Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Логканонические пороги трехмерных гиперповерхностей Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 4, 77–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:34:58

УДК 512.7

И. А. Чельцов

Логканонические пороги трехмерных гиперповерхностей Фано

Изучаются глобальные логканонические пороги общих гиперповерхностей в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющих терминальные особенности.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: многообразие Фано, логканонический порог, альфа-инвариант Тиана, метрика Кэлера–Эйнштейна.

§ 1. Введение

Пусть X – многообразие Фано¹, имеющее не более чем логтерминальные особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Глобальный логканонический порог* многообразия X есть число

$$\mathrm{lct}(X) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \begin{array}{l} \text{логпара } (X, \lambda D) \text{ имеет логканонические особенности} \\ \text{для каждого эффективного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \equiv -K_X \end{array} \right\} \geq 0.$$

Число $\mathrm{lct}(X)$ играет важную роль в кэлеровой геометрии.

ПРИМЕР 1.2. Если X имеет не более чем факторособенности и выполнено неравенство

$$\mathrm{lct}(X) > \frac{\dim(X)}{\dim(X) + 1},$$

то многообразие X обладает орбифолдной метрикой Кэлера–Эйнштейна [1].

Предположим теперь дополнительно, что X является многообразием Фано, которое имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности, и $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Многообразие Фано X *бirationально сверхжестко*, если для каждой линейной системы M на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, особенности логпары $(X, \lambda M)$ канонические, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda M \equiv 0$.

Пусть $X_1, \dots, X_r$ – многообразия Фано, имеющие $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_i) = 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. В работе [2] доказан следующий результат.

¹Рассматриваемые многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Предположим, что многообразие X_i является бирационально сверхжестким и выполнено неравенство $\text{lct}(X_i) \geq 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r),$$

а для каждого рационального доминантного отображения $\rho: X_1 \times \dots \times X_r \dashrightarrow Y$, общий слой которого является рационально связным многообразием, существуют некоторое подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_r & & \\ \pi \downarrow & \dashrightarrow \rho & \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} & \dashrightarrow \xi & \cong Y \end{array}$$

где ξ – некоторое бирациональное отображение, а π – естественная проекция.

ПРИМЕР 1.5. Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$, имеющая степень $2n \geq 6$. Тогда X является бирационально сверхжестким и выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1$ (см. [2]).

Покажем, как обобщить утверждение теоремы 1.4 на случай многообразий Фано, имеющих небирегулярные бирациональные автоморфизмы (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Многообразие X называется *бirationально жестким*, если для каждой непустой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует бирациональный автоморфизм $\xi \in \text{Bir}(X)$ такой, что логпара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ имеет канонические особенности, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из бирациональной жесткости многообразия X следуют утверждения:

- 1) не существует рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что общий слой отображения ρ рационально связан, и выполнено неравенство $\dim(Y) \geq 1$;
- 2) не существует бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что $Y \not\cong X$, многообразие Y имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и $\text{rk Pic}(Y) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Подмножество $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$ *откручивает* все максимальные особенности на многообразии X , если для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует элемент $\xi \in \Gamma$ такой, что логпара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ имеет канонические особенности, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из существования подмножества $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$, которое откручивает все максимальные особенности, следует, что $\text{Bir}(X)$ порождена Γ и бирегулярными автоморфизмами (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Многообразие X называется *универсально бирационально жестким*, если для любого конечно порожденного расширения полей $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{K}$ многообразие $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{K})$ является бирационально жестким над полем $\mathbb{K}$.

Отметим, что определение 1.6 очевидным образом обобщается для многообразий Фано, определенных над произвольным совершенным полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Подмножество $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если для любого конечно порожденного расширения полей $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{K}$ индуцированная подгруппа

$$\Gamma \subset \text{Bir}(X) \subseteq \text{Bir}(X \otimes \text{Spec}(\mathbb{K}))$$

откручивает все максимальные особенности на многообразии $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{K})$.

Из определений 1.3 и 1.9 следует, что любое непустое подмножество в $\text{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если X бирационально сверхжестко.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Как отметил Я. Коллар, при $\dim(X) \geq 2$ вся группа $\text{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если и только если группа $\text{Bir}(X)$ счетна.

Пусть $X_1, \dots, X_r$ — многообразия Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такие, что $\text{rk Pic}(X_i) = 1$ при всех $i = 1, \dots, r$. Рассмотрим проекцию

$$\pi_i: X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_r \longrightarrow X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r$$

и обозначим через $\sqcup_i$ общий слой проекции π_i в схемном смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Многообразие $\sqcup_i$ является многообразием Фано, которое определено над полем всех рациональных функций многообразия $X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r$.

Имеются естественные вложения групп

$$\prod_{i=1}^r \text{Bir}(X_i) \subseteq \langle \text{Bir}(\sqcup_1), \dots, \text{Bir}(\sqcup_r) \rangle \subseteq \text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r),$$

а из доказательства теоремы 1.4 вытекает следующий результат (см. [3]).

ТЕОРЕМА 1.12. Предположим, что многообразия $X_1, \dots, X_r$ являются универсально бирационально жесткими и выполнено неравенство $\text{lct}(X_i) \geq 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \langle \text{Bir}(\sqcup_1), \dots, \text{Bir}(\sqcup_r), \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \rangle,$$

многообразие $X_1 \times \dots \times X_r$ нерационально и для любого отображения $\rho: X_1 \times \dots \times X_r \dashrightarrow Y$, общий слой которого является рационально связным многообразием, существуют подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_r & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & X_1 \times \dots \times X_r \\ \pi \downarrow & & \searrow \rho \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & Y \end{array}$$

где π – естественная проекция, а ξ и σ – некоторые бирациональные отображения.

СЛЕДСТВИЕ 1.13. *Предположим, что существует подгруппа $\Gamma_i \subseteq \text{Bir}(X_i)$, универсально откручивающая все максимальные особенности, и $\text{lct}(X_i) \geq 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \left\langle \prod_{i=1}^r \Gamma_i, \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \right\rangle.$$

Пусть X – общая квазигладкая хорошо сформированная гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющая терминальные особенности, где $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Тогда X – многообразие Фано, которое принято называть *многообразием Рида–Флетчера* в силу исторических причин.

В работе [5] был явно найден конечный набор $\tau_1, \dots, \tau_k$ бирациональных инволюций гиперповерхности X и доказан следующий важный и сложный результат.

ТЕОРЕМА 1.14. *Многообразие X бирационально жестко, последовательность групп*

$$1 \longrightarrow \langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle \longrightarrow \text{Bir}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow 1$$

точна, а группа $\langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ универсально откручивает максимальные особенности.

Четверка (a_1, a_2, a_3, a_4) принимает 95 значений. Обозначим через $\mathfrak{J} \in \{1, \dots, 95\}$ номер этой четверки при стандартной нумерации (см. [5]). Мы докажем следующий результат².

ТЕОРЕМА 1.15. *Пусть $\mathfrak{J} \notin \{1, 2, 4, 5\}$. Тогда $\text{lct}(X) = 1$.*

Во многих случаях можно показать, что группа $\text{Aut}(X)$ либо тривиальна (см. лемму 8.3), либо изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$ (см. следствие 8.2). Соотношения между инволюциями $\tau_1, \dots, \tau_k$ также известны (см. [6]). Таким образом, можно получать явные применения теоремы 1.12.

ПРИМЕР 1.16. Пусть $\mathfrak{J} = 41$. Применяя теоремы 1.12 и 1.14, можно показать (см. далее следствие 8.2), что существует точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \prod_{i=1}^m (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \text{Bir}(\underbrace{X \times \dots \times X}_m) \longrightarrow S_m \longrightarrow 1$$

по теореме 1.15. Пусть V – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n \geq 6$. Тогда

$$\text{Bir}(X \times V) \cong (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2$$

вновь по теоремам 1.12, 1.14 и 1.15 (см. пример 1.5 и [7]).

²Сокращенное доказательство теоремы 1.15 дано в работе [3].

В работе [8] показано, что $\text{lct}(X) \geq 16/21$ при $\mathfrak{J} = 1$. Мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.17. Пусть $\mathfrak{J} = 2$. Тогда $\text{lct}(X) \geq 7/9$.

СЛЕДСТВИЕ 1.18. Пусть $\mathfrak{J} \neq 4$ и $\mathfrak{J} \neq 5$. Тогда X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна.

Для удобства читателя мы организуем данную работу следующим образом:

- 1) докажем теорему 1.15 в § 2, опуская доказательства лемм 2.4, 2.10, 2.11;
- 2) докажем утверждения лемм 2.4, 2.10, 2.11 в § 3, 5, 6 соответственно;
- 3) явно опишем структуру группы $\text{Bir}(X)$ при $\mathfrak{J} = 9$ и $\mathfrak{J} = 41$ в § 8;
- 4) рассмотрим еще один подход к доказательству теоремы 1.15 в § 9.

§ 2. Логканонические пороги

Рассмотрим общую квазигладкую хорошо сформированную гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)$ степени $d = \sum_{i=1}^4 a_i$, имеющую терминальные особенности, где $a_1 \leq \dots \leq a_4$. Обозначим через $\mathfrak{J} \in \{1, \dots, 95\}$ порядковый номер четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) , как в работе [5]. Тогда $-K_X^3 \leq 1 \iff \mathfrak{J} \geq 6$.

Предположим, что $\mathfrak{J} \notin \{1, 2, 4, 5\}$. Пусть D – дивизор в $|-nK_X|$, где $n \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из доказательства теоремы 1.15 следует, что логпара $(X, \frac{1}{n}D)$ не является логтерминальной, если и только если $n = 1$. Однако в дальнейшем нам это не потребуется.

Предположим, что логпара $(X, \frac{1}{n}D)$ не логканонична. Для доказательства утверждения теоремы 1.15 достаточно показать, что сделанное предположение приводит к противоречию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть B и B' – эффективные $\mathbb{Q}$ -дивизоры на многообразии V с $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями такие, что (V, B) логканонична, а (V, B') не логканонична. Тогда логпара $(V, \frac{1}{1-\alpha}(B' - \alpha B))$ не логканонична при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ таких, что $0 \leq \alpha < 1$, а дивизор $B' - \alpha B$ эффективен.

Можно считать, что поверхность D неприводима. Из [2] следует, что $\mathfrak{J} \neq 3$.

ЛЕММА 2.3. Выполнено неравенство $n \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 1$. Тогда логпара (X, D) логканонична в каждой особой точке гиперповерхности X согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14]. Имеем $a_1 = 1$.

Предположим, что особенности логпары (X, D) не являются логканоническими в некоторой неособой точке P гиперповерхности X . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Мы рассмотрим случай $\mathfrak{J} = 14$. Оставшиеся случаи аналогичны.

Предположим, что $\mathfrak{J} = 14$. Существует двулистное накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 4)$, разветвленное над гиперповерхностью $F \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 4)$ степени 12, которая достаточно общая.

Положим $\overline{D} = \pi(D)$ и $\overline{P} = \pi(P)$. Из подсчета параметров следует неравенство

$$\text{mult}_{\overline{P}}(F|_{\overline{D}}) \leq 2,$$

что является противоречием, поскольку особенности логпары $(\overline{D}, \frac{1}{2}F|_{\overline{D}})$ не являются логканоническими в точке $\overline{P}$ в силу [9, лемма 8.12]. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Логпара $(X, \frac{1}{n}D)$ логканонична вне особых точек гиперповерхности X .*

Эта лемма будет доказана в § 3.

Существует особая точка O гиперповерхности X такая, что логпара $(X, \frac{1}{n}D)$ не является логканоничной в точке O . Тогда O – особая точка типа $\frac{1}{r}(1, a, r-a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $r > 2a$.

Пусть $\alpha: U \rightarrow X$ – раздутие точки O с весами $(1, a, r-a)$. Тогда

$$-K_U^3 = -K_X^3 - \frac{1}{r^3}E^3 = -K_X^3 - \frac{1}{ra(r-a)} = \frac{d}{a_1 a_2 a_3 a_4} - \frac{1}{ra(r-a)}, \quad (2.1)$$

где E – α -исключительный дивизор. Существует рациональное число μ такое, что

$$\overline{D} \equiv \alpha^*(D) + \mu E \equiv -nK_U + \left(\frac{n}{r} - \mu\right)E,$$

где $\overline{D}$ – собственный прообраз D на многообразии U . Из работы [10] следует, что $\mu > n/r$.

ЛЕММА 2.5. *Выполнено неравенство $-K_U^3 \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $-K_U^3 < 0$. Пусть C – любая кривая, содержащаяся в поверхности E . Согласно [5, следствие 5.4.6] существует неприводимая и приведенная кривая $\Gamma \subset U$ такая, что Γ порождает экстремальный луч конуса $\text{NE}(U)$, который отличен от луча $\mathbb{R}_{\geq 0}C$, но выполнена численная эквивалентность

$$\Gamma \equiv -K_U \cdot (-bK_U + cE),$$

где $b > 0$ и $c \geq 0$ – некоторые целые числа.

Пусть T – дивизор в $|-K_U|$. Тогда $\pi(T)$ – дивизор в $|-K_X|$ и

$$D \cdot T \equiv -K_U \cdot \left(-nK_U + \left(\frac{n}{r} - \mu\right)E\right) \notin \text{NE}(U),$$

потому что $\mu > n/r$, $b > 0$ и $c \geq 0$. Однако цикл $D \cdot T$ эффективен, поскольку $n \neq 1$. Лемма доказана.

Принимая во внимание значения четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) , получаем $\mathbf{J} \notin \{75, 84, 87, 93\}$.

ЛЕММА 2.6. *Выполнено неравенство $-K_U^3 \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $-K_U^3 = 0$ и $\mathfrak{J} \neq 82$. Тогда $|-rK_U|$ не имеет базисных точек при $r \gg 0$ и индуцирует морфизм $\eta: U \rightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \eta \\ X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}(1, a_1, a_2) \end{array}$$

коммутативна, где ψ – проекция, морфизм η – эллиптическое расслоение. Тогда

$$\bar{D} \cdot C = -nK_U \cdot C + \left(\frac{n}{r} - \mu\right) E \cdot C = \left(\frac{n}{r} - \mu\right) E \cdot C < 0,$$

где C – общий слой расслоения η . Противоречие.

Предположим, что $-K_U^3 = 0$ и $\mathfrak{J} = 82$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 12, 18)$ степени 36, особенности которой состоят из точек P и Q типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ и $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$ соответственно.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$z^7 y + \sum_{i=0}^6 z^i f_{36-5i}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 5, 12, 18) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 5$, $\text{wt}(t) = 12$, $\text{wt}(w) = 18$ и f_i – квазиоднородный многочлен степени i . Точка P задана уравнением $x = z = t = w = 0$.

Предположим, что $O = Q$. Тогда $|-rK_U|$ не имеет базисных точек при $r \gg 0$, откуда следует противоречие, как и в случае $\mathfrak{J} \neq 82$. Итак, мы видим, что $O = P$.

Пусть $\bar{S}$ – собственный прообраз на многообразии U поверхности, которая высекается на гиперповерхности X уравнением $y = 0$. Тогда

$$\bar{S} \equiv \alpha^*(-K_X) - \frac{6}{5}E,$$

а базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из неприводимых кривых L и C таких, что кривая L содержится в α -исключительном дивизоре E , а кривая $\pi(C)$ является единственной базисной кривой пучка $|-K_X|$. Тогда $-K_U \cdot C = -1/6$ и $-K_U \cdot L > 0$.

Выполнено неравенство $\mu \leq n/5$, поскольку

$$\frac{n}{5} - \mu = (-K_U + \alpha^*(-5K_X)) \cdot \bar{S} \cdot \bar{D} \geq 0,$$

потому что $\bar{D} \neq \bar{S}$ согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14]. Противоречие.

Итак, учитывая возможные значения четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) , мы видим, что

$$\mathfrak{J} \notin \{11, 14, 19, 22, 28, 34, 37, 39, 49, 52, 53, 57, 59, 64, \\ 66, 70, 72, 73, 78, 80, 81, 86, 88, 89, 90, 92, 94, 95\}.$$

ЛЕММА 2.7. *Группы $\text{Bir}(X)$ и $\text{Aut}(X)$ не совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$. Пусть $\bar{S}$ – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_U|$. Согласно [5, лемма 5.4.5] существует неприводимая поверхность $\bar{T} \subset U$ такая, что:

- 1) выполнена эквивалентность $\bar{T} \sim c\bar{S} - bE$, где $c \geq 1$ и $b \geq 1$ – натуральные числа;
- 2) пересечение $\bar{T} \cdot \bar{S}$ является неприводимой и приведенной кривой Γ ;
- 3) кривая Γ порождает экстремальный луч конуса $\text{NE}(U)$.

Поверхность $\bar{T}$ очень легко построить явно (см. [5]), значения чисел c и b содержатся в работе [5]. Поверхность $\bar{T}$ определяется единственным образом по точке O .

Положим $T = \alpha(\bar{T})$. Как следует из [9, лемма 8.12, предложение 8.14], особенности логпары $(X, \frac{1}{c}T)$ являются логканоническими, откуда вытекает, что $D \neq T$.

Пусть $\mathcal{P}$ – пучок, порожденный эффективными дивизорами nT и cD . Тогда особенности логпары $(X, \frac{1}{cn}\mathcal{P})$ не являются каноническими, что невозможно по теореме 1.14.

Из работы [5] следует, что

$$\mathfrak{I} \notin \{11, 21, 29, 35, 50, 51, 55, 62, 63, 67, 71, 77, 82, 83, 85, 91\}.$$

ЛЕММА 2.8. *Дивизор $-K_U$ численно эффективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что антиканонический дивизор $-K_U$ не является численно эффективным. Из работы [5] следует, что $\mathfrak{I} = 47$, а O – особая точка типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$z^4 y + \sum_{i=0}^3 z^i f_{21-5i}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 8) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 5$, $\text{wt}(t) = 7$, $\text{wt}(w) = 8$ и f_i – общий квази-однородный многочлен степени i . Пусть S – поверхность, которая высекается уравнением $y = 0$ на гиперповерхности X , а $\bar{S}$ – собственный прообраз поверхности S на многообразии U . Тогда

$$\bar{S} \equiv \alpha^*(-K_X) - \frac{6}{5}E,$$

но дивизор $-3K_U + \alpha^*(-5K_X)$ численно эффективен (см. [11]). Тогда $\mu \leq n/5$, поскольку

$$\frac{n}{5} - \mu = \frac{1}{3}(-3K_U + \alpha^*(-5K_X)) \cdot \bar{S} \cdot \bar{D} \geq 0,$$

потому что $D \neq S$ в силу [9, лемма 8.12, предложение 8.14]. Противоречие. Лемма доказана.

Значит, дивизор $-K_U$ численно эффективен и объемен (см. леммы 2.5 и 2.6).

ЛЕММА 2.9. *Выполнено неравенство $\mu/n - 1/r < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай, когда $\mathfrak{J} = 58$, а точка O является особой точкой типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$, потому что требуемое неравенство может быть доказано аналогичным образом во всех оставшихся случаях (см. далее лемму 6.3). Итак, пусть $\mathfrak{J} = 58$.

Многообразие X может быть задано уравнением

$$w^2z + wf_{14}(x, y, z, t) + f_{24}(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 10) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 3$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 7$, $\text{wt}(w) = 10$ и f_i — многочлен степени i .

Пусть R — поверхность на X , которая высекается уравнением $t = 0$, а $\bar{R}$ — собственный прообраз поверхности R на многообразии U . Тогда

$$\bar{R} \equiv \alpha^*(-4K_X) - \frac{7}{5}E,$$

но логпара $(X, \frac{1}{4}R)$ имеет логканонические особенности в точке O согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14]. Тогда $R \neq D$ и

$$0 \leq -K_U \cdot \bar{R} \cdot \bar{D} = \frac{4}{35}n - \frac{2}{3}\mu,$$

потому что дивизор $-K_U$ численно эффе́ктивен. Значит, выполнено неравенство $\mu \leq 6n/35$.

Показано, что особенности логпары $(U, \frac{1}{n}\bar{D} + (\frac{\mu}{n} - \frac{1}{r})E)$ не являются логканоническими в некоторой точке $P \in E$, потому что

$$K_U + \frac{1}{n}\bar{D} \equiv \alpha^*\left(K_X + \frac{1}{n}D\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{n}\right)E.$$

ЛЕММА 2.10. *Многообразие U неособо в точке P .*

Доказательство леммы 2.10 приведено в § 5.

Из леммы 2.10 следует, что $\text{mult}_P(\bar{D}) > n + n/r - \mu$, а из работы [5] вытекает следующая дихотомия:

- 1) либо $d = 2r + a_j$ для некоторого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- 2) либо $d \neq 2r + a_j$ для всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, но $d = 3r + a_j$ для некоторого j .

ЛЕММА 2.11. *Для каждого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ выполнено неравенство $d \neq 2r + a_j$.*

Доказательство леммы 2.11 приведено в § 6.

Итак, показано, что $d = 3r + a_j$ для некоторого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Пусть V — трехмерное многообразие, имеющее изолированные особенности, а B и T — различные эффе́ктивные и неприводимые дивизоры на V . Положим

$$B \cdot T = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i L_i + \Delta,$$

где L_i – неприводимая кривая, ε_i – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые $L_1, \dots, L_r$. Тогда $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i H \cdot L_i \leq B \cdot T \cdot H$ для любого численно эффективного дивизора H на многообразии V .

Из леммы 2.11 следует³, что $\mathfrak{J} \in \{7, 20, 23, 36, 40, 44, 61, 76\}$.

ЛЕММА 2.13. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 7$, $\mathfrak{J} \neq 20$, $\mathfrak{J} \neq 36$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} \in \{7, 20, 36\}$. Тогда $a_1 = 1$, а точка O является особой точкой типа $\frac{1}{a_2}(1, 1, a_2 - 1)$ согласно приведенным ниже леммам 6.4, 6.10 и 6.12.

Можно показать, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xleftarrow{\gamma} & & & W \\
 \sigma \searrow & & \alpha \searrow & & \nearrow \eta \\
 & & X & \xrightarrow{\psi} & \\
 \swarrow & & & & \\
 V & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(1, 1, a_3, 2a_4, 3a_4) & \xrightarrow[\chi]{} & \mathbb{P}(1, 1, a_3, 2a_4) & \xrightarrow[\xi]{} & \mathbb{P}(1, 1, a_3)
 \end{array}$$

где ξ, χ, ψ – проекции, η – эллиптическое расслоение, γ – взвешенное раздутие особой точки типа $\frac{1}{a_4}(1, 1, a_3)$ с весами $(1, 1, a_3)$, σ – бирациональный морфизм, который стягивает l неособых рациональных кривых $C_1, \dots, C_l$ в l обыкновенных изолированных двойных точек, $l = d(d - a_4)/a_3$, а V – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 6, 14, 21)$ степени 42.

Пусть T – поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая содержит точку P . Тогда $\text{mult}_P(\bar{D}) > n + n/a_2 - \mu$.

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Согласно [5, доказательство теоремы 5.6.2] существует поверхность H в линейной системе $|-2sa_4K_U|$, которая имеет кратность $s > 0$ в точке P и не содержит компоненты цикла $\bar{D} \cdot T$, проходящие через точку P , где s – некоторое натуральное число. Тогда

$$2sa_4 \left(\frac{dn}{a_1 a_2 a_3 a_4} - \frac{\mu}{a_2 - 1} \right) = \bar{D} \cdot T \cdot H \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > s \left(n + \frac{n}{a_2} - \mu \right),$$

что приводит к противоречию, потому что $\mu > n/a_2$.

Итак, можно считать, что $P \in C_1$. Положим

$$\bar{D} \cdot T = mC_1 + \Delta,$$

где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую C_1 . Кривая C_1 неособа, но $\alpha^*(-K_X) \cdot C_1 = 2/a_2$ и $E \cdot C_1 = 2$.

Пусть $\check{E}$ – собственный прообраз поверхности E на W . Тогда $\check{E} \cong \mathbb{P}(1, 1, a_3/2)$ и отображение

$$\eta|_{\check{E}}: \mathbb{P}(1, 1, a_3/2) \longrightarrow \mathbb{P}(1, 1, a_3)$$

³Из работы [5] следует, что X обладает эллиптической инволюцией $\iff \mathfrak{J} \in \{7, 20, 23, 36, 40, 44, 61, 76\}$.

является конечным морфизмом степени 2. Итак, мы можем найти поверхность $R \in |-a_3 K_U|$ такую, что R проходит через кривую C_1 , но R не содержит компоненты цикла Δ , которые проходят через точку P . Таким образом, мы получаем

$$a_3 \left(\frac{dn}{a_1 a_2 a_3 a_4} - \frac{\mu}{a_2 - 1} \right) = R \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n + \frac{n}{a_2} - \mu - m,$$

откуда следует $m > a_3 n / a_4$, потому что $\mu > n / a_2$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{a_3 n}{a_4} < m \leq \frac{-dn K_X \cdot \alpha(C_1)}{a_1 a_2 a_3 a_4} = \frac{dn}{2a_1 a_3 a_4}$$

согласно замечанию 2.12, потому что $-K_X \cdot \alpha(C_1) = 2/a_2$, откуда следует, что $\mathfrak{J} = 7$.

Слой проекции ψ над точкой $\psi(P)$ состоит из двух неприводимых компонент, одной из которых является кривая C_1 . Пусть Z – другая компонента этого слоя. Тогда

$$C_1^2 = -2, \quad C_1 \cdot Z = 2, \quad Z^2 = -\frac{4}{3}$$

на поверхности T . Положим $\Delta = \overline{m}Z + \Omega$, где $\overline{m}$ – некоторое неотрицательное целое число, а Ω – эффе́ктивный цикл, носитель которого не содержит кривую Z . Тогда

$$\frac{4n}{3} - 2\mu - \frac{5\overline{m}}{3} = (Z + C_1) \cdot \Omega > \frac{3n}{2} - \mu - m,$$

но $4\overline{m}/3 \geq 2m - 5n/6$, потому что $\Omega \cdot Z \geq 0$. Полученные неравенства противоречивы. Лемма доказана.

Итак, мы видим, что $\mathfrak{J} \in \{23, 40, 44, 61, 76\}$ и $d = 3r + a_j$, где $r = a_3 > 2a$ и $1 \leq j \leq 2$.

