Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Аффинный синтез в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 177–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:03:41

УДК 517.51

П. А. Терехин

Аффинный синтез в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$

Получены теоремы о представлении функций $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ рядами вида $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}$, абсолютно сходящимися по индексу j (т. е. $\sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 < \infty$), где $\psi_{j,k}(x) = |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk)$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, – аффинная система функций. Доказана справедливость гипотезы Буи–Лаугесена о достаточности условий Добеши для положительного решения задачи аффинного синтеза в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Дано конструктивное решение задачи аффинного синтеза при локализации условий Добеши.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: представление функций рядами, аффинная система, аффинный синтез.

§ 1. Введение

Пусть $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность невырожденных вещественных $(d \times d)$ -матриц, удовлетворяющая условию

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j^{-1} = 0,$$

и пусть b – некоторая невырожденная вещественная $(d \times d)$ -матрица.

Для функции $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, натурального числа $j \in \mathbb{N}$ и целочисленного вектора $k \in \mathbb{Z}^d$ положим

$$\psi_{j,k}(x) = |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk).$$

Семейство функций $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$ называется *аффинной системой*, порожденной функцией ψ .

Классическим примером аффинных систем являются всплескоподобные системы вида $\{\psi_{j,k}(x)\} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}$ с положительным спектром $j > 0$, соответствующие случаю скалярных матриц $a_j = 2^j e$ и единичной матрицы $b = e$.

Аффинные системы естественным образом возникают в различных областях теории функций: теории всплесков, теории фреймов, гармоническом анализе при дискретизации сверток и др.

Полнота аффинных систем и вопросы представления функций рядами по элементам аффинной системы изучались в классическом или общем случае в работах [1]–[6], а также в различных контекстах многих других работ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант № НШ-2970.2008.1).

В настоящей работе рассматривается задача *аффинного синтеза* в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, т. е. задача представления произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ рядом:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Принципиально то, что задача аффинного синтеза ставится для достаточно общей порождающей функции ψ . В частности, не предполагается, что порождающая функция удовлетворяет весьма ограничительным условиям кратно-масштабного анализа (см., например, [7]). Наряду с этим свою специфику привносит условие положительности спектра $j \in \mathbb{N}$ вместо полного дискретного спектра $j \in \mathbb{Z}$, характерного для теории всплесков.

Задача аффинного синтеза допускает переформулировку в терминах свойств *синтезирующего оператора* $S: X \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, определяемого равенством

$$Sc = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k},$$

где числовое семейство $c = \{c_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$ принадлежит некоторому пространству X . Именно, положительное решение задачи аффинного синтеза равносильно сюръективности (и, конечно, корректной определенности) синтезирующего оператора S для некоторого, по крайней мере одного, пространства числовых семейств X .

Например, в качестве пространства X можно выбрать следующие:

- (i) X^{fin} – пространство всех финитных числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$;
- (ii) X^{mix} – пространство всех числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющих условию $\|c\| = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^2 \right)^{1/2} < \infty$;
- (iii) X^{abs} – пространство всех числовых семейств $\{c_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$, для которых $\|c\| = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 < \infty$.

Пусть

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

– преобразование Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и

$$P_b f(x) = |\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - bk)$$

– периодизация функции f относительно решетки $b\mathbb{Z}^d$.

Наконец, пусть $\mathcal{C} = [0, 1)^d$ – единичный куб в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}' = [-1/2, 1/2)^d$ – единичный куб с центром в начале координат и $b' = (b^{-1})^*$ – транспонированная обратная матрица к матрице b .

Следующий классический результат доказан в [1].

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ такая, что $P_{b'}(|\widehat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, функция $|\widehat{\psi}(\xi)|$ непрерывна в начале координат и $\widehat{\psi}(0) \neq 0$. Тогда синтезирующий оператор $S: X^{\text{mix}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ ограничен и имеет всюду плотный образ $\overline{\text{Range}(S)} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Утверждение теоремы А означает, что аффинная система $\{\psi_{j,k}\}$ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

В недавних работах [5], [6] получен, в частности, следующий результат.

ТЕОРЕМА В. Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ такая, что $P_b(|\psi|) \in L^2(b\mathcal{C})$, причем $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0$. Тогда:

1) синтезирующий оператор $S: X^{\text{fin}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет всюду плотный образ $\overline{\text{Range}(S)} = L^2(\mathbb{R}^d)$;

2) синтезирующий оператор $S: X^{\text{mix}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ ограничен и сюръективен, $\text{Range}(S) = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Утверждение 1) теоремы В также означает, что аффинная система $\{\psi_{j,k}\}$ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Утверждение 2) теоремы В дает положительное решение задачи аффинного синтеза. При этом произвольная функция $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ представима в виде суммы абсолютно сходящегося по индексу j ряда: $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}$, т. е. $\sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 < \infty$.

