Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 5, 67–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:12:17

УДК 517.9

Н. Б. Енгибарян

О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций

Рассмотрена факторизация $I - K = (I - U^+)(I - U^-)$, где I – единичный оператор, K – интегральный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве функций, суммируемых по мере μ на $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, непрерывной относительно меры Лебега:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)\mu(dt), \quad x \in (a, b),$$

а $U^\pm$ – искомые вольтерровы операторы. Получено необходимое и достаточное условие существования факторизации для достаточно широкого класса операторов K с положительными ядрами и для операторов Гильберта–Шмидта.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: функции, суммируемые по мере, интегральные операторы, вольтеррова факторизация.

§ 1. Введение

Пусть K – интегральный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве E функций, суммируемых по мере μ на $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)\mu(dt), \quad x \in (a, b). \quad (1.1)$$

Рассмотрим задачу факторизации:

$$I - K = (I - U^+)(I - U^-), \quad (1.2)$$

где I – единичный оператор, а U^- и U^+ – искомые формально вольтерровы операторы, действующие в E :

$$\begin{aligned} (U^+f)(x) &= \int_a^x u^+(x, t)f(t)\mu(dt), & x \in (a, b), \\ (U^-f)(x) &= \int_x^b u^-(x, t)f(t)\mu(dt), & x \in (a, b). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В классической теории вольтерровой факторизации интегральных операторов (см. [1]) изучена задача факторизации обратного оператора:

$$(I - K)^{-1} = (I + V^-)(I + V^+), \quad (1.4)$$

в пространстве $L_2(a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, где K – интегральный оператор Гильберта–Шмидта (оператор с квадратируемым ядром):

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt, \quad x \in (a, b), \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad (1.5)$$

$$\iint k^2(x, t) dx dt < +\infty.$$

Центральным результатом является следующая теорема Гохберга–Крейна.

ТЕОРЕМА ГК. Пусть скалярный или матричный интегральный оператор имеет вид (1.5). Для существования факторизации (1.4), где $V^\pm$ – вольтерровы операторы с квадратируемыми ядрами, необходимо и достаточно, чтобы при любом $s \in (a, b]$ уравнение $f(x) = g(x) + \int_a^s k(x, t)f(t) dt$, $x \in (a, s)$, было разрешимо в пространстве $L_2(a, s)$.

Самостоятельно развивалась факторизационная теория уравнений Винера–Хопфа второго рода и смежных классов уравнений типа свертки.

В работах [2]–[5] с различной степенью общности возникли нелинейные уравнения факторизации (НУФ) для линейных интегральных и более общих операторов. Математическая теория НУФ развита автором и его соавторами (см. [5]–[9] и др.). Получены результаты по факторизации обратимых и необратимых, скалярных и векторных операторов в банаховых пространствах, а также по соответствующим интегральным и дискретным уравнениям. Наиболее полные результаты относятся к случаю, когда ядро положительно:

$$k \geq 0, \quad (1.6)$$

в диссипативном (докритическом) и консервативном (критическом) случаях, представляющих интерес в математической физике и в теории вероятностей.

Возможности использования НУФ при изучении экзистенциальных вопросов в случае, когда условие положительности (1.6) не выполняется, остались в недостаточной степени раскрытыми.

В настоящей работе рассматриваются вопросы из теории вольтерровых интегральных операторов в банаховых пространствах суммируемых функций. Рассматриваются интегральные операторы вида (1.1), (1.3), где μ – мера на промежутке $J_0 = (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, непрерывная относительно меры Лебега:

$$m(S) = 0 \implies \mu(S) = 0, \quad S \subset (a, b). \quad (1.7)$$

Развивается процедура рекуррентного характера построения факторизации (1.2). Получены следующие основные результаты:

а) необходимое и достаточное условие существования факторизации (1.2) в случае широкого класса операторов с положительными ядрами (этот результат является новым также в случае меры Лебега на конечном промежутке);

б) обобщение теоремы ГК на случай операторов Гильберта–Шмидта вида (1.1).

Метод НУФ сочетается с факторизацией вдоль цепочки проекторов. Такая факторизация была использована в [1]. Результаты работы легко переносятся на случай интегральных операторов, действующих в пространствах конечномерных вектор-функций.

§ 2. Классы интегральных операторов

2.1. Идеальные пространства суммируемых функций. Пусть μ – мера на промежутке $J_0 = (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, непрерывная относительно меры Лебега (см. (1.7)). Обозначим через $E = E(\mu)$ некоторое идеальное банахово пространство вещественных функций, измеримых по мере μ . Условие идеальности означает, что если $f \in E$ и $|\varphi(t)| \leq |f(t)|$ (п.в. по μ), то $\varphi \in E$ и $\|\varphi\|_E \leq \|f\|_E$.

В качестве E можно взять пространство $L_p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$, с нормой $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$ (в том числе различные весовые пространства), а также пространства Орлича, Марцинкевича, Лоренца.

2.2. Проекторы в E . Пусть $p_s, s \in (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$, – параметризованное семейство проекторов, действующих в E . Если $s < b$, то p_s определяется следующим образом:

$$(p_s f)(x) = \kappa_s(x) f(x), \quad f \in E, \quad s \in \bar{J} = [a, b], \quad (2.1)$$

где κ_s – характеристическая функция интервала (a, s) . По определению имеем $p_a = O$, $p_b = I$, где O – нулевой оператор, а I – единичный оператор в E .

Отметим, что открытость или замкнутость исходного промежутка J_0 несущественна, а в определении проекторов p_s собственные или несобственные точки a и b играют существенную роль.

Из идеальности E следует, что p_s является линейным ограниченным оператором в E , причем $\|p_s\| \leq 1$, т. е.

$$\|p_s f\|_E \leq \|f\|, \quad f \in E. \quad (2.2)$$

Проектор p_s переводит банахово пространство E в его подпространство $E_s = p_s(E) \subset E$ функций таких, что $f(x) = 0$, $x \geq s$. Имеем $E_b = E$, а пространство E_a состоит только из нулевого элемента $\theta \in E$. Если $r < s$, то $E_r \subset E_s$. Все пространства E_s идеальные.

Из перечисленных выше свойств проекторов p_s следует, что они образуют монотонную окаймленную цепочку (см. [1]).

Пусть $p_{rs} = p_s - p_r$. Если $r \leq s$, то p_{rs} являются проекторами.

2.3. Классы интегральных операторов. Обозначим через Ω алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в E , с нормой $\|\cdot\|_\Omega$.

Пусть $B \subset \Omega$ – некоторая банахова алгебра с нормой $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_\Omega$, состоящая из регулярных интегральных операторов K вида (1.1). Оператор K называется *регулярным*, если он представляется в виде разности: $K = K_1 - K_2$, где K_i , $i = 1, 2$, – ограниченные интегральные операторы в E с положительными ядрами $k_i \geq 0$. Введем в B частичный порядок $\geq$; тогда запись $K_1 \geq K_2$ означает, что $k_1 \geq k_2$.

