Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Штепин, Т. В. Штепина, Применение сплетающих операторов в функциональном анализе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 6, 195–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:55:48

УДК 515.12

В. В. Штепин, Т. В. Штепина

Применение сплетающих операторов в функциональном анализе

Рассматриваются классы интегральных операторов в пространствах квадратично интегрируемых функций на сфере и локально интегрируемых функций на пространстве Лобачевского, ядра которых зависят только от расстояния между точками соответственно в сферической и гиперболической геометрии. Указанные операторы являются сплетающими операторами квазирегулярного представления соответствующей группы Ли, что позволяет вычислить их спектры и диагонализировать сами операторы. В качестве приложений рассмотрены задача Минковского и теорема Функа–Гекке для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Получено обобщение теоремы Функа–Гекке в случае гиперболического пространства $\mathbb{R}^{n-1,1}$ с индефинитным скалярным произведением.

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: сплетающий оператор, представление простого спектра, гиперболические гармоники, непрерывный базис, обобщение теоремы Функа–Гекке.

Введение

Знаменитая лемма Шура гласит, что всякий сплетающий оператор, действующий в пространстве неприводимого комплексного представления, является скалярным¹. Сплетающие операторы возникают самым естественным образом в разных областях математики. Например, если какой-то оператор зависит от элемента g группы G , то мы вправе ожидать, что его усреднение по G будет обладать какими-то “хорошими” свойствами подобно тому, как математическое ожидание случайной величины имеет не случайно “хорошие” свойства. Часто такое усреднение оказывается интегральным сплетающим оператором, действующим из одного функционального пространства в другое. Приложения сплетающих операторов в алгебре встречаются достаточно часто и не вызывают удивления (упомянем лишь классическую теорему Г. Вейля о взаимной ортогональности характеров конечномерных неприводимых представлений компактной группы). Гораздо менее известны приложения сплетающих операторов в функциональном анализе, где в действительности они наиболее эффективны.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторое интегральное преобразование, действующее из функционального пространства X в функциональное пространство Y . Часто X и Y

¹Эту формулировку можно немного уточнить. Всякий сплетающий оператор, действующий из пространства одного неприводимого комплексного представления в пространство другого неприводимого комплексного представления, является либо нулевым оператором (если представления не изоморфны), либо изоморфизмом (если представления изоморфны).

являются пространствами представлений одной и той же группы Ли. Уместно тогда поставить вопрос, который обычно не попадает в поле зрения специалистов по интегральным операторам. *Будет ли $\mathcal{A}$ сплетающим оператором?* Если ответ положительный, то для каких представлений какой группы Ли?

Цель настоящей работы – показать, что данный вопрос является не праздным, так как положительный ответ на него позволяет установить более глубокие свойства интегрального преобразования (найти спектр, провести диагонализацию) и, возможно, с их помощью максимально упростить доказательства тех или иных аналитических теорем.

В § 1 мы рассматриваем классическую задачу интегральной геометрии, известную как задача Минковского. Мы доказываем здесь, что выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^n$, все сечения которого плоскостями, проходящими через центр симметрии, равновелики, является шаром. Наш подход к решению этой задачи не является новым, зато весьма поучителен: в казалось бы чисто геометрической задаче решение достигается алгебраическими методами теории представлений. Единственность решения, как ни странно, обеспечивается тем, что квазирегулярное представление группы Ли $SO(n)$ в $L^2(S^{n-1})$ имеет простой спектр. Отметим, что приведенные в доказательстве теоремы 1.1 формулы (1.7) и (1.8) (выражающие базис Картана–Вейля алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ через ее образующие $E_{ij} - E_{ji}$) имеют и самостоятельное значение, так как могут применяться к компактным формам других комплексных простых групп Ли.

В § 2 мы рассматриваем обширный класс интегральных операторов в $L^2(S^{n-1})$, ядра которых зависят лишь от угла между векторами ξ, η единичной длины. Замечательная теорема Функа–Гекке утверждает, что для таких операторов всякая поверхностная сферическая гармоника является собственным вектором. В теореме 2.1 мы приводим современную формулировку теоремы Функа–Гекке, которую ей придал А. Эрдейи [1] в 1938 г. (В классической формулировке Е. Гекке [2] рассматривал только поверхностные гармоники на S^2 , а ядра интегральных операторов – в виде плоской волны). Несмотря на то, что эта теорема, видимо, неоднократно переоткрывалась, все имевшиеся до недавнего времени ее доказательства были аналитическими и довольно сложными (ср., например, [1], [3, гл. IV, § 2, п. 2.19], [4, введение, § 3.2, лемма 3.6]). Наш подход, основанный на лемме Шура, позволяет получить значительно более простое доказательство. В предыдущей работе одного из авторов [5] теорема Функа–Гекке использовалась для изучения спектра эквивариантного расширения оператора Лапласа в шаре. Аналогичная задача может быть поставлена для эквивариантного расширения волнового оператора во внутренней светового конуса. Тогда необходимо обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства $\mathbb{R}^{n-1,1}$. Этому обобщению посвящен § 3.

Мы начинаем § 3 с изучения спектра квазирегулярного представления группы Лоренца $SO_0(n-1-1)$, действующего в пространстве обобщенных функций на S_H , где S_H – пространство Лобачевского. Некоторые частные результаты (теоремы 3.1, 3.2 и следствие 3.1) могут оказаться полезными как с точки зрения теории представлений, так и с точки зрения ее приложений в кван-

где $\mu(S^{n-1})$ – площадь поверхности единичной сферы S^{n-1} . В пространстве $L^2(S^{n-1})$ действует квазирегулярное представление T группы $\mathrm{SO}(n)$, определяемое равенством

$$[T(g)f](\xi) = f(g^{-1}\xi), \quad \xi \in S^{n-1}, \quad g \in \mathrm{SO}(n). \quad (1.2)$$

Это представление унитарно относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int_{S^{n-1}} f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)} d\xi. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что квазирегулярное представление T приводимо. Опишем его спектр с точки зрения теории представлений групп.