Сравнивая условия теорем А и В, мы видим, что при выполнении условий теоремы В выполняются все условия теоремы А. В самом деле, если $P_b(|\psi|) \in L^2(b\mathcal{C})$, то $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, но обратное не верно (см. лемму 2 из § 2 и следующий за ней пример). Кроме того, очевидно, что если $P_b(|\psi|) \in L^2(b\mathcal{C})$, то $P_b(|\psi|) \in L^1(b\mathcal{C})$, и поэтому $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, так что $\hat{\psi}(\xi)$ – непрерывная функция и $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0$.

В работе [6] была высказана гипотеза, что утверждение 2) теоремы В останется в силе при выполнении условий теоремы А. В настоящей работе мы доказываем справедливость гипотезы Буй–Лаугесена.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ такая, что $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, функция $|\hat{\psi}(\xi)|$ непрерывна в начале координат и $\hat{\psi}(0) \neq 0$. Тогда синтезирующий оператор $S: X^{\text{mix}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ ограничен и сюръективен, $\text{Range}(S) = L^2(\mathbb{R}^d)$.

На самом деле, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и существует окрестность Ω начала координат такая, что для почти всех $\xi \in \Omega$ имеем $\hat{\psi}(\xi) \neq 0$ и при некоторой постоянной $C > 0$ для почти всех $\xi \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\psi}(\xi - b'k)|^2 \leq C |\hat{\psi}(\xi)|^2.$$

Тогда синтезирующий оператор $S: X^{\text{abs}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ ограничен и сюръективен, $\text{Range}(S) = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Неравенство из условий теоремы 2 представляет собой локализованное (поскольку учитываются значения функции $\hat{\psi}$ лишь в окрестностях точек решетки $b'\mathbb{Z}^d$) условие Добеши $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Последнее условие вместе с условием отделимости, т. е. $|\hat{\psi}(\xi)| \geq c > 0$ для почти всех $\xi \in \Omega$, гарантируют выполнение условий теоремы 2. Поэтому условия теоремы 2 существенно слабее условий теоремы 1. Однако в общем случае (без условия отделимости) неравенство из условий теоремы 2 и условие Добеши независимы.

§ 2. Вспомогательные результаты

Напомним, что система функций $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *бесселевой*, если существует постоянная $B > 0$ такая, что для любой функции f выполняется неравенство

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |(f, f_n)|^2 \leq B \|f\|_2^2,$$

или, что равносильно, если для любой числовой последовательности $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ из пространства l^2 выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n \right\|_2^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2$$

(см., например, [8, с. 52]). В монографии [8, с. 143] имеется доказательство для одномерного случая $d = 1$ (общий случай доказывается аналогично) следующего хорошо известного результата.

ЛЕММА 1. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- 2) система $\{\psi(x - bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ является бесселевой.

ЛЕММА 2. Если $P_b(|\psi|) \in L^2(b\mathcal{C})$, то $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 1 достаточно доказать, что является бесселевой система $\{\psi(x - bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Обозначим $p = P_b(|\psi|)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - bk) \right\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k \psi(x - bk)| \right)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k| |\psi(x - bk)|^{1/2} |\psi(x - bk)|^{1/2} \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 |\psi(x - bk)| \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\psi(x - bk)| \right) dx. \end{aligned}$$

Представим $\mathbb{R}^d$ в виде дизъюнктного объединения кубов $b(\mathcal{C} + m)$, $m \in \mathbb{Z}^d$. Последний интеграл запишем в виде суммы интегралов

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{b(\mathcal{C} + m)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 |\psi(x - bk)| |\det b|^{-1} p(x) dx.$$

В каждом таком интеграле сделаем замену переменной $x = y + bm$, $y \in b\mathcal{C}$. Окончательно, с учетом b -периодичности функции $p(x)$ получим

$$\begin{aligned} &\int_{b\mathcal{C}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 |\psi(y + b(m - k))| |\det b|^{-1} p(y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 \int_{b\mathcal{C}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\psi(y + b(m - k))| |\det b|^{-1} p(y) dy \\ &= |\det b|^{-2} \int_{b\mathcal{C}} p^2(y) dy \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 = B \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2, \end{aligned}$$

причем $B < \infty$, поскольку $p = P_b(|\psi|) \in L^2(b\mathcal{C})$ по условию леммы.