В качестве B можно взять, например, алгебру всех регулярных интегральных операторов K с нормой

$$\|K\|_B = \sup_{\|f\|=1} \left\| \int_a^b |k(x, t)| f(t) \mu(dt) \right\|_E. \quad (2.3)$$

Тогда B является идеальным банаховым пространством.

Известен ряд критериев полной непрерывности регулярных интегральных операторов (см. [10]).

Из теоремы Фубини следует, что в B имеет место обычное правило умножения интегральных операторов. Ядром k произведения $K = K_1 K_2 \in B$ является следующая композиция $k = k_1 * k_2$ ядер сомножителей:

$$k(x, t) = \int k_1(x, s) k_2(s, t) \mu(ds), \quad \|K\| \leq \|K_1\| \|K_2\|. \quad (2.4)$$

Имеет место следующее свойство мажорантности: если $K_2 \in B$ и $|k_1(x, t)| \leq |k_2(x, t)|$, то выполнены включение и неравенство

$$K_1 \in B, \quad \|K_1\|_B \leq \|K_2\|_B. \quad (2.5)$$

Важным примером пространства B , состоящего из вполне непрерывных операторов, служит класс $H_2(\mu)$ интегральных операторов Гильберта–Шмидта с нормой

$$\|K\|_B^2 = \iint k^2(x, t) \mu(dx) \mu(dt) < +\infty. \quad (2.6)$$

Класс $H_2(\mu)$ является двусторонним идеалом в алгебре Ω линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mu)$.

2.4. Проекторы в B . Пусть χ_D – характеристическая функция множества $D \subset G := (a, b) \times (a, b) = (a, b)^2$, измеримого по мере $\mu \times \mu$. Она определяет следующий проектор Q_D в пространстве операторов B . Если k – ядро оператора $K \in B$, то ядром оператора $Q_D(K)$ служит функция $\chi_D(x, y)k(x, y)$. Проектор Q_D переводит B в класс $B_D \subset B$ операторов, ядра которых сосредоточены в D .

Проекторы Q_D являются линейными ограниченными операторами в B , причем $\|Q_D\| \leq 1$, т. е.

$$\|Q_D(K)\|_B \leq \|K\|_B, \quad K \in B. \quad (2.7)$$

Произвольные два проектора Q_D, Q_S коммутируют.

Ниже будут рассмотрены некоторые проекторы, связанные с областями вида

$$G_s = (a, s)^2, \quad a < s \leq b, \quad G_{rs} = (r, s)^2, \quad S_{rs} = G_s / G_r, \quad a < r < s \leq b.$$

Проектор $p_s \in \Omega$, введенный в п. 2.2, порождает два проектора P_s, P'_s в пространстве B путем умножения операторов $K \in B$ слева и справа на p_s : $P_s(K) = p_s K \in B$, $P'_s(K) = K p_s \in B$. Проекторы P_s и P'_s могут быть записаны через Q_D следующим образом:

$$P_s = Q_D, \quad D = (a, b) \times (a, s), \quad P'_s = Q_D, \quad D = (a, s) \times (a, b). \quad (2.8)$$

Введем следующие проекторы:

$$\begin{aligned} P_{rs} &= P_s - P_r, & P'_{rs} &= P'_s - P'_r, & s > r, \\ Q_s &= P_s P'_s, & Q_{rs} &= Q_s - Q_r, & s > r, \end{aligned}$$

и классы операторов

$$B_s = Q_s(B) = B_{G_s}, \quad B_{rs} = Q_{rs}(B) = B_{S_{rs}}.$$

Если $r > s$, то по определению имеем

$$P_{rs} = -P_{sr}, \quad P'_{rs} = -P'_{sr}, \quad Q_{rs} = -Q_{sr}. \quad (2.9)$$

Мы будем рассматривать усеченные интегральные операторы

$$K_s = Q_s(K) \in B_s, \quad K_{rs} = Q_{rs}(K) = K_s - K_r \in B_{rs}. \quad (2.10)$$

Имеем

$$(K_s f)(x) = \begin{cases} \int_a^s k(x, t) f(t) \mu(dt), & \text{если } x \leq s, \\ 0, & \text{если } x > s. \end{cases}$$

Если K вполне непрерывный, то операторы K_{rs} также вполне непрерывны.

Для произвольных $K, T \in B$ имеют место равенства

$$P_{rs}(KT) = (P_{rs}(K))T, \quad P'_{rs}(KT) = K(P'_{rs}(T)). \quad (2.11)$$

Приведем одно легко проверяемое алгебраическое свойство подклассов из B .

ЛЕММА 2.1. Пусть $K_r \in B_r$, $T_{rs} \in B_{rs}$, $r < s$. Тогда

$$K_r T_{rs} \in B_{(a,r) \times (r,s)} \subset B_{rs}, \quad T_{rs} K_r \in B_{(r,s) \times (a,r)} \subset B_{rs}.$$

2.5. Локально сжимающие операторы. Оператор $K \in B$ назовем *локально q -ограниченным вдоль цепочки $\{Q_a\}$* , если каждая точка $r \in [a, b]$ обладает такой окрестностью τ_r , что

$$\|Q_{sl}(K)\|_B \leq q, \quad s, l \in \tau_r. \quad (2.12)$$

В случае $q < 1$ оператор K назовем *локально сжимающим*.

ЛЕММА 2.2. Пусть оператор $K \in B$ локально q -ограниченный. Тогда существует конечное разбиение

$$\Pi[a, b] = \{s_k\}, \quad a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b, \quad (2.13)$$

компакта $[a, b]$ такое, что

$$\|K_{s_i, s_{i+1}}\| = \|Q_{s_i, s_{i+1}}(K)\|_B \leq q, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что существует открытое покрытие $\tilde{\tau} = \{\tau_r\}$ компакта $[a, b]$ (состоящее из открытых интервалов и крайних полуинтервалов вида $[a, \alpha)$, $(\beta, b]$) такое, что выполняются условия (2.12). Согласно лемме Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\tau = \{\tau_{r_j}\}$, $j = 1, \dots, m$. Обозначим через $\eta_0 \in \tau$ ту окрестность точки $a = s_0$, которая имеет наибольший правый конец α_1 . Далее выберем ту окрестность (или одну из тех окрестностей) $\eta_1 \in \tau$ точки α_1 , которая имеет наибольший правый конец α_2 . Продолжим этот процесс. На i -м шаге выберем ту окрестность $\eta_i \in \tau$ уже выбранной точки α_{i-1} , которая имеет наибольший правый конец α_i . После конечного числа шагов не более m мы дойдем до точки $\alpha_n = b$.