Пусть $\mathfrak{R}^{n,l}$ – пространство (над полем $\mathbb{C}$) однородных гармонических многочленов степени l от n переменных. Если $f(x) \in \mathfrak{R}^{n,l}$, то его сужение на сферу S^{n-1} называется *поверхностной сферической гармоникой* степени l и обозначается через $f(\xi)$, $\xi \in S^{n-1}$. Соотношения между $f(x)$ и $f(\xi)$ вытекают из условия однородности:

$$f(x) = f(r \cdot \xi) = r^l f(\xi), \quad r = |x|.$$

Поверхностные сферические гармоники степени l , очевидно, также образуют линейное пространство над $\mathbb{C}$, мы будем его обозначать $\mathcal{R}^{n,l}$. Очевидно включение $\mathcal{R}^{n,l} \subset L^2(S^{n-1})$. Операторы квазирегулярного представления (1.2) переводят однородные гармонические многочлены в однородные гармонические (с сохранением степени), поэтому $\mathcal{R}^{n,l}$ является инвариантным подпространством в $L^2(S^{n-1})$. Его размерность определяется формулой

$$\dim \mathcal{R}^{n,l} = \frac{(n+l-3)!(n+2l-2)}{l!(n-2)!}.$$

Известно также, что подпространства $\mathcal{R}^{n,l}$ являются неприводимыми взаимно ортогональными относительно (1.3) прямыми слагаемыми квазирегулярного представления T [7, с. 424], [3, с. 160].

Пусть P_k – множество старших весов группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, $k = [n/2]$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Представление T^l группы Ли $\mathrm{SO}(n)$ в пространстве $\mathcal{R}^{n,l}$ поверхностных сферических гармоник степени l от n переменных изоморфно неприводимому представлению $T_{(l,0,\dots,0)}$ со старшим весом $(l, 0, \dots, 0) \in P_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем от представлений группы Ли $\mathrm{SO}(n)$ к представлениям соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ и воспользуемся методом старших весов Картана.

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ имеет стандартный базис, порожденный кососимметрическими матрицами

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (1.4)$$

где E_{ij} – матрица, имеющая единственный ненулевой элемент 1 на пересечении i -й строки и j -го столбца. Матрицы X_{ij} удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk}X_{il} + \delta_{il}X_{jk} - \delta_{ik}X_{jl} - \delta_{jl}X_{ik}. \quad (1.5)$$

При использовании равенства (1.5) следует иметь в виду, что

$$X_{pq} = -X_{qp}. \quad (1.6)$$

Как известно, $SO(n)$ является компактной формой комплексной простой группы Ли $SO(n, \mathbb{C})$, $n \geq 3$, причем представление T^l неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо его аналитическое комплексное продолжение на группу $SO(n, \mathbb{C})$ [8, с. 527]. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать действие именно группы Ли $SO(n, \mathbb{C})$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ в $\mathcal{R}^{n,l}$. В алгебре Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ удобнее выбирать не базис (1.4), а так называемый базис Картана–Вейля, состоящий из векторов, собственных относительно картановской² подалгебры $\mathfrak{h}$. Пусть элементы алгебры $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ реализованы линейными операторами, действующими в пространстве $\mathbb{C}^{2k}$ (при $n = 2k$) с базисом $e_1, \dots, e_k, e_{-k}, \dots, e_{-1}$ или в $\mathbb{C}^{2k+1}$ (при $n = 2k + 1$) с базисом $e_1, \dots, e_k, e_0, e_{-k}, \dots, e_{-1}$. Тогда если n четно, то $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ порождается операторами

$$A_{11} = iX_{1,-1}, \quad A_{22} = iX_{2,-2}, \quad \dots, \quad A_{kk} = iX_{k,-k}, \quad (1.7)$$

являющимися образующими подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, и операторами

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{i}{2}(X_{ij} - X_{-j,-i} + iX_{i,-j} + iX_{j,-i}), & 0 < i < |j|, \\ A_{ji} &= -\frac{i}{2}(X_{ji} - X_{-i,-j} - iX_{-i,j} - iX_{-j,i}), & 0 < i < |j|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если n нечетно, то помимо образующих (1.7), (1.8) базис Картана–Вейля содержит также образующие

$$A_{i0} = \frac{1}{2}((1+i)X_{i0} + (-1+i)X_{0,-i}), \quad A_{0i} = \frac{1}{2}((-1+i)X_{i0} + (1+i)X_{0,-i}),$$

где $i = 1, 2, \dots, k$.

Отметим, что образующие (1.8) не являются независимыми. Легко проверить, применяя равенства (1.6), что они удовлетворяют соотношениям

$$A_{-j,-i} = -A_{ij}.$$

Независимыми образующими вида (1.8) являются A_{ij}, A_{ji} , где $0 < i < |j|$. Легко видеть, что образующие (1.7) являются собственными для $\mathfrak{h}$ с собственными значениями

$$(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0, \mp \text{sign}(j), \dots, 0),$$

где верхние (соответственно, нижние) знаки используются для A_{ij} (соответственно, A_{ji}), $0 < i < |j|$; ненулевые собственные значения находятся на

² Картановской подалгеброй $\mathfrak{h}$ в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется максимальная коммутативная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором. Говоря о собственных векторах $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, мы подразумеваем, что $\mathfrak{h}$ действует в $\mathfrak{g}$ посредством присоединенного представления.

местах i и $|j|$. В свою очередь, образующие A_{i0} (соответственно, A_{0i}) имеют относительно $\mathfrak{h}$ собственные значения $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (соответственно, $(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$) с единственным ненулевым элементом на i -м месте.

Проводя несложные вычисления с учетом соотношений (1.5) и (1.6), получаем, что образующие A_{ij} удовлетворяют следующим привычным соотношениям коммутации, присущим алгебре $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$:

$$[A_{ij}, A_{kl}] = \delta_{kj} A_{il} - \delta_{il} A_{kj} + \delta_{-l,j} A_{k,-i} - \delta_{k-i} A_{-j,l} \quad (1.9)$$

(ср. с [9], [10]).

Рассмотрим многочлен $f_0(x_1, \dots, x_n) = (x_n + ix_1)^l$, или, в обозначениях координат переменными с индексами, принадлежащими $\{0; \pm 1; \dots; \pm k\}$, многочлен

$$f_0(x) = (x_{-1} + ix_1)^l. \quad (1.10)$$

Легко видеть, что $f_0(x)$ является однородным гармоническим многочленом степени l , т. е. принадлежит пространству $\mathfrak{R}^{n,l}$.