Гиперповерхность X обладает особой точкой Q типа $\frac{1}{\bar{r}}(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$ такой, что

$$-K_X^3 = \frac{1}{ra(r-a)} + \frac{1}{\bar{r}\bar{a}(\bar{r}-\bar{a})},$$

где $\bar{r} = a_4 > 2\bar{a}$ и $\bar{a} \in \mathbb{N}$. Известно, что гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$x_4^2 x_3 + x_4 a(x_0, x_1, x_2) = x_3^3 x_j + x_3^2 b(x_0, x_1, x_2) + x_3 c(x_0, x_1, x_2) + d(x_0, x_1, x_2) = 0$$

в $\text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4])$, где $\text{wt}(x_0) = 1$, $\text{wt}(x_k) = a_k$, a , b , c и d – общие квазиоднородные многочлены. Положим $l = d(d - a_4)/(a_1 a_2)$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\gamma} & W & & \\ \sigma \searrow & & \alpha \searrow & & \eta \searrow \\ & X & \dashrightarrow & \psi & \\ V \hookrightarrow & \mathbb{P}(1, a_1, a_2, 2a_4, 3a_4) - \frac{1}{\chi} - \triangleright & \mathbb{P}(1, a_1, a_2, 2a_4) - \frac{1}{\xi} - \triangleright & \mathbb{P}(1, a_1, a_2) \end{array}$$

где ξ, χ, ψ – проекции, морфизм η является эллиптическим расслоением, γ – взвешенное раздутие с весами $(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$ точки, которая доминирует точку Q , а σ – бирациональный морфизм, стягивающий неособые кривые $C_1, \dots, C_l$.

Известно, что V – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, 2a_4, 3a_4)$ степени $6a_4$.

Заметим, что $E \cong \mathbb{P}(1, a, r - a)$. Пусть L – кривая на E , которая содержится в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a, r - a)}(1)|$.

ЛЕММА 2.14. *Предположим, что $P \notin L$. Тогда $\mu > na(r + 1)/(r^2 + ar)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует кривая $C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a, r - a)}(a)|$ такая, что $P \in C$. Положим

$$\bar{D}|_E = \delta C + \Upsilon \equiv r\mu L,$$

где δ – некоторое неотрицательное целое число, а Υ – эффективный дивизор на поверхности E , носитель которого не содержит кривую C . Тогда

$$\frac{r\mu - a\delta}{r - a} = (r\mu - a\delta)L \cdot C = C \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\Upsilon) > n + \frac{n}{r} - \mu - \delta,$$

откуда следует, что $\mu > na(r + 1)/(r^2 + ar)$, потому что $\delta \leq r\mu/a$.

Пусть T – поверхность в $|-K_U|$. Тогда $-K_U \cdot T \cdot \bar{D} \geq 0$, откуда следует, что $\mu \leq -na(r - a)K_X^3$.

ЛЕММА 2.15. *Точка P не содержится в поверхности T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что P содержится в поверхности T . Тогда P не содержится в базисном множестве линейной системы $|-a_1K_U|$, потому что базисное множество линейной системы $|-a_1K_U|$ не содержит неособых точек поверхности E .

Точка P не содержится в $\bigcup_{i=1}^l C_i$, потому что $P \in T$.

Согласно [5, доказательство теоремы 5.6.2] существует некоторая поверхность $H \in |-2sa_1a_4K_U|$ такая, что

$$2sa_1a_4\left(-nK_X^3 - \frac{\mu}{a_2}\right) = \bar{D} \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > s\left(n + \frac{n}{r} - \mu\right)s,$$

где s – натуральное число. Теперь несложно получить противоречие с тем, что $\mu > n/r$.

Из лемм 2.14 и 2.15 следует, что $\mathfrak{I} \in \{23, 44\}$, потому что $\mu \leq -na(r - a)K_X^3$.

Пусть S – поверхность в $|-a_1K_U|$, содержащая P . Тогда $\bar{D} \neq S$, так как выполнено неравенство $\mu > n/r$.

ЛЕММА 2.16. *Точка P содержится в $\bigcup_{i=1}^l C_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Согласно [5, доказательство теоремы 5.6.2] имеем

$$2sa_1a_4\left(-nK_X^3 - \frac{\mu}{a_2}\right) = \bar{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > s\left(n + \frac{n}{r} - \mu\right)s$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}$ и $H \in |-2sa_4K_U|$, что противоречит неравенству $\mu > n/r$.

Можно считать, что $P \in C_1$. Положим

$$\overline{D} \cdot S = mC_1 + \Delta,$$

где m – неотрицательное целое число, а Δ – некоторый эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую C_1 . Тогда из замечания 2.12 следует, что выполнено неравенство $m \leq nd/(a_2d - a_2a_3)$, потому что $-K_X \cdot \alpha(C_1) = (d - a_3)/(a_3a_4)$.

Согласно [5, доказательство теоремы 5.6.2] существует такая поверхность $R \in |-2sa_4K_U|$, что

$$2sa_1a_4 \left(-nK_X^3 - \frac{\mu}{a_2} \right) = R \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta)s > s \left(n + \frac{n}{r} - \mu - m \right),$$

где $s \in \mathbb{N}$. Значит, выполнено неравенство $m \leq nd/(a_2d - a_2a_3)$, откуда следует, что $\mathfrak{J} = 23$.

Показано, что X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$ степени 14, а точка O – особая точка типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Пусть M – общая поверхность в линейной системе $|-3K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда

$$S \cdot M = C_1 + Z_1,$$

где Z_1 – такая кривая, что выполнено равенство $-K_U \cdot Z_1 = 1/5$. Положим

$$\overline{D} \cdot S = mC_1 + \overline{m}Z_1 + \Upsilon,$$

где $\overline{m}$ – неотрицательное целое число, а Υ – некоторый эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_1 и Z_1 . Тогда $m < 7n/15$ по замечанию 2.12, но $\mu > n/4$ и

$$\frac{7}{10}n - \frac{6}{3}\mu - \frac{3}{5}\overline{m} = M \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\Upsilon) > \frac{5}{4}n - \mu - m,$$

потому что $P \notin Z_1$. Полученные неравенства приводят к противоречию.

Утверждение теоремы 1.15 полностью доказано.

§ 3. Неособые точки

В настоящем параграфе мы докажем утверждение леммы 2.4. Воспользуемся всеми предположениями и обозначениями из леммы 2.4. Возьмем произвольную неособую точку P гиперповерхности X . Предположим, что логпара $(X, \frac{1}{n}D)$ не является логканонической в P .

ЛЕММА 3.1. Пусть a_4 делит d и $a_1 \neq a_2$. Тогда $-a_2a_3K_X^3 > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $-a_2a_3K_X^3 \leq 1$. Пусть L – единственная базисная кривая пучка $|-a_1K_X|$, а T – поверхность в линейной системе $|-K_X|$. Тогда $D \cdot T$ является эффективным циклом и выполнено равенство $\text{mult}_P(L) = 1$.

Предположим, что $P \in L$. Пусть R – общая поверхность в $|-a_1K_X|$, и пусть

$$D \cdot T = mL + \Delta,$$

где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда

$$-a_1(n - a_1m)K_X^3 = D \cdot T \cdot R - mR \cdot L = R \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m,$$

откуда следует противоречие, поскольку $-a_1K_X^3 \leq 1$. Таким образом, показано, что $P \notin L$.

Предположим, что $P \in T$. Тогда из [5, теорема 5.6.2] следует, что

$$ns \geq -sa_1a_3nK_X^3 = D \cdot S \cdot T \geq \text{mult}_P(D)s > ns$$

для некоторого натурального числа s и поверхности $S \in |-sa_1a_3K_X|$. Мы видим, что $P \notin T$.

Пусть G – общая поверхность в $|-a_2K_X|$, которая содержит P . Тогда $G \cdot D$ является эффективным циклом. Согласно [5, теорема 5.6.2] существуют натуральное число $s > 0$ и эффективный дивизор $H \in |-sa_3K_X|$ такие, что

$$ns \geq -sa_2a_3nK_X^3 = D \cdot H \cdot G \geq \text{mult}_P(D)s > ns,$$

потому что $-a_2a_3K_X^3 \leq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Отметим, что выполнено неравенство $\text{mult}_P(D) > n$ (см. [9]).

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что a_4 делит d и $1 = a_1 \neq a_2$. Тогда $-a_3K_X^3 > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $-a_3K_X^3 \leq 1$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.1, мы видим, что точка P не содержится в базисной кривой пучка $|-K_X|$.

Пусть T – поверхность в $|-K_X|$, содержащая точку P . Согласно [5, теорема 5.6.2] существуют такие натуральное число $s > 0$ и поверхность $S \in |-sa_3K_X|$, что

$$ns \geq -sa_3nK_X^3 = D \cdot S \cdot T \geq \text{mult}_P(D)s > ns.$$

Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $a_1 \neq a_2$. Тогда $-a_1a_4K_X^3 > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $-a_1a_4K_X^3 \leq 1$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.2, мы видим, что $a_1 \neq 1$. Затем, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.1, мы видим, что точка P не содержится в единственной поверхности линейной системы $|-K_X|$.

Пусть S – поверхность в $|-a_1K_X|$, которая содержит точку P . Мы можем считать, что

$$\text{mult}_P(S) \leq a_1,$$

потому что $P \notin T$, а гиперповерхность X является общей. Тогда $S \neq D$.

Согласно [5, теорема 5.6.2] существуют натуральное число $s > 0$ и поверхность $H \in |-sa_4K_X|$ такие, что поверхность H имеет особенность в точке P , кратность которой не меньше s , но поверхность H не содержит компоненты цикла $D \cdot S$, которые проходят через точку P . Имеем

$$ns \geq -sa_1a_4nK_X^3 = D \cdot S \cdot H \geq \text{mult}_P(D)s > ns,$$

потому что $-a_1a_4K_X^3 \leq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Принимая во внимание значения четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) , мы видим, что

$$\mathfrak{J} \in \{6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 32, 33, 38\}$$

согласно утверждениям лемм 3.1–3.3. Оставшиеся случаи мы разберем по отдельности.

ЛЕММА 3.4. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 6$ и $\mathfrak{J} \neq 10$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 6$, поскольку невозможность случая $\mathfrak{J} = 10$ показывается аналогично. Из работы [11] следует, что многообразие X имеет две особые точки O_1 и O_2 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ такие, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xleftarrow{\gamma} & Y \\
 & \swarrow \sigma & \downarrow \alpha & & \searrow \eta \\
 V & & X & & \\
 \searrow \omega & \swarrow \xi & & \searrow \psi & \\
 & \mathbb{P}(1, 1, 1, 4) & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 1, 1) & \\
 & & \chi & &
 \end{array}$$

где ξ , ψ и χ – проекции, морфизм α – раздутие точки O_1 с весами $(1, 1, 1)$, γ – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ точки, доминирующей точку O_2 , морфизм η является эллиптическим расслоением и морфизм ω – двулиственным накрытием, а σ – бирациональный морфизм, который стягивает 48 неприводимых кривых $C_1, \dots, C_{48}$.

Многообразие U содержит 48 кривых $Z_1, \dots, Z_{48}$ таких, что $\alpha(Z_i) \cup \alpha(C_i)$ – слой естественной проекции ψ над точкой $\psi(C_i)$. Положим $\bar{Z}_i = \alpha(Z_i)$ и $\bar{C}_i = \alpha(C_i)$. Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P , а T_1 и T_2 – общие поверхности в линейной системе $|-K_X|$, которые проходят через точку P .

Предположим, что кривая L неприводима. Как обычно, положим

$$D \cdot T_1 = mL + \Upsilon,$$

где m – неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда $m \leq n$ (см. замечание 2.12), но

$$n - m = D \cdot T_1 \cdot T_2 - mT_2 \cdot L = T_2 \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m \text{mult}_P(L),$$

откуда следует, что кривая L особа в точке P . Таким образом, существует неприводимая поверхность $T \in |-K_X|$, которая также особа в точке P . Пусть теперь S – общая поверхность в линейной системе $|-2K_X|$, которая содержит точку P . Тогда

$$2n = D \cdot T \cdot S \geq \text{mult}_P(D \cdot T) > 2n,$$

что является противоречием. Итак, кривая L приводима.

Показано, что $L = \overline{C}_i \cup \overline{Z}_i$. Положим $D|_{T_1} = m_1 \overline{C}_i + m_2 \overline{Z}_i + \Delta$, где m_i – неотрицательное целое число, а Δ является эффективным циклом, носитель которого не содержит $\overline{C}_i$ и $\overline{Z}_i$.

В случае, когда $P \in \overline{C}_i \cap \overline{Z}_i$, существует поверхность $T \in |-K_X|$ такая, что T особа в точке P , и мы можем повторить рассуждения из предыдущего случая для получения противоречия. Поэтому можно считать, что $P \in \overline{C}_i$ и $P \notin \overline{Z}_i$.

На поверхности T_1 выполнены равенства $\overline{C}_i^2 = \overline{Z}_i^2 = -3/2$ и $\overline{C}_i \cdot \overline{Z}_i = 2$. Имеем

$$0 \leq \Delta \cdot \overline{Z}_i = \frac{1}{2}n - 2m_1 + \frac{3}{2}m_2, \quad n - m_1 \leq \Delta \cdot \overline{C}_i = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}m_1 - 2m_2,$$

а из замечания 2.12 следует, что $m_1 + m_2 \leq 2n$. Тогда $m_1 \leq n$. Значит, логпара $(T_1, \overline{C}_i + \frac{1}{n}\Delta)$ не логканонична в точке P в силу [9, теорема 7.5], поскольку $P \notin \overline{Z}_i$. Тогда

$$\text{mult}_P(\Delta|_{\overline{C}_i}) > n$$

вновь согласно [9, теорема 7.5]. Имеем

$$n < \Delta \cdot \overline{C}_i = \frac{1}{2}n - m_1 \overline{C}_i^2 - m_2 \overline{Z}_i \cdot \overline{C}_i = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}m_1 - 2m_2,$$

откуда легко следует противоречие с полученными ранее неравенствами.

ЛЕММА 3.5. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 12$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 4)$ степени 10, имеющая четыре особые точки P_1, P_2, P_3, P_4 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Известно, что существует коммутативная диаграмма

где ψ – естественная проекция, η – эллиптическое расслоение, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 2)$, α_4 – раздутие точки P_4 с весами $(1, 1, 3)$, β_4 – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 3)$ точки, которая доминирует особую

точку P_4 , β_3 – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки, которая доминирует особую точку P_3 , β_5 – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки α_4 -исключительного дивизора, γ_3 – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки, которая доминирует особую точку P_3 , а γ_5 – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки β_4 -исключительного дивизора.

Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P . Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.1, мы видим, что L не является базисной кривой пучка $|-K_X|$, откуда сразу следует, что кривая L не проходит через точки P_1 и P_2 .

Кривая L приведена и имеет не более чем двойные точки вне точки P_4 , поскольку гиперповерхность X является общей. Выполнено равенство $-K_X \cdot L = 5/6$, и существует единственная поверхность $T \in |-K_X|$, проходящая через точку P , а исключительные поверхности морфизмов γ_5 и γ_3 суть сечения эллиптического расслоения η .

Предположим, что кривая L неприводима. В этом случае положим

$$D \cdot T = mL + \Delta,$$

где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Пусть S – общая поверхность в линейной системе $|-2K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда

$$\frac{5}{6}n - \frac{6}{3}m = S \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m \text{mult}_P(L) \geq n - 2m,$$

откуда следует, что $m > n/2$. Однако $m \leq n/2$ (см. замечание 2.12). Итак, слой L приводим.

Пусть C – неприводимая компонента кривой L , которая содержит P_3 , а Z – неприводимая компонента кривой L , отличная от кривой C . Тогда

$$-K_X \cdot C \geq \frac{1}{3}, \quad -K_X \cdot Z \geq \frac{1}{4}, \quad -4K_X \cdot Z \in \mathbb{N},$$

потому что кривая Z не проходит через точку P_3 , поскольку исключительный дивизор бирационального морфизма γ_3 является сечением эллиптического расслоения η .

Пусть $\bar{C}$ – собственный прообраз кривой C на многообразии U_3 . Тогда

$$-K_X \cdot C = \frac{1}{3} \iff -K_{U_3} \cdot \bar{C} = 0,$$

но существует не более чем конечное число кривых на многообразии U_3 , имеющих тривиальное пересечение с дивизором $-K_{U_3}$. Значит, можно считать, что $L = C + Z$ и $-K_X \cdot Z = 1/2$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$\begin{aligned} w^2z + w(t^2 + tf_3(x, y, z) + f_6(x, y, z)) + tf_7(x, y, z) + f_{10}(x, y, z) &= 0 \\ \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]), \end{aligned}$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 3$, $\text{wt}(w) = 4$, а f_i – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть R – поверхность, которая высекается на гиперповерхности X уравнением

$$wz + t^2 + tf_3(x, y, z) = 0,$$

а $\check{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии U_{45} . Тогда

$$\check{R} \cdot \check{Z} = \frac{6}{5} - \frac{10}{4}E \cdot \beta_5(\check{Z}) - \frac{6}{3}G \cdot \check{Z} \leq -6K_X \cdot Z - \frac{5}{6} - 2,$$

где E и G – исключительные дивизоры α_4 и β_5 соответственно, а $\check{Z}$ – собственный прообраз кривой Z на многообразии U_{45} . Значит, кривая Z является одной из кривых, которые стягиваются проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, и $L = C + Z$, если $-K_X \cdot Z = 1/4$. Положим

$$D|_T = m_C C + m_Z Z + \Omega,$$

где m_C и m_Z – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые C и Z . Получаем систему линейных неравенств

$$\Omega \cdot C \geq (\text{mult}_P(D) - m_Z \text{mult}_P(Z) - m_C \text{mult}_P(C)) \text{mult}_P(C),$$

$$\Omega \cdot Z \geq (\text{mult}_P(D) - m_Z \text{mult}_P(Z) - m_C \text{mult}_P(C)) \text{mult}_P(Z),$$

но $-m_C K_X \cdot C - m_Z K_X \cdot Z \leq 5n/12$. Легко видеть, что

$$Z^2 = -\frac{5}{4}, \quad C \cdot Z = \frac{7}{4}, \quad C^2 = -\frac{7}{12}$$

на поверхности T в случае, когда выполнено равенство $-K_X \cdot Z = 1/4$, и

$$Z^2 = -1, \quad C \cdot Z = 2, \quad C^2 = -\frac{4}{3},$$

если $-K_X \cdot Z \neq 1/4$. Теперь противоречие с предположением достигается простыми вычислениями.

ЛЕММА 3.6. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 13$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 13$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 5)$ степени 11, особенности которой состоят из точек P_1, P_2, P_3 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ соответственно.

Рассмотрим слой L проекции $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$, который содержит точку P . Из доказательства леммы 3.1 сразу следует, что L не является базисной кривой пучка $|-K_X|$, откуда следует, что $P_1 \notin L$, а кривая L имеет не более чем двойные точки вне точки P_3 .

Из доказательства леммы 3.5 следует, что $L = C + Z$, где C и Z – неприводимые кривые такие, что $C \neq Z$ и либо $-K_X \cdot C = 1/5$, либо $-K_X \cdot C = 1/3$.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 1/5$. Тогда $-K_X \cdot Z = 8/15$, а C является одной из кривых, стягиваемых проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Гиперповерхность X задана уравнением

$$w^2y + wg(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 5) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 3$, $\text{wt}(w) = 5$, а g и h – квазиоднородные многочлены. Пусть R – неприводимая приведенная поверхность, которая высекается на многообразии X уравнением $y = 0$. Тогда R содержит кривые Z и C и на R выполнены равенства

$$C^2 = -\frac{4}{5}, \quad C \cdot Z = \frac{6}{5}, \quad Z^2 = -\frac{2}{15},$$

которые корректно определены, поскольку поверхность R нормальна. Положим

$$D|_R = m_C C + m_Z Z + \Omega,$$

где m_C и m_Z – некоторые неотрицательные целые числа, а Ω является эффективным дивизором, носитель которого не содержит кривые C и Z . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{4}{5}m_C - \frac{6}{5}m_Z &= \Omega \cdot C > n - m_C - m_Z, \\ \frac{8}{15}n - \frac{6}{5}m_C + \frac{2}{15}m_Z &= \Omega \cdot Z > n - m_C - m_Z \end{aligned}$$

в случае, когда $P \in C \cap Z$. Однако выполнено неравенство $3m_C + 8m_Z \leq 11n/2$ согласно замечанию 2.12. Таким образом, мы видим, что $P \notin C \cap Z$ и либо

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{4}{5}m_C - \frac{6}{5}m_Z &= \Omega \cdot C > n - m_C, \\ \frac{8}{15}n - \frac{6}{5}m_C + \frac{2}{15}m_Z &= \Omega \cdot Z \geq 0, \end{aligned}$$

либо $\Omega \cdot C \geq 0$ и $\Omega \cdot Z > n - m_Z$, откуда получаем противоречие с предположением.

Показано, что $-K_X \cdot C = 1/3$ и $-K_X \cdot Z = 2/5$. Пусть $\alpha: U \rightarrow X$ – взвешенное раздутие особой точки P_2 с весами $(1, 1, 2)$. В этом случае собственный прообраз кривой C на многообразии U является одной из конечного числа кривых, имеющих тривиальное пересечение с дивизором $-K_U$. Пусть S – поверхность в $|-K_X|$, которая содержит точку P . Тогда

$$C^2 = -\frac{4}{3}, \quad C \cdot Z = 2Z^2 = -\frac{6}{5}$$

на поверхности S . Рассуждая так же, как и в случае $-K_X \cdot C = 1/5$, мы получаем противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.7. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 14$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 14$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 4, 6)$ степени 12, особенности которой состоят из особой точки O типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – естественная проекция, а L – слой проекции ψ , который содержит точку P . Тогда L является неприводимой приведенной кривой, потому что $-K_X \cdot L = 1/2$.

Пусть T_1 и T_2 – общие поверхности в $|-K_X|$, которые содержат точку P . Положим

$$D \cdot T_1 = mL + \Delta,$$

где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда $m \leq n$ согласно замечанию 2.12, однако

$$\frac{n-m}{2} = D \cdot T_1 \cdot T_2 - mT_2 \cdot L = T_2 \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m \text{mult}_P(L),$$

откуда следует, что $m > n$ в случае $\text{mult}_P(C) = 1$. Значит, кривая C особа в точке P , откуда следует существование поверхности $T \in |-K_X|$, которая также особа в точке P . Имеем

$$2n = D \cdot T \cdot S \geq \text{mult}_P(D \cdot T) > 2n,$$

где S – общая поверхность в $|-4K_X|$, которая проходит через точку P . Противоречие.

ЛЕММА 3.8. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 16$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 16$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 5)$ степени 12, особенности которой состоят из трех точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и точки O типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \dashrightarrow & \psi & \dashrightarrow & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где α – взвешенное раздутие особой точки O с весами $(1, 1, 4)$, β – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 3)$ особой точки типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, γ – раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а η – эллиптическое расслоение, ψ – естественная проекция.

Из доказательства леммы 3.1 следует, что точка $\psi(P)$ неособа на поверхности $\mathbb{P}(1, 1, 2)$.

Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P . Тогда L не содержит особых точек гиперповерхности X типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, откуда сразу следует, что кривая L приведена. Теперь из общности гиперповерхности X следует, что кривая L имеет не более чем двойные особые точки вне точки O . Пусть T – единственная поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая содержит точку P . Тогда $L \subset T$.

Предположим, что кривая L неприводима. Положим $D \cdot T = mL + \Delta$, где m – неотрицательное целое число, а Δ является эффективным циклом, носитель

которого не содержит кривую L . Тогда

$$\frac{3}{5}n - \frac{6}{5}m = S \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m \text{mult}_P(L) \geq n - 2m,$$

где S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_X|$, которая проходит через точку P .

Итак, показано, что выполнено неравенство $m > n/2$, однако при этом выполнено неравенство $m \leq n/2$ (см. замечание 2.12). Противоречие. Слой L обязательно будет приводимым.

Пусть C – компонента слоя L , которая минимизирует число $-K_X \cdot C$. Тогда выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1/5$, потому что $-K_X \cdot L = 3/5$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wg(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 5) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 4$, $\text{wt}(w) = 5$, а g и h – общие квазиоднородные многочлены. Пусть R – поверхность, которая высекается на гиперповерхности X уравнением $z = 0$, а $\check{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии W . Тогда

$$\check{R} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-2K_X) - \frac{7}{5}\beta^*(E) - \frac{3}{4}G,$$

где E и G – исключительные дивизоры бирациональных морфизмов α и β соответственно.

Пусть $\check{C}$ и $\bar{C}$ – собственные прообразы кривой C на W и U соответственно. Тогда

$$\check{R} \cdot \check{C} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}E \cdot \bar{C} - \frac{3}{4}G \cdot \check{C} \leq \frac{1}{7} - \frac{7}{20} - \frac{1}{4} < 0,$$

откуда следует, что кривая C содержится в поверхности R . Теперь из общности гиперповерхности X следует, что выполнены равенства $-K_U \cdot \bar{C} = 0$ и $E \cdot \bar{C} = 1$.

Из общности гиперповерхности X следует также, что поверхность T квазигладка, а кривая L состоит из двух компонент C и Z таких, что кривая Z является неприводимой кривой и выполнено равенство $-K_X \cdot Z = 2/5$. На поверхности T выполнены равенства

$$C^2 = -\frac{6}{5}, \quad C \cdot Z = \frac{8}{5}, \quad Z^2 = -\frac{4}{5},$$

откуда следует, что мы можем воспользоваться аргументами, применяемыми в доказательстве леммы 3.6, для получения противоречия с предположением.

ЛЕММА 3.9. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 18$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 18$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 5)$ степени 12, особенности которой состоят из шести точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и одной особой точки O типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Из работы [11] следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X & \xrightarrow[\psi]{-} & \mathbb{P}(1, 2, 2) \end{array}$$

где α – раздутие точки O с весами $(1, 2, 3)$, β – раздутие с весами $(1, 1, 3)$ особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а η является эллиптическим расслоением, ψ – естественная проекция.

Пусть C – схемный слой проекции ψ , который проходит через точку P , а L – неприводимая приведенная компонента слоя C . Тогда

$$-K_X \cdot C = \frac{4}{5}, \quad -10K_X \cdot L \in \mathbb{N},$$

но рациональное число $-5K_X \cdot L$ является целым, если кривая L не проходит через особую точку типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Таким образом, мы видим, что $C = 2L$ в том случае, когда слой C проходит через одну из особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Пусть T – поверхность в $|-K_X|$, а S и $\dot{S}$ – общие поверхности в $|-2K_X|$, которые проходят через точку P . Тогда S и $\dot{S}$ неприводимы. Имеем $S \supset L \subset \dot{S}$, но $S \neq D \neq \dot{S}$.

Предположим, что $L \subset T$. Тогда $C = 2L$ и $-K_X \cdot L = 2/5$, а кривая L имеет не более чем двойные особые точки. Положим $D|_T = mL + \Upsilon$, где m – некоторое неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда

$$\frac{2}{5}n - \frac{4}{5}m = S \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\Upsilon) \geq \text{mult}_P(D) - \text{mult}_P(L) > n - 2m,$$

откуда следует, что $m > n/2$, но из замечания 2.12 следует, что $m \leq n/2$. Противоречие.