Определим точки разбиения $\{s_i\}$. В качестве s_i , $i < n$, можно взять произвольную точку из пересечения $\eta_i \cap \eta_{i+1}$. Поскольку точки s_i и s_{i+1} принадлежат одному и тому же интервалу $\eta_{i+1} \in \tau$, согласно (2.7) выполняется неравенство (2.12). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Лемма 2.2 остается в силе, если μ – произвольная σ -конечная мера на интервале $(-\infty, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Оператор $K \in B$ назовем *непрерывным вдоль цепочки* $\{Q_s\}$, если оператор-функция $K_s = Q_s(K) \in B_s$ непрерывно (по норме) зависит от s на $[a, b]$:

$$\|Q_{rs}(K)\|_B \rightarrow 0, \quad r \rightarrow s, \quad s, r \in [a, b]. \quad (2.15)$$

Для выполнения условия (2.12) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \|P_{rs}(K)\|_B &\rightarrow 0, & r \rightarrow s, & \quad s, r \in [a, b], \\ \|P'_{rs}(K)\|_B &\rightarrow 0, & r \rightarrow s, & \quad s, r \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Обозначим через $\tilde{B} \subset B$ класс операторов, непрерывных вдоль цепочки $\{Q_s\}$. Через $\check{B} \subset \tilde{B}$ обозначим класс операторов K , удовлетворяющих условиям (2.16).

Оператор $K \in \tilde{B}$ является локально q -ограниченным для произвольного $q > 0$.

ЛЕММА 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

- i) класс $\tilde{B}$ является подпространством банахова пространства B ;
- ii) класс $\check{B}$ является идеалом в банаховой алгебре B ;
- iii) класс $\check{B}_r = Q_r(\check{B})$ является идеалом в B_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем полноту пространства $\tilde{B}$. Пусть последовательность $K^{(n)}$ из $\tilde{B}$ сходится в B : $K^{(n)} \rightarrow K \in B$. Покажем, что $K \in \tilde{B}$. С учетом (2.7) получаем $\|Q_{rs}(K)\|_B \leq \|Q_{rs}(K^{(n)})\|_B + \|K - K^{(n)}\|_B$. Выберем номер n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\|K - K^{(n)}\|_B < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу $K^{(n)} \in \tilde{B}$ можно выбрать r так, чтобы $\|Q_{rs}(K^{(n)})\|_B < \frac{\varepsilon}{2}$, что приводит к неравенству $\|Q_{rs}(K)\|_B < \varepsilon$. Утверждение i) леммы доказано. Аналогично проверяется полнота пространства $\check{B}$. Покажем теперь, что класс $\check{B}$ замкнут относительно умножения. Пусть $K, T \in \check{B}$ и $W = KT$. Согласно (2.11) имеем $P_{rs}(W) = (P_{rs}(K))T$, откуда следует $\|P_{rs}W\| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow s$. Аналогично показывается, что $\|P'_{rs}W\| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow s$. Утверждение iii) проверяется с учетом коммутативности проектора Q_l с проекторами P_{rs}, P'_{rs} . Лемма доказана.

§ 3. Обратимость операторов $I - K_r$, резольвента Фредгольма

3.1. Некоторые свойства резольвенты. Пусть $K \in B$. Оператор $I - K$ назовем *B -обратимым* в E , если существует обратный оператор

$$(I - K)^{-1} = I + \Gamma, \quad \Gamma \in B.$$

Оператор Γ назовем *резольвентой* (*B -резольвентой*) оператора K .

Пусть $K_1, K_2 \in B$ и операторы $I - K_1, I - K_2$ являются B -обратимыми: $(I - K_i)^{-1} = I + \Gamma_i, i = 1, 2$. Тогда таким же является произведение $I - K = (I - K_1)(I - K_2)$. Резольвентой оператора K является $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1 \in B$.

Если

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \geq O, \quad \text{то} \quad \Gamma \geq O. \quad (3.1)$$

Пусть $K \in B, q = \|K\|_B < 1$. Тогда существует резольвента $\Gamma \in B$, которая является суммой равномерно сходящегося ряда Неймана. Если $K \geq O$, то $\Gamma \geq O$.

Пусть $K \in \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ является идеалом (хотя бы односторонним) в Ω , и оператор $I - K$ обратим в Ω . Покажем, что тогда

$$(I - K)^{-1} = I + \Gamma, \quad \Gamma \in \tilde{B}. \quad (3.2)$$

Пусть $\tilde{B}$ является левосторонним идеалом в Ω . Обозначим $\Gamma = (I - K)^{-1}K \in \Omega$. Имеем $\Gamma = K + K\Gamma$. Из $K \in \tilde{B}$ следует $K\Gamma \in \tilde{B}$ и $\Gamma \in \tilde{B}$.

Пусть $K \in B$, $s \in [a, b]$ и оператор $K_s = Q_s(K)$ обладает резольвентой $\Gamma_s \in B_s$. Обозначим

$$\varphi(s) = \|\Gamma_s\|_B < +\infty. \quad (3.3)$$

Имеем $\varphi(a) = 0$. Если $K \in \tilde{B}$, то $\|K_s\|_B$ непрерывно зависит от s .

ЛЕММА 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

i) пусть $K_s \in B_s$ и существует резольвента $\Gamma_s \in B_s$; тогда существует такая окрестность τ_s точки s (по топологии в $[a, b] \subset [-\infty, +\infty]$), что оператор $I - K_r$ обратим при $r \in \tau$:

$$(I - K_r)^{-1} = I + \Gamma_r, \quad \Gamma_r \in B_r;$$

ii) если при этом $K \geq O$, $\Gamma_s \geq O$ и $r > s$, то $\Gamma_r \geq O$;

iii) функция $\varphi(r)$, определенная по формуле (3.3) в окрестности s , непрерывна в точке s ; если резольвента Γ_r существует при произвольном $r \in [a, s]$, то функция φ ограничена на компакте $[a, s]$; если при этом $K \geq O$, то Γ_r и $\varphi(r)$ монотонно зависят от r :

$$O \leq \Gamma_r \leq \Gamma_s, \quad 0 \leq \varphi(r) \leq \varphi(s), \quad r \leq s. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место $I - K_r = (I - K_s)(I - T_{rs})$, где $T_{rs} = (I + \Gamma_s)(K_r - K_s)$. Согласно утверждению ii) леммы 2.3 имеем $T_{rs} \in \tilde{B}_{rs}$. Согласно определению класса $\tilde{B}$ существует такая окрестность τ_s точки s , что $\|K_r - K_s\| \leq (1 + \|\Gamma_s\|)^{-1}q$, $q < 1$, при $r \in \tau_s$. Тогда $\|T_{rs}\| \leq q < 1$ и оператор $I - T_{rs}$ будет $\tilde{B}$ -обратимым. Поэтому

$$I + \Gamma_r = (I - T_{rs})^{-1}(I + \Gamma_s), \quad \Gamma_r \in \tilde{B}_r.$$

Из формулы (3.1) следует утверждение ii) леммы.

Из неравенства $\|\Gamma_r - \Gamma_s\|_B \leq (1 + \|\Gamma_s\|_B)^2 \|K_r - K_s\|_B$ вытекает, что $\|\Gamma_r - \Gamma_s\|_B \rightarrow 0$ при $r \rightarrow s$, откуда согласно $|\varphi(r) - \varphi(s)| \leq \|\Gamma_r - \Gamma_s\|$ следует непрерывность φ в точке s . Если резольвента Γ_s существует при произвольном $s \in [a, b]$, то функция φ непрерывна на компакте $[a, b]$, стало быть, она ограничена. Лемма доказана.