Пример функции $\psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ показывает, что утверждение, обратное к лемме 2, не верно уже в одномерном случае $d = 1$, $b = 1$.

Положим

$$\psi_k(x) = \psi(x - bk), \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Определим *рамочный оператор* T посредством равенства

$$Tf = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) \psi_k.$$

ЛЕММА 3. Если $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, то оператор $T: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 система $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ бесселева, поэтому

$$\|Tf\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) \psi_k \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(f, \psi_k)|^2 \leq B^2 \|f\|_2^2.$$

ЛЕММА 4. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\text{supp } \hat{f} \subset b'\mathcal{C}'$. Тогда $\widehat{Tf}(\xi) = t(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$, где $t(\xi)$ – b' -периодическая функция такая, что $t(\xi) = |\det b'| \widehat{\hat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)}}$ для почти всех $\xi \in b'\mathcal{C}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $\widehat{\psi_k}(\xi) = e^{-2\pi i \xi b k} \widehat{\psi}(\xi)$ и $\widehat{Tf} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) e^{-2\pi i \xi b k} \widehat{\psi}(\xi)$, откуда $t(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) e^{-2\pi i \xi b k}$. Периодичность функции $t(\xi)$ относительно решетки $b'\mathbb{Z}^d$ проверяется непосредственно. Функция $t'(\xi) = t(b'\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) e^{-2\pi i \xi b k}$ будет периодической относительно стандартной решетки $\mathbb{Z}^d$. Сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей последнего равенства, находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}'} t'(\xi) e^{2\pi i \xi m} d\xi &= |\det b'|^{-1} \int_{b'\mathcal{C}'} t(\eta) e^{2\pi i \eta b m} d\eta, \quad \eta = b'\xi, \\ \int_{\mathcal{C}'} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_k) e^{-2\pi i \xi k} e^{2\pi i \xi m} d\xi &= (f, \psi_m) = (\hat{f}, \widehat{\psi_m}) \\ &= \int_{b'\mathcal{C}'} \hat{f}(\eta) \overline{\widehat{\psi}(\eta)} e^{2\pi i \eta b m} d\eta. \end{aligned}$$

Следовательно, $t(\eta) = |\det b'| \widehat{\hat{f}(\eta) \overline{\widehat{\psi}(\eta)}}$ для почти всех $\eta \in b'\mathcal{C}'$.

ЛЕММА 5. Предположим, что $\|P_{b'}(|\hat{\psi}|^2)\|_\infty \leq 1$. Пусть, далее, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\text{supp } \hat{f} \subset b'\mathcal{C}'$. Тогда справедливо неравенство

$$\|f - Tf\|_2^2 \leq \int_{b'\mathcal{C}'} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\xi)|^2) d\xi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 4 находим

$$\begin{aligned} \|f - Tf\|_2^2 &= \|\widehat{f} - \widehat{Tf}\|_2^2 = \int_{b'\mathcal{C}'} |\widehat{f}(\xi) - t(\xi)\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &+ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \int_{b'(\mathcal{C}' - k)} |t(\xi)|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{b'\mathcal{C}'} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\xi)|^2)^2 d\xi \\ &+ \int_{b'\mathcal{C}'} |t(\eta)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\widehat{\psi}(\eta - b'k)|^2 d\eta = I_1 + I_2, \quad \xi = \eta - b'k. \end{aligned}$$

Оценим I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{b'\mathcal{C}'} |t(\eta)|^2 |\det b'|^{-1} (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\eta)|^2) d\eta \\ &= \int_{b'\mathcal{C}'} |\widehat{f}(\eta)|^2 |\det b'| |\widehat{\psi}(\eta)|^2 (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\eta)|^2) d\eta. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\|f - Tf\|_2^2 = I_1 + I_2 \leq \int_{b'\mathcal{C}'} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\xi)|^2) d\xi.$$

Для каждой невырожденной вещественной $(d \times d)$ -матрицы a определим унитарный оператор

$$D(a)f(x) = |\det a|^{1/2} f(ax).$$

Заметим, что $D^{-1}(a) = D(a^{-1})$ и $\widehat{D(a)f} = D(a')\widehat{f}$, где по-прежнему $a' = (a^{-1})^*$ – транспонированная обратная матрица.