Наша дальнейшая цель – показать, что $f_0(x)|_{S_{n-1}}$ является старшим вектором представления T^l группы Ли $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathfrak{R}^{n,l}$, или, что равносильно, $f_0(x)$ является старшим вектором представления $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathfrak{R}^{n,l}$. Определим, как обычно, дифференциал квазирегулярного представления T^l в $\mathfrak{R}^{n,l}$ равенством

$$[\tilde{A}_{ij} f](x) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tA_{ij})x) \Big|_{t=0}, \quad f \in \mathfrak{R}^{n,l}.$$

Тогда соответствие $A_{ij} \mapsto \tilde{A}_{ij}$ задает представление алгебры Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ в том же самом пространстве [8, с. 144]. Теперь ввиду очевидного представления

$$\tilde{X}_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.11)$$

для рассмотренных выше базисных векторов $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ss} &= i \left(x_s \frac{\partial}{\partial x_{-s}} - x_{-s} \frac{\partial}{\partial x_s} \right), \quad s = 1, 2, \dots, k, \\ \tilde{A}_{pq} &= \frac{1}{2} \left(x_p \frac{\partial}{\partial x_q} - x_q \frac{\partial}{\partial x_p} + x_{-p} \frac{\partial}{\partial x_{-q}} - x_{-q} \frac{\partial}{\partial x_{-p}} \right. \\ &\quad \left. + i \left(x_p \frac{\partial}{\partial x_{-q}} - x_{-q} \frac{\partial}{\partial x_p} + x_q \frac{\partial}{\partial x_{-p}} - x_{-p} \frac{\partial}{\partial x_q} \right) \right), \end{aligned}$$

где $0 < p < |q|$, и (в случае нечетного n)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{p0} &= \frac{1+i}{2} \left(x_p \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_p} \right) + \frac{-1+i}{2} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-p}} - x_{-p} \frac{\partial}{\partial x_0} \right), \\ \tilde{A}_{0p} &= \frac{-1+i}{2} \left(x_p \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_p} \right) + \frac{1+i}{2} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_{-p}} - x_{-p} \frac{\partial}{\partial x_0} \right), \end{aligned}$$

где $p = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотренный выше многочлен f_0 является собственным относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ и аннулируется положительными корневыми векторами $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11}f_0 &= lf_0, & \tilde{A}_{ss}f_0 &= 0, \quad s = 2, 3, \dots, k, \\ \tilde{A}_{pq}f_0 &= 0, & 0 &< p < |q|,\end{aligned}$$

и в случае нечетного n

$$\tilde{A}_{p0}f_0 = 0, \quad p = 1, 2, \dots, k.$$

Следовательно, $f_0(x)$ является старшим вектором представления $T_{(l,0,\dots,0)} \subseteq \mathfrak{R}^{n,l}$ со старшим весом $(l, 0, \dots, 0) \in P_k$ группы Ли $\mathrm{SO}(n)$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\dim T_{(l,0,\dots,0)}^{\mathrm{SO}(n)} = \frac{(n+l-3)!(n+2l-2)}{l!(n-2)!} = \dim \mathfrak{R}^{n,l}$$

(ср. [11, с. 178–180]). Теорема доказана.

Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – соответствующие вектору ν значения углов Эйлера. Отметим, что вектору ν отвечает набор эйлеровых координат $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $0 \leq \varphi_1 < 2\pi$, $0 \leq \varphi_i < \pi$, $i = 2, 3, \dots, n-1$, и будем применять краткое обозначение $\nu = \nu(\varphi)$. Связи между этими параметрами точки единичной сферы выражаются формулами

$$\cos \varphi_i = \frac{\nu_{i+1}}{r_{i+1}}, \quad \sin \varphi_i = \frac{r_i}{r_{i+1}}, \quad (1.12)$$

где $r_i^2 = \nu_1^2 + \dots + \nu_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $r_n^2 = |\nu| = 1$. Далее мы будем отождествлять точку $\nu(\varphi)$ на сфере S^{n-1} с набором φ ее эйлеровых координат.

Обозначим через $C(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ и $B(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ сечения соответственно единичной сферы S^{n-1} и тела B гиперплоскостью с вектором нормали $\nu(\varphi)$:

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \dots + \nu_n x_n = 0. \quad (1.13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Определим оператор $\mathcal{A}$ в $L^2(S^{n-1})$ равенством

$$[\mathcal{A}f](\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \int_{C(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})} f(\xi) d\xi, \quad f \in L^2(S^{n-1}). \quad (1.14)$$

Отметим, что вектору ν и вектору $-\nu$ отвечает одна и та же гиперплоскость (1.13), поэтому функция $\mathcal{A}f$ является четной, т. е. принимает в диаметрально противоположных точках сферы S^{n-1} одинаковые значения:

$$[\mathcal{A}f](\theta) = [\mathcal{A}f](\bar{\theta}),$$

где θ и $\bar{\theta}$ – эйлеровы координаты векторов $\varphi(\theta)$ и $-\varphi(\theta)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Оператор $\mathcal{A}$ является сплетающим оператором квазирегулярного представления T группы Ли $\mathrm{SO}(n)$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – произвольный элемент группы $\text{SO}(n)$. Тогда

$$([A \circ T(g)]f)(\theta) = \int_{C(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})} [T(g)f](\xi) d\xi = \int_{C(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})} f(g^{-1}\xi) d\xi.$$

Сделаем замену переменной $g^{-1}\xi = \chi$. В силу $\text{SO}(n)$ -инвариантности меры имеем $d\xi = d\chi$, поэтому

$$([A \circ T(g)]f)(\theta) = \int_{g^{-1}C(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})} f(\chi) d\chi.$$

С другой стороны,

$$([A \circ T(g)]f)(\theta) = (Af)(g^{-1}\theta) = \int_{g^{-1}C(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})} f(\xi) d\xi.$$

Мы воспользовались тем, что ортогональные преобразования сохраняют углы между векторами, поэтому если $\mu = g^{-1}(\nu)$ для единичных векторов μ и ν , то гиперплоскость $\sum \nu_i x_i = 0$ переходит под действием g^{-1} в гиперплоскость $\sum \mu_i x_i = 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $r_B(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = r(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})|_{B(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})}$ – радиус-вектор точки, описывающий границу сечения $B(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$; $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}$ – эйлеровы координаты на сфере $C(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \simeq S^{n-2}$. Тогда мера сечения $B(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ выражается функцией

$$\mu B(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = \frac{1}{n-1} [Ar^{n-1}](\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}). \quad (1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|J|$ – якобиан перехода от декартовых координат к сферическим в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости, содержащей сечение $B(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mu B(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{r_B(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})} |J| d\rho d\theta_{n-2} \dots d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{r_B(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})} \rho^{n-2} d\rho d\xi \\ &= \frac{1}{n-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi r_B^{n-1}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, $d\xi = \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdot \sin^{n-4} \theta_{n-3} \dots \sin \theta_2 d\theta_{n-2} \dots d\theta_1$ – мера на единичной сфере $C(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \simeq S^{n-2}$, инвариантная относительно вращений из группы $\text{SO}(n)$.