3.2. Зона субкритичности, критическая точка. Пусть $K \in \tilde{B}$. Обозначим через $J = J(K) \subset [a, b]$ следующее множество:

$$s \in J, \quad \text{если} \quad \forall r \in [a, s] \quad \exists (I - K_r)^{-1} = I + \Gamma_r, \quad \Gamma_r \in \tilde{B}_r. \quad (3.5)$$

Множество J не пусто. Поскольку $K_a = O$, то $\Gamma_a = O$, т.е. резольвента Γ_r существует при $r = a$, и, тем самым, согласно лемме 3.1 она существует в некоторой окрестности точки a .

Обозначим $\beta = \sup J \leq b$. Из определения множества J и леммы 3.1 следует, что если $\beta < b$, то $J = [a, \beta]$.

Нами доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. *Справедливы утверждения:*

- i) если $\beta < b$, то $J = [a, \beta]$; при $\beta = b$ возможны два случая: $J = [a, b]$ и $J = [a, b]$;
- ii) пусть $s \in J$; тогда функция $\varphi(r) = \|\Gamma_r\|_\Omega$ непрерывна на отрезке $[a, s]$ и имеют место неравенства (3.4).

В случае $J = [a, \beta]$ назовем интервал J *субкритической зоной*, а точку $\beta \leq b$ назовем *критической точкой*. В случае $J = [a, \beta]$ критическая точка отсутствует. Тогда операторы $I - K_r$ являются $\tilde{B}$ -обратимыми при произвольном $r \in [a, b]$.

Отметим, что в случае оператора с положительным ядром критическая точка играет важную роль в теории цепных ядерных реакций и в некоторых других вопросах физики.

§ 4. Вольтерровы операторы

4.1. Общие свойства. Пусть $G_r^\pm \subset G_r$ – следующие “треугольники”:

$$G_r^+ = \{(x, y) \in G_r; y \leq x\}, \quad G_r^- = \{(x, y) \in G_r; y > x\}, \quad G^\pm = G_b^\pm \subset \mathbb{R}^2.$$

Введем также “трапеции” $G_{rs}^\pm \subset G_{rs}$:

$$G_{rs}^+ = \{(x, y) \in G_{rs}; y \leq x\}, \quad G_{rs}^- = \{(x, y) \in G_{rs}; y > x\}, \quad r < s.$$

Обозначим через P^+ и P^- проекторы, действующие на операторах из B посредством умножения их ядер на характеристические функции множеств G^+ и G^- соответственно. Проекторы $P^\pm$ переводят Ω в классы $B^\pm = Q^\pm(B)$ нижних и верхних формально вольтерровых (треугольных) операторов $U^\pm$ вида (1.3).

Классы B^+ и B^- замкнуты относительно умножения и являются алгебрами, а B является их прямой суммой: $B = B^+ \oplus B^-$.

Проекторы $P^\pm$ переводят алгебру усеченных операторов B_r в ее подалгебры $B_r^\pm$. Имеем $B_r = B_r^+ \oplus B_r^-$.

Оператор $U^- \in B^-$ обладает цепочкой инвариантных подпространств $E_s = p_s(E)$, а оператор $U^+ \in B^+$ обладает цепочкой $\tilde{E}_s = (I - p_s)(E)$.

Обозначим

$$B_{rs}^\pm = B^\pm \cap B_{rs}, \quad \tilde{B}_{rs}^\pm = \tilde{B}^\pm \cap \tilde{B}_{rs}, \quad \check{B}_{rs}^\pm = \check{B}^\pm \cap \check{B}_{rs}. \quad (4.1)$$

Приведем некоторые алгебраические свойства классов B_{rs} , которые проверяются с помощью формулы композиции ядер (2.4).

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- i) классы $B_{rs}^\pm$ и $\tilde{B}_{rs}^\pm$ являются алгебрами, $B_{rs} = B_{rs}^+ \oplus B_{rs}^-$, $\tilde{B}_{rs} = \tilde{B}_{rs}^+ \oplus \tilde{B}_{rs}^-$;
- ii) пусть $W_{rs}^\pm \in B_{rs}^\pm$ и $U_{sl}^\pm \in B_{sl}^\pm$, $a \leq r < s < l \leq b$; тогда

$$W_{rs}^+ U_{sl}^+ = O, \quad U_{sl}^- W_{rs}^- = O, \quad (4.2)$$

$$W_{rs}^+ W_{rs}^- \in B_{rs}; \quad (4.3)$$

если $W_{rs}^\pm \in \tilde{B}_{rs}^\pm$, то $W_{rs}^+ W_{rs}^- \in \tilde{B}_{rs}$.

Отметим, что класс B_{rs} не замкнут относительно умножения.

Приведем следующие важные для наших целей свойства треугольных операторов.

ЛЕММА 4.2. Пусть $U_s^\pm \in B_s^\pm$ и $r \leq s$. Тогда имеют место равенства

$$P_r(U_s^+) = Q_r(U_s^+) \in B_r^+, \quad P'_r(U_s^-) = Q_r(U_s^-) \in B_r^-, \quad (4.4)$$

$$Q_r(U_s^+ U_s^-) = Q_r(U_s^+) Q_r(U_s^-) \in B_r. \quad (4.5)$$

Если $U_s^\pm \in \tilde{B}_s^\pm$, то $Q_r(U_s^\pm) \in \tilde{B}_r^\pm$, $Q_r(U_s^+ U_s^-) \in \tilde{B}_r$.

Свойства (4.4), которые мы назовем *свойствами треугольников*, имеют простой геометрический смысл. Например, первое из них означает, что аннулирование ядра $u_s^+(x, t)$ при $x > r$ влечет за собой аннулирование этого ядра при $t > r$. Свойства (4.5) следуют из (4.4) согласно (2.11).

4.2. Резольвенты вольтерровых операторов. Пусть $U^\pm \in B^\pm$. Операторы $I - U^\pm$ назовем *$B^\pm$ -обратимыми* (или просто *обратимыми*), если

$$(I - U^\pm)^{-1} = I + V^\pm, \quad V^\pm \in B^\pm. \quad (4.6)$$

Если $\|U^\pm\|_B < 1$, то операторы $I - U^\pm$ обратимы.

Из равенств (4.4) и (2.15) следует, что если $U^\pm \in \tilde{B}^\pm$, то $V^\pm \in \tilde{B}^\pm$.