Показано, что $L \not\subset T$. Предположим, что $C = L$. Тогда $\text{mult}_P(L) \leq 2$. Положим

$$D \cdot \dot{S} = \dot{m}C + \dot{\Upsilon},$$

где $\dot{m}$ – некоторое неотрицательное целое число, а $\dot{\Upsilon}$ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую C . Тогда

$$\frac{4}{5}n - \frac{8}{5}\dot{m} = S \cdot \dot{\Upsilon} \geq \text{mult}_P(\dot{\Upsilon}) > n - 2m,$$

откуда следует, что $m > n/2$, но $m \leq n/2$ (см. замечание 2.12). Противоречие.

Показано, что $C \neq L$, но L не проходит через особую точку типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, а из общности выбора гиперповерхности X следует, что $C = L + Z$, где Z – неприводимая кривая такая, что $Z \neq L$. Положим

$$D|_S = m_L L + m_Z Z + \Omega,$$

где m_L и m_Z – некоторые неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривые L и Z . Тогда мы можем считать, что

$$-K_X \cdot L \leq -K_X \cdot Z,$$

откуда следует, что либо $-K_X \cdot L = 1/5$ и $-K_X \cdot Z = 3/5$, либо $-K_X \cdot L = -K_X \cdot Z = 2/5$.

Предположим, что $-K_X \cdot L = 2/5$. Тогда L и Z неособы вне точки O и выполнено соотношение

$$\frac{4}{5}n - \frac{4}{5}m_L - \frac{4}{5}m_Z = \dot{S}|_S \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega) > n - m_L - m_C,$$

откуда следует, что $m_L + m_C > n$, но $m_L + m_C \leq n$ согласно замечанию 2.12. Противоречие.

Показано, что $-K_X \cdot L = 1/5$. Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wg(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 5) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 3$, $\text{wt}(w) = 5$, а g и h – общие квазиоднородные многочлены степени 7 и 12 соответственно. Пусть R – поверхность на X , которая высекается на гиперповерхности X уравнением $z = 0$, а $\bar{R}$ и $\bar{L}$ – собственные прообразы соответственно поверхности R и кривой L на многообразии U . Тогда $\bar{R} \cdot L < 0$.

Из неравенства $\bar{R} \cdot L < 0$ следует, что $L \subset R \supset Z$, а кривая L стягивается естественной проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 2, 2, 3)$ в точку. Таким образом, пересечение $L \cap Z$ не содержит особых точек гиперповерхности X , кроме точки O .

Пусть $\bar{Z}$ – собственный прообраз кривой Z на многообразии U , а $\pi: \bar{R} \rightarrow R$ – бирациональный морфизм, индуцированный морфизмом α . Тогда

$$\bar{L} + \bar{Z} = \bar{S}|_{\bar{R}} \equiv -K_U|_{\bar{R}},$$

где $\bar{S}$ – собственный прообраз поверхности S на многообразии U .

Пусть $\bar{E}$ – кривая на поверхности $\bar{R}$, которая стягивается морфизмом π . Тогда

$$\bar{L}^2 = -1, \quad \bar{L} \cdot \bar{Z} = \bar{L} \cdot \bar{E} = 1, \quad \bar{Z}^2 = -\frac{1}{3}, \quad \bar{E}^2 = -\frac{35}{6}, \quad \bar{Z} \cdot \bar{E} = \frac{4}{3}$$

на $\bar{R}$, откуда следует, что $L^2 = -29/35$, $L \cdot Z = 43/35$, $Z^2 = -1/35$ на поверхности R .

Предположим, что $P \in L \cap Z$. Тогда $m_L + 3m_C \leq 5n$ согласно замечанию 2.12, однако

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{29}{35}m_L - \frac{43}{35}m_Z &= \Omega \cdot L > n - m_L - m_Z, \\ \frac{2}{5}n - \frac{43}{35}m_L + \frac{1}{35}m_Z &= \Omega \cdot Z > n - m_L - m_Z, \end{aligned}$$

откуда сразу следует противоречие с предположением. Итак, либо $L \ni P \notin Z$, либо $Z \ni P \notin L$.

Предположим, что $Z \ni P \notin L$. Тогда $\Omega \cdot Z > n - m_Z$ и $\Omega \cdot L \geq 0$, откуда следует противоречие. Значит, мы видим, что $L \ni P \notin Z$. Тогда

$$\frac{1}{5}n + \frac{29}{35}m_L - \frac{43}{35}m_Z = \Omega \cdot L > n - m_L, \quad \frac{2}{5}n - \frac{43}{35}m_L + \frac{1}{35}m_Z = \Omega \cdot Z \geq 0,$$

откуда следует, что $m_L < n$. Согласно [9, теорема 7.5] особенности логпары

$$\left(R, L + \frac{m_C}{n}C + \frac{1}{n}\Omega\right)$$

не являются логканоническими в точке P . Тогда $\text{mult}_P(\Omega|_L) > n$ в силу [9, теорема 7.5], откуда следует неравенство $\Omega \cdot L > n$, которое сразу приводит к противоречию.

ЛЕММА 3.10. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 19$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено равенство $\mathfrak{J} = 19$. Тогда X – достаточно общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 3, 4)$ степени 12. Пусть T – единственная поверхность в линейной системе $|-K_X|$, а S – общая поверхность в линейной системе $|-6K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда $P \notin T$, потому что в противном случае

$$n = D \cdot S \cdot T \geq \text{mult}_P(D) > n.$$

Пусть H и G – общие поверхности в линейных системах $|-2K_X|$ и $|-3K_X|$ соответственно, которые проходят через точку P . Тогда

$$n = D \cdot H \cdot G \geq \text{mult}_P(D) > n$$

в случае, когда $D \neq H$. Итак, показано, что $D = H$, $n = 2$ и $\text{mult}_P(D) \geq 3$.

Из несложного подсчета параметров следует, что неравенство $\text{mult}_P(D) \geq 3$ невозможно в случае, когда $P \notin T$, потому что гиперповерхность X достаточно общая. Противоречие.

ЛЕММА 3.11. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 20$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 20$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 5)$ степени 13, особенности которой состоят из точек P_1, P_2, P_3 типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$ соответственно.

Из доказательства леммы 3.2 следует, что согласно [5, теорема 5.6.2] выполнено неравенство $\text{mult}_P(D) \leq n$ в случае, когда точка P не содержится в конечном числе кривых, стягиваемых естественной проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 3, 4)$. Можно считать, что точка P содержится в одной из кривых, стягиваемых естественной проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 3, 4)$.

Существует коммутативная диаграмма

где ξ – проекция, α_1 – раздутие точки P_1 с весами $(1, 1, 2)$, α_3 – взвешенное раздутие точки P_3 с весами $(1, 1, 4)$, γ_3 – раздутие с весами $(1, 1, 4)$ особой точки, которая доминирует точку P_3 , γ_1 – раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки, которая доминирует точку P_1 , а морфизм ω является эллиптическим расслоением.

Пусть Z – слой проекции ξ , содержащий P . Тогда $Z = L + C$, где L и C – неприводимые кривые такие, что $-K_X \cdot L = 1/5$ и $-K_X \cdot C = 2/3$. Кривые L и C неособы в точке P .

Пусть S – поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая содержит P . Тогда S содержит кривые L и C . Можно считать, что поверхность S квазигладка.

На поверхности S выполнены равенства $L^2 = -6/5$, $C^2 = 2/3$, $L \cdot C = 2$. Положим

$$D|_T = m_L L + m_C C + \Omega,$$

где m_L и m_C – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые L и C . Предположим, что $P \in L \cap C$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{6}{5}m_L - 2m_C &= \Omega \cdot L > n - m_L - m_C, \\ \frac{2}{3}n - 2m_L - \frac{2}{3}m_C &= \Omega \cdot C > n - m_L - m_C, \end{aligned}$$

откуда сразу следует противоречие. Итак, показано, что $P \in L$ и $P \notin C$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{6}{5}m_L - 2m_C &= \Omega \cdot L > n - m_L, \\ \frac{2}{3}n - 2m_L - \frac{2}{3}m_C &= \Omega \cdot C \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует противоречие с предположением. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.12. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 22$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено равенство $\mathfrak{J} = 22$. Тогда X – достаточно общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 7)$ степени 14. Пусть T – единственный эффективный дивизор в линейной системе $|-K_X|$, а S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-6K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда $P \notin T$, потому что в противном случае мы получаем противоречивое неравенство $n = D \cdot S \cdot T \geq \text{mult}_P(D)$.

Пусть S_2 – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_X|$, которая проходит через точку P . Легко видеть, что существует поверхность $S_3 \in |-3K_X|$, которая также содержит точку P , но не содержит компоненты цикла $D \cdot S_2$. Таким образом, выполнено

$$n = D \cdot S_2 \cdot S_3 \geq \text{mult}_P(D) > n,$$

что является противоречием с предположением. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.13. *Выполнено неравенство $\mathfrak{I} \neq 23$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{I} = 23$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$ степени 9, а естественная проекция $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 2, 3, 4)$ является конечным морфизмом вне неособых рациональных кривых $C_1, \dots, C_{21}$ таких, что $\psi(C_i)$ – точка и $-K_X \cdot C_i = 1/5$.

Из доказательства леммы 3.1 следует, что точка P не содержится в базисном множестве линейных систем $|-K_X|$ и $|-2K_X|$. Пусть R – поверхность в пучке $|-2K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда из доказательства леммы 3.10 следует, что $R \neq D$.

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^{21} C_i$. Из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существует поверхность $H \in |-4sK_X|$, кратность которой в точке P не меньше $s > 0$ и которая не содержит компоненты эффективного цикла $D \cdot R$, где s – натуральное число. Тогда

$$ns > \frac{56}{60}ns = H \cdot D \cdot R \geq \text{mult}_P(D)s > ns.$$

Противоречие. Итак, можно считать, что $P \in C_1$.

Пусть M – общая поверхность в $|-3K_X|$, которая содержит P . Тогда $M \cdot R = C_1 + Z_1$, где Z_1 – неприводимая кривая такая, что кривая Z_1 неособа в точке P и $-K_X \cdot Z_1 = 1/2$.

Легко видеть, что $M \neq D$. Положим

$$D|_M = m_1 C_1 + m_2 Z_1 + \Upsilon \equiv -nK_X|_M,$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_1 и Z_1 . Поверхность M нормальна, и она неособа в точке P , но

$$C_1^2 = -\frac{8}{5}, \quad Z_1^2 = -1, \quad C_1 \cdot Z_1 = 2$$

на поверхности M . Можно считать, что $P \in Z_1$, поскольку случай $P \notin Z_1$ проще. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}n + \frac{8}{5}m_1 - 2m_2 &= \Upsilon \cdot C_1 > n - m_1 - m_2, \\ \frac{1}{2}n - 2m_1 + m_2 &= \Upsilon \cdot Z_1 > n - m_1 - m_2, \end{aligned}$$

откуда следует, что выполнены строгие неравенства $m_1 > n/2$ и $m_2 > n/2$, что противоречит неравенству $m_1/5 + m_2/2 \leq 7n/20$ (см. замечание 2.12). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.14. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 24$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 24$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 5, 7)$ степени 15, особенности которой состоят из точки P_1 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и точки P_2 типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$.

Известно, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & \psi & \text{-----} & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где α – раздутие точки P_2 с весами $(1, 2, 5)$, β – раздутие с весами $(1, 2, 3)$ особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 2, 3)$, γ – раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и η – эллиптическое расслоение.

Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P . Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 3.1, мы видим, что L не является базисной кривой пучка $|-K_X|$, откуда следует, что кривая L не проходит через точку P_1 . Особенности кривой L состоят не более чем из двойных точек вне точки P_2 .

Предположим, что L неприводима. Пусть T – общая поверхность пучка $|-K_X|$, которая проходит через точку P . Положим $D \cdot T = mL + \Delta$, где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда

$$\frac{3}{7}n - \frac{6}{7}m = S \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > n - m \text{mult}_P(L) \geq n - 2m,$$

где S – общая поверхность в $|-2K_X|$, которая содержит P . Итак, мы видим, что $m > n/2$, но из замечания 2.12 следует, что $m \leq n/2$. Противоречие. Таким образом, слой L приводим.

Дивизор $-7K_X$ является дивизором Картье в окрестности кривой L , но выполнено равенство $-7K_X \cdot L = 3$. Таким образом, кривая L состоит не более чем из трех компонент, все компоненты слоя L проходят через точку P_2 , и существует компонента C слоя L такая, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1/7$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2y + wg(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 5, 7) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 5$, $\text{wt}(w) = 7$, а g и h – квазиоднородные многочлены. Пусть R – поверхность, которая высекается на X уравнением $y = 0$. Тогда

$$\bar{R} \equiv \alpha^*(-K_X) - \frac{8}{7}E,$$

где $\bar{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии U , а E – исключительный дивизор бирационального морфизма α .

Пусть $\bar{C}$ – собственный прообраз кривой C на многообразии U . Тогда

$$\bar{R} \cdot \bar{C} = \frac{1}{7} - \frac{8}{7}E \cdot \bar{C} \leq \frac{1}{7} - \frac{8}{35} < 0,$$

откуда сразу следует, что $C \subset R$. Теперь из общности гиперповерхности X следует, что кривая C является одной из 12 кривых таких, что $-K_U \cdot \bar{C} = 0$ и $E \cdot \bar{C} = 1$.

Поверхность R нормальна, а L состоит из двух компонент C и Z таких, что Z – неприводимая кривая и выполнено равенство $-K_X \cdot Z = 2/7$. Тогда

$$C^2 = -\frac{23}{28}, \quad C \cdot Z = \frac{31}{28}, \quad Z^2 = -\frac{15}{28}$$

на поверхности R . Положим $D|_R = m_C C + m_Z Z + \Omega$, где m_C и m_Z – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор на поверхности R , носитель которого не содержит кривые C и Z . Тогда $m_C + 2m_Z \leq 3n/2$ по замечанию 2.12.

Предположим, что $P \in C \cap Z$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}n + \frac{23}{28}m_C - \frac{31}{28}m_Z &= \Omega \cdot C > n - m_C - m_Z, \\ \frac{2}{7}n - \frac{31}{28}m_C + \frac{15}{28}m_Z &= \Omega \cdot Z > n - m_C - m_Z, \end{aligned}$$

откуда сразу следует противоречие. Итак, либо $C \ni P \notin Z$, либо $Z \ni P \notin C$.

Предположим, что $C \ni P \notin Z$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}n + \frac{23}{28}m_C - \frac{31}{28}m_Z &= \Omega \cdot C > n - m_C, \\ \frac{2}{7}n - \frac{31}{28}m_C + \frac{15}{28}m_Z &= \Omega \cdot Z \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует противоречие. Показано, что $Z \ni P \notin C$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}n + \frac{23}{28}m_C - \frac{31}{28}m_Z &= \Omega \cdot C \geq 0, \\ \frac{2}{7}n - \frac{31}{28}m_C + \frac{15}{28}m_Z &= \Omega \cdot Z > n - m_Z. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $m_C > 16$, однако $m_C \leq 3/2$ по замечанию 2.12. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.15. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 25$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} = 25$. Тогда X может быть задана уравнением

$$w^2 y + w g(x, y, z, t) + h(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 7) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 4$, $\text{wt}(w) = 7$, а g и h – общие квазиоднородные многочлены степени 8 и 15 соответственно.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 3)$ и $\xi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 3, 4)$ – проекции. Тогда ξ – конечный морфизм вне неособых неприводимых кривых $C_1, \dots, C_{10}$, которые высекаются на X уравнениями

$$y = g(x, y, z, t) = h(x, y, z, t) = 0,$$

а нормализация общего слоя проекции ψ является эллиптической кривой. Как следует из доказательства леммы 3.13, выполнено неравенство $\text{mult}_P(D) \leq n$ в случае, когда $P \notin \bigcup_{i=1}^{10} C_i$.

Можно считать, что $P \in C_1$. Легко видеть, что слой проекции ψ над точкой $\psi(C_1)$ состоит ровно из двух неприводимых компонент. Пусть Z_1 – такая компонента слоя естественной проекции ψ над точкой $\psi(C_1)$, что $Z_1 \neq C_1$. Тогда кривая Z_1 неособа в точке P .

Пусть T – поверхность, отсекаемая на X уравнением $y = 0$. Тогда $P \in C_1 \subset T$, а поверхность T нормальна. Форма пересечения кривых C_1 и Z_1 на поверхности T следующая:

$$Z_1^2 = -\frac{1}{28}, \quad C_1^2 = -\frac{11}{14}, \quad Z_1 \cdot C_1 = \frac{17}{14}.$$

Положим $D|_T = m_C C_1 + m_Z Z_1 + \Omega$, где m_C и m_Z – некоторые неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор на поверхности T , носитель которого не содержит кривые C_1 и Z_1 . Тогда $m_C \leq 5n/4$ и $m_Z \leq 5n/11$ согласно замечанию 2.12, потому что выполнены равенства $-K_X \cdot C_1 = 1/7$ и $-K_X \cdot Z_1 = 11/28$ соответственно.

Предположим, что $P \in C_1 \cap Z_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}n + \frac{11}{14}m_C - \frac{17}{14}m_Z &= \Omega \cdot C_1 > n - m_C - m_Z, \\ \frac{11}{28}n - \frac{17}{14}m_C + \frac{1}{28}m_Z &= \Omega \cdot Z_1 > n - m_C - m_Z, \end{aligned}$$

откуда следует, что $m_Z > 5n/11$. Противоречие.

Итак, показано, что $P \in C_1$ и $P \notin Z_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}n + \frac{11}{14}m_C - \frac{17}{14}m_Z &= \Omega \cdot C_1 > n - m_C, \\ \frac{11}{28}n - \frac{17}{14}m_C + \frac{1}{28}m_Z &= \Omega \cdot Z_1 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует противоречие с предположением. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.16. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 32$, $\mathfrak{J} \neq 33$, $\mathfrak{J} \neq 38$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} \in \{32, 33, 38\}$. Проекция $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3)$ стягивает конечное число неособых кривых. Пусть C – одна из них, а M – общая поверхность в линейной системе $|-aK_X|$, которая содержит кривую C , где $a = 3$ при $\mathfrak{J} \neq 33$ и $a = 2$ при $\mathfrak{J} = 33$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ – естественная проекция, а Z – компонента слоя естественной проекции ψ над точкой $\psi(C)$ такая, что $Z \neq C$. Тогда

$$\begin{aligned} C^2 &= -\frac{10}{7}, & Z^2 &= -\frac{6}{7}, & C \cdot Z &= \frac{12}{7}, & \text{если } \mathfrak{J} &= 32, \\ C^2 &= -\frac{9}{7}, & Z^2 &= -\frac{24}{35}, & C \cdot Z &= \frac{12}{7}, & \text{если } \mathfrak{J} &= 33, \\ C^2 &= -\frac{11}{8}, & Z^2 &= -\frac{39}{40}, & C \cdot Z &= \frac{13}{8}, & \text{если } \mathfrak{J} &= 38, \end{aligned}$$

на поверхности M . Теперь из доказательства леммы 3.13 легко следует противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, показано, что $\mathfrak{J} \in \{7, 8, 9\}$.

ЛЕММА 3.17. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 9$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 9$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 3)$ степени 9, особенности которой состоят из особых точек O_1, O_2, O_3 типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и одной точки типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Из работы [11] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xleftarrow{\gamma} & Y \\
 & \swarrow \sigma & \downarrow \alpha & & \searrow \eta \\
 V & & X & & \\
 & \searrow \omega & \swarrow \xi & \searrow \psi & \\
 & \mathbb{P}(1, 1, 2, 3) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{P}(1, 1, 2)
 \end{array}$$

где ξ, ψ и χ – проекции, α – раздутие точки O_1 с весами $(1, 1, 3)$, γ – композиция раздутий с весами $(1, 1, 3)$ особых точек, которые доминируют точки O_2 и O_3 , морфизм η является эллиптическим расслоением, ω – двойное накрытие, а σ – бирациональный морфизм, который стягивает 27 неособых рациональных кривых $C_1, \dots, C_{27}$.

Многообразие U содержит такие неприводимые кривые $Z_1, \dots, Z_{27}$, что $\alpha(Z_i)$ – кривая, а объединение $\alpha(Z_i) \cup \alpha(C_i)$ является слоем проекции ψ над точкой $\psi(C_i)$.

Положим $\bar{Z}_i = \alpha(Z_i)$ и $\bar{C}_i = \alpha(C_i)$. Тогда

$$-K_X \cdot \bar{Z}_i = -2K_X \cdot \bar{C}_i = \frac{2}{3},$$

однако $O_1 \in \bar{C}_i, O_2 \notin \bar{C}_i, O_3 \notin \bar{C}_i, O_1 \notin \bar{Z}_i, O_2 \in \bar{Z}_i$ и $O_3 \in \bar{Z}_i$.

Из доказательства леммы 3.1 следует, что P является базисной точкой пучка $|-K_X|$.

Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P . Тогда из общности гиперповерхности X следует, что слой L приведен, а его особенности состоят из конечного числа двойных точек. Легко видеть, что $L = \alpha(Z_i) \cup \alpha(C_i)$ для некоторого i , если L приводим.

Предположим, что кривая L неприводима. Пусть T – единственная поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая содержит P . Положим $D \cdot T = mL + \Delta$, где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффе́ктивный цикл, носитель которого не содержит L . Тогда $m \leq n/2$.

Можно считать, что кривая L особа в точке P , потому что в противном случае несложно получить противоречие. Предположим, что поверхность T неособа в точке P . Тогда

$$n - 2m = \Delta \cdot L > n - 2m,$$

что является противоречием. Значит, поверхность T особа в точке P и

$$n - 2m = \Delta \cdot S \geq \text{mult}_P(D) \text{mult}_P(T) - mS \cdot L > 2n - 2m,$$

где S – общая поверхность в $|-2K_X|$, которая содержит P . Противоречие.

Показано, что кривая L является приводимой. Можно считать, что $L = \overline{C}_1 \cup \overline{Z}_1$, а поверхность T квазигладкая. Тогда выполнены равенства $\overline{C}_1^2 = -4/3$, $\overline{Z}_1^2 = -2/3$ и $\overline{C}_1 \cdot \overline{Z}_1 = 2$ на поверхности T , но

$$D|_T = m_1 \overline{C}_1 + m_2 \overline{Z}_1 + \Upsilon \equiv -nK_X|_T,$$

где m_1 и m_2 – некоторые неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые $\overline{C}_1$ и $\overline{Z}_1$.

Предположим, что $P \in \overline{Z}_1 \cap \overline{C}_1$. Тогда

$$\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}m_1 - 2m_2 = \Upsilon \cdot \overline{C}_1 > n - m_1 - m_2, \quad \frac{2}{3}n - 2m_1 + \frac{2}{3}m_2 = \Upsilon \cdot \overline{Z}_1 > n - m_1 - m_2,$$

откуда $m_1 > n/2$ и $m_2 > n/2$, но $m_1/3 + 2m_2/3 \leq n/2$ по замечанию 2.12. Противоречие.

Можно считать, что $\overline{C}_1 \ni P \notin \overline{Z}_1$, потому что случай $\overline{Z}_1 \ni P \notin \overline{C}_1$ проще. Тогда

$$\frac{1}{3}n + \frac{4}{3}m_1 - 2m_2 = \Upsilon \cdot \overline{C}_1 > n - m_1, \quad \frac{2}{3}n - 2m_1 + \frac{2}{3}m_2 = \Upsilon \cdot \overline{Z}_1 \geq 0,$$

откуда следует неравенство $m_1 < n$, потому что $m_1/3 + 2m_2/3 \leq n/2$. Теперь из доказательства леммы 3.9 следует, что выполнено $\text{mult}_P(\Upsilon \cdot \overline{C}_1) > n$, откуда, в свою очередь, следует, что $n/3 + 4m_1/3 - 2m_2 > n$. Полученные неравенства несовместны.

ЛЕММА 3.18. *Выполнено неравенство $\mathfrak{I} \neq 8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{I} = 8$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 4)$ степени 9, особенности которой состоят из особой точки O , являющейся особой точкой типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$.

Существует коммутативная диаграмма

где ξ , ψ и χ – проекции, α – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 3)$, β – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, γ – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ особой точки типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, η – эллиптическое расслоение,

σ – бирациональный морфизм, стягивающий неособые рациональные кривые $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_{15}$, а ω – двойное накрытие.

Положим $C_i = \alpha(\overline{C}_i)$. Тогда $-K_X \cdot C_i = 1/4$.

Пусть L – слой проекции ψ , который проходит через точку P , а S – общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$, которая проходит через точку P . Тогда $L \subset S$, а слой L приведен.

Предположим, что кривая L неприводима. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.5, мы видим, что L особа в точке P . Тогда существует поверхность $T \in |-K_X|$, имеющая особенность в точке P . Положим $D \cdot T = mL + \Delta$, где m – некоторое неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Тогда

$$\frac{3}{4}n - \frac{3}{4}m = S \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > 2n - m \text{mult}_P(L) = 2n - 2m,$$

откуда следует, что $m > n$, однако $m \leq n$ по замечанию 2.12. Противоречие.

Итак, мы показали, что слой L приводим. Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 3.9, мы видим, что $L = C_i + Z_i$, где Z_i – неприводимая кривая такая, что $-K_X \cdot Z_i = 1/2$.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + f_5(x, y, z, t)w + f_9(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 3, 4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 3$, $\text{wt}(w) = 4$, а f_i – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть R – поверхность, высекаемая на X уравнением $z = 0$. Тогда

$$C_i^2 = -\frac{17}{20}, \quad Z_i^2 = -\frac{3}{5}, \quad C_i \cdot Z_i = \frac{11}{10}$$

на поверхности R . Положим $D|_R = m_C C_i + m_Z Z_i + \Upsilon$, где m_C и m_Z – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_i и Z_i . Тогда

$$\frac{1}{4}n + \frac{17}{20}m_C - \frac{11}{10}m_Z = \Upsilon \cdot C_i \geq 0, \quad \frac{1}{2}n - \frac{11}{10}m_C + \frac{3}{5}m_Z = \Upsilon \cdot Z_i \geq 0,$$

откуда следует, что $m_C \leq n$ и $m_Z \leq n$, потому что $m_C + 2m_Z \leq 3n$ согласно замечанию 2.12.