Теперь согласно определению 1.1 имеем

$$\begin{aligned} \mu B(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) &= \frac{1}{n-1} \int_{C(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})} r_B^{n-1}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) d\xi \\ &= \frac{1}{n-1} [Ar^{n-1}](\psi_1, \dots, \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Отметим, что согласно (1.15) мера сечения $\mu B(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ является образом оператора $\mathcal{A}$ от четной на сфере S^{n-1} функции r^{n-1} , так как по условию задачи Минковского $r(\varphi) = r(\bar{\varphi})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *На каждом из инвариантных подпространств $R^{n,l}$ оператор $\mathcal{A}$ является скалярным оператором с собственным значением $\lambda_{n,l}$, определяемым равенствами*

$$\lambda_{n,l} = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(0)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)}, & \text{если } l \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } l \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где $C_l^p(t)$ – многочлены Гегенбауэра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазирегулярное представление T в $L^2(S^{n-1})$ согласно теореме 1.1 имеет простой спектр. Поскольку всякий сплетающий оператор неприводимого представления в неприводимое является либо изоморфизмом, либо нулевым оператором, то $\mathcal{A}$ может переводить каждое подпространство $R^{n,l}$ только в себя. Теперь согласно лемме Шура оператор $\mathcal{A}$ на подпространстве $R^{n,l}$ является скалярным. Для вычисления соответствующего собственного значения $\lambda_{n,l}$ возьмем в качестве тестовой функции зональную сферическую гармонику

$$\varphi_{n,l}(x) = \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)} \in R^{n,l}$$

(см. [7, с. 437, (6)]), где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, \xi) \in S^{n-1}$, а $C_l^p(t)$ – многочлены Гегенбауэра. Отметим, что если $\nu_0 = (0, \dots, 0, 1)$ – “северный полюс” сферы S^{n-1} , то его эйлеровы координаты можно считать равными нулю: $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (0, \dots, 0)$. (В действительности только последняя координата θ_{n-1} полюса ν_0 определена однозначно, как это следует из (1.12).) Зональная сферическая гармоника инвариантна относительно вращений из подгруппы $SO(n-1)$, сохраняющих координату x_n , поэтому для ν_0 сфера интегрирования $C(0, 0, \dots, 0)$ целиком принадлежит поверхности уровня функции $\varphi_{n,l}(x)$. Теперь если l нечетно, то $\mathcal{A}\varphi_{n,l} \equiv 0$ по определению 1.1 ввиду равенства $\varphi_{n,l}(\theta) = -\varphi_{n,l}(\bar{\theta})$, а при четных l имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}\varphi_{n,l}](\nu_0) &= \int_{C(0,0,\dots,0)} \varphi_{n,l}(\xi) d\xi = \mu(C(0,0,\dots,0)) \varphi_{n,l}(x)|_{x_n=0} \\ &= \mu(S^{n-2}) \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(0)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)} \varphi_{n,l}(\nu_0) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(0)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)} \varphi_{n,l}(\nu_0). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Оператор $\mathcal{A}$ невырожден на подпространстве $\bigoplus_{k=0}^{\infty} R^{n,2k}$.*

ТЕОРЕМА 1.2 (о тривиальности решения задачи Минковского в $\mathbb{R}^n$). *Шар – единственное выпуклое центрально-симметричное тело с непрерывной границей в $\mathbb{R}^n$, имеющее равновеликие сечения гиперплоскостями, проходящими через центр симметрии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все сечения тела B указанными гиперплоскостями имеют меру μ . Тогда согласно предложению 1.2 имеем

$$[Ar^{n-1}](\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \equiv (n-1)\mu.$$

С другой стороны, для шара B_R с радиусом

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \mu \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

имеем

$$[AR^{n-1}](\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \equiv R^{n-1} \mu(S^{n-2}) \equiv (n-1)\mu,$$

откуда

$$[A(r^{n-1} - R^{n-1})](\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) \equiv 0.$$

Однако функция $r^{n-1} - R^{n-1}$ в силу условия центральной симметричности тела B является четной непрерывной функцией на сфере S^{n-1} , а значит, принадлежит пространству $\bigoplus_{k=0}^{\infty} R^{n,2k}$. Действительно, по теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция на компакте может быть равномерно приближена многочленами. Теперь по следствию 1.1 имеем $r(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \equiv R$. Теорема доказана.

§ 2. Простое доказательство теоремы Функа–Гекке

Теорема Функа–Гекке утверждает, что для интегральных операторов, ядра которых зависят лишь от угла между векторами ξ и η , концы которых лежат на сфере интегрирования, всякая поверхностная сферическая гармоника является собственным вектором. Эта теорема берет начало от работы П. Функа [12], в которой подробно изучались поверхностные сферические гармоники на двумерной сфере S^2 . Е. Гекке [2], опираясь на работу П. Функа, сформулировал теорему о том, что поверхностные сферические гармоники являются собственными векторами интегральных операторов, ядра которых являются гладкими функциями от расстояния ρ между точками ξ и η на поверхности сферы в сферической тригонометрии. В современной формулировке эта теорема появилась в работе А. Эрдеи [1], который, с одной стороны, развил утверждение теоремы до общего случая сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, а с другой – ослабил требования, налагаемые на ядро интегрального оператора. Согласно [1] ядро может быть функцией, абсолютно интегрируемой по Лебегу вместе с квадратом. Впрочем, как показал В. С. Владимиров [13], достаточно лишь, чтобы ядро было функцией из $L^1(-1, 1)$.

Прежде чем формулировать эту теорему, напомним, что в пространстве $\mathcal{R}^{n,l}$ поверхностные сферические гармоники $S_K^l(\theta)$ образуют ортогональный базис:

$$S_K^l(\theta) = \prod_{j=0}^{n-3} C_{m_j - m_{j+1}}^{\frac{n}{2} - \frac{j}{2} - 1 + m_{j+1}} \cos(\theta_{n-j-1}) \sin^{m_{j+1}}(\theta_{n-j-1}) e^{\pm i m_{n-2} \theta_1}, \quad (2.1)$$

где $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$ – углы Эйлера на сфере S^{n-1} , $l = m_0$, $K = (m_1, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2})$, причем $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_{n-3} \geq m_{n-2} \geq 0$ [7, с. 444–445]. Ортогональность сферических гармоник означает, что $S_K^l(\theta)$ и $S_M^t(\theta)$ ортогональны друг другу относительно скалярного произведения (1.3), если $l \neq t$ или мультииндексы $K = (m_1, m_2, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2})$ и $M = (m'_1, m'_2, \dots, m'_{n-3}, \pm m'_{n-2})$ не совпадают.