Умножая равенства $V^+ = U^+ + U^+ V^+$ и $V^+ = U^+ + V^+ U^+$ слева на p_s , с учетом равенств (2.11) получаем $V_s^+ = U_s^+ + U_s^+ V_s^+$ и $V_s^+ = U_s^+ + V_s^+ U_s^+$, где $U_s^+ = Q_s(U^+)$, $V_s^+ = Q_s(V^+)$. Поэтому V_s^+ является резольвентой оператора U_s^+ . Ясно, что в качестве исходного оператора U^+ можно взять $U_l^+ = Q_l(U^+)$, $l > s$. Поэтому из B^+ -обратимости оператора $I - U_l^+$ следует обратимость $I - U_s^+$, $s < l$. Аналогично, из B^- -обратимости оператора $I - U_l^-$ следует обратимость $I - U_s^-$, $s < l$. Имеют место формулы

$$V_s^\pm = Q_s(V_l^\pm), \quad s < l. \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что если $U^\pm \in B_s^\pm$, то $V^\pm \in B_s^\pm$.

Хорошо известным примером оператора $U^+ \in B^+$, не имеющего резольвенту в B^+ , является $U^+ f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, действующий в пространствах $L_p(0, b)$, $b < +\infty$. Этот оператор обладает неподвижными векторами $\varphi(t) = \text{const}$.

Согласно (4.4) операторы $U^+ \in B^+$ и $U^- \in B^-$ являются локально q -сжимающими, если в некоторой окрестности τ_r каждой точки r соответственно выполняются неравенства

$$\|P_{sl}(U^+)\| \leq q < 1, \quad \|P'_{sl}(U^-)\| \leq q < 1, \quad l \in \tau_r. \quad (4.8)$$

Операторы из $\tilde{B}^\pm$ являются локально сжимающими с произвольным коэффициентом сжатия $q \in (0, 1)$.

ЛЕММА 4.3. *Справедливы следующие утверждения:*

i) пусть $U^+ \in B^+$, $U_{rs}^+ = p_{rs} U^+ = U_s^+ - U_r^+$, $s > r$; тогда имеет место разложение

$$I - U_{rl}^\pm = (I - U_{rs}^+)(I - U_{sl}^+), \quad r < s < l; \quad (4.9)$$

ii) пусть $\Pi[a, b]$ – конечное разбиение вида (2.13) и $\Delta_k = U_{s_k+1}^+ - U_{s_k}^+ = U_{s_k, s_k+1}^+ \in B_{s_k, s_k+1}^+$; имеет место разложение

$$I - U^+ = (I - \Delta_1) \cdots (I - \Delta_n); \quad (4.10)$$

iii) пусть оператор $U^+ \in B^+$ обладает B^+ -резольвентой V^+ ; тогда при произвольном $s \in [a, b]$ резольвентой оператора $U_s^+ = p_s U^+$ служит $V_s^+ = p_s V^+ \in B_s^+$; если $V^+ \geq O$, то $V_s^+ \geq O$;

iv) произвольный оператор $U^+ \in \tilde{B}^+$ обладает резольвентой $V^+ \in \tilde{B}^+$, причем если $U^+ \geq O$, то $V^+ \geq O$;

v) аналогичные утверждения имеют место для операторов $U^- \in B^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение (4.9) следует из равенства (4.1). Разложение (4.10) следует из (4.9). Утверждение iii) доказано выше (см. формулу (4.7)). Докажем теперь утверждение iv). Из $U^+ \in \tilde{B}^+$ следует, что оператор U^+ локально сжимающий. Согласно лемме 2.2 существует такое конечное разбиение $\Pi[a, b]$, что $\|\Delta_k\|_B < 1$, $k = 1, \dots, n$. Тогда в разложении (4.10) все сомножители будут обратимыми: $(I - \Delta_k)^{-1} = I + \rho_k$, $\rho_k \in B_{s_k, s_{k+1}}^+$. Поэтому $(I - U^+)^{-1} = I + V^+$, $V^+ = \rho_1 + \dots + \rho_n + \dots \in B^+$. Если $U^+ \geq O$, то $\Delta_k \geq O$, $\rho_k \geq O$, $V^+ \geq O$. Лемма доказана.

§ 5. Задача факторизации

5.1. Нелинейное уравнение факторизации. Рассмотрим задачу (1.2), где $K \in B$ – оператор вида (1.1), а $U^\pm \in B^\pm$ – искомые вольтерровы операторы вида (1.3). Факторизацию (1.2) назовем *канонической*, если операторы $I - U^\pm$ являются $B^\pm$ -обратимыми. Тогда $I - K$ будет B -обратимым. Легко убедиться в единственности канонической факторизации. Из п. iv) леммы 4.3 следует, что в классах $\tilde{B}$ факторизация всегда каноническая.

Приведем нелинейные уравнения факторизации (НУФ). Равенство (1.2) эквивалентно равенству

$$U^+ + U^- = K + U^+ U^-. \quad (5.1)$$

Применяя к обеим частям (5.1) проекторы $P^\pm$, приходим к НУФ в операторной форме:

$$U^+ = K^+ + P^+(U^+ U^-), \quad U^- = K^- + P^-(U^+ U^-), \quad (5.2)$$

где $K^\pm = P^\pm(K)$.

Обратно, пусть $U^\pm \in \Omega^\pm$ удовлетворяют уравнениям (5.2). Складывая эти соотношения, получаем равенство (5.1).

Итак, факторизация (1.2) эквивалентна системе уравнений (5.2) относительно $U^\pm$, называемых нелинейными уравнениями факторизации.

Запишем НУФ (5.2) в раскрытой форме, через ядра. С учетом правила композиции ядер (2.4) получаем

$$\begin{aligned} u^+(x, y) &= k(x, y) + \int_a^y u^+(x, t) u^-(t, y) \mu(dt), & x > y, \\ u^-(x, y) &= k(x, y) + \int_a^x u^+(x, t) u^-(t, y) \mu(dt), & x < y. \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2. Инвариантное погружение. Нелинейные уравнения факторизации (5.2) и (5.3) обладают рядом замечательных свойств. Следующая лемма выражает их вольтерров характер.

В уравнениях (5.3) не фигурирует верхний предел интегрирования b в явном виде. Поэтому, аналогично задаче Коши для дифференциальных уравнений

или уравнениям типа Вольтерра, можно заранее не фиксировать ту область, в которой ищется решение НУФ. Приведем строгую формулировку.