Рассмотрим последовательность операторов

$$T_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно видеть, что $T_j = D(a_j)TD^{-1}(a_j)$.

ЛЕММА 6. *Предположим, что $\|P_b(|\widehat{\psi}|^2)\|_\infty \leq 1$ и существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для почти всех $\xi \in \delta b'\mathcal{C}'$ выполняется неравенство $|\widehat{\psi}(\xi)| \geq \varepsilon$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место предельное соотношение*

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|f - T_j f\|_2 \leq q \|f\|_2,$$

где постоянная $0 < q < 1$ не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала преобразование Фурье функции f имеет компактный носитель. Тогда существует номер $j_0 \in \mathbb{N}$, начиная с которого $a'_j \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \delta b'\mathcal{C}'$, $j \geq j_0$. Рассмотрим функцию $g = D^{-1}(a_j)f$. Имеем $\widehat{g} = D^{-1}(a'_j)\widehat{f}$. Следовательно, $\operatorname{supp} \widehat{g} = a'_j \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \delta b'\mathcal{C}'$. Полагая без ограничения общности, что $\delta < 1$, применим лемму 5 к функции g . Ввиду унитарности оператора $D(a_j)$ и условий леммы будем иметь

$$\begin{aligned} \|f - T_j f\|_2^2 &= \|D(a_j)g - D(a_j)TD^{-1}(a_j)D(a_j)g\|_2^2 = \|g - Tg\|_2^2 \\ &\leq \int_{\delta b'\mathcal{C}'} |\widehat{g}(\xi)|^2 (1 - |\det b'| |\widehat{\psi}(\xi)|^2) d\xi \leq (1 - |\det b'| \varepsilon^2) \|\widehat{g}\|_2^2 = q^2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

с постоянной $q = \sqrt{1 - |\det b'| \varepsilon^2} < 1$. Итак, $\|f - T_j f\|_2 \leq q \|f\|_2$ при $j \geq j_0$. Тем самым доказываемое предельное соотношение установлено для класса функций f , преобразование Фурье которых имеет компактный носитель. Поскольку последний класс плотен в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$, то предельным переходом, учитывая равномерную ограниченность операторов T_j , $j \in \mathbb{N}$, получаем, что искомое предельное соотношение имеет место для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу однородности условий, накладываемых на порождающую функцию ψ , без ограничения общности можно считать, что $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \leq 1$ почти всюду. Таким образом, выполнены условия леммы 6. По этой лемме для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ найдется возрастающая последовательность номеров $\{j(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_{j(n)} f_{n-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j(n), k} \psi_{j(n), k},$$

где функции f_n , $n = 0, 1, \dots$, строятся следующим образом по индукции. Пусть $f_0 = f$, и если функции $f_1, \dots, f_{n-1}$ уже построены, то полагаем $f_n = f_{n-1} - T_{j(n)} f_{n-1}$, причем номер $j(n)$ выбираем так, чтобы $\|f_n\|_2 = \|f_{n-1} - T_{j(n)} f_{n-1}\|_2 \leq q \|f_{n-1}\|_2$. По построению для любого натурального числа n имеем

$$f = T_{j(1)} f_0 + T_{j(2)} f_1 + \dots + T_{j(n)} f_{n-1} + f_n,$$

где остаток $\|f_n\|_2 \leq q^n \|f\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При этом

$$T_{j(n)} f_{n-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f_{n-1}, \psi_{j(n), k}) \psi_{j(n), k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j(n), k} \psi_{j(n), k},$$

и поскольку система $\{\psi_{j, k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ бесселева с одной и той же постоянной B для всех $j \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j(n), k}|^2 \right)^{1/2} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(f_{n-1}, \psi_{j(n), k})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{B} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_{n-1}\|_2 \leq \frac{\sqrt{B}}{1 - q} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Это означает, что синтезирующий оператор $S: X^{\text{mix}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ является сюръекцией. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть

$$V_\psi = \overline{\text{span}}\{\psi(x - bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$$

– инвариантное относительно сдвига по решетке $b\mathbb{Z}^d$ подпространство, и пусть $\Omega_\psi = \{\xi \in \mathbb{R}^d: P_{b'}(|\hat{\psi}(\xi)|^2) \neq 0\}$. Множество Ω_ψ определено с точностью до

нуль-множества, и в силу условий теоремы можно считать, что $\Omega \subset \Omega_\psi$. Определим функцию φ посредством равенства

$$\widehat{\varphi} = (P_{b'}(|\widehat{\psi}|^2))^{-1/2} \widehat{\psi},$$

причем если $\xi \notin \Omega_\psi$, то положим $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$. Заметим, что

$$P_{b'}(|\widehat{\varphi}|^2) = \mathcal{X}_{\Omega_\psi}$$

– характеристическая функция множества Ω_ψ .