ТЕОРЕМА 2.1 (Функа–Гекке). Пусть $F(x)$ – функция действительного переменного x , абсолютно интегрируемая по Лебегу вместе с квадратом на $[-1, 1]$, и пусть $S_K^l(\xi)$ – любая поверхностная сферическая гармоника степени l . Тогда для любого единичного вектора η имеет место равенство

$$\int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] S_K^l(\xi) d\xi = \lambda_{n,l} S_K^l(\eta), \quad (2.2)$$

где

$$\lambda_{n,l} = i^l (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\frac{2-n}{2}} J_{l-1+\frac{n}{2}}(t) f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-ixt} F(x) dx. \quad (2.3)$$

Как и при решении задачи Минковского, идея простого доказательства этой теоремы состоит в правильном введении интегрального оператора $\mathcal{A}$: $L^2(S^{n-1}) \rightarrow L^2(S_{n-1})$, который будет сплетающим оператором квазирегулярного представления T группы Ли $SO(n)$, и затем воспользоваться леммой Шура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Определим оператор $\mathcal{A}$ в $L^2(S^{n-1})$ равенством

$$[\mathcal{A}f](\eta) = \int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] f(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

В следующем предложении сформулировано общее свойство всех интегральных операторов вида (2.4), ядра которых зависят от скалярного произведения (ξ, η) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Введенный формулой (2.4) интегральный оператор $\mathcal{A}$: $L^2(S^{n-1}) \rightarrow L^2(S^{n-1})$ является сплетающим оператором квазирегулярного представления T группы $SO(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – произвольный элемент группы $SO(n)$ и η – вектор единичной длины. Тогда для любой функции $f \in L^2(S^{n-1})$ выполнено

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \circ T(g)f](\eta) &= \mathcal{A}(T(g)f)(\eta) = \int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] (T(g)f)(\xi) d\xi \\ &= \int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] f(g^{-1}\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $g^{-1}\xi = \chi$ и воспользуемся инвариантностью меры $d\xi$ относительно ортогональных вращений. Тогда

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \circ T(g)f](\eta) &= \int_{S^{n-1}(g\chi)} F[(g\chi, \eta)] f(\chi) d(g\chi) = \int_{S^{n-1}(\chi)} F[(g\chi, \eta)] f(\chi) d(\chi) \\ &= \int_{S^{n-1}(\chi)} F[(\chi, g^{-1}\eta)] f(\chi) d(\chi) = [\mathcal{A}f](g^{-1}\eta) = [T(g) \circ \mathcal{A}f](\eta). \end{aligned}$$

Итак, для всех $g \in \text{SO}(n)$ справедливо $\mathcal{A} \circ T(g) = T(g) \circ \mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}$ – слетающий оператор. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. а) Сплетающий оператор $\mathcal{A}$ может переводить подпространство $\mathcal{R}^{n,l}$ поверхностных сферических гармоник степени l только в себя в силу простоты спектра квазирегулярного представления T группы $\text{SO}(n)$ (теорема 1.1). Тогда по лемме Шура имеем

$$\mathcal{A}|_{\mathcal{R}^{n,l}} = \lambda_{n,l} E,$$

где E – тождественный оператор. В частности, независимо от мультииндекса $K = (m_1, m_2, \dots, m_{n-3}, \pm m_{n-2})$ такого, что $l \geq m_1 \geq \dots \geq m_{n-3} \geq m_{n-2} \geq 0$ имеем

$$[\mathcal{A}S_K^l](\eta) = \int_{S^{n-1}(\xi)} F[(\xi, \eta)] S_K^l(\xi) d\xi = \lambda_{n,l} S_K^l(\eta).$$

Действительно, как отмечалось выше, поверхностные сферические гармоники $S_K^l(\xi)$ образуют ортогональный базис неприводимого $\text{SO}(n)$ -модуля $\mathcal{R}^{n,l}$.

б) Вычислим теперь собственное значение $\lambda_{n,l}$ оператора $\mathcal{A}$. Для облегчения вычислений мы можем заметить следующее. Поскольку собственное значение $\lambda_{n,l}$ не зависит от мультииндекса K , то можно положить $K = (0, 0, \dots, 0)$, т. е. вместо произвольной сферической гармоники рассмотреть зональную сферическую гармонику $S_O^l(\xi)$ [7, с. 437]:

$$S_O^l(\xi) = \frac{C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n)}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)}, \quad (2.5)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – декартовы координаты, $\xi \in S^{n-1}$.

Пусть

$$k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\alpha\beta} F(\beta) d\beta.$$

Согласно касающимся функции $F(x)$ условиям теоремы и теореме Винера–Пэли функция $k(\alpha)$ квадратично интегрируема по Лебегу на $(-\infty, +\infty)$, а на каждом конечном интервале абсолютно интегрируема. Пусть, далее,

$$F_A(\beta) = \int_{-A}^A e^{i\alpha\beta} k(\alpha) d\alpha.$$

Тогда если $\beta \in [-1, 1]$, то $F_A(\beta) \rightarrow F(\beta)$ в среднем квадратическом при $A \rightarrow \infty$, а если $\beta \notin [-1, 1]$, то $F_A(\beta) \rightarrow 0$ при $A \rightarrow \infty$. Пусть угол между векторами ξ и η

равен γ ; тогда $(\xi, \eta) = |\xi| |\eta| \cos \gamma = \cos \gamma$, так как оба вектора имеют длину 1. Итак, мы имеем

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F_A(\cos \gamma) = F(\cos \gamma),$$

откуда

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}S_O^l](\eta) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{S^{n-1}(\xi)} F_A(\cos \gamma) S_O^l(\xi) d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{S^{n-1}(\xi)} S_O^l(\xi) \int_{-A}^A e^{i\alpha \cos \gamma} k(\alpha) d\alpha d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A k(\alpha) \int_{S^{n-1}(\xi)} e^{i\alpha \cos \gamma} S_O^l(\xi) d\xi d\alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Воспользуемся известным разложением функции $e^{i\alpha \cos \gamma}$ (волновой функции плоской волны) в ряд по сферическим волнам [14, § 11, п. 5], [7, с. 520, (2)]:

$$e^{i\alpha \cos \gamma} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} i^m \left(m + \frac{n}{2} - 1\right) C_{m^{\frac{n-2}{2}}}(\cos \gamma) J_{m+\frac{n}{2}-1}(\alpha).$$