Пусть НУФ (5.2) обладает решением $(U^+, U^-) \in B^+ \times B^-$ и $s \in (a, b]$. Применяя к равенству (5.1) проектор Q , с учетом (4.5) получаем равенство $U_s^+ + U_s^- = K_s + U_s^+ U_s^-$. Это равенство эквивалентно системе (5.2), в которой оператор K заменен редуцированным оператором $K_s = Q_s(K)$:

$$U_s^\pm = K_s^\pm + P^\pm(U_s^+ U_s^-). \quad (5.4)$$

Равенство (5.4) остается в силе, если вместо исходного оператора K взять оператор K_l , $l \geq s$. Поскольку $Q_s(K_l) = K_s$ при $s \in [a, l]$, то из разрешимости системы (5.4) при некотором значении $s = l$ следует ее разрешимость при произвольном $s \in [a, l]$, причем

$$U_s^\pm = Q_s(U_l^\pm), \quad s \leq l. \quad (5.5)$$

В случае обратимости $I - U^\pm$ согласно лемме 4.3 операторы $I - U_s^\pm$ обратимы, стало быть, обратимо и их произведение $I - K_s$. Нами доказана следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

i) пусть НУФ (5.4) при некотором значении $s = l \in (a, b]$ обладает решением $(U_l^+, U_l^-) \in B_l^+ \times B_l^-$; тогда при произвольном $s \in [a, l]$ система (5.4) имеет решения $U_s^\pm = Q_s(U_l^\pm)$ и имеет место факторизация

$$I - K_s = (I - U_s^+)(I - U_s^-), \quad U_s^\pm \in B_s^\pm; \quad (5.6)$$

ii) если факторизация (5.6) каноническая при $s = l$, то она каноническая при произвольном $s \in [a, l]$ и оператор $I - K_s$ обратим; тогда операторы $Q_s(U_l^\pm)$ не зависят от l ;

iii) если $K_l \in \tilde{B}_l$, то $U_s^\pm \in \tilde{B}_s^\pm$ и факторизация (5.6) каноническая;

iv) обратимость оператора $I - K_s$ для произвольного $s \in [a, b]$ является необходимым условием существования канонической факторизации (1.2).

5.3. Локальная разрешимость НУФ. Пусть $K \in B$. Рассмотрим семейство задач факторизации (5.6), где $K_s = Q_s(K)$, а (U_s^+, U_s^-) ищутся в $B_s^+ \times B_s^-$. Пространство $B^+ \times B^-$ и его подпространства $B_{rs}^+ \times B_{rs}^-$ мы будем снабжать нормой $\|(U^+, U^-)\| = \max(\|U^+\|_B, \|U^-\|_B)$.

Пусть $T \in B$, $T^\pm = Q^\pm(T) (\in B^\pm)$. Рассмотрим вспомогательное уравнение $W^\pm = T^\pm + P^\pm(W^+ W^-)$, или уравнение в операторной форме

$$(W^+, W^-) = H(W^+, W^-). \quad (5.7)$$

Оператор H определяется посредством $(F^+, F^-) = H(W^+, W^-)$, где

$$F^\pm = T^\pm + P^\pm(W^+ W^-). \quad (5.8)$$

Пусть $T \in B_{rs}$. Из (4.3) следует, что оператор H действует в пространстве $B_{rs}^+ \times B_{rs}^-$. Решение уравнения (5.7) будем искать в этом пространстве.

Обозначим через $\sigma_\rho \subset B_{rs}^+ \times B_{rs}^-$ замкнутый шар с радиусом ρ и центром в нуле.

ЛЕММА 5.2. Пусть $T \in B_{rs}$, $\mu := \|(T^+, T^-)\| < \frac{1}{4}$ и $\rho = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\mu})$. Тогда:

i) H является сжимающим оператором в σ_ρ с коэффициентом сжатия $2\rho < 1$, система (5.7) имеет единственное решение (W^+, W^-) в σ_ρ , причем

$$\|W^\pm\| < \frac{1}{2}, \quad (I - W^\pm)^{-1} = I + Z^\pm, \quad Z^\pm \in B_{rs}^\pm; \quad (5.9)$$

ii) если $T^\pm \geq O$, то $W^\pm \geq O$, $Z^\pm \geq O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.8) с учетом неравенств вида $\|P^\pm(A)\|_B \leq \|A\|_B$ (см. (2.7)) получаем $\|F^\pm\| \leq \mu + \|W^+\| \|W^-\|$. Поэтому $\|(F^+, F^-)\| \leq \mu + \|(W^+, W^-)\|$, откуда следует, что оператор H переводит шар σ_ρ в себя. Покажем, что оператор H сжимающий. Пусть $(\tilde{F}^+, \tilde{F}^-) = H(\tilde{W}^+, \tilde{W}^-)$, где $(\tilde{W}^+, \tilde{W}^-) \in \sigma_\rho$. Обозначим $\delta^\pm = \tilde{W}^\pm - W^\pm$, $\varepsilon^\pm = \tilde{F}^\pm - F^\pm$. Из (4.3) и из соответствующих соотношений для $\tilde{W}^\pm$ получаем $\varepsilon^\pm = P^\pm(\tilde{W}^+ \delta^- + \delta^+ W^-)$. Следовательно, $\|(\varepsilon^+, \varepsilon^-)\| \leq q\|(\delta^+, \delta^-)\|$.

Итак, в условиях леммы оператор H является сжимающим в σ_ρ и (5.7) имеет единственное решение (W^+, W^-) в σ_ρ . Это решение является пределом следующих простых итераций:

$$(W_{n+1}^+, W_{n+1}^-) = H(W_n^+, W_n^-), \quad W_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.10)$$

Если $T^\pm \geq O$, то последовательности $W_n^\pm \geq O$ и их пределы $W^\pm$ также положительны. Лемма доказана.

5.4. Построение решения НУФ в случае $K \in \tilde{B}$. Ниже будет изложен способ построения факторизации на основе леммы 5.2. Эта процедура будет разбита на следующие три этапа: построение базисного решения, продолжение решения и замыкание продолжения решения.

Обозначим через $\tilde{J} = \tilde{J}(K) \subset [a, b]$ следующее множество: $r \in \tilde{J}$, если при $s = r$ существует факторизация (5.6), где $(U_r^+, U_r^-) \in \tilde{B}_r^+ \times \tilde{B}_r^-$, причем если $K \geq O$, то $U_r^\pm \geq O$. Согласно лемме 5.1 при $r \in \tilde{J}$ существует факторизация (5.6) для любого $s \in [a, r]$, причем если $K \geq O$, то $U_s^\pm \geq O$.

Обозначим $\tilde{\beta} = \sup \tilde{J} \leq b$. Опишем множество $\tilde{J}$. Пусть $K \in \tilde{B}$. Тогда можно выбрать число $r > a$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\|K_{ar}\| < \frac{1}{4}$. Рассмотрим уравнение (5.7), где $T = K_r (= K_{ar})$. Согласно лемме 5.2 это уравнение имеет решение $(U_r^+, U_r^-) \in \tilde{B}_r^+ \times \tilde{B}_r^-$ и имеет место факторизация $I - K_r = (I - U_r^+)(I - U_r^-)$, причем $(I - U_r^\pm)^{-1} = I + V_r^\pm$, $V_r^\pm \in B_r^\pm$.