Предположим, что $P \in \overline{Z}_1 \cap \overline{C}_1$. Из доказательств лемм 3.9 и 3.17 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}n + \frac{17}{20}m_C - \frac{11}{10}m_Z &= \Upsilon \cdot C_i > n - m_Z, \\ \frac{1}{2}n - \frac{11}{10}m_C + \frac{3}{5}m_Z &= \Upsilon \cdot Z_i > n - m_C, \end{aligned}$$

откуда сразу следует противоречие с неравенством $m_C + 2m_Z \leq 3n$. Теперь из доказательств лемм 3.9 и 3.17 следует, что либо

$$\frac{1}{4}n + \frac{17}{20}m_C - \frac{11}{10}m_Z = \Upsilon \cdot C_i > n, \quad \frac{1}{2}n - \frac{11}{10}m_C + \frac{3}{5}m_Z = \Upsilon \cdot Z_i \geq 0,$$

либо имеет место система линейных неравенств

$$\frac{1}{4}n + \frac{17}{20}m_C - \frac{11}{10}m_Z \geq 0, \quad \frac{1}{2}n - \frac{11}{10}m_C + \frac{3}{5}m_Z > n,$$

но в обоих случаях противоречие получить очень легко. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.19. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 7$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 7$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 3)$ степени 8, особенности которой состоят из особой точки Q типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и четырех особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ – естественная проекция. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta} & Y \\ \alpha \downarrow & & \searrow \eta \\ X & \dashrightarrow_{\psi} & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где α – раздутие точки Q с весами $(1, 1, 2)$, β – раздутие с весами $(1, 1, 1)$ особой точки, которая доминирует точку Q , а η – эллиптическое расслоение.

Пусть C – слой проекции ψ , который проходит через точку P . Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3.1, мы видим, что C не является базисной кривой пучка $|-K_X|$, откуда следует, что существует единственная поверхность S в пучке $|-K_X|$, которая проходит через точку P , кривая C приведена и не содержит особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

Предположим, что кривая C неприводима. В этом случае особенности кривой C состоят из конечного числа двойных точек вне точки Q . Из доказательства леммы 3.5 следует, что кривая C особа в точке P . Таким образом, либо поверхность S особа в точке P , либо существует неприводимая поверхность в линейной системе $|-2K_X|$, которая имеет особенность в точке P . Теперь из аргументов, использованных в доказательстве леммы 3.18, следует противоречие.

Из доказательства леммы 3.5 следует, что $C = L + Z$, где L и Z – неприводимые кривые такие, что $L \neq Z$ и либо

$$-K_X \cdot L = -K_X \cdot Z = \frac{2}{3},$$

либо $-K_X \cdot L = 1/3$ и $-K_X \cdot Z = 1$. Теперь из доказательства леммы 3.9 несложно следует, что кривая L является одной из кривых, стягиваемых проекцией $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2, 2)$. Тогда

$$L^2 = -\frac{4}{3}, \quad Z^2 = 0, \quad Z \cdot L = 2$$

на поверхности S . Теперь, рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 3.18, мы получаем противоречие. Лемма доказана.

Итак, утверждение леммы 2.4 полностью доказано.

§ 4. Несверхжесткие гиперповерхности

Воспользуемся предположениями и обозначениями из леммы 2.10. Тогда X не является бирационально сверхжесткой по лемме 2.7. Покажем, что $\mathfrak{J} \notin \{27, 30, 41, 68\}$.

ЛЕММА 4.1. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 30$ и $\mathfrak{J} \neq 41$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 41$, потому что неравенство $\mathfrak{J} \neq 30$ доказывается аналогично. Воспользуемся обозначениями из § 8. Тогда из лемм 2.4 и 2.6 следует, что мы можем считать, что $O = O_1$.

Пусть G – поверхность на гиперповерхности X , которая высекается уравнением $w = 0$, а $\bar{G}$ – собственный прообраз поверхности G на многообразии U . Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq -K_U \cdot \bar{G} \cdot \bar{D} = \left(\alpha^*(-K_X) - \frac{1}{5}E \right) \cdot (\alpha^*(-10K_X) - 3E) \cdot (\alpha^*(-nK_X) - \mu) \\ &= n - \frac{15\mu}{4}, \end{aligned}$$

если $\mu > 3n/10$, поскольку $D \neq G$. Таким образом, показано, что $\mu \leq 4n/15 < 3n/10$.

Предположим, что P является неособой точкой многообразия U . Тогда

$$1 < \text{mult}_P \left(\frac{1}{n}\bar{D} + \left(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{5} \right) E \right) = \frac{\text{mult}_P(\bar{D})}{n} + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{5},$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(\bar{D}) > 6n/5 - \mu$. Пусть S – единственная поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда $\bar{D} \neq S$.

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^{75} C_i$. Пусть H – достаточно общая поверхность в $|-10K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда поверхность H не содержит компоненты цикла $\bar{D} \cdot S$, откуда следует, что

$$n - \frac{5}{2}\mu = \bar{D} \cdot S \cdot H > \frac{6}{5}n - \mu,$$

что является противоречием. Итак, существует кривая C_i такая, что $P \in C_i$.

Слой рационального отображения $\psi \circ \alpha$ над точкой $\psi(P)$ состоит из кривой C_i и еще одной неприводимой кривой $\bar{C}_i$ такой, что $-K_U \cdot \bar{C}_i = 1/5$ и $E \cdot \bar{C}_i = 0$. Положим

$$\bar{D} \cdot S = mC_i + \bar{m}\bar{C}_i + \Delta,$$

где m и $\bar{m}$ – некоторые неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_i и $\bar{C}_i$. Пусть R – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-4K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда

$$\frac{2}{5}n - \mu + \frac{4}{5}\bar{m} = R \cdot \Delta > \frac{6}{5}n - \mu - m,$$

откуда $m - 4\bar{m}/5 > 4n/5$, однако $m + \bar{m} \leq n/2$ согласно замечанию 2.12. Противоречие.

Таким образом, многообразие U особо в точке P . Пусть $\iota: \check{U} \rightarrow U$ – взвешенное раздутие особой точки P с весами $(1, 1, 3)$. Тогда

$$\check{D} \equiv \iota^*(\bar{D}) - \nu F,$$

где ν – положительное рациональное число, F – исключительный дивизор би-рационального морфизма ι , а $\check{D}$ – собственный прообраз поверхности D на многообразии $\check{U}$.

Пусть $\check{E}$ – собственный прообраз дивизора E на многообразии $\check{U}$. Тогда

$$\check{D} + \left(\mu - \frac{1}{5}n\right)\check{E} \equiv \iota^*\left(\bar{D} + \left(\mu - \frac{1}{5}n\right)E\right) - \left(\nu + \frac{3}{4}\mu - \frac{3}{20}n\right)F,$$

откуда следует, что $\nu > 2n/5 - 3\mu/4$ согласно работе [10].

Пусть $\check{T}$ и $\check{T}'$ – общие поверхности в пучке $|-K_{\check{U}}|$. Тогда $\check{T} \cdot \check{T}' = \check{L}$, где $\check{L}$ – неприводимая кривая. Положим $\check{D} \cdot \check{T} = \varepsilon \check{L} + \Upsilon$, где ε – неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую $\check{L}$. Тогда

$$0 \leq \check{T}' \cdot \Upsilon = \check{T}' \cdot (\check{D} \cdot \check{T} - \varepsilon \check{L}) = \frac{1}{10}n - \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{3}\nu + \frac{\varepsilon}{30},$$

откуда следует, что $\nu \leq 3n/10 - 3\mu/4 + \varepsilon/10$, но $\nu > 2n/5 - 3\mu/4$. Тогда

$$\frac{3}{10}n - \frac{3}{4}\mu + \frac{\varepsilon}{10} > \frac{2}{5}n - \frac{3}{4}\mu,$$

что невозможно, потому что $\varepsilon \leq n$ согласно замечанию 2.12. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 27$ и $\mathfrak{J} \neq 68$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что выполнено равенство $\mathfrak{J} = 68$, поскольку доказательство неравенства $\mathfrak{J} \neq 27$ аналогично. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 14)$ степени 28, которая содержит две особые точки O_1 и O_2 типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$.

Можно считать, что $O = O_1$ (см. леммы 2.4, 2.5). Тогда X может быть задана уравнением

$$t^2w + tf_{21}(x, y, z, w) + f_{28}(x, y, z, w) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 14) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 3$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 7$, $\text{wt}(w) = 14$ и f_i – квазиоднородный многочлен степени i , а точка O_1 задается уравнениями $x = y = z = w = 0$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & U & \xleftarrow{\gamma} & Y \\ & \swarrow \sigma & \downarrow \alpha & & \searrow \eta \\ V & & X & & \\ & \swarrow \omega & \nwarrow \xi & \nearrow \psi & \searrow \\ & \mathbb{P}(1, 3, 4, 14) & \xleftarrow{\chi} & \mathbb{P}(1, 3, 4) & \end{array}$$

где ξ , ψ и χ – проекции, γ – взвешенное раздутие с весами $(1, 3, 4)$ точки, доминирующей точку O_2 , морфизм η является эллиптическим расслоением, σ – бирациональный морфизм, который стягивает 49 кривых $C_1, \dots, C_{49}$, а ω – двулистное накрытие.

Исключительные дивизоры бирационального морфизма $\alpha \circ \gamma$ суть сечения эллиптического расслоения η . Многообразие U содержит 49 неособых неприводимых кривых $Z_1, \dots, Z_{49}$ таких, что $\alpha(Z_i)$ – кривая, а $\alpha(Z_i) \cup \alpha(C_i)$ – слой естественной проекции ψ над точкой $\psi(C_i)$, откуда следует, что выполнено равенство $-K_U \cdot Z_i = 1/7$.

Предположим, что $\mu > 3n/14$. Пусть M – поверхность на многообразии X , которая высекается уравнением $w = 0$, а $\bar{M}$ – собственный прообраз поверхности M на U . Тогда

$$\bar{M} \equiv \alpha^*(-14K_X) - 3E,$$

откуда следует, что $D \neq M$. Дивизор $-K_U$ численно эффективен. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq -K_U \cdot \bar{M} \cdot \bar{D} = \left(\alpha^*(-K_X) - \frac{1}{7}E \right) \cdot (\alpha^*(-14K_X) - 3E) \cdot (\alpha^*(-nK_X) - \mu) \\ &= \frac{1}{42}n - \frac{1}{8}\mu, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mu \leq 4n/21 < 3n/14$. Итак, выполнены неравенства $3n/14 \geq \mu > n/7$.

Предположим, что многообразие U неособо в точке P . Тогда

$$\text{mult}_P(\bar{D}) > \frac{8}{7}n - \mu$$

и существует поверхность $S \in |-3K_U|$, содержащая точку P . Пусть T – единственная поверхность в линейной системе $|-K_U|$.

Предположим, что $P \in T$. Тогда $P \notin \bigcup_{i=1}^{49} C_i$. В частности, можно показать, что существует поверхность $H \in |-84K_U|$, которая содержит точку P , но не содержит компоненты эффективного цикла $\bar{D} \cdot T$. Итак, мы видим, что

$$2n - 7\mu = \bar{D} \cdot T \cdot H > \frac{8}{7}n - \mu,$$

откуда следует неравенство $\mu < n/7$, однако $\mu > n/7$. Противоречие.

Показано, что P не содержится в поверхности T . Пусть L – единственная кривая на поверхности $E \cong \mathbb{P}(1, 3, 4)$, которая содержится в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(1)|$. Тогда имеем $P \notin L = T \cdot E$, откуда следует, что существует единственная неособая неприводимая кривая $C \subset E$, которая содержится в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,3,4)}(3)|$ и проходит через точку P . Положим

$$\bar{D}|_E = \varepsilon C + \Upsilon \equiv 7\mu L,$$

где ε – неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл на поверхности E , носитель которого не содержит кривую C . Тогда

$$\frac{7\mu - 3\varepsilon}{4} = (7\mu - 3\varepsilon)L \cdot C = C \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\Upsilon) > \frac{8}{7}n - \mu - \varepsilon,$$

откуда следует, что $11\mu + \varepsilon > 32n/7$, однако $\varepsilon \leq 7\mu/3$, потому что $\Upsilon \equiv (7\mu - 3\varepsilon)L$. Показано, что

$$\frac{40}{3}\mu \geq 11\mu + \varepsilon > \frac{32}{7}n.$$

Отсюда вытекает, что $\mu > 12n/35$. Последнее неравенство невозможно, потому что $\mu \leq 3n/14$.

Предположим теперь, что P – особая точка типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Пусть $\iota: \check{U} \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 1, 3)$. Тогда

$$\check{D} \equiv \iota^*(\bar{D}) - \nu F,$$

где ν – положительное рациональное число, F – исключительный дивизор бирационального морфизма ι , а $\check{D}$ – собственный прообраз поверхности D на многообразии $\check{U}$.

Пусть $\check{E}$ – собственный прообраз поверхности E на многообразии $\check{U}$. Тогда

$$\check{D} + \left(\mu - \frac{1}{7}\right)\check{E} \equiv \iota^*\left(\bar{D} + \left(\mu - \frac{1}{7}n\right)E\right) - \left(\nu + \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{28}n\right)F,$$

откуда следует неравенство $\nu > 2n/7 - \mu/4$ согласно работе [10].

Пусть $\check{T}$ – собственный прообраз поверхности T на многообразии $\check{U}$, а $\check{H}$ – общая поверхность в линейной системе $|-3K_{\check{U}}|$. Положим $\check{D} \cdot \check{T} = \varepsilon\check{L} + \Phi$, где ε – некоторое неотрицательное целое число, $\check{L}$ – базисная кривая линейной системы $|-3K_{\check{U}}|$, а Φ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую $\check{L}$. Тогда

$$0 \leq \check{H} \cdot \Phi = \check{H} \cdot (\check{D} \cdot \check{T} - \varepsilon\check{L}) = \frac{1}{14}n - \frac{1}{4}\mu - \nu + \frac{9}{14}\varepsilon,$$

но $\nu > 2n/7 - \mu/4$, откуда следует неравенство $\varepsilon > n/3$. Последнее неравенство невозможно, поскольку $\varepsilon \leq n/3$ согласно замечанию 2.12.

Показано, что P – особая точка типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Пусть $v: \check{U} \rightarrow U$ – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, 1, 2)$. Тогда

$$\check{D} \equiv v^*(\bar{D}) - \theta G,$$

где θ – некоторое рациональное число, G – исключительный дивизор бирационального морфизма v , а $\check{D}$ – собственный прообраз поверхности D на многообразии $\check{U}$.

Пусть $\check{E}$ – собственный прообраз поверхности E на многообразии $\check{U}$. Тогда

$$\check{D} + \left(\mu - \frac{1}{7}n\right)\check{E} \equiv v^*\left(\bar{D} + \left(\mu - \frac{1}{7}n\right)E\right) - \left(\theta + \frac{2}{3}\mu - \frac{2}{21}n\right)G,$$

откуда следует неравенство $\theta > 3n/7 - 2\mu/3$ согласно работе [10].

Пусть S – общая поверхность в $|-4K_U|$. Тогда $T \cdot S = L$, где L – неприводимая кривая такая, что $\alpha(L)$ – базисная кривая пучка $|-4K_X|$. Пусть $\bar{D} \cdot T = \varepsilon L + \Psi$, где ε – неотрицательное целое число, а Ψ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L .

Пусть $\dot{T}$ и $\dot{S}$ – собственные прообразы на $\dot{U}$ поверхностей T и S соответственно. Тогда

$$\dot{T} \equiv v^*(-K_U) - \frac{1}{3}G, \quad \dot{S} \equiv v^*(-4K_U) - \frac{1}{3}G,$$

однако $\dot{T} \cdot \dot{S} = \dot{L}$, где $\dot{L}$ – собственный прообраз кривой L . Пусть $\dot{D} \cdot \dot{T} = \varepsilon \dot{L} + \Xi$ для некоторого эффективного цикла Ξ , носитель которого не содержит кривую $\dot{L}$. Тогда

$$0 \leq \dot{S} \cdot \Xi = \dot{S} \cdot (\dot{D} \cdot \dot{T} - \varepsilon \dot{L}) = \frac{2}{21}n - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{42}\varepsilon,$$

так как $\dot{S} \cdot \dot{L} = 1/42$. С другой стороны, выполнено неравенство $\theta > 3n/7 - 2\mu/3$. Имеем

$$0 \leq \frac{1}{42}\varepsilon \leq \frac{2}{21}n - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}\theta < \frac{2}{21}n - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}n - \frac{2}{3}\mu\right) = -\frac{5}{42}n < 0,$$

что является противоречием. Лемма доказана.

Отметим, что аргументы, использованные при доказательстве лемм 4.1, 4.2, могут быть также применены для доказательств лемм 2.10, 2.11.

§ 5. Особые точки

В настоящем параграфе мы докажем утверждение леммы 2.10. Воспользуемся предположениями и обозначениями из леммы 2.10. Предположим, что точка P является особой точкой многообразия U . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Точка P – особая точка типа $\frac{1}{\bar{r}}(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$, где $\bar{a}$ и $\bar{r}$ – взаимно простые натуральные числа такие, что $\bar{r} > 2\bar{a}$. Пусть $\beta: W \rightarrow U$ – раздутие точки P с весами $(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$. Тогда

$$-K_W^3 = -K_X^3 - \frac{1}{ra(r-a)} - \frac{1}{\bar{r}\bar{a}(\bar{r}-\bar{a})} = \frac{\sum_{i=1}^4 a_i}{a_1 a_2 a_3 a_4} - K_X^3 - \frac{1}{ra(r-a)} - \frac{1}{\bar{r}\bar{a}(\bar{r}-\bar{a})}.$$

Пусть $\check{D}$ – собственный прообраз дивизора D на многообразии W . Существует такое рациональное число ν , что выполнено соотношение

$$\check{D} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-nK_X) - \mu\beta^*(E) - \nu G,$$

где G – исключительный дивизор раздутия β . Тогда

$$K_W + \frac{1}{n}\check{D} + \left(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{r}\right)\check{E} \equiv \beta^*\left(K_U + \frac{1}{n}\bar{D} + \left(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{r}\right)E\right) - \varepsilon G \equiv -\varepsilon G,$$

где $\check{E}$ – собственный прообраз поверхности E на многообразии W , а ε – некоторое рациональное число. Тогда из работы [10] следует, что выполнено неравенство $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 5.1. *Выполнено неравенство $-K_W^3 \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $-K_W^3 = 0$. Из работы [11] следует, что линейная система $|-rK_W|$ свободна и задает эллиптическое расслоение $\eta: W \rightarrow Y$ при $r \gg 0$. Тогда

$$0 \leq \check{D} \cdot C = -\varepsilon G \cdot C < 0,$$

где C – общий слой эллиптического расслоения η . Противоречие. Лемма доказана.

Из работы [11] следует, что либо выполнено строгое неравенство $-K_W^3 < 0$, либо антиканонический дивизор $-K_W$ является численно эффективным и объемным.

ЛЕММА 5.2. *Предположим, что $-K_W^3 < 0$. Тогда $-K_W$ не является объемным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что дивизор $-K_W$ объемен. Тогда из работы [11] следует, что мы имеем только следующие две возможности:

- 1) выполнено равенство $\mathfrak{J} = 25$, а O – особая точка типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$;
- 2) выполнено равенство $\mathfrak{J} = 43$, а O – особая точка типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$.

Предположим, что $\mathfrak{J} = 43$. Тогда дивизор $-K_W - 4\beta^*(K_U)$ численно эффективен (см. [11]) и существует поверхность H в линейной системе $|-2K_X|$ такая, что

$$\check{H} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-2K_X) - \frac{11}{9}\beta^*(E) - \frac{3}{2}G,$$

где $\check{H}$ – собственный прообраз поверхности H на многообразии W . Имеем

$$0 \leq \check{H} \cdot \check{D} \cdot (-K_W - 4\beta^*(K_U)) = \frac{5}{9}n - \frac{11}{4}\mu - \nu,$$

что является противоречием, потому что $\nu - n/3 + 3\mu/4 = n\varepsilon > 0$ и $\mu > n/9$.

Итак, показано, что $\mathfrak{J} = 25$. Из работы [11] следует, что дивизор $-K_W - 3\gamma^*(K_U)$ является численно эффективным и существует поверхность $R \subset W$ такая, что

$$R \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-K_X) - \frac{8}{7}\beta^*(E) - \frac{2}{3}G,$$

однако $\nu + 2\mu/3 - 3n/7 = n\varepsilon > 0$. Тогда

$$0 \leq R \cdot \check{D} \cdot (-K_W - 3\beta^*(K_U)) = \frac{5}{7}n - \frac{8}{3}\mu - \nu,$$

что является противоречием, поскольку $\mu > n/7$. Лемма доказана.

Пусть T – поверхность в $|-K_X|$, а $\mathcal{P}$ – пучок, порожденный дивизорами nT и D . Тогда

$$\mathcal{B} \equiv -nK_W \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-nK_X) - \frac{n}{r}\beta^*(E) - \frac{n}{\bar{r}}G, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{B}$ – собственный прообраз пучка $\mathcal{P}$ на многообразии W .

ЛЕММА 5.3. *Дивизор $-K_W$ является численно эффективным и объемным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что дивизор $-K_W$ не является численно эффективным и объемным. Тогда $-K_W^3 < 0$, а дивизор $-K_W$ не является объемным по лемме 5.2.

Из работы [12] следует, что эквивалентность (5.1) почти однозначно определяет⁴ пучок $\mathcal{P}$.

Пусть $\mathfrak{J} \in \{45, 48, 58, 69, 74, 79\}$. Тогда O – особая точка типа $\frac{1}{a_4}(1, a_1, a_3)$, а гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wf(x, y, z, t) + g(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_2$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, а f и g – квазиоднородные многочлены. Пусть S – поверхность, высекаемая на X уравнением $z = 0$, а $\mathcal{M}$ – пучок, порожденный дивизорами a_2T и S . Из работы [12] следует, что $\mathcal{P} = \mathcal{M}$ или $\mathcal{P} = |-a_1K_X|$.

Предположим, что $\mathcal{P} = |-a_1K_X|$. Тогда $\mu = n/a_1$, что является противоречием.

Итак, мы видим, что $\mathcal{P} = \mathcal{M}$. Пусть M – дивизор в пучке $\mathcal{M}$, а $\overline{M}$ – его собственный прообраз на многообразии U . Тогда выполнена численная эквивалентность

$$\overline{M} \equiv \alpha^*(M) - \frac{a_3}{a_4}E,$$

если $M \neq S$. Из неравенства $\mu > n/a_4$ следует, что $D = S$. С другой стороны, из общности гиперповерхности X согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14] следует, что логпара $(X, \frac{1}{a_2}S)$ имеет логканонические особенности в точке O . Противоречие.

Итак, показано, что $\mathfrak{J} \notin \{45, 48, 58, 69, 74, 79\}$. Пусть $\mathfrak{J} \neq 76$. Тогда O является особой точкой типа $\frac{1}{a_4}(1, a_1, a_3)$, а гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wf(x, y, z, t) + g(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_2$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, а f и g – квазиоднородные многочлены. В этом случае точка O задается уравнениями $x = y = z = t = 0$.

Пусть S – поверхность, которая высекается на X уравнением $z = 0$, а $\mathcal{M}$ – пучок, порожденный дивизорами a_2T и S . Тогда из работы [12] и численной эквивалентности (5.1) следует, что либо $\mathcal{P} = |-a_1K_X|$, либо $\mathcal{P} = \mathcal{M}$. Однако выполнено неравенство $n \neq a_1$, поскольку $\mu > n/a_4$. Таким образом, мы видим, что $\mathcal{P} = \mathcal{M}$ и $n = a_2$.

Пусть M – произвольный дивизор в пучке $\mathcal{M}$, а $\overline{M}$ – его собственный прообраз на многообразии U . Тогда выполнена численная эквивалентность

$$\overline{M} \equiv \alpha^*(M) - \frac{a_3}{a_4}E,$$

⁴Например, из работы [12] следует, что эквивалентность (5.1) влечет равенство $n = 1$, если $a_1 = 1$.

если $M \neq S$, однако $\mu > n/a_4$. Мы видим, что $D = S$, но логпара $(X, \frac{1}{a_2}S)$ имеет логканонические особенности в точке O согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14], потому что гиперповерхность X является достаточно общей по предположению. Противоречие.

Показано, что выполнено равенство $\mathfrak{J} = 76$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы несложно приходим к противоречию. Лемма доказана.

Доказано, что $\mathfrak{J} \in \{8, 12, 13, 16, 20, 24, 25, 26, 31, 33, 36, 38, 46, 47, 48, 54, 56, 58, 65, 74, 79\}$.

ЛЕММА 5.4. *Случай $\mathfrak{J} \notin \{12, 13, 20, 25, 31, 33, 38, 58\}$ невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} \notin \{12, 13, 20, 25, 31, 33, 38, 58\}$. Тогда

$$r = a_4, \quad r - a = a_3, \quad \bar{r} = r - a, \quad \bar{a} = a, \quad n\varepsilon = \nu - \frac{1}{\bar{r}}(\bar{r} - \bar{a})\left(\frac{n}{r} - \mu\right) - \frac{n}{\bar{r}}.$$

Предположим, что $\mathfrak{J} \neq 24$. Тогда гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2z + wf(x, y, z, t) + g(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a$, $\text{wt}(z) = d - 2a_4$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, точка O задана уравнениями $x = y = z = t = 0$, а f и g — квазиоднородные многочлены. Тогда

$$\check{R} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-a_2K_X) - \frac{d-r}{r}\beta^*(E) - \frac{\bar{r}-\bar{a}}{\bar{r}}G,$$

где $\check{R}$ — собственный прообраз на многообразии W поверхности, высекаемой на гиперповерхности X уравнением $z = 0$. Тогда $\check{D} \neq \check{R}$ и

$$\frac{n \sum_{i=1}^4 a_i}{a_1 a_3 a_4} - \frac{\mu(d-r)}{a(r-a)} - \frac{\nu(\bar{r}-\bar{a})}{\bar{a}(\bar{r}-\bar{a})} = -K_W \cdot \check{D} \cdot \check{R} \geq 0,$$

откуда сразу следует, что $\mu < n/r$, потому что $\varepsilon > 0$. Противоречие.

Показано, что $\mathfrak{J} = 24$. Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 3.14. Тогда

$$\check{R} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-K_X) - \frac{8}{7}\beta^*(E) - \frac{3}{5}G,$$

где $\check{R}$ — собственный прообраз поверхности R на многообразии W . Имеем

$$\frac{3}{14}n - \frac{8}{10}\mu - \frac{1}{2}\nu = -K_W \cdot \check{D} \cdot \check{R} \geq 0,$$

однако $n\varepsilon = \nu + 3\mu/5 - 2n/7 > 0$ и $\mu < n/7$, откуда сразу следует противоречие. Лемма доказана.

