } p: D^d \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, $p \in P_M^d$, расслоенного клеточного разбиения $\widetilde{M}$ граница слоя

$$(\text{fiber } p)_*[\partial D^d] \in H_{d-1}((\text{fiber } p)(\partial D^d); G)$$

равна нулю, то $a_d = b_d$.

Условие леммы 7.3 выполнено, если, например, в расслоенном клеточном разбиении $\widetilde{M}$ отсутствуют $(d-1)$ -мерные расслоенные клетки. В частности, $a_0 = b_0$. Заметим также, что числа a_d сокращаются в альтернированной сумме плотностей чисел Бетти.

ЛЕММА 7.4. Плотность эйлеровой характеристики квазипериодического множества $j^{(-1)}M$ равна $\sum_{d=0}^n (-1)^d b_d$.

§ 8. Плотность эйлеровой характеристики

Из леммы 7.4 и известных свойств объема множеств, образующих субаналитическое семейство, следует

ТЕОРЕМА 8.1. *Плотность эйлеровой характеристики замкнутых квазипериодических множеств M_a , образующих однопараметрическое субаналитическое семейство (определение 4.3), является субаналитической функцией от параметра a везде, кроме дискретного множества точек.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Было бы полезно исследовать характер такой зависимости для плотностей чисел Бетти, так как рассуждения этой работы дают только непрерывность плотностей чисел Бетти везде, кроме счетного множества точек (автору известно также доказательство кусочной липшицевости плотностей чисел Бетти).

Лемму 7.4 легко усилить: скажем, что плотность топологического инварианта с множества $Q \subset \mathbb{R}^k$ сходится к своему пределу c_0 быстро, если $\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{c(Q \cap rB)}{r^{k-1} \text{Vol } B} - rc_0 \right| < \infty$.

ТЕОРЕМА 8.3. *Плотность эйлеровой характеристики субаналитического квазипериодического множества сходится быстро.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.4. В связи с этим было бы интересно исследовать скорость сходимости плотностей чисел Бетти.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.5. Вопросы, сформулированные в замечаниях 8.2 и 8.4, являются частными случаями более важного и сложного вопроса: выяснить, аналитична ли зависимость плотностей чисел Бетти субаналитических квазипериодических множеств от начальных данных (для плотности эйлеровой характеристики аналитичность следует из леммы 7.4). В частности, если верна гипотеза 4.8, было бы интересно исследовать зависимость фигурирующего в ее формулировке числа R от начальных данных. Чтобы сформулировать правдоподобные предположения, в качестве первого шага было бы полезно вычислить функции φ и $\bar{\varphi}$ приближенно для конкретных примеров (реализация такого вычисления представляет технические трудности даже в простейших случаях).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.6. Приведенное ниже доказательство можно применить не только к замкнутому, но и к произвольному субаналитическому множеству $M \subset \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; для этого нужно представить M в виде объединения расслоенных клеток, которые являются частью расслоенного клеточного разбиения замыкания M . Остальные результаты работы также нетрудно распространить на произвольные субаналитические множества, но необходимые для такого обобщения технические средства отличаются от рассмотренных выше и будут изложены в следующей работе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.3. Мы докажем теорему для аддитивной эйлеровой характеристики, т. е. эйлеровой характеристики гомологий с компактным носителем (напомним, что для топологического пространства, представленного в виде объединения нескольких клеток $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ клеточного комплекса,

аддитивная эйлерова характеристика равна $\sum_i (-1)^{\dim \sigma_i}$. Достаточно доказать, что для некоторого C при всех r

$$\left| \chi(j^{(-1)}(M) \cap rB) - \sum_{\substack{p \in P_{\widetilde{M}} \\ \text{fiber } p \subset j(rB)}} (-1)^{\dim \text{fiber } p} \right| < Cr^{k-1}, \quad (*)$$

разделить это неравенство на r^{k-1} , устремить r к бесконечности и применить к сумме в левой части усиленную версию теоремы 5.2, в утверждении которой сходимость заменена на быструю сходимость.

По аддитивности эйлеровой характеристики разность в левой части неравенства (*) равна эйлеровой характеристике множества $M'(r)$ (напомним, что $M'(r)$ – разность объединения всех открытых клеток вида $j^{(-1)}(\text{fiber } p)$, $p \in P_{\widetilde{M}}$, которые пересекаются с rE , и внутренности rE , где $E \subset \mathbb{R}^k$ – дополнение к открытому единичному шару с центром в нуле). Поскольку семейство множеств $M'(r)$ равномерно субаналитично, существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что эйлеровы характеристики этих множеств меньше Cr^{k-1} .

Список литературы

1. L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **248**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
2. С. М. Гусейн-Заде, “О количестве критических точек у квазипериодического потенциала”, *Функц. анализ и его прил.*, **23:2** (1989), 55–56; англ. пер.: S. M. Gusein-Zade, “Number of critical points for a quasiperiodic potential”, *Funct. Anal. Appl.*, **23:2** (1989), 129–130.
3. S. M. Gusein-Zade, “On the topology of quasiperiodic functions”, *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 1–7.
4. А. И. Эстеров, “Плотности чисел Бетти множеств меньших значений квазипериодических функций”, *УМН*, **55:2** (2000), 157–158; англ. пер.: A. I. Esterov, “Densities of the Betti numbers of pre-level sets of quasi-periodic functions”, *Russian Math. Surveys*, **55:2** (2000), 338–339.
5. E. Soprunova, “Zeros of systems of exponential sums and trigonometric polynomials”, *Mosc. Math. J.*, **6:1** (2006), 153–168.

А. И. ЭСТЕРОВ (A. I. ÈSTEROV)
Независимый московский университет
E-mail: aesterov@math.toronto.edu

Поступило в редакцию
16.07.2007