Продолжим это решение. Пусть $r \in \tilde{J}$. Покажем, что тогда факторизация существует при значениях $s > r$, достаточно близких к r . При $s \in (r, b]$ имеем

$$I - K_s = I - K_r - (K_s - K_r) = (I - U_r^+)(I - U_r^-) - K_{rs},$$

откуда получаем

$$I - K_r = (I - U_r^+)(I - T_{rs})(I - U_r^-), \quad (5.11)$$

где

$$T_{rs} = (I + V_r^+)K_{rs}(I + V_r^-), \quad \mu = \|T_{rs}\| \leq (1 + \|V_r^+\|)(1 + \|V_r^-\|)\|K_{rs}\|. \quad (5.12)$$

В силу $K \in \tilde{B}$ можно выбрать $s > r$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\mu < \frac{1}{4}$. Тогда согласно лемме 5.2 оператор $I - T_{rs}$ допускает факторизацию:

$$I - T_{rs} = (I - U_{rs}^+)(I - U_{rs}^-), \quad (5.13)$$

где $U_{rs}^\pm \in B_{rs}^\pm$, $(I - U_{rs}^\pm)^{-1} = I + V_{rs}^\pm$, $V_{rs}^\pm \in B_{rs}^\pm$.

Из (5.11) и (5.13) получаем $I - K_s = (I - U_r^+)(I - U_{rs}^+)(I - U_{rs}^-)(I - U_r^-)$. Учитывая (4.2), приходим к (5.6), где $U_s^+ = U_r^+ + U_{rs}^+$, $U_s^- = U_r^- + U_{rs}^-$. Если $K \geq O$, то $U_s^\pm \geq O$, $V_s^\pm \geq O$.

Поскольку построенные операторы $U_s^\pm$ дают факторизацию (5.6), то они являются решениями НУФ (5.4).

Нами доказана следующая лемма.

ЛЕММА 5.3. Пусть $K \in \tilde{B}$. Если $\tilde{\beta} = \sup \tilde{J} < b$, то $\tilde{\beta} \notin \tilde{J}$ и $\tilde{J} = [a, \tilde{\beta})$. Если $\tilde{\beta} = b$, то возможны два случая: $\tilde{J} = [a, b)$ и $\tilde{J} = [a, b]$.

5.5. Замыкание продолжения. При $r \in \tilde{J}$ имеем $(I - U_r^\pm)^{-1} = I + V_r^\pm$, $V_r^\pm \in B_r^\pm$.

ЛЕММА 5.4. Справедливы утверждения:

i) если $[a, s) \subset \tilde{J}$ и операторы $V_r^\pm$, $r \in [a, s)$, равномерно по r ограничены по норме:

$$\|V_r^\pm\|_B \leq \alpha^\pm, \quad (5.14)$$

то $s \in \tilde{J}$, т. е. существует факторизация (5.6);

ii) если $K \geq O$, то $U_s^\pm \geq O$, $V_s^\pm \geq O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением (5.11). Из соотношений (5.12) и (5.14) получаем

$$\mu = \|T_{rs}\| \leq (1 + \alpha^+)(1 + \alpha^-)\|K_{rs}\|.$$

В силу $K \in \tilde{B}$ можно выбрать $r < s$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\mu < \frac{1}{4}$. Тогда согласно лемме 5.2 оператор $I - T_{rs}$ допускает факторизацию (5.13), откуда следует факторизация (5.6). Поскольку утверждение ii) очевидно, лемма доказана.

В следующем параграфе будут рассмотрены два случая, в которых удается получить равномерные оценки вида (5.14).

§ 6. Факторизационные теоремы

6.1. Случай положительного ядра. Пусть $K \in \tilde{B}$, $K \geq O$ и $l \in J$ (см. п. 3.2), т. е. существует обратный оператор

$$(I - K_r)^{-1} = I + \Gamma_r, \quad \Gamma_r \in \tilde{B}_r \quad \forall r \in [a, l], \quad \Gamma_r \geq O.$$

Покажем, что тогда существует факторизация (5.6). Предположим противное. Из леммы 5.3 следует, что $\tilde{\beta} = \sup \tilde{J} \notin \tilde{J}$, $\tilde{\beta} \leq l$. При $r < \tilde{\beta}$ имеем $I + \Gamma_r = (I + V_r^-)(I + V_r^+)$, $V_r^\pm \geq O$, т. е. $V_r^+ + V_r^- + V_r^- V_r^+ = \Gamma_r$, $V_r^\pm \geq O$. Отсюда и из (3.4) следуют неравенства $O \leq V_r^\pm \leq \Gamma_l^\pm := P^\pm(\Gamma_l)$. Поэтому имеют место неравенства (5.14), где $\alpha^\pm = \|\Gamma_l^\pm\|_B$. Согласно лемме 5.4 имеет место факторизация (5.6) при $s = l$. Полученное противоречие показывает, что факторизация (5.6) существует для произвольного $s \in [a, l]$.

С учетом утверждения iv) леммы 5.1 и формулы (3.2) мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- i) пусть $K \in \tilde{B}$ имеет положительное ядро; для существования факторизации (5.6), где $U_s^\pm \in \tilde{B}_s^\pm$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - K_r$ был $\tilde{B}$ -обратим для произвольного $r \in [a, s]$;
- ii) если при этом $\tilde{B}$ является (хотя бы односторонним) идеалом в алгебре Ω линейных ограниченных операторов, действующих в E , то для существования факторизации (5.6) с $U_s^\pm \in \tilde{B}_s^\pm$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $r \in (a, s]$ уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_a^r k(x, t)f(t)\mu(dt), \quad x \in (a, r), \quad (6.1)$$

было однозначно разрешимо в пространстве E_r для любого $g \in E_r$.

Заметим, что в случае $s = b$ теорема 6.1 дает необходимое и достаточное условие существования факторизации (1.2) в случае положительного ядра.

6.2. Уравнения типа Гельфанда–Левитана. В случае интегральных операторов Гильберта–Шмидта связь между обратимостью операторов $I - K_r$ и существованием канонической факторизации (1.2) удастся установить путем сочетания леммы 5.4 с возможностями уравнения типа Гельфанда–Левитана. В [1] изложен простой вывод этих уравнений в случае интегрального оператора Гильберта–Шмидта вида (1.5).

Пусть $K \in B$ и имеет место каноническая факторизация (5.6). Методом, использованным в [1], покажем, что ядра $\nu^\pm = \nu_s^\pm$ вольтерровых операторов $V_s^\pm$ (определяемых согласно (3.1)) удовлетворяют следующим линейным уравнениям типа Гельфанда–Левитана:

$$\begin{aligned} \nu^+(x, y) &= k(x, y) + \int_a^x \nu^+(x, t)k(t, y)\mu(dt), & a < y < x < s, \\ \nu^-(x, y) &= k(x, y) + \int_a^y k(x, t)\nu^-(t, y)\mu(dt), & a < x < y < s. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Зависимость функций $\nu^\pm$ от s выражается только зависимостью от s областей определения этих функций.

Из (1.2) и (3.1) имеем $V_s^+ = K_s + U_s^+ + V_s^+K_s$. Применяя к этому равенству проектор P^+ , с учетом $P^+(U_s^-) = 0$ получаем уравнение $V_s^+ = K_s^+ + P^+(V_s^+K_s)$. Аналогичным образом получается уравнение $V_s^- = K_s^- + P^-(K_sV_s^-)$. Здесь, как и раньше, $K_s^\pm = P^\pm(K_s)$, $K_s = Q_s(K)$. Перейдя в этих уравнениях к ядрам, приходим к уравнениям (6.2).