Дивизор $-K_W$ численно эффективен и объемен, но $\mathfrak{J} \in \{12, 13, 20, 25, 31, 33, 38, 58\}$. Тогда

$$r = a_4, \quad r - a = a_3, \quad \bar{a} = a_1, \quad \bar{r} - \bar{a} = a_2, \quad a_2 \neq a_3, \\ n\varepsilon = \nu + \frac{r-2a}{r-a}\mu - \frac{2}{r}n$$

согласно [11], а W обладает особой точкой $\bar{P} \neq P$ типа $\frac{1}{r}(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\beta} & W & \xleftarrow{\gamma} & V \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \eta \\ X & \text{-----} & \xrightarrow{\psi} & \text{-----} & \mathbb{P}(1, a_1, a_2) \end{array}$$

коммутативна, где ψ – проекция, γ – раздутие точки $\bar{P}$ с весами $(1, \bar{a}, \bar{r} - \bar{a})$, а η является эллиптическим расслоением. Теперь обозначим через F исключительный дивизор взвешенного раздутия γ и через $\bar{G}$ собственный прообраз поверхности G на многообразии V . Тогда $G \not\ni \bar{P} \notin \check{E}$, а поверхности F и $\bar{G}$ являются сечениями расслоения η .

ЛЕММА 5.5. *Выполнено неравенство $\varepsilon < 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приведем доказательство только в случае $\mathfrak{J} = 25$, потому что доказательство в общем случае аналогично.

Итак, пусть $\mathfrak{J} = 25$. Тогда

$$0 \leq -K_W \cdot \check{D} \cdot \check{E} = \left(\beta^*(E) - \frac{1}{4}G \right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\beta^*(E) - \frac{1}{4}G \right) \cdot (-\mu\beta^*(E) - \nu G) = \frac{7}{12}\mu - \frac{1}{3}\nu,$$

а точки O и P являются особыми точками типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$ и $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$ соответственно. Тогда

$$n\varepsilon = \nu + \frac{1}{4}\mu - \frac{2}{7}n \leq 2\mu - \frac{2}{7}n \leq \frac{1}{4}n,$$

поскольку из доказательства леммы 2.9 следует неравенство $\mu \leq 15n/56$. Лемма доказана.

Таким образом, особенности логпары $(W, \frac{1}{n}\check{D} + (\frac{\mu}{n} - \frac{1}{r})\check{E} + \varepsilon G)$ не являются логканоническими в некоторой точке $Q \in G$.

ЛЕММА 5.6. *Многообразие W неособо в точке Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что многообразие W особо в точке Q . Тогда Q – особая точка типа $\frac{1}{r}(1, 1, \check{r} - 1)$, где либо $\check{r} = \bar{r} - \bar{a}$, либо $\check{r} = \bar{a} \neq 1$.

Пусть $\omega: \check{W} \rightarrow W$ – взвешенное раздутие точки Q с весами $(1, 1, \check{r} - 1)$, а $\mathcal{H}$ – собственный прообраз пучка $\mathcal{P}$ на многообразии $\check{W}$. Тогда $\mathcal{H} \equiv -nK_{\check{W}}$ согласно работе [10].

Из работы [12] и эквивалентности $\mathcal{H} \equiv -nK_{\check{W}}$ следует, что $n = r\mu = a_1$, но ранее было показано, что выполнено строгое неравенство $\mu > n/r$. Противоречие. Лемма доказана.

Логпара $(W, \frac{1}{n}\check{D} + (\frac{\mu}{n} - \frac{1}{r})\check{E} + \varepsilon G)$ не является канонической в точке Q . Тогда

$$\text{mult}_Q(\check{D}) > \begin{cases} n + n/r - \mu - n\varepsilon, & \text{если } Q \in \check{E}, \\ n - n\varepsilon, & \text{если } Q \notin \check{E}. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.7. *Существует поверхность $T \in |-K_W|$ такая, что $Q \in T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование поверхности $T \in |-K_W|$, содержащей точку Q , очевидно в случае, когда $a_1 = 1$. Значит, можно считать, что $a_1 \neq 1$. Тогда $\mathfrak{J} \in \{33, 38, 58\}$.

Пусть $\mathfrak{J} = 38$. Существует одна поверхность $T \in |-K_W|$. Предположим, что Q не содержится в поверхности T . Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 2.14, мы видим, что выполнено неравенство $\text{mult}_Q(\check{D}) \leq (a_1 + a_2)\nu/a_1$. Тогда

$$\nu \frac{a_1 + a_2}{a_1} > n - \left(\mu - \frac{1}{7}n \right) - \left(\nu + \frac{3}{5}\mu - \frac{2}{7}n \right),$$

однако $\text{mult}_Q(\check{D}) > n + n/r - \mu - n\varepsilon$. Значит, выполнено неравенство $\mu > 55n/56 - 5\nu/2$, но из выполнения неравенства $-K_W \cdot \check{D} \geq 0$ и доказательства леммы 2.9 следует выполнение неравенств $\nu \leq 10\mu/7$ и $\mu \leq 9n/40$ соответственно.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$w^2y + w(t^2 + tf_5(x, y, z) + f_{10}(x, y, z)) + tf_{13}(x, y, z) + f_{18}(x, y, z) = 0 \\ \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 5$, $\text{wt}(w) = 8$, а $f_i(x, y, z)$ — квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\check{S}$ — собственный прообраз на многообразии W поверхности, которая высекается на X уравнением $wy + (t^2 + tf_5(x, y, z) + f_{10}(x, y, z)) = 0$. Тогда

$$\check{S} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-10K_X) - \frac{18}{8}\beta^*(E) - \frac{13}{5}G,$$

однако $\check{S} \neq \check{D}$. Поскольку дивизор $-K_W$ является численно эффективным, мы видим, что

$$0 \leq -K_W \cdot \check{D} \cdot \check{S} = \frac{3}{4}n - \frac{6}{5}\mu - \frac{13}{6}\nu,$$

но $\nu \leq 8\mu/5$, откуда сразу следует неравенство $\nu \leq 9n/35$. Из полученных неравенств несложно следует противоречие, показывающее, что $\mathfrak{J} \neq 38$.

Пусть $\mathfrak{J} = 33$. Тогда X — гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$ степени 17, точка O является особой точкой типа $\frac{1}{7}(1, 2, 5)$, а точка P является особой точкой типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Из доказательств лемм 5.5, 2.9 следуют неравенства $\nu \leq 7\mu/5$ и $\mu \leq 17/70$, а из доказательства леммы 2.14 следует, что $\text{mult}_Q(\check{D}) \leq 5\nu/2$. Итак, выполнено неравенство

$$\frac{5}{2}\nu > n - \left(\mu - \frac{1}{7}n \right) - \left(\nu + \frac{3}{5}\mu - \frac{2}{7}n \right),$$

откуда имеем $7\nu/2 + 8\mu/5 > 10n/7$. Гиперповерхность X можно задать уравнением

$$w^2z + w(t^2 + tf_5(x, y, z) + f_{10}(x, y, z)) + tf_{12}(x, y, z) + f_{17}(x, y, z) = 0 \\ \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = 3$, $\text{wt}(t) = 5$, $\text{wt}(w) = 7$, а f_i – квазиоднородный многочлен степени i . Пусть S – поверхность на гиперповерхности X , высекаемая уравнением

$$wz + (t^2 + tf_5(x, y, z) + f_{10}(x, y, z)) = 0,$$

а $\check{S}$ – собственный прообраз поверхности S на многообразии W . Тогда

$$\check{S} \equiv (\alpha \circ \beta)^*(-10K_X) - \frac{17}{8}\beta^*(E) - \frac{12}{5}G,$$

но особенности логпары $(X, \frac{1}{10}S)$ являются логканоническими согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14]. Таким образом, показано, что $S \neq D$.

Дивизор $-K_W$ является численно эффективным, откуда следует, что

$$0 \leq -K_W \cdot \check{D} \cdot \check{S} = \frac{17}{21}n - \frac{17}{10}\mu - 2\nu,$$

однако $\nu \leq 7\mu/5$. Тогда $\nu \leq 34n/135$, что невозможно, так как $\mu \leq 17n/70$ и $7\nu/2 + 8\mu/5 > 10n/7$.

Мы видим, что $\mathbf{J} = 58$. В этом случае X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 7, 10)$ степени 24, O – особая точка типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$, а P – особая точка типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$.

Из доказательств лемм 5.5 и 2.9 следуют неравенства $\nu \leq 10\mu/7$ и $\mu \leq 6/35$, а из доказательства леммы 2.14 следует, что

$$\frac{7}{3}\nu \geq \text{mult}_Q(\check{D}) > n - \left(\mu - \frac{1}{10}n\right) - \left(\nu + \frac{4}{7}\mu - \frac{1}{5}n\right),$$

поскольку $n\varepsilon = \nu + 4\mu/7 - n/5$. Итак, выполнено неравенство $10\nu/3 + 11\mu/7 > 13n/10$. Тогда

$$\frac{39}{190}n > \frac{6}{35}n \geq \mu > \frac{39}{190}n,$$

потому что $\nu \leq 10\mu/7$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Из работы [11] следует, что полная линейная система $|-rK_W|$ свободна от базисных точек при $r \gg 0$ и задает бирациональный морфизм $\omega: W \rightarrow \overline{W}$ такой, что $\overline{W}$ является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, 2a_3, 3a_3)$ степени $6a_3$, имеющей канонические особенности.

ЛЕММА 5.8. *Морфизм ω не является изоморфизмом в окрестности точки Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ω – изоморфизм в окрестности точки Q . Тогда из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует существование дивизора $R \in |-2sa_1a_3K_W|$ такого, что $\text{mult}_Q(R) \geq s$, но множество $\text{Supp}(R)$ не содержит компоненты цикла $\check{D} \cdot S$, которые проходят через точку Q , где s – некоторое натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} 2sa_1a_3 \left(\frac{n \sum_{i=1}^4 a_i}{a_1a_2a_3a_4} - \frac{\mu}{a_1a_3} - \frac{\nu}{a_1a_2} \right) &= R \cdot \check{D} \cdot T \\ &\geq \text{mult}_Q(\check{D} \cdot T)s > \left(n - \nu - \mu \frac{a_3 - a_1}{a_3} + \frac{2n}{a_4} \right)s, \end{aligned}$$

потому что $Q \notin \check{E}$. Несложно видеть, что полученное неравенство невозможно при всех возможных значениях числа $\mathfrak{J}$, потому что $n\varepsilon = \nu + (a_3 - a_1)\mu/a_3 - 2n/a_4 > 0$. Лемма доказана.

Значит, существует единственная кривая $C \subset W$, содержащая точку Q и такая, что

$$-K_W \cdot C = 0, \quad \beta^*(-K_U) \cdot C = \frac{1}{a_4}, \quad C \cdot G = 1,$$

откуда следует, что $\mathfrak{J} \notin \{33, 38, 58\}$ по лемме 5.7. Итак, мы видим, что $\mathfrak{J} \in \{12, 13, 20, 25, 31\}$.

Положим $\check{D} \cdot T = mC + \Omega$, где m – неотрицательное целое число, а Ω – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую C . Тогда из замечания 2.12 следует, что

$$\begin{aligned} m &\leq \frac{5}{4}n - \mu, & m &\leq \frac{11}{15}n - \frac{1}{2}\mu, & m &\leq \frac{13}{15}n - \mu, \\ m &\leq \frac{5}{7}n - \frac{1}{3}\mu, & m &\leq \frac{2}{3}n - \mu \end{aligned}$$

при $\mathfrak{J} = 12, 13, 20, 25, 31$ соответственно. Напомним, что $\bar{G}$ – сечение расслоения η .

Пусть $\mathcal{H}$ – пучок в линейной системе $|-a_2K_W|$, состоящий из поверхностей, которые проходят через точку Q , а H – общая поверхность пучка $\mathcal{H}$. Тогда C – единственная кривая, содержащаяся в базисном множестве пучка $\mathcal{H}$, которая содержит Q . Таким образом,

$$a_2 \left(\frac{n \sum_{i=1}^4 a_i}{a_1 a_2 a_3 a_4} - \frac{\mu}{a_1 a_3} - \frac{\nu}{a_1 a_2} \right) = H \cdot \Omega \geq \text{mult}_Q(\Omega) > n - \nu - \mu \frac{a_3 - a_1}{a_3} + \frac{2n}{a_4} - m,$$

откуда сразу следует, что либо $\mathfrak{J} = 12$, либо $\mathfrak{J} = 13$.

ЛЕММА 5.9. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} = 12$. Пусть R – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_W|$, которая проходит через точку Q . Тогда

$$R|_T = C + L + Z,$$

где L и Z – кривые такие, что $L = G|_T$, кривая Z приведена, и $P \notin \beta(Z)$.

Предположим, что кривая Z неприводима. Тогда

$$Z^2 = -\frac{4}{3}, \quad C^2 = -2, \quad L^2 = -\frac{3}{2}$$

на поверхности T . Как обычно, положим

$$\check{D}|_T = m_C C + m_L L + m_Z Z + \Upsilon,$$

где m_C , m_L и m_Z – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C , L и Z .

Предположим, что $Q \notin \check{E}$. Тогда $m_C > 2n/3 - m_Z/3$, потому что

$$\frac{5}{6}n - \frac{2}{3}\mu - \nu = R \cdot \check{D} \cdot T = m_L + \frac{1}{3}m_Z + R \cdot \Upsilon > m_L + \frac{1}{3}m_Z + \frac{3}{2}n - \nu - \frac{2}{3}\mu - m_L - m_C,$$

но $4m_Z/3 \geq 2m_C - n/3$, так как $\Upsilon \cdot Z \geq 0$. Значит, выполнены неравенства

$$m_C > \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}m_Z \geq \frac{7}{12}n + \frac{1}{2}m_C,$$

откуда $m_C > 7n/6$, но $m_C \leq 5n/6$ по замечанию 2.12, поскольку выполнено $-K_X \cdot \alpha \circ \beta(C) = 5/6$.

Итак, показано, что $Q \in \check{E}$. Тогда $C \subset \check{E}$ и $\beta(C) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,3)}(1)|$, но

$$\frac{5}{6}n - \frac{2}{3}\mu - \nu = R \cdot \check{D} \cdot T = m_L + \frac{1}{3}m_Z + R \cdot \Upsilon > m_L + \frac{1}{3}m_Z + \frac{7}{4}n - \nu - \frac{5}{3}\mu - m_L - m_C,$$

откуда следует, что $m_C > 11n/12 - \mu + m_Z/3$. Имеем $-K_X \cdot \alpha \circ \beta(Z) = 5/6$ и $Z \cdot \check{E} = 2$, но

$$\frac{4}{3}m_Z \geq 2m_C + 2\mu - \frac{5}{6}n,$$

так как $Z \cdot \Upsilon \geq 0$. Тогда $m_Z > 3n/2$, но $m_Z \leq n/2$ по замечанию 2.12. Противоречие.

Показано, что Z приводима. Тогда $Q \in \check{E}$ и $Z = \dot{Z} + \check{Z}$, где $\dot{Z}$ и $\check{Z}$ – неприводимые кривые такие, что выполнены равенства

$$G \cdot \dot{Z} = G \cdot \check{Z} = -K_U \cdot \beta(\dot{Z}) = 0$$

и $-K_X \cdot \alpha \circ \beta(\dot{Z}) = 7/12$. Из несложных вычислений следует, что

$$\begin{aligned} \dot{Z}^2 &= -\frac{4}{3}, & \dot{Z}^2 = C^2 &= -2, & L^2 &= -\frac{3}{2}, \\ L \cdot C &= \dot{Z} \cdot C = \dot{Z} \cdot \check{Z} = \check{Z} \cdot C = 1, & L \cdot \check{Z} &= L \cdot \dot{Z} = 0 \end{aligned}$$

на поверхности T . Как и в предыдущем случае, положим

$$\check{D}|_T = \overline{m}_C C + \overline{m}_L L + \overline{m}_Z \dot{Z} + \Phi,$$

где $\overline{m}_C, \overline{m}_L, \overline{m}_Z$ – неотрицательные целые числа, а Φ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C, L и $\dot{Z}$. Тогда

$$R|_T \cdot \Phi \geq \text{mult}_Q(\Phi) > \frac{7}{4}n - \nu - \frac{5}{3}\mu - m_L - m_C,$$

но $\Phi \cdot \dot{Z} \geq 0$. Очевидно, что $\beta^*(-K_U)|_T \cdot \Phi \geq 0$. Значит, мы видим, что

$$\overline{m}_C > \frac{11}{12}n - \mu + \frac{1}{3}\overline{m}_Z, \quad \frac{4}{3}\overline{m}_Z \geq \overline{m}_C + \mu - \frac{5}{6}n, \quad \overline{m}_C + \mu \leq \frac{5}{4} - \overline{m}_Z,$$

но полученные линейные неравенства несовместны. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.10. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 13$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} = 13$. Тогда $C \subset \check{E}$, потому что в противном случае

$$2\left(\frac{11}{30}n - \frac{1}{6}\mu - \frac{1}{2}\nu\right) = H \cdot \Omega \geq \text{mult}_Q(\Omega) > \frac{7}{5}n - \nu - \frac{1}{3}\mu - m,$$

откуда следует выполнение неравенства $m > 2n/3$, которое противоречит уже имеющимся неравенствам $m \leq 11n/15 - \mu/2$ и $\mu > n/5$. Положим

$$\overline{D}|_{\check{E}} = \overline{m}C + \Upsilon,$$

где $\overline{m}$ – неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую C . Тогда $\overline{m} \leq 5\mu/2$, так как $\beta(C) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3)}(2)|$, а кривая C приведена, где $E \cong \mathbb{P}(1,2,3)$. Тогда $\overline{m} \leq 11n/12$, потому что $\mu \leq 11n/30$.

Очевидно, что особенности логпары $(W, \frac{1}{n}\check{D} + \check{E} + \varepsilon G)$ не являются логканоническими в точке Q . Значит, особенности логпары

$$\left(\check{E}, C + \frac{\nu + \mu/3 - 2n/5}{n}G \Big|_{\check{E}} + \frac{1}{n}\Upsilon\right)$$

также не являются логканоническими в точке Q согласно [9, теорема 7.5]. Тогда

$$\frac{5}{3}\mu - \nu = (\overline{m}C + \Upsilon) \cdot C = \Upsilon \cdot C \geq \text{mult}_Q(\Upsilon|_C) > \frac{7}{5}n - \nu - \frac{1}{3}\mu$$

согласно [9, теорема 7.5]. Таким образом, $\mu > 7n/10$, но $\mu \leq 11n/30$. Противоречие. Лемма доказана.

Итак, утверждение леммы 2.10 полностью доказано.

§ 6. Квадратичные инволюции

В настоящем параграфе мы докажем утверждение леммы 2.11. Воспользуемся предположениями и обозначениями из леммы 2.11. Пусть $d = 2r + a_j$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию, откуда будет следовать утверждение леммы 2.11.

ЛЕММА 6.1. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 9$ и $\mathfrak{J} \neq 17$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 9$, потому что неравенство $\mathfrak{J} \neq 17$ доказывается аналогично. Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 3.17, отождествляя точку O с точкой O_1 . Нам требуется получить противоречие.

Предположим, что $\mu > 2n/3$. Пусть G – поверхность на многообразии X , которая высекается уравнением $w = 0$, а $\overline{G}$ – ее собственный прообраз на многообразии U . Тогда

$$0 \leq -K_U \cdot \overline{G} \cdot \overline{D} = \left(\alpha^*(-K_X) - \frac{1}{3}E\right) \cdot (\alpha^*(-3K_X) - 2E) \cdot (\alpha^*(-nK_X) - \mu) = \frac{3}{2}n - 3\mu,$$

откуда следует неравенство $\mu \leq n/2 < 2n/3$. Противоречие. Итак, показано, что $\mu \leq 2n/3$.

Предположим, что $P \in C_i$. Пусть S – поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая содержит точку P . Положим

$$\overline{D} \cdot S = mC_i + \overline{m}Z_i + \Delta,$$

где m и $\overline{m}$ – некоторые неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_i и Z_i . Пусть R – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_U|$, проходящая через точку P . Тогда

$$n - \mu - \frac{2}{3}\overline{m} = R \cdot \Delta > \frac{4}{3}n - \mu - m,$$

откуда следует неравенство $m - 4\overline{m}/3 > n/3$. Положим $H = \alpha(S)$. Тогда имеем

$$\overline{C}_i^2 = -\frac{4}{3}, \quad \overline{Z}_i^2 = -\frac{2}{3}, \quad \overline{C}_i \cdot \overline{Z}_i = 2$$

на поверхности H . С другой стороны, положим

$$D|_H = m\overline{C}_i + \overline{m}\overline{Z}_i + \Omega \equiv -nK_X|_H,$$

где Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые $\overline{C}_i$ и $\overline{Z}_i$. Тогда

$$0 \leq \Omega \cdot \overline{Z} = \frac{2}{3}n - m\overline{C}_i \cdot \overline{Z}_i - \overline{m}\overline{Z}_i^2 = \frac{2}{3}n - 2m + \frac{2}{3}\overline{m},$$

откуда следует противоречие с неравенством $m - 4\overline{m}/3 > n/3$. Показано, что $P \notin \bigcup_{i=1}^{27} C_i$.

Пусть L – слой рационального отображения $\psi \circ \alpha$ над точкой $\psi \circ \alpha(P)$, а S – поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая проходит через точку P . Положим

$$\overline{D} \cdot S = \dot{m}L + \Upsilon,$$

где $\dot{m}$ – неотрицательное целое число, а Υ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривую L . Пусть R – общая поверхность в $|-2K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда

$$n - \mu - \frac{2}{3}\dot{m} = R \cdot \Delta > \frac{4}{3}n - \mu - \dot{m},$$

поскольку кривая L неособа в точке P . Значит, выполнено неравенство $\dot{m} > n$, но из замечания 2.12 следует, что выполнено неравенство $\dot{m} \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 6$ и $\mathfrak{J} \neq 15$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 15$, потому что неравенство $\mathfrak{J} \neq 6$ доказывается аналогично. Точка O является особой точкой типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, а трехмерное многообразие X является гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 6)$ степени 12.

Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xleftarrow{\gamma} & Y \\
 & \swarrow \sigma & \downarrow \alpha & & \searrow \eta \\
 V & & X & & \\
 & \searrow \omega & \swarrow \xi & \dashrightarrow \psi & \\
 & & \mathbb{P}(1, 1, 2, 6) & \dashrightarrow \chi & \mathbb{P}(1, 1, 2)
 \end{array}$$

где ξ , ψ и χ – проекции, морфизм γ – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 2)$ особой точки типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, σ – бирациональный морфизм, который стягивает рациональные кривые $C_1, \dots, C_{54}$, морфизм η – эллиптическое расслоение, а ω – двулистное накрытие.

Пусть S – единственная поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая проходит через неособую точку P . Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_P(\bar{D} \cdot S) > \frac{4}{3}n - \mu$.

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^{54} C_i$. Пусть H – общая поверхность в $|-6K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда H не содержит компоненты эффективного цикла $\bar{D} \cdot S$, откуда имеем

$$2n - 3\mu = \bar{D} \cdot S \cdot H > \frac{4}{3}n - \mu,$$

что приводит к противоречию, так как $\mu < n/3$. Существует кривая C_i такая, что $P \in C_i$.

Слой рационального отображения $\psi \circ \alpha$ над точкой $\psi(P)$ состоит из кривой C_i и еще одной неприводимой кривой $\bar{C}_i$ такой, что $-K_U \cdot \bar{C}_i = 1/3$ и $E \cdot \bar{C}_i = 0$. Положим

$$\bar{D} \cdot S = mC_i + \bar{m}\bar{C}_i + \Delta,$$

где m и $\bar{m}$ – некоторые неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_i и $\bar{C}_i$. Пусть R – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_U|$, которая содержит точку P . Тогда

$$\frac{2}{3}n - \mu - \frac{2}{3}\bar{m} = R \cdot \Delta > \frac{4}{3}n - \mu - m,$$

откуда следует неравенство $m - 2\bar{m}/3 > 2n/3$.

Положим $\check{S} = \alpha(S)$, $Z = \alpha(C_i)$ и $\bar{Z} = \alpha(\bar{C}_i)$. Кривые Z и $\bar{Z}$ содержатся в поверхности $\check{S}$, которая является общей гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 3, 4, 8)$ степени 12. Тогда

$$Z^2 = \bar{Z}^2 = -\frac{4}{3}, \quad Z \cdot \bar{Z} = 2$$

на поверхности $\check{S}$. Положим $D|_{\check{S}} = mZ + \bar{m}\bar{Z} + \Omega$, где Ω – некоторый эффективный дивизор на поверхности $\check{S}$, носитель которого не содержит кривые Z и $\bar{Z}$. Тогда

$$0 \leq \Omega \cdot \bar{Z} = \frac{1}{3}n - mZ \cdot \bar{Z} - \bar{m}\bar{Z}^2 = \frac{1}{3}n - 2m + \frac{4}{3}\bar{m},$$

но $m > 2n/3 + 2\bar{m}/3$. Полученные неравенства несовместны. Противоречие. Лемма доказана.

Из равенства $d = 2r + a_j$ следует, что гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$x_i^2 x_j + x_i f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) + g(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]),$$

где $i \neq j$, $a_i = r$, $\text{wt}(x_0) = 1$, $\text{wt}(x_k) = a_k$, а f и g – общие квазиоднородные многочлены, не зависящие от переменной x_i . Положим $\bar{a}_3 = a_{3+4-i}$, $\bar{a}_4 = a_i a_j$, $\bar{d} = 2\bar{a}_4$.

Несложно видеть, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \xi \\ V \hookrightarrow & \mathbb{P}(1, a_1, a_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) & \xrightarrow{\chi} \mathbb{P}(1, a_1, a_2, \bar{a}_3) \end{array}$$

где ξ и χ – проекции, σ – бирациональный морфизм, который стягивает рациональные кривые $C_1, \dots, C_l$, $l = a_i a_j (d - a_i) \sum_{i=1}^4 a_i$, многообразие V – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)$ степени $\bar{d}$, имеющая терминальные особенности. Тогда $-K_X \cdot \alpha(C_k) = 1/a_i$.

Пусть M – поверхность, которая высекается на гиперповерхности X уравнением $x_j = 0$, а $\bar{M}$ – собственный прообраз поверхности M на многообразии U . Тогда $M \neq D$ согласно [9, лемма 8.12, предложение 8.14], поскольку гиперповерхность X достаточно общая по предположению.