Но все сферические гармоники $C_{m^{\frac{n-2}{2}}}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, будут ортогональны зональной сферической гармонике $S_O^l(\xi)$, за исключением одной, когда $m = l$:

$$\int_{S^{n-1}(\xi)} C_{m^{\frac{n-2}{2}}}[(\xi, \eta)] S_O^l(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq m, \\ \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{(2l+n-2)\Gamma(\frac{n-2}{2})} S_O^l(\eta), & \text{если } l = m. \end{cases} \quad (2.7)$$

Для доказательства равенства (2.7) заметим, что вектор η можно считать равным $(0, 0, \dots, 0, 1)$ (иначе мы бы выбрали новый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$). Тогда $(\xi, \xi) = \xi_n$, но и $S_O^l(\xi)$ фактически зависит только от последней координаты ξ_n точки ξ , поэтому

$$\int_{S^{n-1}(\xi)} C_{m^{\frac{n-2}{2}}}[(\xi, \eta)] S_O^l(\xi) d\xi = \frac{\mu(S^{n-2})}{C_l^{\frac{n-2}{2}}(1)} \int_{-1}^1 C_{m^{\frac{n-2}{2}}}(\xi_n) C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n) (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi_n.$$

Мы воспользовались (2.5), а также тем, что инвариантная мера $d\xi$ (см. § 1) на сфере S^{n-1} выражается через ξ_n и инвариантную меру $d\xi'$ на сфере S^{n-2} по формуле

$$d\xi = (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi' d\xi_n.$$

Далее в силу соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра [15, с. 563, (10)] имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 C_{m^{\frac{n-2}{2}}}(\xi_n) C_l^{\frac{n-2}{2}}(\xi_n) (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-3}{2}} d\xi_n \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq l, \\ \frac{2\sqrt{\pi}(n+l-3)!}{(n-3)! l! (2l+n-2)} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}, & \text{если } m = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда мы сразу получаем равенство (2.7), учитывая, что

$$C_l^{\frac{n-2}{2}}(1) = \frac{(n+l-3)!}{l!(n-3)!}, \quad S_O^l(\eta) = 1.$$

Используя соотношения ортогональности (2.7), мы можем вычислить внутренний интеграл в формуле (2.6):

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}(\xi)} e^{i\alpha \cos \gamma} S_O^l(\xi) d\xi &= \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) i^l \left(l + \frac{n}{2} - 1\right) \\ &\quad \times J_{l+\frac{n}{2}-1}(\alpha) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(l + \frac{n}{2} - 1)\Gamma(\frac{n-2}{2})} S_O^l(\eta) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^l \alpha^{-\frac{n-2}{2}} J_{l+\frac{n}{2}-1}(\alpha) S_O^l(\eta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[AS_O^l](\eta) = \left((2\pi)^{\frac{n}{2}} i^l \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \alpha^{-\frac{n-2}{2}} J_{l+\frac{n}{2}-1}(\alpha) k(\alpha) d\alpha \right) S_O^l(\eta). \quad (2.8)$$

Функция $k(\alpha)$ квадратично интегрируема по Лебегу на $(-\infty, +\infty)$, это же справедливо и для $\alpha^{-\frac{n-2}{2}} J_{l+\frac{n}{2}-1}(\alpha)$. Однако произведение двух квадратично интегрируемых функций будет квадратично интегрируемо согласно неравенству Коши–Буняковского. Следовательно, несобственный интеграл в правой части равенства (2.8) сходится. Окончательно имеем

$$\lambda_{n,l} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^l \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\frac{2-n}{2}} J_{l+\frac{n}{2}-1}(t) f(t) dt,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-ixt} F(x) dx.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Несмотря на внешнее различие формулировок задачи Минковского и теоремы Функа–Гекке, существенной (и решающей) частью обоих доказательств явилась простота спектра квазирегулярного представления T группы Ли $SO(n)$ в $L^2(S^{n-1})$.

§ 3. Обобщенная теорема Функа–Гекке

Объектом исследований в этом параграфе будет гиперболическое пространство $\mathbb{R}^{n-1,1}$ с индефинитным скалярным произведением

$$[x, y] = -x_1 y_1 - \cdots - x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Это скалярное произведение может быть использовано для определения расстояния $r(x, y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}^{n-1,1}$, не принадлежащими световому конусу $[z, z] = 0$. Положим для таких точек

$$\operatorname{ch} r(x, y) = \frac{[x, y]}{\sqrt{[x, x] \cdot [y, y]}}.$$

Действительно, для любого компакта $K \subset S_H$ имеем

$$\int_K |(R(g)f)(\xi)| d\xi = \int_K |f(g^{-1}\xi)| d\xi = \int_{K'} |f(\eta)| d\eta < \infty,$$

где положено $g^{-1}K = K'$. Хорошо известно [18], что квазирегулярное представление R имеет следующее разложение в прямой интеграл неприводимых представлений группы G :

$$R = \int_0^\infty R^\sigma d\rho, \quad \sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho, \quad \rho \in [0, +\infty). \quad (3.3)$$

Отметим, что все представления R^σ бесконечномерны. В пространстве $L^1_{\text{loc}}(S_H^{n-1}, d\xi)$, где σ принимает те же значения, что и в (3.3), рассмотрим функции

$$\begin{aligned} H_L^{n\sigma}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= \text{sh}^{\frac{3-n}{2}} \theta_{n-1} \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2} - k_0}(\text{ch } \theta_{n-1}) \\ &\times \prod_{j=0}^{n-4} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-3}{2} + k_{j+1}} \cos(\theta_{n-j-2}) \sin^{k_{j+1}}(\theta_{n-j-2}) e^{\pm i k_{n-3} \theta_1}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{P}_\nu^\mu(x)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, $C_\nu^\mu(x)$ – многочлены Гегенбауэра, $L = (k_0, k_1, \dots, k_{n-4}, \pm k_{n-3})$, $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0$, и все параметры k_i целые. Можно проверить [7, с. 517], что если продолжить функции $H_L^{n\sigma}(\theta)$ с псевдосферы S_H на U “по однородности” со степенью однородности σ , то полученные функции $\tilde{H}_L^{n\sigma}(\theta)$ на U будут решениями волнового уравнения $\square \tilde{H}_L^{n\sigma} = 0$, т. е. пространственными гиперболическими гармониками. Таким образом, мы можем назвать $H_L^{n\sigma}(\theta)$ поверхностными гиперболическими гармониками и считать их аналогами поверхностных сферических гармоник $S_k^l(\theta)$ из § 2.