Отметим то обстоятельство, что уравнения (6.2) выведены при условии существования факторизации (1.2), что не гарантирует их эквивалентность задаче (1.2). Сказанное в равной степени относится к классическим уравнениям Гельфанда–Левитана.

Пусть существует резольвента G_r оператора K_r для произвольного $r \leq s$. Обозначим через $\gamma(x, t, r)$ резольвентное ядро. Решая через резольвенты уравнения (6.4) и (6.5) при фиксированных x и y соответственно, получаем следующие формулы для $\nu^\pm = \nu_s^\pm$:

$$\begin{aligned} \nu^+(x, y) &= \nu_s^+(x, y) = k(x, y) + \int_a^x k(x, t)\gamma(t, y, x)\mu(dt), & a < y < x < s, \\ \nu^-(x, y) &= \nu_s^-(x, y) = k(x, y) + \int_a^y \gamma(x, t, y)k(t, y)\mu(dt), & a < x < y < s. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Сложность оценивания норм функций $\nu_s^\pm$ с помощью формул (6.3) связана с тем, что под интегралами оба аргумента ядра k являются также аргументами резольвенты γ .

6.3. Случай оператора Гильберта–Шмидта. Рассмотрим теперь тот случай, когда исходным пространством E служит $L_2(\mu)$, а пространством B служит класс $H_2(\mu)$ интегральных операторов Гильберта–Шмидта с нормой (2.6). Для этого класса, очевидно, выполняются условия (2.16). Поэтому в данном случае пространства B , $\tilde{B}$, $\check{B}$ совпадают.

Обозначим через μ_s следующую меру: $\mu_s(dx) = \kappa_s \mu(dx)$, где, как и раньше, κ_s – характеристическая функция интервала (a, s) .

В рассматриваемом случае исходного пространства $E = L_2(\mu)$ пространством E_s служит $L_2(\mu_s)$.

Предположим, что при некотором $r \in (a, b]$ уравнение (6.1) разрешимо в пространстве $L_2(\mu_r)$ для любого $g \in L_2(\mu_r)$, т.е. существует оператор $(I - K_r)^{-1} = I + \Gamma_r \in \Omega$. Поскольку $H_2(\mu)$ является (двусторонним) идеалом в Ω , то $\Gamma_s K_r \in \tilde{B}_r$, поэтому $\Gamma_r = K_r + \Gamma_r K_r \in \tilde{B}_r$, т.е.

$$(I - K_r)^{-1} = I + \Gamma_r, \quad \Gamma_r \in H_2(\mu_r). \quad (6.4)$$

Пусть оператор $I - K_r$ обратим для произвольного $r \leq s$. Тогда согласно утверждению iii) леммы 3.1 имеет место равномерная по r оценка

$$\varphi^2(r) = \|\Gamma_r\|_B^2 = \iint \gamma^2(x, t, r) \mu_r(dx) \mu_r(dt) \leq c_s^2 < +\infty \quad \forall r \leq s, \quad c_s > 0. \quad (6.5)$$

Ниже с помощью формул (6.3) будут получены оценки для норм ядер $\nu_r^\pm$ операторов $V_r^\pm$.

ЛЕММА 6.1. Пусть оператор $I - K_r$ обладает обратным для произвольного $r \leq s$ и факторизация (5.6) существует при $r < s$. Тогда имеют место следующие равномерные по r оценки:

$$\|\nu_r^\pm\|_B \leq \|k\|_B(1 + c_s), \quad c_s > 0. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left| \int_a^x k(x, t) \gamma(t, y, x) \mu(dt) \right|^2 \leq \int_a^x k^2(x, t) \mu(dt) \int_a^x \gamma^2(t, y, x) \mu(dt).$$

Интегрируя это неравенство по мере $\mu(dy)$ от a до x , с учетом неравенства (6.5) получаем

$$\int_a^x \left| \int_a^x k(x, t) \gamma(t, y, x) \mu(dt) \right|^2 \mu(dy) \leq c_s^2 \int_a^x k^2(x, t) \mu(dt), \quad x \leq s,$$

откуда имеем

$$\int_a^r \mu(dt) \int_a^x \left| \int_a^x k(x, t) \gamma(t, y, x) \mu(dt) \right|^2 \mu(dy) \leq c_s^2 \|K_r\|_B^2 \leq c_s^2 \|K_s\|_B^2, \quad r < s. \quad (6.7)$$

Из формул (6.3) и (6.7) следует первая оценка из (6.6). Вторая оценка из формулы (6.6) получается аналогичным образом. Лемма доказана.

Из лемм 5.4, 6.1 и утверждения iv) леммы 5.1 следует

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $K \in H_2(\mu)$ – интегральный оператор Гильберта–Шмидта вида (1.1), где μ – мера, непрерывная относительно меры Лебега. Для существования факторизации (1.4), где $V^\pm$ – вольтерровы операторы из $H_2(\mu)$ вида (1.3), необходимо и достаточно, чтобы при любом $r \in (a, b]$ уравнение (6.1) было разрешимо в пространстве $L_2(\mu_r)$ для любого $g \in L_2(\mu_r)$.

Список литературы

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space*, Transl. Math. Monogr., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.
2. Н. Б. Енгибарян, “Нестационарная диффузия излучения”, *Астрофизика*, **2**:2 (1966), 197–204.
3. Н. Н. Kagiwada, R. E. Kalaba, A. Schumitzky, “An initial-value method for Fredholm integral equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **19**:1 (1967), 197–203.
4. Н. Б. Енгибарян, “О факторизации симметрических интегральных операторов”, *Докл. АН СССР*, **203**:1 (1972), 19–21; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “On the factorization of symmetric integral operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **13**:1 (1972), 322–325.
5. Н. Б. Енгибарян, “О нелинейных уравнениях факторизации операторов”, *Применение методов теории функций и функц. анализа к задачам мат. физики*, Изд-во ЕрГУ, Ереван, 1982, 123–128.
6. Н. Б. Енгибарян, “Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов”, *Докл. АН СССР*, **230**:5 (1976), 1021–1024; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “Some factorization theorems for integral operators”, *Soviet Math. Dokl.*, **17**:5 (1976), 1418–1422.
7. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244; англ. пер.: L. G. Arabadzhyan, N. B. Engibaryan, “Convolution equations and nonlinear functional equations”, *J. Math. Sci.*, **36**:6 (1987), 745–791.
8. Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 61–76; англ. пер.: N. B. Engibaryan, “Setting and solving several factorization problems for integral operators”, *Sb. Math.*, **191**:12 (2000), 1809–1825.
9. N. B. Yengibaryan, “Factorization of Markov chains”, *J. Theoret. Probab.*, **17**:2 (2004), 459–481.
10. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustynnik, P. E. Sobolevskij, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.

Н. Б. ЕНГИБАРЯН (N. B. YENGIBARYAN)
Институт математики НАН Армении
E-mail: yengib@instmath.sci.am

Поступило в редакцию
02.08.2007