ЛЕММА 6.3. *Выполнено $\mu \leq -a_j n K_X^3 (r - a)a / (d - r) \leq n(d - r) / (ra_j)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\mu \leq -a_j n K_X^3 (r - a)a / (d - r)$ тривиально, поскольку

$$0 \leq -K_U \cdot \bar{M} \cdot \bar{D} = -a_j n K_X^3 - \frac{\mu(d - r)}{a(r - a)},$$

так как дивизор $-K_U$ численно эффективен. Таким образом, требуется показать, что выполнено неравенство $-a_j n K_X^3 (r - a)a / (d - r) \leq n(d - r) / (ra_j)$.

Предположим, что $-a_j n K_X^3 (r - a)a / (d - r) > n(d - r) / (ra_j)$. Тогда

$$\frac{d - r}{ra_j} < -a_j K_X^3 \frac{(r - a)a}{d - r} = \frac{da_j(r - a)a}{(d - r)a_1 a_2 a_3 a_4},$$

однако $a_1 a_2 a_3 a_4 \geq a_j r(r - a)a$. Имеем $(d - r)^2 < d(d - 2r)$. Противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что $E \cong \mathbb{P}(1, a, r - a)$, а линейная система $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a, r - a)}(1)|$ состоит из единственной кривой при $a \neq 1$. Учитывая значения четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) , мы видим, что

$$a = 1 \Rightarrow \mathfrak{J} \in \{7, 8, 12, 13, 16, 20, 25, 26, 30, 36, 31, 41, 47, 54\}$$

согласно леммам 6.1, 6.2.

ЛЕММА 6.4. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 7$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 7$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 3)$ степени 8, а точка O является особой точкой типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Пусть S – единственная поверхность в линейной системе $|-K_U|$, которая содержит точку P . Тогда S неособа в точке P .

Особенности многообразия U состоят из особых точек P_0, P_1, P_2, P_3 и P_4 типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ таких, что P_0 – особая точка поверхности E . Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\beta_i} & Y_i \\ \alpha \downarrow & & \searrow \eta_i \\ X & \xrightarrow{\xi_i} & \mathbb{P}(1, 1, 2) \end{array}$$

где ξ_i – проекция, β_i – раздутие точки P_i с весами $(1, 1, 1)$, а морфизм η_i является эллиптическим расслоением.

Предположим сначала, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Легко видеть, что собственный прообраз поверхности E на многообразии Y_i является сечением эллиптического расслоения η_i в случае, когда выполнено неравенство $i \neq 0$. Значит, существует поверхность $H \in |-2K_U|$ такая, что

$$2\left(\frac{2}{3}n - \frac{1}{2}\mu\right) = \bar{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\bar{D}) > \frac{4}{3}n - \mu,$$

откуда сразу следует противоречие. Итак, можно считать, что $P \in C_1$.

Очевидно, что выполнено равенство $-K_X \cdot \alpha(C_1) = 1/3$. Тогда

$$\bar{M}|_S = C_1 + Z_1 \equiv (-2K_U - E)|_S,$$

где Z_1 – неприводимая кривая такая, что $-K_X \cdot \alpha(Z_1) = 1$. Положим $L = E|_S$. Тогда

$$C_1^2 = -2, \quad Z_1^2 = L^2 = -\frac{3}{2}, \quad C_1 \cdot Z_1 = L \cdot C_1 = 1, \quad L \cdot Z_1 = \frac{3}{2}$$

на поверхности S . Положим $\bar{D}|_S = m_C C_1 + m_Z Z_1 + m_L L + \Omega$, где m_C, m_Z и m_L – неотрицательные целые числа, а Ω – эффе́ктивный цикл на поверхности S , носитель которого не содержит кривые C_1, Z_1 и L . Тогда

$$n - \frac{3}{2}\mu + \frac{3}{2}m_Z - \frac{3}{2}m_L - m_C = Z_1 \cdot \Omega \geq 0,$$

откуда следует неравенство $3m_Z/2 \geq 3(\mu + m_L)/2 + m_C - n$. Аналогично, мы видим, что

$$\frac{3}{2}\mu - \frac{3}{2}m_Z + \frac{3}{2}m_L - m_C = L \cdot \Omega \geq 0.$$

Отсюда получаем неравенство $3(\mu + m_L)/2 \geq 3m_Z/2 + m_C$. Имеем

$$\frac{4}{3}n - \mu - m_L - m_Z = (L + C_1 + Z_1) \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega) > \frac{4}{3}n - \mu - m_L - m_C,$$

откуда следует, что $m_C > m_Z$ и $4n/3 \geq \mu + m_L + m_Z$. Показано, что $m_Z \leq n/2$ и $m_C \leq n/2$.

Согласно [9, теорема 7.5] особенности логпары

$$\left(S, C_1 + \frac{\overline{m}_L + \mu - n/3}{n} L + \frac{m_Z}{n} Z + \frac{1}{n} \Omega \right)$$

не являются логканоническими в точке P , потому что $m_C \leq n$. Выполнено неравенство

$$C_1 \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega|_{C_1}) > n - m_L - \mu + \frac{1}{3}n$$

согласно [9, теорема 7.5], откуда имеем $m_C > m_Z/2 + n/2$, однако $m_C \leq n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.5. *Выполнено неравенство $\mathfrak{I} \neq 8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что имеет место равенство $\mathfrak{I} = 8$. Воспользуемся обозначениями доказательства леммы 3.18. Пусть $\overline{R}$ – собственный прообраз поверхности R на многообразии U , а S – общая поверхность в $|-K_U|$, которая содержит P . Тогда $\text{mult}_P(S) = 1$.

Предположим, что $P \notin \overline{R}$. Тогда $\overline{R}|_S$ – неприводимая кривая, которую мы обозначим через Z . Положим $\overline{D}|_S = m_F F + m_Z Z + \Upsilon$, где m_F и m_Z – некоторые неотрицательные целые числа, F – неприводимая неособая кривая такая, что $E|_S = F$, а Υ – эффективный дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривые F и Z . Тогда

$$F^2 = Z^2 = -\frac{4}{3}, \quad Z \cdot F = \frac{5}{3}$$

на поверхности S . Тогда $4m_Z/3 \geq 5(\mu + m_F)/4 - 3n/4$, потому что $\Upsilon \cdot Z \geq 0$. Имеем

$$\frac{4}{3}\mu + \frac{4}{3}m_F - \frac{5}{3}m_Z = \Upsilon \cdot F > \frac{5}{4}n - \mu - m_F,$$

откуда следует, что $7(\mu + m_F)/3 > 5n/4 + 5m_Z/3$. Таким образом, имеем

$$\frac{4}{3}m_Z > \frac{5}{7} \left(\frac{5}{4}n + \frac{5}{3}m_Z \right) - \frac{3}{4}n.$$

Отсюда получаем, что выполнено неравенство $m_Z > n$, но из замечания 2.12 сразу следует, что выполнено неравенство $m_Z \leq n$, поскольку $\alpha^*(-K_X) \cdot Z = 3/4$. Противоречие.

Имеем $P \in \overline{R}$. Пусть $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Существует поверхность $H \in |-3K_U|$ такая, что

$$3 \left(\frac{3}{4}n - \frac{5}{3}\mu \right) = \overline{D} \cdot H \cdot \overline{R} \geq \text{mult}_P(\overline{D}) > \frac{5}{4}n - \mu,$$

откуда следует, что $\mu < n/4$, но $\mu > n/4$. Противоречие. Итак, можно считать, что $P \in C_1$.

Положим $B = E|_{\overline{R}}$ и $C_1 + Z_1 = S|_{\overline{R}}$, где B и Z_1 – неприводимые кривые. Положим

$$\overline{D}|_{\overline{R}} = \overline{m}_C C_1 + \overline{m}_Z Z_1 + \overline{m}_B B + \Omega,$$

где $\overline{m}_C$, $\overline{m}_Z$ и $\overline{m}_B$ – неотрицательные целые числа, а Ω является эффективным дивизором на поверхности $\overline{R}$, носитель которого не содержит кривые C_1 , Z_1 и B . Несложно видеть, что

$$C_1^2 = -1, \quad Z_1^2 = -\frac{2}{3}, \quad B^2 = -\frac{20}{3}, \quad B \cdot Z_1 = \frac{2}{3}, \quad B \cdot C_1 = Z_1 \cdot C_1 = 1$$

на поверхности $\overline{R}$. Тогда $2\overline{m}_Z/3 \geq 2(\overline{m}_B + \mu) + \overline{m}_C - n/2$, так как $\Omega \cdot Z \geq 0$, но

$$\frac{3}{4}n - \frac{5}{3}\mu - \frac{1}{3}\overline{m}_Z - \frac{1}{3}\overline{m}_B = (C_1 + Z_1) \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega) > \frac{5}{4}n - \mu - \overline{m}_B - \overline{m}_C,$$

поскольку кривая Z_1 не проходит через точку P . Итак, мы видим, что

$$\frac{2}{3}\overline{m}_Z \geq 2(\overline{m}_B + \mu) + \overline{m}_C - \frac{1}{2}n > \frac{1}{3}\overline{m}_Z + \frac{4}{3}\mu,$$

откуда следует, что $\overline{m}_Z > 4\mu > n$. С другой стороны, имеем

$$\frac{9}{4}n - 5\mu - \overline{m}_Z - \overline{m}_B = 3(C_1 + Z_1) \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega) > \frac{5}{4}n - \mu - \overline{m}_B - \overline{m}_C,$$

откуда $\overline{m}_C > \overline{m}_Z + 4\mu - n > n$, но из замечания 2.12 сразу следует, что $\overline{m}_C + 2\overline{m}_Z \leq 3n$, потому что $\alpha^*(-K_X) \cdot Z_1 = 1/2$ и $\alpha^*(-K_X) \cdot C_1 = 1/4$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.6. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 12$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 4)$ степени 10, а точка O является либо особой точкой типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$, либо особой точкой типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$.

Пусть S – поверхность в пучке $|-K_U|$, которая содержит P . Тогда S неособа в точке P .

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Тогда выполнено неравенство $\mu \leq n/r$, так как из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существует поверхность $H \in |-s(7-r)K_U|$ такая, что

$$s(7-a) \left(\frac{5}{12}n - \frac{\mu}{r-a} \right) = \overline{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > \left(n + \frac{n}{r} - \mu \right)s,$$

где s – натуральное число. Однако выполнено неравенство $\mu > n/r$. Противоречие.

Можно считать, что $P \in C_1$. Пусть R – общая поверхность в линейной системе $|-2K_U|$, которая проходит через точку P . Тогда $R \cdot S = C_1 + Z + L$, где Z и L – неприводимые кривые такие, что $L \subset E$ и $Z \neq C_1$. Положим

$$\overline{D}|_S = m_C C_1 + m_Z Z + m_L L + \Upsilon,$$

где m_C , m_Z и m_L – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривые C_1 , Z и L .

Предположим, что $r = 3$. Тогда $C_1^2 = -2$, $Z^2 = -1$ и $C_1 \cdot Z = 2$ на поверхности S , откуда

$$\frac{5}{6}n - \mu - m_Z = R \cdot (\Upsilon + m_L L) > \frac{4}{3}n - \mu - m_C,$$

так как $R \cdot L > 0$. Значит, выполнено неравенство $m_C > n/2 + m_Z$, но

$$\frac{1}{2}n - 2m_C + m_Z = (\Omega + m_L L) \cdot Z \geq 0,$$

что приводит к противоречию, потому что $m_C > n/2 + m_Z$.

Показано, что $r = 4$. Тогда $Z^2 = L^2 = -4/3$, $C_1^2 = -2$ и $L \cdot C_1 = Z \cdot C_1 = Z \cdot L = 1$, но

$$\frac{5}{6}n - \mu = R \cdot \overline{D} \cdot S = \frac{2}{3}m_L + \frac{2}{3}m_Z + R \cdot \Upsilon > \frac{2}{3}m_L + \frac{2}{3}m_Z + \frac{5}{4}n - \mu - m_C - m_L,$$

откуда следует, что $m_C > 5n/12 + 2m_Z/3 - (\mu + m_L)/3$. Однако

$$\frac{4}{3}\mu = L \cdot (m_C C_1 + m_Z Z + m_L L + \Upsilon) > -\frac{4}{3}m_L + m_Z + m_C + \frac{5}{4}n - \mu - m_L - m_C.$$

Отсюда имеем, что $7(\mu + m_L)/3 > 5n/4 + m_Z$. Тогда $\mu + m_L \leq \frac{5}{4}n - m_Z$, $\frac{4}{3}m_Z \geq (\mu + m_L) + m_C - \frac{7}{12}n$, потому что $-K_U \cdot \Upsilon \geq 0$ и $\Upsilon \cdot Z \geq 0$ соответственно. Мы видим, что $m_Z > n/2$, так как

$$\frac{4}{3}m_Z > (\mu + m_L) - \frac{1}{6}n + \frac{2}{3}m_Z - \frac{1}{3}(\mu + m_L) > \frac{2}{7}\left(\frac{5}{4}n + m_Z\right) - \frac{1}{6}n + \frac{2}{3}m_Z,$$

а из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что

$$3s\left(\frac{5}{12}n - \frac{1}{3}\mu - m_L - m_Z\right) = M \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > \left(\frac{5}{4}n - \mu - m_L - m_C\right)s$$

для некоторых натурального числа $s > 0$ и поверхности $M \in |-3sK_U|$. Имеем $m_C > m_Z$ и

$$\frac{4}{3}m_Z > (\mu + m_L) + m_Z - \frac{7}{12}n > \frac{3}{7}\left(\frac{5}{4}n + m_Z\right) + m_Z - \frac{7}{12}n,$$

откуда следует, что $m_Z < n/2$. Ранее показано, что $m_Z > n/2$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. *Предположим, что $\mathfrak{J} = 13$. Тогда O – особая точка, имеющая $\min \frac{1}{5}(1, 2, 3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O не является особой точкой типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$. Тогда O – особая точка типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$. Пусть S – поверхность в $|-K_U|$, содержащая P . Тогда $\overline{D} \neq S$ по лемме 2.3.

Предположим, что бирациональный морфизм σ является изоморфизмом в некоторой окрестности точки P . Тогда из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что можно найти натуральное число $s > 0$ и поверхность $H \in |-5sK_U|$ такие, что

$$5s\left(\frac{11}{30}n - \frac{1}{2}\mu\right) = \overline{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > \left(\frac{4}{3}n - \mu\right)s,$$

откуда следует, что $\mu < n/3$. Последнее неравенство невозможно, так как выполнено $\mu > n/3$.

Мы видим, что бирациональный морфизм σ стягивает некоторую неприводимую кривую, проходящую через точку P . На самом деле, такая кривая единственная. Обозначим эту кривую через L . Тогда $P \in L$ и $-K_U \cdot L = 0$, а кривая L неособа и рациональна.

Пусть H – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-2K_U|$ такая, что H содержит точку P . Существует неприводимая кривая $C \subset U$ такая, что $H|_S = L + C$. Тогда

$$L^2 = -2, \quad L \cdot C = 2, \quad C^2 = -\frac{6}{5}$$

на поверхности S . Положим $D|_S = m_L L + m_C C + \Omega$, где m_L и m_C – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит L и Z . Тогда $P \notin C$ и

$$\frac{1}{3}n - \mu - 2m_C + 2m_L = \Omega \cdot L > \frac{4}{3}n - m_L - m_C,$$

но $2n/5 - 2m_L + 6m_C/5 = \Omega \cdot C \geq 0$, откуда следует противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.8. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 16$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 16$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 4, 5)$ степени 12, а точка O является особой точкой типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$. Пусть S – единственная поверхность в пучке $|-K_U|$, которая содержит точку P . Тогда S неособа в точке P .

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Тогда существует поверхность $H \in |-4K_U|$, которая проходит через точку P , но не содержит компоненты эффективного цикла $\overline{D} \cdot S$. Таким образом,

$$4\left(\frac{3}{10}n - \frac{1}{4}\mu\right) = \overline{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\overline{D}) > \frac{6}{5}n - \mu,$$

откуда следует противоречие. Итак, можно считать, что $P \in C_1$. Тогда $C_1 \subset S$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ – естественная проекция, а F – кривая, которая высекается на поверхности S дивизором E . Тогда слой отображения $\psi \circ \alpha$ над точкой $\psi \circ \alpha(P)$ состоит из кривых F , C_1 и еще одной неприводимой кривой Z такой, что

$$Z^2 = F^2 = -\frac{5}{4}, \quad C_1^2 = -2, \quad Z \cdot C_1 = F \cdot C_1 = 1, \quad Z \cdot F = \frac{3}{4}$$

на поверхности S . Несложно видеть, что $P = F \cap C_1$. Положим

$$\overline{D}|_S = m_C C_1 + m_F F + m_Z Z + \Omega,$$

где m_C , m_F и m_Z – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые C_1 , F , и Z . Тогда существует поверхность M в линейной системе $|-4K_U|$, которая содержит P , но не содержит компоненты цикла Ω . Имеем

$$4\left(\frac{3}{10}n - \frac{1}{4}\mu - \frac{1}{4}m_Z - \frac{1}{4}m_F\right) = M|_S \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega) > \frac{6}{5}n - \mu - m_F - m_C,$$

откуда следует, что $m_C > m_Z$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \frac{3}{10}n - \frac{1}{4}\mu &= -K_U|_S \cdot (m_C C_1 + m_F F + m_Z Z + \Omega) \\ &\geq -K_U|_S \cdot (m_C C_1 + m_F F + m_Z Z) = \frac{m_F + m_Z}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $m_F + m_Z \leq 6n/5 - \mu$. Аналогично, имеем

$$\frac{5}{4}\mu + \frac{5}{4}m_F - \frac{3}{4}m_Z - m_C = \Omega \cdot F > \frac{6}{5}n - \mu - m_C - m_F,$$

откуда следует, что $9(\mu + m_F)/4 > 6n/5 + 3m_Z/4$. Из неравенства $\Omega \cdot Z \geq 0$ вытекает, что

$$\frac{5}{4}m_Z \geq \frac{3}{4}\mu + m_C + \frac{3}{4}m_F - \frac{2}{5}n,$$

но $m_Z \leq 3n/4$ согласно замечанию 2.12, потому что $-K_X \cdot \alpha(Z) = 2/5$. Итак, мы видим, что

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \left(\frac{6}{5}n - \mu \right) &\geq \frac{9}{4}(\mu + m_F) > \frac{6}{5}n + \frac{3}{4}m_Z, \\ \frac{15}{16}n &\geq \frac{5}{4}m_Z \geq \frac{3}{4}\mu + m_C + \frac{3}{4}m_F - \frac{2}{5}n > \frac{3}{4}\mu + m_Z + \frac{3}{4}m_F - \frac{2}{5}n, \end{aligned}$$

но полученные линейные неравенства, как легко видеть, несовместны. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.9. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 25$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 25$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 4, 7)$ степени 15, а точка O является либо особой точкой типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$, либо особой точкой типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$.

Предположим, что O – особая точка типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Пусть S – единственная поверхность в пучке $|-K_U|$, которая содержит точку P . Тогда $\overline{D} \neq S$.

Предположим, что бирациональный морфизм σ является изоморфизмом в некоторой окрестности точки P . Из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует существование натурального числа $s > 0$ и поверхности $H \in |-7sK_U|$, которая имеет кратность не меньше s в точке P , но не содержит компоненты цикла $\overline{D} \cdot S$, которые проходят через P . Тогда

$$7s \left(\frac{5}{28}n - \frac{1}{3}\mu \right) = \overline{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > \left(\frac{5}{4}n - \mu \right)s,$$

откуда сразу следует противоречие с неравенством $\mu > n/4$.

Морфизм σ не является изоморфизмом в окрестности точки P . Тогда существует единственная кривая $L \subset U$ такая, что $P \in L$ и $-K_U \cdot L = 0$. Кривая L неособа и рациональна.

Пусть H – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-3K_U|$ такая, что H проходит через точку P . Тогда $H|_S = L + C$, где C – неприводимая кривая такая, что

$$L^2 = -2, \quad L \cdot C = 2, \quad C^2 = -\frac{8}{7}$$

на поверхности S . Положим $D|_S = m_L L + m_C C + \Omega$, где m_L и m_C – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит L и Z . Тогда $P \notin C$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}n - \mu - 2m_C + 2m_L &= \Omega \cdot L > \frac{5}{4}n - \mu - m_L, \\ \frac{2}{7}n - 2m_L + \frac{8}{7}m_C &= \Omega \cdot C \geq 0, \end{aligned}$$

откуда несложно следует противоречие.

Точка P – особая точка типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$. Пусть T – общая поверхность в пучке $|-K_U|$.

Предположим, что $P \in T$. Базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из неприводимых кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$ таких, что $\bar{C} = E|_T$ и $\bar{L} = \bar{M}|_T$. На поверхности S выполнены равенства

$$\bar{C}^2 = \bar{L}^2 = -\frac{7}{12}, \quad \bar{L} \cdot \bar{C} = \frac{8}{12},$$

но $\alpha^*(-K_X) \cdot \bar{L} = -K_X^3$. Положим $\bar{D}|_T = \bar{m}_L \bar{L} + \bar{m}_C \bar{C} + \Upsilon$, где $\bar{m}_L$ и $\bar{m}_C$ – некоторые неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный дивизор на поверхности T , носитель которого не содержит кривые $\bar{L}$ и $\bar{C}$. Из неравенств $\Upsilon \cdot \bar{L} \geq 0$ и $\Upsilon \cdot \bar{C} \geq \text{mult}_P(\Upsilon)$ следует, что

$$\frac{19}{12}(\mu + \bar{m}_C) > \frac{8}{7}n + \frac{2}{3}\bar{m}_L, \quad \frac{2}{3}(\mu + \bar{m}_C) \leq \frac{5}{28}n + \frac{7}{12}\bar{m}_L,$$

откуда следует, что $\bar{m}_L > n$. Последнее неравенство противоречит замечанию 2.12.

Показано, что точка P не содержится в поверхности T . Тогда $\mu \geq 24n/70$ по лемме 2.14, но из леммы 6.3 следует неравенство $\mu \leq 15n/56$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.10. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 26$ и $\mathfrak{J} \neq 36$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 36$, потому что неравенство $\mathfrak{J} \neq 26$ доказывается аналогично. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 6, 7)$ степени 18, а точка O является особой точкой типа $\frac{1}{7}(1, 1, 6)$. Существует единственная поверхность в пучке $|-K_U|$, которая проходит через точку P . Обозначим эту поверхность через S .

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существуют натуральное число $s > 0$ и поверхность $H \in |-6sK_U|$ такие, что $\text{mult}_P(H) \geq s$, но поверхность H не содержит компоненты цикла $\bar{D} \cdot S$, которые содержат P . Тогда

$$6s \left(\frac{3}{28}n - \frac{1}{6}\mu \right) = \bar{D} \cdot H \cdot S \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > \left(\frac{8}{7}n - \mu \right)s,$$

откуда сразу следует противоречие. Показано, что $P \in \bigcup_{i=1}^l C_i$. Можно считать, что $P \in C_1$.

Положим $L = C_1$ и $C = E|_S$. Тогда $\overline{M}|_S = L + Z$, где Z – некоторая неприводимая кривая. Найдем форму пересечения кривых C , L и Z на поверхности S . Это несложно. Имеем

$$Z^2 = C^2 = -\frac{7}{6}, \quad L^2 = -2, \quad Z \cdot L = C \cdot L = 1, \quad Z \cdot C = \frac{5}{6}.$$

Точка P является точкой пересечения кривых L и C . Положим

$$\overline{D}|_S = m_L L + m_C C + m_Z Z + \Omega,$$

где m_L , m_C и m_Z – неотрицательные целые числа, а Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые L , C и Z . Из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существуют натуральное число $s > 0$ и поверхность $H \in |-6sK_U|$ такие, что выполнено неравенство $\text{mult}_P(H) \geq s$, а поверхность H не содержит компоненты носителя эффективного цикла Ω , которые проходят через точку P . Таким образом, мы видим, что

$$6s \left(\frac{3}{28}n - \frac{1}{6}\mu - \frac{1}{6}m_C - \frac{1}{6}m_Z \right) = H|_S \cdot \Omega \geq \text{mult}_P(\Omega)s > \left(\frac{8}{7}n - \mu - m_L - m_C \right)s,$$

откуда следует, что $m_L > n/2 + m_Z$, но $m_L \leq 3n/4$ согласно замечанию 2.12. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{3}{28}n - \frac{1}{6}\mu &= -K_U|_S \cdot (m_L L + m_C C + m_Z Z + \Omega) \\ &\geq -K_U|_S \cdot (m_L L + m_C C + m_Z Z) = \frac{m_C + m_Z}{6}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем, что $m_C + m_Z \leq 9n/14 - \mu$. Аналогично, имеем

$$\frac{7}{6}\mu + \frac{7}{6}m_C - \frac{5}{6}m_Z - m_L = \Omega \cdot C > \frac{8}{7}n - \mu - m_L - m_C,$$

откуда получаем, что $13(\mu + m_C)/6 > 8n/7 + 5m_Z/6$. Из неравенства $\Omega \cdot Z \geq 0$ следует, что

$$\frac{2}{7}n - \frac{5}{6}\mu - m_L - \frac{5}{6}m_C + \frac{7}{6}m_Z \geq 0.$$

Следовательно, имеем $7m_Z/6 \geq 5\mu/6 + m_L + 5m_C/6 - 2n/7$, но $m_Z \leq 3n/8$ по замечанию 2.12.

Из леммы 6.3 следует, что $18n/77 \geq \mu > n/7$. Мы получили систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} \frac{13}{6}(\mu + m_C) &> \frac{8}{7}n + \frac{5}{6}m_Z, \\ \frac{21}{48}n &\geq \frac{7}{6}m_Z \geq \frac{5}{6}\mu + m_L + \frac{5}{6}m_C - \frac{2}{7}n, \\ m_C + m_Z &\leq \frac{9}{14}n - \mu, \quad \frac{3}{4}n \geq m_L > \frac{1}{2}n + m_Z, \quad \frac{18}{77}n \geq \mu > \frac{1}{7}n, \end{aligned}$$

которая, как легко видеть, несовместна. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.11. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 31$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 31$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 6)$ степени 16, а точка O является либо особой точкой типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$, либо особой точкой типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$.

Пусть S – поверхность в пучке $|-K_U|$, которая содержит P . Тогда $\overline{D} \neq S$, а из аргументов, используемых в доказательстве леммы 6.10, следует, что $P \in C_1 \subset S$.

Предположим, что O является особой точкой типа $\frac{1}{6}(1, 1, 5)$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 6.10, мы получаем противоречие. Показано, что O – особая точка типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$.