Далее будем записывать поверхностные гиперболические гармоники в виде

$$H_L^{n\sigma}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \text{sh}^{\frac{3-n}{2}}(\theta_{n-1}) \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2} - k_0}(\text{ch } \theta_{n-1}) S_{K^0}^{k_0}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}),$$

где $S_{K^0}^{k_0}(\theta)$ – поверхностные сферические гармоники на $(n-2)$ -мерной сфере S^{n-2} (см. (2.1)), $L = (k_0, K)$, $K = (k_1, \dots, k_{n-4}, \pm k_{n-3})$, причем $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-3} \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Поверхностные гиперболические гармоники $H_L^{n\sigma}(\theta)$ образуют “непрерывный” базис пространства $L^1_{\text{loc}}(S_H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что все гармоники $H_L^{n\sigma}(\theta)$ при $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$, $\rho \in [0, +\infty)$, и всех значениях мультииндекса L линейно независимы (над $\mathbb{C}$). Гармоники, отличающиеся друг от друга лишь сферической частью, линейно независимы, так как они ортогональны друг другу на каждой сфере, получаемой пересечением гиперлоида S_H с гиперплоскостью $x = \text{const} > 1$. Следовательно, они ортогональны и на S_H . Далее, гармоники, отвечающие различным значениям σ , линейно независимы ввиду того, что преобразование Гельфанда–Граева сопоставляет функции $H_L^{n\sigma}(\theta)$ функцию $\Phi(y, \sigma)$ на верхней

полé конуса $[z, z] = 0$, имеющую по y степень однородности σ [7, гл. X, § 3,4]. Осталось доказать, что линейно независимы гармоники $H_L^{n\sigma}(\theta)$, отличающиеся друг от друга лишь значениями параметра k_0 . Как показано в работе [19, с. 239, (13) и с. 228, (1)], параметр k_0 отвечает за номер строки в одном и том же столбце матрицы оператора $T^{n\sigma}(g)$ группы G . Но матричные элементы неприводимого представления полупростой группы Ли всегда линейно независимы.

Докажем теперь, что всякая функция $f(\theta) \in L_{\text{loc}}^1(S_H)$ представима в виде

$$f(\theta) = \sum_L \int_0^{+\infty} a_L^{n\sigma}(\theta) H_L^{n\sigma}(\theta) d\rho.$$

Предположим от противного, что существует такая ненулевая функция $f(\theta) \in L_{\text{loc}}^1(S_H)$, что для любой поверхностной гиперболической гармоники $H_L^{n\sigma}(\theta)$ выполнено

$$\int_{S_H} f(\theta) \overline{H_L^{n\sigma}(\theta)} d\theta = 0,$$

где $d\theta$ совпадает с инвариантной мерой (3.2). Запишем интегрирование по S_H как повторное интегрирование по $\theta_{n-1} \in [0, +\infty)$ и по сфере $S^{n-2}(\theta_{n-1})$, получаемой пересечением гиперблоида S_H с гиперплоскостью $x_n = \text{ch } \theta_{n-1}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \text{sh}^{\frac{n-1}{2}}(\theta_{n-1}) \overline{\mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}-k_0}(\text{ch } \theta_{n-1})} \left(\int_{S^{n-2}(\theta_{n-1})} f(\theta) \right. \\ & \quad \left. \times \overline{S_K^{k_0}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} \right) d\theta_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функцию, стоящую в равенстве (3.4) в скобках, обозначим через $p(\theta_{n-1})$. Ясно, что $p(\theta_{n-1}) \in L_{\text{loc}}^1(0, +\infty)$. Функцию, стоящую в равенстве (3.4) перед скобками, при замене переменной $x = \text{ch } \theta_{n-1}$ можно привести к виду $(x^2 - 1)^{\frac{n-1}{4}} \mathfrak{P}_{-\frac{1}{2}+i\rho}^{\frac{3-n}{2}-k_0}(x)$. Легко проверить, что для всех значений k_0 и ρ , указанных выше, эти функции являются собственными функциями некоторого самосопряженного оператора второго порядка. Применяя стандартный прием разложения по собственным функциям самосопряженных операторов, мы получаем, что любая функция $u(x)$ такая, что $\int_1^{+\infty} |u(x)|^2 dx < \infty$, допускает разложение:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} a(\rho) (x^2 - 1)^{\frac{n-1}{4}} \mathfrak{P}_{\frac{1}{2}+i\rho}^{\frac{3-n}{2}-k_0}(x) d\rho$$

(ср. с [7, с. 326, (6)]).

Теперь (3.4) можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} \overline{u(\theta_{n-1})} p(\theta_{n-1}) d\theta_{n-1} = 0,$$

причем равенство нулю справедливо для всех $u(x) \in L^2(0, +\infty)$, а значит, и для всех $u(\theta_{n-1}) \in C_0^\infty(0, +\infty)$. Согласно теореме из [17, с. 122] имеем $p(\theta_{n-1}) = 0$ почти всюду на $(0, +\infty)$. Это означает, что для почти всех $\theta_{n-1} \in (0, +\infty)$

и всех поверхностных сферических гармоник $S_K^{k_0}(\theta)$ справедливо равенство

$$\int_{S^{n-2}(\theta_{n-1})} f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \overline{S_K^{k_0}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})} \times \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} = 0.$$

Зафиксируем произвольное значение θ_{n-1} , для которого это равенство справедливо. Хорошо известно, что поверхностные сферические гармоники $S_K^{k_0}(\theta)$ образуют базис в пространстве всех многочленов на сфере $S^{n-2}(\theta_{n-1})$ (см., например, [7, с. 426] или [19, с. 160, следствие 2.2]). Согласно теореме Вейерштрасса пространство многочленов на $S^{n-2}(\theta_{n-1})$ плотно в пространстве $C(S^{n-2}(\theta_{n-1}))$ непрерывных функций на сфере. Далее, из С-свойства измеримых функций Лузина (см., например, [20, теорема 4]) следует, что всякая ограниченная измеримая функция на сфере есть предел в среднем последовательности непрерывных функций. Поэтому пространство $C(S^{n-2}(\theta_{n-1}))$ плотно в пространстве $L^\infty(S^{n-2}(\theta_{n-1}))$ ограниченных измеримых функций.