Таким образом, для функции φ выполняются все условия леммы 6. По этой лемме для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ существует номер j такой, что

$$\left\| f - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k} \right\|_2 \leq q \|f\|_2.$$

Известно (см., например, [9]), что $V_\varphi = V_\psi$. Поэтому для $q < r < 1$ найдется конечная сумма вида $\sum_{|k| \leq R} c_{j,k} \psi_{j,k}$ такая, что

$$\left\| f - \sum_{|k| \leq R} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 \leq r \|f\|_2.$$

Далее мы можем рассуждать так же, как и при доказательстве теоремы 1. Пусть $f_0 = f$, и если функции $f_1, \dots, f_{n-1}$ уже построены, то полагаем

$$f_n = f_{n-1} - \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k},$$

причем конечную сумму $\sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k}$ подбираем так, чтобы

$$\|f_n\|_2 = \left\| f_{n-1} - \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k} \right\|_2 \leq r \|f_{n-1}\|_2.$$

По построению для любого натурального числа n имеем

$$f = \sum_{|k| \leq R(1)} c_{j(1),k} \psi_{j(1),k} + \dots + \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k} + f_n,$$

где остаток $\|f_n\|_2 \leq q^n \|f\|_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, справедливо представление

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k} \right\|_2 &\leq \left\| f_{n-1} - \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k} \right\|_2 + \|f_{n-1}\|_2 \\ &\leq r \|f_{n-1}\|_2 + \|f_{n-1}\|_2 \leq (r+1)r^{n-1} \|f\|_2, \end{aligned}$$

то представляющий функцию f ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{|k| \leq R(n)} c_{j(n),k} \psi_{j(n),k} \right\|_2 \leq \frac{1+r}{1-r} \|f\|_2.$$

Это означает, что синтезирующий оператор $S: X^{\text{abs}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ является сюръекцией. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из доказательства теоремы 2, пространство числовых семейств X^{abs} несколько избыточно для представления функций из пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ абсолютно сходящимися по индексу j рядами по аффинной системе $\{\psi_{j,k}\}$, поскольку в представляющем функцию f ряде при каждом фиксированном n числовое семейство $\{c_{j(n),k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ является финитным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 2 пространство X^{abs} , вообще говоря, нельзя заменить на пространство X^{mix} , так как при отсутствии предположения $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ о бесселевости системы сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ норма $\|\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}\|_2$ не подчинена l^2 -норме числового семейства $\{c_{j(n),k}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ни при каком j . По этой причине синтезирующий оператор $S: X^{\text{mix}} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ не будет корректно определенным.

В то же время, если система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ является бесселевой, то $X^{\text{mix}} \subset X^{\text{abs}}$, причем равенство $X^{\text{mix}} = X^{\text{abs}}$ равносильно выполнению двусторонней оценки

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x-bk) \right\|_2^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2,$$

которая означает, что система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки V_ψ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что представляющий функцию f ряд не только абсолютно сходится по индексу j , но его сходимость не медленнее геометрической прогрессии.

Список литературы

1. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001; пер. с англ.: I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **61**, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
2. E. Hernández, G. Weiss, *A first course on wavelets*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
3. V.I. Filippov, P. Oswald, "Representation in L_p by series of translates and dilates of one function", *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
4. Ch. K. Chui, Qiyu Sun, "Affine frame decompositions and shift-invariant spaces", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **20**:1 (2006), 74–107.
5. H.-Q. Bui, R. S. Laugesen, "Affine systems that span Lebesgue spaces", *J. Fourier Anal. Appl.*, **11**:5 (2005), 533–556.
6. H.-Q. Bui, R. S. Laugesen, *Affine synthesis and coefficient norms for Lebesgue, Hardy and Sobolev spaces*, <http://www.math.uiuc.edu/~laugesen/publications.html>, 2007.

7. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
8. O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
9. G. Weiss, E.N. Wilson, “The mathematical theory of wavelets”, *Twentieth century harmonic analysis – a celebration*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (Il Ciocco, Italy, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **33**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 329–366.

П. А. ТЕРЕХИН (P. A. TEREKHIN)
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
25.07.2007