Пусть $\omega: U \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 4)$ – композиция взвешенного раздутия α с естественной проекцией, а L – компонента слоя отображения ω над точкой $\omega(C_1)$ такая, что $L \neq C_1$. Положим

$$\overline{D}|_S = mC_1 + m'L + \Upsilon,$$

где m и m' – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые L и C_1 . Кривая L неособа, и $P \notin L$. Теперь можно несложно получить противоречие, воспользовавшись неравенствами $\Upsilon \cdot L \geq 0$ и $\Upsilon \cdot C_1 \geq \text{mult}_P(\Upsilon)$, потому что на поверхности S выполнены равенства $L^2 = -2/3$, $C_1^2 = -2$, $L \cdot C_1 = 2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.12. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 20$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{J} = 20$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 6.10, мы видим, что точка O должна быть особой точкой типа $\frac{1}{4}(1, 1, 3)$. Затем, рассуждая, как в доказательстве леммы 6.11, мы несложно получаем противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.13. *Выполнены неравенства $\mathfrak{J} \neq 47$ и $\mathfrak{J} \neq 54$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{J} = 47$, потому что неравенство $\mathfrak{J} \neq 54$ доказывается аналогично. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 5, 7, 8)$ степени 21, а из леммы 2.8 следует, что точка O является особой точкой типа $\frac{1}{8}(1, 1, 7)$.

Пусть T – поверхность в пучке $|-K_U|$, которая содержит P . Тогда $\overline{D} \neq T$.

Предположим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^l C_i$. Тогда из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существует поверхность $H \in |-7sK_U|$, кратность которой в точке P не меньше $s > 0$, где s – некоторое натуральное число, и которая не содержит компоненты эффективного цикла $\overline{D} \cdot T$, проходящие через точку P . Имеем

$$s\left(\frac{21}{40}n - \mu\right) = \overline{D} \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > s\left(\frac{9}{8}n - \mu\right)s,$$

откуда сразу следует противоречие с неравенством $\mu > n/8$. Можно считать, что $P \in C_1$.

Положим $\overline{D} \cdot T = mC_1 + \Delta$, где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит C_1 . Как и в предыдущем случае, из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существует поверхность $R \in |-7sK_U|$ такая, что выполнено неравенство $\text{mult}_P(R) \geq s$, где s –

некоторое натуральное число, но поверхность R не содержит компоненты эффeктивного цикла Δ , которые содержат P . Тогда

$$s\left(\frac{21}{40}n - \mu\right) = R \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta)s > s\left(\frac{9}{8}n - \mu - m\right),$$

откуда сразу следует, что выполнено неравенство $m > 3n/5$, но $m \leq 3n/5$ согласно замечанию 2.12, потому что выполнено равенство $\alpha^*(-K_X) \cdot C_1 = 1/8$. Противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 6.1, 6.2, 6.4–6.6, 6.8–6.13 следует, что

$$\mathfrak{J} \in \{13, 18, 23, 24, 32, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 56, 58, 60, 61, 65, 69, 74, 76, 79\}$$

и $a \neq 1$. Пусть T – общая поверхность в $|-K_U|$. Тогда $T|_E \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,a,r-a)}(1)|$.

ЛЕММА 6.14. *Точка P содержится в поверхности T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2.14 и 6.3 следует, что $P \in T$, если $\mathfrak{J} \notin \{13, 24\}$. Поэтому предположим, что $\mathfrak{J} \in \{13, 24\}$ и $P \notin T$. Требуется получить противоречие.

Пусть L – единственная кривая в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,a,r-a)}(1)|$. Тогда $P \notin L$, потому что $P \notin T$. Значит, существует единственная неособая неприводимая кривая C в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,a,r-a)}(a)|$, которая содержит точку P . Положим

$$\overline{D}|_E = \delta C + \Upsilon \equiv r\mu L,$$

где δ – некоторое неотрицательное целое число, а Υ – эффeктивный дивизор на поверхности E , носитель которого не содержит C . Из доказательства леммы 2.14 легко следует, что выполнено неравенство $\delta \leq r\mu/a$, откуда сразу следует, что $\delta < n$ по лемме 6.3.

Логпара $(E, \frac{1}{n}\overline{D}|_E)$ не логканонична в точке P (см. [9, теорема 7.5]), откуда следует, что особенности логпары $(E, C + \frac{1}{n}\Upsilon)$ также не являются логканоническими в точке P , поскольку $\delta < n$. Вновь применяя [9, теорема 7.5], мы видим, что

$$\frac{r\mu}{r-a} \geq \frac{r\mu - a\delta}{r-a} = C \cdot \Upsilon \geq \text{mult}_P(\Upsilon|_C) > n,$$

откуда следует, что $\mu \geq n(r-a)/r$. Последнее неравенство невозможно по лемме 6.3. Лемма доказана.

Из несложных вычислений (см. [5, доказательство теоремы 5.6.2]) следует, что

$$T \cap E \cap \bigcup_{i=1}^l C_i \neq \emptyset \iff \mathfrak{J} \in \{43, 46, 69, 74, 76, 79\}.$$

ЛЕММА 6.15. *Случай $\mathfrak{J} \notin \{13, 24, 32, 43, 46\}$ невозможен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} \notin \{13, 24, 32, 43, 46, 56\}$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существуют натуральное число $s > 0$ и поверхность

$H \in |-sa_1\bar{a}_3K_U|$ такие, что $\text{mult}_P(H) \geq s$, но поверхность H не содержит компоненты цикла $\bar{D} \cdot T$, которые содержат P , кроме, быть может, одной из кривых $C_1, \dots, C_l$.

Несложно видеть, что $\mathfrak{J} \in \{69, 74, 76, 79\}$ и $P \in \bigcup_{i=1}^l C_i$, потому что в противном случае мы можем получить противоречие, воспользовавшись неравенством

$$sa_1\bar{a}_3 \left(-nK_X^3 - \frac{\mu}{a(r-a)} \right) = \bar{D} \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > \left(n + \frac{n}{r} - \mu \right) s.$$

Можно считать, что $P \in C_1$. Положим $\bar{D} \cdot T = mC_1 + \Delta$, где m – неотрицательное целое число, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит C_1 . Тогда

$$sa_1\bar{a}_3 \left(-nK_X^3 - \frac{\mu}{a(r-a)} \right) = H \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta)s > \left(n + \frac{n}{r} - \mu - m \right) s,$$

что сразу приводит к противоречию, так как $m \leq -a_i n K_X^3$ по замечанию 2.12.

Таким образом, показано, что $\mathfrak{J} = 56$. Как и в предыдущем случае, мы можем найти натуральное число $s > 0$ и поверхность H в линейной системе $|-24sK_U|$ такие, что

$$24s \left(\frac{1}{22}n - \frac{1}{24}\mu \right) = \bar{D} \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > \left(\frac{12}{11}n - \mu \right) s,$$

откуда сразу следует противоречие с неравенством $\mu > n/r$. Лемма доказана.

Показано, что $\mathfrak{J} \in \{13, 24, 32, 43, 46\}$. Мы разберем оставшиеся случаи один за другим.

ЛЕММА 6.16. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 13$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 13$. Тогда O – точка типа $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$ по лемме 6.7, а базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из кривых $\bar{C}$ и $\bar{L}$, где $\bar{C} = E|_T$, а $\alpha(\bar{L})$ является базисной кривой пучка $|-K_X|$. Кривые $\bar{C}$ и $\bar{L}$ неприводимы, и выполнены равенства

$$\bar{C}^2 = \bar{L}^2 = -\frac{5}{6}, \quad \bar{L} \cdot \bar{C} = 1$$

на поверхности T . Положим $\bar{D}|_T = \bar{m}_L \bar{L} + \bar{m}_C \bar{C} + \Upsilon$, где $\bar{m}_L$ и $\bar{m}_C$ – неотрицательные целые числа, а Υ – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривые $\bar{L}$ и $\bar{C}$. Тогда

$$\frac{11}{5}n - \frac{11}{6}\mu = (6L + 5C) \cdot (\bar{m}_L \bar{L} + \bar{m}_C \bar{C} + \Upsilon) = \frac{11}{6}\bar{m}_C + (6L + 5C) \cdot \Upsilon \geq \frac{11}{6}\bar{m}_C,$$

откуда следует, что $\bar{m}_C \leq 6n/5 - \mu$. Таким образом, $\bar{m}_C < n$, потому что $\mu > n/5$.

Пусть $P \notin \bar{L}$. Тогда согласно [9, теорема 7.5] особенности логпары

$$\left(S, \bar{C} + \frac{\bar{m}_L}{n}L + \frac{1}{n}\Upsilon \right)$$

не логканонические в точке P , потому что $\bar{m}_C + \mu - n/5 \leq n$. Таким образом, выполнено неравенство $\text{mult}_P(\Upsilon|_{\bar{C}}) > n$ согласно [9, теорема 7.5]. Итак, мы видим, что

$$\frac{5}{6}\mu + \frac{5}{6}\bar{m}_C \geq \frac{5}{6}\mu - \bar{m}_L + \frac{5}{6}\bar{m}_C = \Upsilon \cdot \bar{C} > n,$$

откуда следует противоречие, так как $\bar{m}_C \leq 6/5 - \mu$. Показано, что $P = \bar{L} \cap \bar{C}$.

Положим $\bar{D}|_{\bar{M}} = m\bar{L} + \Omega$, где m – неотрицательное целое число, а Ω – эффективный дивизор, носитель которого не содержит кривую $\bar{L}$. Тогда $L^2 = 1/6$ на поверхности $\bar{M}$, но выполнено неравенство $m \leq n$ согласно замечанию 2.12, потому что $\alpha^*(-K_X) \cdot \bar{L} = 11/30$.

Рассуждая так же, как в случае $P \notin \bar{L}$, мы получаем, что $\text{mult}_P(\Omega|_{\bar{L}}) > n$. Имеем

$$\frac{11}{30}n - \mu = \bar{D} \cdot \bar{L} = \frac{1}{6}m + \Omega \cdot \bar{L} > \frac{1}{6}m + n,$$

откуда следует, что $m < 0$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.17. *Выполнено неравенство $\mathfrak{I} \neq 24$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{I} = 24$. Базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из неприводимых кривых L и C таких, что $\alpha(C)$ – базисная кривая пучка $|-K_X|$, кривая L содержится в поверхности $E \cong \mathbb{P}(1, 2, 5)$ и является единственной кривой в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,5)}(1)|$.

Пусть $\bar{S}$ – общая поверхность пучка $|-K_U|$. Тогда $P \in L$ по лемме 6.14, но $P \notin C$, потому что пересечение $L \cap C$ состоит из особой точки многообразия U , имеющей тип $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$.

Поверхность $\bar{S}$ нормальна. Легко видеть, что

$$L^2 = C^2 = -\frac{7}{10}, \quad L \cdot C = \frac{4}{5}$$

на поверхности $\bar{S}$. Положим $\bar{D}|_{\bar{S}} = m_L L + m_C C + \Delta$, где m_L и m_C – неотрицательные целые числа, а Δ является эффективным дивизором на поверхности $\bar{S}$, носитель которого не содержит кривые L и C . Тогда

$$\frac{3}{14}n - \frac{4}{5}\mu - \frac{4}{5}m_L + \frac{7}{10}m_C = \Delta \cdot C \geq 0,$$

но $m_C \leq n$ по замечанию 2.12, так как $\alpha^*(-K_X) \cdot C = 3/14$. Тогда $\mu + m_L \leq 8n/7$.

Поверхность $\bar{S}$ неособа в точке P . Согласно [9, теорема 7.5] логпара

$$\left(\bar{S}, \frac{m_L + \mu - n/7}{n}L + \frac{m_C}{n}C + \frac{1}{n}\Delta\right)$$

не логканонична в точке P , но $\mu + m_L - n/7 \leq n$. Откуда сразу следует, что логпара

$$\left(\bar{S}, L + \frac{m_C}{n}C + \frac{1}{n}\Delta\right)$$

не логканонична в точке P . Вновь применяя [9, теорема 7.5], мы видим, что

$$\frac{7}{10}\mu + \frac{7}{10}m_L = \Delta \cdot L \geq \text{mult}_P(\Delta|_L) > n,$$

откуда следует неравенство $\mu + m_L > 10n/7$, однако $\mu + m_L \leq 8n/7$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.18. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 32$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 32$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 7)$ степени 16, точка O является особой точкой типа $\frac{1}{7}(1, 3, 4)$, базисное множество пучка $|-2K_U|$ состоит из неособых кривых L и C таких, что $L = T \cdot E$, а $\alpha(C)$ – базисная кривая пучка $|-2K_X|$.

Положим $\bar{D} \cdot T = m_1 L + m_2 C + \Delta$, где m_1 и m_2 – некоторые неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые L и C . Тогда

$$-K_U \cdot L = -K_U \cdot C = \frac{1}{12},$$

откуда следует, что $m_1 + m_2 + \mu \leq 8n/7$ согласно замечанию 2.12.

Легко видеть, что пересечение $C \cap L$ состоит из особой точки многообразия U , откуда следует, что кривая C не содержит P . Пусть S – общая поверхность в пучке $|-2K_U|$. Тогда

$$\frac{4}{21}n - \frac{1}{6}\mu - \frac{1}{6}(m_1 + m_2) = S \cdot \Delta \geq \text{mult}_P(\Delta) > \frac{8}{7}n - \mu - m_1,$$

откуда следует, что $40n/7 \geq 40n/7 - 6m_2 \geq 5n(m_1 + m_2 + \mu) - 6m_2 > 40n/7$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.19. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 43$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 43$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 9)$ степени 20, точка O является особой точкой типа $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$, выполнено равенство $j = 1$, базисное множество пучка $|-2K_U|$ состоит из кривых C и L таких, что $L = T \cdot E$, а кривая C является единственной кривой среди кривых $C_1, \dots, C_l$, которая пересекает кривую L .

Предположим, что $P \notin C$. Тогда из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что для некоторого натурального числа $s > 0$ мы можем найти поверхность H в линейной системе $|-20sK_U|$ такую, что кратность поверхности H в точке P не меньше $s > 0$, но поверхность H при этом не содержит компоненты эффективного цикла $\bar{D} \cdot T$, которые проходят через точку P . Следовательно, мы видим, что

$$20s \left(\frac{1}{18}n - \frac{1}{20}\mu \right) = \bar{D} \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(\bar{D})s > \left(\frac{10}{9}n - \mu \right)s,$$

откуда следует неравенство $\mu < n/9$, которое противоречит неравенству $\mu > n/10$.

Итак, показано, что $P \in C$. Тогда поверхность $\bar{M}$ содержит обе кривые C и L . Положим

$$\bar{D}|_{\bar{M}} = m_1 L + m_2 C + \Delta,$$

где m_1 и m_2 – неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный цикл, носитель которого не содержит кривые L и C . Из замечания 2.12 следует, что $m_2 \leq n$, так как $\alpha^*(-K_X) \cdot C = 1/9$.

Поверхность $\overline{M}$ неособа в точке P . Согласно [9, теорема 7.5] логпара

$$\left(\overline{M}, \frac{1}{n}\overline{D}|_{\overline{M}} + \left(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{9}\right)E|_{\overline{M}}\right)$$

не логканонична в точке P . Имеем $E|_{\overline{M}} = L + Z$, где Z – неприводимая кривая, которая не проходит через точку P . Таким образом, логпара

$$\left(\overline{M}, \left(\frac{m_1}{n} + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{9}\right)L + C + \frac{1}{n}\Delta\right)$$

не логканонична в точке P . Повторно применяя [9, теорема 7.5], мы видим, что

$$\frac{1}{9}n - \mu - m_1 + m_2 = \Delta \cdot C \geq \text{mult}_P(\Delta|_C) > n - m_1 - \mu + \frac{1}{9}n,$$

так как $C^2 = -1$ и $C \cdot L = 1$ на поверхности $\overline{M}$. Показано, что $m_2 > n$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.20. *Выполнено неравенство $\mathfrak{J} \neq 46$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{J} = 46$. Тогда X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 3, 7, 10)$ степени 21, точка O является особой точкой типа $\frac{1}{10}(1, 3, 7)$, базисное множество пучка $|-K_U|$ состоит из неприводимых неособых рациональных кривых C и L таких, что $\alpha(C)$ является единственной базисной кривой пучка $|-K_X|$, а кривая L содержится в поверхности E .

Кривая C является единственной кривой среди кривых $C_1, \dots, C_l$, которая содержится в поверхности T . При этом поверхность $\overline{M}$ содержит обе кривые C и L , откуда $P \in \overline{M}$.

Предположим, что $P \notin C$. Тогда из [5, доказательство теоремы 5.6.2] следует, что существует поверхность H в линейной системе $|-21sK_U|$, которая имеет кратность не меньше $s > 0$ в точке P , но не содержит компоненты цикла $\overline{D} \cdot \overline{M}$, которые проходят через точку P , где s – некоторое натуральное число. Тогда

$$21s\left(\frac{1}{10}n - \frac{11}{21}\mu\right) = \overline{D} \cdot H \cdot \overline{S} \geq \text{mult}_P(\overline{D})s > \left(\frac{11}{10}n - \mu\right)s,$$

откуда следует, что $\mu < n/10$, но $\mu > n/10$. Противоречие.

Показано, что $P = C \cap L$. Положим $\overline{D}|_{\overline{M}} = m_1L + m_2C + \Delta$, где m_1 и m_2 – неотрицательные целые числа, а Δ – эффективный дивизор на поверхности $\overline{M}$, носитель которого не содержит кривые L и C . Тогда $m_2 \leq n$ по замечанию 2.12.

Поверхность $\overline{M}$ неособа в точке P . Из [9, теорема 7.5] следует, что логпара

$$\left(\overline{M}, \left(\frac{m_1}{n} + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{10}\right)L + C + \frac{1}{n}\Delta\right)$$

не логканонична в точке P , поскольку $E|_{\overline{M}} = L + Z$, где Z – неприводимая кривая, не проходящая через точку P . Теперь из [9, теорема 7.5] следует, что

$$\frac{1}{10}n - \mu - m_1 + m_2 = \Delta \cdot C \geq \text{mult}_P(\Delta|_C) > n - m_1 - \mu + \frac{1}{10}n,$$

потому что $C^2 = -1$ и $C \cdot L = 1$. Таким образом, выполнено неравенство $m_2 > n$, что является противоречием, потому что $m_2 \leq n$ согласно замечанию 2.12. Лемма доказана.

Утверждение леммы 2.11 полностью доказано.

§ 7. Гиперповерхность степени 5/2

Цель в настоящем параграфе – доказать теорему 1.17. Пусть X – достаточно общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ степени 5. Особенности гиперповерхности X состоят из особой точки O типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, и X может быть задана уравнением

$$xw^2 + f_3(x, y, z, t)w + f_5(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = \text{wt}(t) = 1$ и $\text{wt}(w) = 2$, $f_i(x, y, z, t)$ – однородный многочлен степени $i \geq 1$, а точка O задается уравнениями $x = y = z = t = 0$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – естественная проекция. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xleftarrow{\alpha_i} & W_i \\ & \swarrow \pi & \searrow \gamma & & \searrow \omega_i \\ X & & Z & \xleftarrow{\beta_i} & U_i \\ & \searrow \psi & \swarrow \eta & & \swarrow \xi_i \\ & & \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\chi_i} & \mathbb{P}^2 \end{array} \quad (7.1)$$

где π – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, 1, 1)$, γ – бирациональный морфизм, стягивающий ровно 15 неособых рациональных кривых $C_1, \dots, C_{15}$ в 15 обыкновенных двойных точек $P_1, \dots, P_{15}$ многообразия Z , η – двулистное накрытие, которое разветвлено над неприводимой поверхностью $R \subset \mathbb{P}^3$ степени 6, заданной уравнением

$$f_3^2(x, y, z, t) = 4x f_5(x, y, z, t) \subset \mathbb{P}^3 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t])$$

и имеющей 15 обыкновенных двойных точек $\eta(P_1), \dots, \eta(P_{15})$, морфизм α_i – раздутие неособой кривой C_i , морфизм β_i – раздутие точки P_i , w_i – бирациональный морфизм, χ_i – проекция из точки $\eta(P_i)$, а морфизм ξ_i – эллиптическое расслоение.

Пусть $\lambda = 7/9$, а D – любой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на гиперповерхности X такой, что выполнена эквивалентность $D \equiv -K_X$. Мы покажем, что логпара $(X, \lambda D)$ всегда имеет логканонические особенности, откуда сразу будет следовать неравенство $\text{lct}(X) \geq 7/9$.

Допустим, что логпара $(X, \lambda D)$ не является логканонической и $\mathcal{L}(X, \lambda D)$ – подсхема ее логканонических особенностей (см. [4]), а $\mathcal{J}(\lambda D)$ – соответствующий пучок идеалов. Тогда

$$H^1(X, \mathcal{J}(\lambda D)) = 0 \quad (7.2)$$

по теореме Надея об обращении в нуль (см. [9, теорема 2.16]).

ЛЕММА 7.1. Пусть T – дивизор в $|-K_X|$. Тогда логпара (X, T) логканонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – поверхность, которая высекается уравнением $x = 0$ на гиперповерхности X . Тогда из [9, лемма 8.12, предложение 8.14] следует, что особенности логпары (X, T) логканонические, поскольку гиперповерхность X достаточно общая.

Можно считать, что T не высекается уравнением $x = 0$. Тогда из диаграммы (7.1) и [9, лемма 8.12] следует, что T нормальна, а логпара (X, T) логканонична в O .

Пусть P – точка поверхности T , отличная от точки O . Тогда поверхность T неособа в точке P в случае, когда $\psi(P) \notin R$. С другой стороны, из несложного подсчета параметров сразу следует, что T имеет в точке P не более чем особенность типа $\mathbb{A}_n$, если $P \in \bigcup_{i=1}^{15} \pi(C_i)$.

Для завершения доказательства мы можем считать, что ψ является двулистным накрытием в окрестности точки P , логпара (X, T) не логканонична в точке P и $\psi(P) \in R$.

Положим $\bar{T} = \psi(T)$ и $\bar{P} = \psi(P)$. Тогда из [9, лемма 8.12] следует, что особенности логпары $(\mathbb{P}^3, \bar{T} + \frac{1}{2}R)$ не логканоничны в точке $\bar{P}$. Из [9, теорема 7.5] следует, что особенности логпары $(\bar{T}, \frac{1}{2}R|_{\bar{T}})$ также не являются логканоническими в точке $\bar{P}$, откуда

$$\text{mult}_{\bar{P}}(R|_{\bar{T}}) \geq 3, \quad (7.3)$$

где $\bar{T}$ – плоскость в $\mathbb{P}^3$, но из подсчета параметров следует, что (7.3) не может быть выполнено, если многочлены f_3 и f_5 выбраны достаточно общими. Лемма доказана.

Из замечания 2.2 следует, что для завершения доказательства теоремы 1.17 мы можем считать, что носитель дивизора D не содержит поверхности из линейной системы $|-K_X|$.

ЛЕММА 7.2. Схема $\mathcal{L}(X, \lambda D)$ нульмерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что схема $\mathcal{L}(X, \lambda D)$ не может содержать двумерные компоненты, поскольку $\lambda < 1$, а группа классов дивизоров гиперповерхности X порождается дивизором $-K_X$. Предположим, что схема $\mathcal{L}(X, \lambda D)$ не является нульмерной.

Существует кривая $C \subset X$ такая, что особенности логпары $(X, \lambda D)$ не являются логканоническими в общей точке кривой C . В частности, выполнено неравенство

$$\text{mult}_C(D) > \frac{1}{\lambda} = \frac{9}{7},$$

и мы можем считать, что кривая C неприводима.

Предположим, что $\psi(C)$ – кривая такая, что пересечение $R \cap \psi(C)$ содержит некоторую неособую точку Q поверхности ветвления R . Пусть $\bar{Q}$ – точка

гиперповерхности X такая, что $\psi(\bar{Q}) = Q$. Тогда существует поверхность $H' \in |-K_X|$, имеющая особенность в $\bar{Q}$. Имеем

$$\frac{5}{2} = H \cdot H' \cdot D \geq \text{mult}_{\bar{Q}}(T) \text{mult}_C(D) > \frac{2}{\lambda} = \frac{18}{7} > \frac{5}{2},$$

где H – общая поверхность в $|-K_X|$, проходящая через точку $\bar{Q}$.

Итак, либо $\psi(C)$ – точка, либо $R \cap \psi(C) \subseteq \text{Sing}(R)$.

Предположим, что C не стягивается отображением ψ , но кривая $\psi(C)$ не является прямой. Пусть Q_1 и Q_2 – две достаточно общие точки на кривой C . Тогда

$$\frac{5}{2} = H_1 \cdot H_2 \cdot D \geq 2 \text{mult}_C(D) > \frac{2}{\lambda} = \frac{18}{7} > \frac{5}{2},$$

где H_i – общая поверхность в $|-K_X|$, проходящая через точку Q_i . Противоречие.

Несложно видеть, что нет прямых в $\mathbb{P}^3$, которые пересекают R только в особых точках поверхности R . Итак, показано, что C – одна из кривых $\pi(C_1), \dots, \pi(C_{15})$.

Положим $\bar{C}_i = \pi(C_i)$ и будем считать, что $C = \bar{C}_1$. Пусть $\bar{T}$ – поверхность, высеканная на гиперповерхности X уравнением $x = 0$, а T – собственный прообраз поверхности $\bar{T}$ на многообразии Y . Поверхность $\bar{T}$ содержит все кривые $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{15}$, поверхность T неособа, а морфизм γ индуцирует бирациональный морфизм

$$\gamma|_T: T \longrightarrow \gamma(T) \cong \mathbb{P}^2,$$

который стягивает кривые $C_1, \dots, C_{15}$ в точки $P_1, \dots, P_{15}$ соответственно.

Положим $\dot{T} = \gamma(T)$ и $\check{T} = \nu(\dot{T})$. Тогда $\check{T}$ – плоскость в $\mathbb{P}^3$.

Пусть L_j – собственный прообраз на поверхности T прямой, которая содержится в плоскости $\check{T}$ и проходит через точки $\nu(P_1)$ и $\nu(P_j)$, где $j \neq 1$. Тогда

$$C_1 \cdot L_j = C_j \cdot L_j = 1, \quad C_i^2 = L_j^2 = -1, \quad L_j \cdot C_k = L_i \cdot L_j = C_i \cdot C_k = 0$$

на поверхности T , где $i \neq j \neq k$ и $j \neq 1$. Пусть E – кривая, стягиваемая бирациональным морфизмом $\pi|_T$ в точку O . Тогда

$$E \cdot C_i = E \cdot L_j = 1, \quad E^2 = -6$$

на поверхности T . Положим $\bar{L}_j = \pi(L_j)$. Тогда на поверхности $\bar{T}$ выполнены равенства

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{L}_j = \bar{C}_j \cdot \bar{L}_j = \frac{7}{6}, \quad \bar{C}_i^2 = \bar{L}_j^2 = -\frac{5}{6}, \quad \bar{C}_i \cdot \bar{C}_k = \bar{C}_k \cdot \bar{L}_j = \bar{L}_i \cdot \bar{L}_j = \frac{1}{6},$$

где $i \neq j \neq k$ и $j \neq 1$. Теперь положим

$$D|_{\bar{T}} = \bar{m}\bar{C}_1 + \sum_{i=2}^{15} \varepsilon_i \bar{L}_i + \Delta \equiv -K_X|_{\bar{T}},$$

где $\bar{m}$ и ε_i – неотрицательные рациональные числа, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности $\bar{T}$, носитель которого не содержит кривые $C_1, L_2, \dots, \dots, L_{15}$. Тогда $\bar{m} > 1/\lambda$ и

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= D|_{\bar{T}} \cdot \bar{L}_k = \bar{m}\bar{C}_1 \cdot \bar{L}_k + \sum_{i=2}^{15} \varepsilon_i \bar{L}_i \cdot \bar{L}_k + \Delta \cdot \bar{L}_k \geq \bar{m}\bar{C}_1 \cdot \bar{L}_k + \sum_{i=2}^{15} \varepsilon_i \bar{L}_i \cdot \bar{L}_k \\ &= \frac{7\bar{m}}{6} - \varepsilon_k + \frac{\sum_{i=2}^{15} \varepsilon_i}{6}, \end{aligned}$$

где $k \neq 1$. Суммируя последнее неравенство по k , мы получаем неравенство

$$21 \geq \frac{49\bar{m}}{3} + \frac{4}{3} \sum_{i=2}^{15} \varepsilon_i \geq \frac{49\bar{m}}{3},$$

откуда следует, что $\bar{m} \leq 9/7$. Это противоречит неравенству $\bar{m} > 1/\lambda = 9/7$. Лемма доказана.

Из равенства (7.2) следует, что существует точка $P \in X$ такая, что логпара $(X, \lambda D)$ имеет логканонические особенности вне точки P . Пусть E – исключительный дивизор взвешенного раздутья π , а $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на многообразии Y . Тогда

$$\bar{D} \equiv \pi^*(D) - mE,$$

где m – неотрицательное рациональное число.

ЛЕММА 7.3. *Точка P является точкой O .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $P \notin \bigcup_{i=1}^{15} \pi(C_i)$. Тогда согласно [2, утверждение 3] существует поверхность $T \in |-K_X|$ такая, что

$$\frac{5}{2} = D \cdot H \cdot T \geq \text{mult}_P(D \cdot T) > \frac{2}{\lambda} = \frac{18}{7} > \frac{5}{2},$$

где H – общая поверхность в $|-K_X|$, проходящая через точку P . Противоречие.

Можно считать, что $P \neq O$ и $P \in \pi(C_1)$. Ограничивая дивизор D на поверхность E , мы видим, что $2m \geq \text{mult}_{C_1}(\bar{D})$, а из доказательства леммы 7.2 следует, что $\text{mult}_{C_1}(\bar{D}) \leq 9/7$.

Пусть $\check{D}$ – собственный прообраз дивизора D на многообразии W_1 . Тогда

$$\check{D} \equiv (\pi \circ \alpha_1)^*(D) - m\check{E} - \text{mult}_{C_1}(\bar{D})G_1,$$

где G_1 – исключительный дивизор бирационального морфизма α_1 , а $\check{E}$ – собственный прообраз дивизора E на многообразии W_1 . Из предположения $P \neq O$ и эквивалентности

$$K_{W_1} + \lambda\check{D} + \left(\lambda m - \frac{1}{2}\right)\check{E} + (\lambda \text{mult}_{C_1}(\bar{D}) - 1)G_1 \equiv (\pi \circ \alpha_1)^*(K_X + \lambda D)$$

следует, что особенности логпары $(W_1, \lambda\check{D})$ не являются логканоническими, поскольку $\text{mult}_{C_1}(\bar{D}) \leq 9/7$. Тогда логпара $(G_1, \lambda\check{D})$ не логканонична [9, теорема 7.5].

Имеем $G_1 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть L – слой морфизма $\pi \circ \alpha_1$ над точкой P . Кривая L содержится в поверхности G_1 . Пусть $\dot{L}$ – кривая на G_1 такая, что $L \cdot \dot{L} = 0$ и $\dot{L}^2 = 0$. Тогда

$$\lambda \check{D}|_{G_1} \equiv \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda m + \lambda \text{mult}_{C_1}(\bar{D}) \right) L + \lambda \text{mult}_{C_1}(\bar{D}) \dot{L},$$

откуда следует (см. [4, лемма 1.7.9]), что логпара $(G_1, \lambda \check{D})$ логканонична при

$$\frac{\lambda}{2} - \lambda m + \lambda \text{mult}_{C_1}(\bar{D}) \leq 1,$$

но логпара $(G_1, \lambda \check{D})$ не логканонична. Показано, что $\text{mult}_{C_1}(\bar{D}) > 11/14 + m$, откуда следует, что $9/7 \geq \text{mult}_{C_1}(\bar{D}) > 11/7$, поскольку $2m \geq \text{mult}_{C_1}(\bar{D})$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть T – поверхность, высекаемая на гиперповерхности X уравнением $x = 0$. Тогда

$$\bar{T} \equiv \pi^*(T) - \frac{3}{2}E,$$

где $\bar{T}$ – собственный прообраз дивизора T на многообразии Y . Следовательно, $5/2 - 3m = \bar{D} \cdot \bar{T} \cdot \bar{H} \geq 0$, где $\bar{H}$ – общая поверхность в линейной системе $|-K_Y|$.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *Выполнено неравенство $m \leq 5/6$.*

Из работы [10] или [9] следует, что $m > 9/14$, а из численной эквивалентности

$$K_Y + \lambda \bar{D} + \left(\lambda m - \frac{1}{2} \right) E \equiv \pi^*(K_X + \lambda D)$$

следует, что существует точка $\bar{Q} \in E \cong \mathbb{P}^2$ такая, что особенности логпары $(Y, \lambda \bar{D} + (\lambda m - 1/2)E)$ не являются логканоническими в точке $\bar{Q}$. В частности, выполнено неравенство

$$\text{mult}_{\bar{Q}}(\bar{D}) > \frac{3}{2\lambda} - m,$$

поскольку граница $\lambda \bar{D} + (\lambda m - 1/2)E$ эффективна.

ЛЕММА 7.5. *Допустим, что $\bar{Q} \in \bar{T}$. Тогда $\bar{Q} \in \bigcup_{i=1}^{15} C_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{Q} \in \bar{T}$, но $\bar{Q} \notin \bigcup_{i=1}^{15} C_i$. Пусть $\bar{H}$ – общая поверхность в линейной системе $|-K_Y|$, которая содержит точку $\bar{Q}$. Тогда $\bar{H}$ не содержит компоненты эффективного цикла $\bar{D} \cdot \bar{T}$. Таким образом, мы видим, что

$$\frac{5}{2} - 3m = \bar{D} \cdot \bar{T} \cdot \bar{H} \geq \text{mult}_{\bar{Q}}(\bar{D}) > \frac{3}{2\lambda} - m,$$

откуда следует $m < 1/2$, что является противоречием. Лемма доказана.

Теперь нам понадобится следующая несложная вспомогательная лемма.

ЛЕММА 7.6. Пусть $\iota: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – двулистное накрытие, которое разветвлено над неособой кривой $Z \subset \mathbb{P}^2$ степени 6, а B – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S такой, что:

- 1) выполнено соотношение $B \equiv \iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$;
- 2) логпара (S, B) логканонична в проколотой окрестности точки $\Theta \in S$, где $\iota(\Theta) \notin Z$.

Тогда логпара (S, B) логканонична в точке Θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особенности логпары (S, B) не являются логканоническими в точке Θ . Пересекая дивизор B с собственным прообразом общей прямой на плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящей через точку $\iota(\Theta)$, мы видим, что $\text{mult}_{\Theta}(B) \leq 2$.

Пусть $v: \bar{S} \rightarrow S$ – раздутие точки Θ . Тогда

$$K_{\bar{S}} + \bar{B} + (\text{mult}_{\Theta}(B) - 1)F \equiv v^*(K_S + B),$$

где F – исключительная кривая раздутия v , а $\bar{B}$ – собственный прообраз дивизора B на поверхности $\bar{S}$. Тогда существует точка $\bar{\Theta} \in F$ такая, что особенности логпары $(\bar{S}, \bar{B} + (\text{mult}_{\Theta}(B) - 1)F)$ не являются логканоническими в точке $\bar{\Theta}$, откуда $\text{mult}_{\bar{\Theta}}(\bar{B}) > 2 - \text{mult}_{\Theta}(B)$.

Пусть L – достаточно общая кривая в линейной системе $|\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такая, что собственный прообраз $\bar{L}$ кривой L на поверхности $\bar{S}$ проходит через точку $\bar{\Theta}$. Тогда L состоит из не более чем двух компонент, одна из которых содержит точку Θ , но L неособа в точке Θ .

Согласно замечанию 2.2 мы можем считать, что носитель дивизора B не содержит по крайней мере одну из компонент кривой L . Значит, из неприводимости кривой L следует

$$2 - \text{mult}_{\Theta}(B) = \bar{B} \cdot \bar{L} \geq \text{mult}_{\bar{\Theta}}(\bar{B}) > 2 - \text{mult}_{\Theta}(B),$$

что является противоречием. Итак, кривая L приводима.

Пусть L_1 и L_2 – компоненты кривой L такие, что $L_2 \not\ni \Theta \in L_1$, а $\bar{L}_1$ – собственный прообраз кривой L_1 на поверхности $\bar{S}$. Тогда

$$1 - \text{mult}_{\Theta}(B) = \bar{B} \cdot \bar{L}_1 \geq \text{mult}_{\bar{\Theta}}(\bar{B}) > 2 - \text{mult}_{\Theta}(B) > 1 - \text{mult}_{\Theta}(B)$$

в случае, когда носитель дивизора B не содержит кривую L_1 . Таким образом, носитель дивизора B не содержит кривую L_2 , но обязательно содержит кривую L_1 . Положим

$$B = \varepsilon L_1 + \Omega,$$

где ε – некоторое положительное рациональное число, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривую L_1 . Тогда

$$1 = B \cdot L_2 = 3\varepsilon + \Omega \cdot L_2,$$

откуда следует, что $\varepsilon \leq 1/3$.

Пусть $\bar{\Omega}$ – собственный прообраз дивизора Ω на поверхности $\bar{S}$. Тогда логпара $(\bar{S}, \varepsilon \bar{L}_1 + \bar{\Omega} + (\text{mult}_{\Theta}(\Omega) + \varepsilon - 1)F)$ не логканонична в точке $\bar{\Theta}$. Согласно [9, теорема 7.5] логпара $(\bar{L}_1, \bar{\Omega}|_{\bar{L}_1} + (\text{mult}_{\Theta}(\Omega) + \varepsilon - 1)F|_{\bar{L}_1})$ также не является логканонической в точке $\bar{\Theta}$, что просто эквивалентно неравенству

$$\text{mult}_{\bar{\Theta}}(\bar{\Omega}|_{\bar{L}_1}) > 2 - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon,$$

откуда следует, что $\bar{\Omega} \cdot \bar{L}_1 > 2 - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon$. Имеем

$$1 - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) + 2\varepsilon = \bar{\Omega} \cdot \bar{L}_1 > 2 - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $\varepsilon > 1/3$, но ранее показано, что $\varepsilon \leq 1/3$. Лемма доказана.

Из утверждения леммы 7.6 вытекает следующий результат.

ЛЕММА 7.7. *Точка $\bar{Q}$ принадлежит множеству $\bigcup_{i=1}^{15} C_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{Q} \notin \bigcup_{i=1}^{15} C_i$. Пусть $\bar{H}$ – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_Y|$, содержащая точку Q . Тогда логпара $(\bar{H}, \lambda \bar{D}|_{\bar{H}} + (\lambda m - 1/2)E|_{\bar{H}})$ не является логканонической в точке $\bar{Q}$ [9, теорема 7.5], что противоречит утверждению леммы 7.6, поскольку $\bar{Q} \notin \bar{T}$ по лемме 7.5. Лемма доказана.

Можно считать, что $\bar{Q} \in C_1$. Пусть S – общая поверхность в $|-K_Y|$, которая содержит точку $\bar{Q}$. Положим $\Theta = \bar{Q}$, $L_1 = E|_S$, $C = C_1$ и $B = \bar{D}|_S + (m - 1/2)L_1$. Тогда:

- 1) выполнено соотношение $B \equiv \iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, где $\iota = \eta \circ \gamma|_S: S \rightarrow \mathbb{P}^2$,
 - 2) логпара $(S, \lambda B)$ логканонична в проколотой окрестности точки $\Theta \in S$,
- поскольку из доказательства леммы 7.2 следует неравенство $\text{mult}_C(D) \leq 1/\lambda$.

ЛЕММА 7.8. *Особенности логпары $(S, \lambda B)$ логканоничны в точке Θ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что логпара $(S, \lambda B)$ не является логканонической в точке Θ . Пусть L_2 – неприводимая кривая такая, что $\iota(L_2) = \iota(L_1)$ и $L_1 \neq L_2$. Тогда

$$L_1 + L_2 + C \equiv \iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)),$$

но особенности логпары $(S, L_1 + L_2 + C)$ являются логканоническими.

Мы можем считать (см. замечание 2.2), что носитель дивизора B не содержит одну из кривых L_1 , L_2 , C . Теперь, пересекая дивизор B с этими кривыми, мы видим, что носитель дивизора B не содержит кривую L_2 . Положим

$$B = \varepsilon C + \bar{m}L_1 + \Omega,$$

где ε и $\bar{m}$ – неотрицательные рациональные числа, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности S , носитель которого не содержит кривые L_1 , L_2 , C . Тогда

$$1 = B \cdot L_2 = 2\bar{m} + \varepsilon + \Omega \cdot L_2 \geq 2\bar{m} + \varepsilon,$$

откуда следует, что $2\bar{m} + \varepsilon \leq 1$. Из [9, теорема 7.5] следует, что логпары

$$(C, \lambda \bar{m}L_1|_C + \lambda \Omega|_C), \quad (L_1, \lambda \varepsilon C|_{L_1} + \lambda \Omega|_{L_1})$$

не логканоничны в точке Θ , откуда $2\varepsilon > 1/\lambda$ и $2\bar{m} > 1/\lambda - 1$ соответственно.

Пусть $v: \bar{S} \rightarrow S$ – раздутие точки Θ . Тогда

$$K_{\bar{S}} + \lambda\varepsilon\bar{C} + \lambda\bar{m}\bar{L}_1 + \lambda\bar{\Omega} + (\lambda\varepsilon + \lambda\bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - 1)F \equiv v^*(K_S + \lambda\varepsilon C + \lambda\bar{m}L_1 + \lambda\Omega),$$

где F – исключительная кривая раздутия v , а $\bar{C}$, $\bar{L}_1$ и $\bar{\Omega}$ – собственные прообразы дивизоров C , L_1 и Ω соответственно. Тогда $\lambda\varepsilon + \lambda\bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - 1 < 1$, поскольку

$$0 = B \cdot C = -2\varepsilon + \bar{m} + C \cdot \Omega \geq -2\varepsilon + \bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega)$$

и $2\bar{m} + \varepsilon \leq 1$. Значит, существует точка $\bar{\Theta} \in F$ такая, что особенности логпары

$$(\bar{S}, \lambda\varepsilon\bar{C} + \lambda\bar{m}\bar{L}_1 + \lambda\bar{\Omega} + (\lambda\varepsilon + \lambda\bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - 1)F)$$

не являются логканоническими в точке $\bar{\Theta}$.

Предположим, что $\bar{\Theta} \notin \bar{C} \cup \bar{L}_1$. Тогда $\text{mult}_{\Theta}(\Omega) = F \cdot \bar{\Omega} > 1/\lambda = 9/7$, поскольку логпара $(F, \lambda\bar{\Omega}|_F)$ не логканонична в точке $\bar{\Theta}$ согласно [9, теорема 7.5]. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= C \cdot B = \bar{m} - 2\varepsilon + \Omega \cdot C > \bar{m} - 2\varepsilon + \frac{1}{\lambda}, \\ 1 &= L_1 \cdot B = -2\bar{m} + \varepsilon + \Omega \cdot L_1 > -2\bar{m} + \varepsilon + \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

откуда сразу следует противоречие с неравенством $2\bar{m} + \varepsilon \leq 1$.

Предположим, что $\bar{\Theta} \in \bar{L}_1$. Тогда

$$1 - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon + 2\bar{m} = \bar{L}_1 \cdot \bar{\Omega} > \frac{2}{\lambda} - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon - \bar{m},$$

поскольку особенности логпары $(\bar{L}_1, \lambda\bar{\Omega}|_{\bar{L}_1} + (\lambda\varepsilon + \lambda\bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - 1)F|_{\bar{L}_1})$ не логканоничны в точке $\bar{\Theta}$ согласно [9, теорема 7.5]. Тогда $\bar{m} > 11/21$, откуда следует противоречие, поскольку $2\bar{m} + \varepsilon \leq 1$.

Таким образом, показано, что $\bar{\Theta} \in \bar{C}$. Мы видим, что

$$-\text{mult}_{\Theta}(\Omega) + 2\varepsilon - \bar{m} = \bar{C} \cdot \bar{\Omega} > \frac{2}{\lambda} - \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - \varepsilon - \bar{m},$$

поскольку особенности логпары $(\bar{C}, \lambda\bar{\Omega}|_{\bar{C}} + (\lambda\varepsilon + \lambda\bar{m} + \text{mult}_{\Theta}(\Omega) - 1)F|_{\bar{C}})$ не являются логканоническими в точке $\bar{\Theta}$ согласно [9, теорема 7.5]. Тогда $\varepsilon > 6/7$, откуда следует противоречие, так как $2\bar{m} > 1/\lambda - 1 = 2/7$ и $2\bar{m} + \varepsilon \leq 1$. Лемма доказана.

Согласно [9, теорема 7.5] логпара $(S, \lambda B)$ не может быть логканонической в точке Θ , что противоречит лемме 7.8 и завершает доказательство теоремы 1.17.

§ 8. Бирациональные автоморфизмы

Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10)$ степени 20. Тогда ее особенности состоят из особой точки Q типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ и двух особых точек O_1 и O_2 типа $\frac{1}{5}(1, 1, 4)$.

Пусть $\alpha: U \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки O_1 с весами $(1, 1, 4)$. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xleftarrow{\gamma} & Y \\
 & \swarrow \sigma & \downarrow \alpha & & \searrow \eta \\
 V & & X & & \\
 & \searrow \omega & \swarrow \xi & \dashrightarrow \chi & \searrow \psi \\
 & & \mathbb{P}(1, 1, 4, 10) & \dashrightarrow & \mathbb{P}(1, 1, 4)
 \end{array}$$

где ξ , ψ и χ – проекции, γ – взвешенное раздутие с весами $(1, 1, 4)$ особой точки, которая доминирует точку O_2 , морфизм η – эллиптическое расслоение, σ – бирациональный морфизм, который стягивает 75 рациональных кривых $C_1, \dots, C_{75}$, а ω – двулистное накрытие.

Пусть τ – инволюция гиперповерхности X , индуцированная проекцией $X \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 4, 5)$.

ЛЕММА 8.1. *Группа $\text{Aut}(X)$ порождена инволюцией τ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P_i = \sigma(C_i)$. Тогда X может быть задана уравнением

$$t^2w + tg(x, y, z, w) + h(x, y, z, w) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 4$, $\text{wt}(t) = 5$, $\text{wt}(w) = 10$, а g и h – квази-однородные многочлены степени 15 и 20 соответственно, а точка O_1 задана уравнениями $x = y = z = w = 0$.

Пусть v – бирегулярный автоморфизм гиперповерхности X , который отличен от инволюции τ . Подкручивая при необходимости автоморфизм v на бирегулярную инволюцию τ , можно считать, что $v(O_1) = O_1$. Покажем, что v – тождественное отображение.

Автоморфизм v индуцирует бирегулярный автоморфизм $\dot{v}$ многообразия U такой, что дивизор E является $\dot{v}$ -инвариантным. Положим $\dot{P}_i = C_i \cap E$. Тогда точки $\dot{P}_1, \dots, \dot{P}_{75}$ могут быть заданы уравнениями

$$\dot{g}(x, y, z) = \dot{h}(x, y, z) = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 4$, а $\dot{g}$ и $\dot{h}$ – квазиоднородные многочлены степени 15 и 20 соответственно. Множество $\{\dot{P}_1, \dots, \dot{P}_{75}\}$ также является $\dot{v}|_E$ -инвариантным. Собственный прообраз на многообразии U поверхности, высекаемой на гиперповерхности X уравнением $w = 0$, является $\dot{v}$ -инвариантной поверхностью, откуда следует, что $\dot{v}|_E$ является тождественным отображением.

Легко видеть, что автоморфизм v индуцирует бирегулярный автоморфизм $\bar{v}$ многообразия Y такой, что расслоение η инвариантно относительно автоморфизма $\bar{v}$.

Пусть $\bar{E}$ и $\bar{F}$ – два исключительных дивизора бирационального морфизма $\alpha \circ \gamma$ такие, что $\gamma(\bar{E}) = E$ и $\alpha \circ \gamma(\bar{F}) = O_2$. Поверхности $\bar{E}$ и $\bar{F}$ являются такими $\bar{v}$ -инвариантными сечениями расслоения η , что $\bar{v}|_{\bar{E}}$ и $\bar{v}|_{\bar{F}}$ суть тождественные отображения.

В работе [6] было показано, что сечения $\bar{E}$ и $\bar{F}$ индуцируют $\mathbb{Z}$ -линейно независимые точки в группе Пикара общего слоя эллиптического расслоения η . Таким образом, индуцированный автоморфизм $\bar{v}$ действует тривиальным образом на общем слое эллиптического расслоения η , откуда следует, что автоморфизм $\bar{v}$ является тождественным отображением. Значит, автоморфизм v также является тождественным отображением. Лемма доказана.

Следующий результат вытекает из работы [6] и леммы 8.1.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. *Существует точная последовательность групп*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Bir}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1,$$

откуда следует, что $\mathrm{Bir}(X) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Аналогично можно показать, что следующий результат вытекает из работы [6].

ЛЕММА 8.3. *Пусть V – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3, 3)$ степени 9. Тогда*

$$\mathrm{Bir}(V) \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^2 = 1 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особенности многообразия V состоят из точек O_1, O_2, O_3 типа $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и одной особой точки O типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Пусть v – некоторый бирегулярный автоморфизм гиперповерхности V . Покажем, что v является тождественным отображением (см. [6]).

Пусть Z – базисная кривая пучка $|-K_V|$. Тогда Z является v -инвариантной неособой рациональной кривой, содержащей O_1, O_2, O_3 и O , откуда следует, что $v(O_i) = O_i$, так как

$$v(\{O_1, O_2, O_3\}) = \{O_1, O_2, O_3\},$$

и $v(O) = O$. Теперь из аргументов, использованных при доказательстве леммы 8.1, следует, что отображение v является тождественным отображением. Лемма доказана.

Было бы интересно доказать аналог следствия 8.2 и леммы 8.3 для всех бирационально жестких многообразий Фано, удовлетворяющих условиям теоремы 1.14.

§ 9. Метод Коллара

В настоящем параграфе мы приведем новый подход к доказательству теоремы 1.15, принадлежащий Я. Коллару. Воспользуемся обозначениями и предположениями из теоремы 1.14.

Гиперповерхность X может быть задана уравнением

$$f(x, y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_2$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, а $f(x, y, z, t, w)$ – общий квазиоднородный многочлен степени $d = \sum_{i=1}^4 a_i$. Введем следующие обозначения: S – общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$, Z – кривая, которая высекается на поверхности S уравнениями $x = y = 0$, а L – кривая, которая задается в $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ уравнениями $x = y = z = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1$, если имеет место одно из следующих условий:*

- 1) *выполнено неравенство $d \leq a_1 a_2$;*
- 2) *выполнено неравенство $d \leq a_1 a_3$, а кривая L не содержится в X ;*
- 3) *выполнено неравенство $d \leq a_2 a_3$, кривая Z неприводима, а логпара $(S, \frac{1}{a_1}Z)$ имеет логканонические особенности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – произвольный эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что выполнена эквивалентность $D \equiv -K_X$. Из леммы 2.4 следует, что логпара (X, D) логканонична вне особых точек гиперповерхности X , но S содержит все особые точки гиперповерхности X .

Предположим, что (X, D) не логканонична. Тогда согласно [9, теорема 7.5] логпара $(S, D|_S)$ также не логканонична. Теперь, из [13, следствие 12] следует противоречие в случае, когда выполнено одно из условий 1) и 2).

Для завершения доказательства можно считать, что $d \leq a_2 a_3$, кривая Z неприводима, а логпара $(S, \frac{1}{a_1}Z)$ имеет логканонические особенности. Мы можем считать, что носитель дивизора $D|_S$ не содержит кривую Z (см. замечание 2.2). Теперь согласно [13, доказательство предложения 11] имеем $d > a_2 a_3$, что является противоречием. Предложение доказано.

Из предложения 9.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 9.2. *Выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1$ в случае, когда $\mathfrak{J} \geq 17$ и*

$$\mathfrak{J} \notin \{18, \dots, 25, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 42, 43, 46, 47, 50, 52, \\ 55, 56, 57, 62, 63, 67, 82\}.$$

Доказательство предложения 9.1 было сообщено автору Я. Колларом.

Список литературы

1. J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:4 (2001), 525–556.
2. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.
3. I. Cheltsov, “Fano varieties with many selfmaps”, *Adv. Math.*, **217**:1 (2008), 97–124.

4. И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
5. A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.
6. I. Cheltsov, J. Park, “Weighted Fano threefold hypersurfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **600** (2006), 81–116.
7. H. Matsumura, P. Monsky, “On the automorphisms of hypersurfaces”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **3** (1964), 347–361.
8. I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*, [arXiv: abs/0706.0751](#).
9. J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry*, Proceedings of the Summer Research Institute (Santa Cruz, CA, USA, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
10. Y. Kawamata, “Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities”, *Higher dimensional complex varieties*, Proceedings of the international conference (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 241–246.
11. И. А. Чельцов, “Эллиптические структуры на трехмерных взвешенных гиперповерхностях Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 115–224; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Elliptic structures on weighted three-dimensional Fano hypersurfaces”, *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 765–862.
12. I. Cheltsov, J. Park, *Halphen pencils on weighted Fano threefold hypersurfaces*, [arXiv: math.AG/0607776](#).
13. J. M. Johnson, J. Kollár, “Kähler–Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **51**:1 (2001), 69–79.

И. А. ЧЕЛЬЦОВ (I. A. CHELTSOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию

06.08.2007

25.01.2008