Итак, мы имеем

$$\int_{S^{n-2}(\theta_{n-1})} f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \overline{g(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})} \times \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} = 0 \quad (3.5)$$

для любой ограниченной измеримой на сфере функции g . Однако, как известно, для любого компакта K в $\mathbb{R}^n$ справедливо

$$L^\infty(K) = (L^1(K))^*,$$

причем линейные функционалы из $(L^p(K))^*$ разделяют элементы из $L^p(K)$, $p \geq 1$ [17, теорема 2.10], поэтому (3.5) возможно лишь для функции $f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) = 0$ почти всюду на сфере $S^{n-2}(\theta_{n-1})$. Следовательно, $f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) = 0$ для почти всех точек из S_H . Поскольку мы отождествляем функции из $L_{\text{loc}}^1(S_H)$, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль, то полученное равенство нулю противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathcal{H}^{n\sigma}$ замыкание в $L_{\text{loc}}^1(S_H)$ линейной оболочки всех поверхностных гиперболических гармоник $H_L^{n\sigma}(\theta)$ степени однородности σ .

ТЕОРЕМА 3.2. *Пространство $\mathcal{H}^{n\sigma}$ является пространством неприводимого представления группы Ли $\text{SO}_0(n-1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{H}^{n\sigma}$ инвариантно относительно операторов квазирегулярного представления $R(g)$. Очевидно, сомнение может вызвать лишь гиперболический поворот $g \in \text{SO}_0(n-1, 1)$. Без ограничения общности можно считать g поворотом в осях координат x_{n-1} и x_n . Легко видеть, что инфинитезимальным оператором такого поворота является оператор $X = -\frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}$. Используя обычные свойства функций Лежандра (см., например, [15, с. 775 и 778]), можно показать, что:

а) при $k_0 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} H_{(0,K)}^{n\sigma}(\theta) = \sigma(\sigma + n - 2) H_{(1,K)}^{n\sigma}(\theta); \quad (3.6)$$

б) при $k_0 \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} H_{(k_0,K)}^{n\sigma}(\theta) &= \frac{[(n + k_0 - 3)(\sigma - k_0) - k_0](\sigma + n + k_0 - 2)}{n + 2k_0 - 3} H_{(k_0+1,K)}^{n\sigma}(\theta) \\ &+ \frac{k_0}{n + 2k_0 - 3} H_{(k_0-1,K)}^{n\sigma}(\theta). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{H}^{n\sigma}$ инвариантно относительно X , а значит, и относительно всех операторов $R(g)$. Неприводимость $\mathcal{H}^{n\sigma}$ доказана в [7, гл. X, § 2.3]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Квазирегулярное представление R группы Ли $\mathrm{SO}_0(n-1, 1)$ в пространстве $L_{\mathrm{loc}}^1(S_H, d\xi)$ имеет простой спектр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Волновой оператор

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

в гиперболических координатах (3.1) представляется в виде $\square = \square_r + \square_\theta$, где

$$\square_r = -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}$$

– радиальная часть, а

$$\square_\theta = \frac{1}{r^2 \operatorname{sh}^{n-2}(\theta_{n-1})} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \operatorname{sh}^{n-2}(\theta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \cdots$$

– угловая часть; здесь многоточие заменяет члены, содержащие дифференцирования по сферическим координатам $\theta_{n-2}, \dots, \theta_1$, которые нам сейчас не понадобятся. Точное выражение для $\square_\theta$ приведено в [7, с. 517]. Поскольку $S_H = \mathrm{SO}_0(n-1, 1)/\mathrm{SO}(n-1)$ является симметрическим пространством ранга 1, то всякий G -инвариантный дифференциальный оператор на S_H является многочленом от оператора Казимира второго порядка группы G , который на S_H совпадает (с точностью до константы) с оператором Лапласа–Бельтрами, т. е. $\square_\theta$ (см. [21, гл. 10]). Но оператор Казимира по определению является элементом центра $U(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G . Поэтому $\square_\theta$ коммутирует со всеми операторами $R(g)$ квазирегулярного представления R группы G .

Теперь, если окажется, что представления G в пространствах $\mathcal{H}^{n\sigma}$ и $\mathcal{H}^{n\sigma'}$ при $\sigma \neq \sigma'$ изоморфны, то оператор $\square_\theta$ на этих пространствах обязан иметь один и тот же спектр. Вычислим спектр $\square_\theta$ на пространстве $\mathcal{H}^{n\sigma}$. Без ограничения общности возьмем в качестве “тестовой” функции зональную гиперболическую гармонику

$$H_{(0,0)}^{n\sigma}(\theta_{n-1}) = \operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}(\theta_{n-1}) \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta_{n-1}).$$

Используя (3.6) и заменяя для краткости θ_{n-1} на θ , получим

$$\begin{aligned}\square_{\theta} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\theta) &= \frac{\sigma(\sigma+n-2)}{\operatorname{sh}^{n-2}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sh}^{\frac{n-1}{2}}(\theta) \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{1-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta) \right) \\ &= \sigma(\sigma+n-2) \left((n-1) \operatorname{sh}^{\frac{1-n}{2}}(\theta) \operatorname{ch}(\theta) \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{1-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta) \right. \\ &\quad \left. + (\sigma-1)(\sigma+n-1) \operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}(\theta) \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{-\frac{n+1}{2}}(\operatorname{ch} \theta) \right).\end{aligned}$$

Выражение в скобках можно упростить, используя рекуррентное соотношение для функций Лежандра [15, с. 775]. Тогда

$$\square_{\theta} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\theta) = \sigma(\sigma+n-2) \operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}(\theta) \mathfrak{P}_{\sigma+\frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta) = - \left(\rho^2 + \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 \right) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\theta).$$

Таким образом, представления G в пространствах $\mathcal{H}^{n\sigma}$ и $\mathcal{H}^{n\sigma'}$ при $\sigma \neq \sigma'$ могут быть изоморфны лишь в случае, когда $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$ и $\sigma' = -\frac{n-2}{2} - i\rho$. Однако в $L_{\text{loc}}^1(S_H, d\xi)$ согласно теореме 3.1 базис образуют функции $H_L^{n\sigma}(\theta)$, где $\sigma = -\frac{n-2}{2} + i\rho$ и $\rho \in [0, +\infty)$, т. е. указанный случай сопряженных значений σ невозможен. Следствие доказано.

Итак, “прямое слагаемое” R^{σ} квазирегулярного представления R в (3.3) действует в точности в пространстве $\mathcal{H}^{n\sigma}$ поверхностных гиперболических гармоник степени однородности σ .

В работе [22] было получено следующее обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства $\mathbb{R}^{n-1,1}$, также использующее свойства сплетающих операторов.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функция $F(x)$ действительного переменного такова, что:

- (а) $F(x) \in L^1(-\infty, +\infty) \cap L^2(-\infty, +\infty)$;
- (б) $F(x)$ допускает аналитическое продолжение до функции $F(x+iy)$ комплексного переменного $x+iy$, ограниченной и аналитической в нижней полуплоскости $y \leq 0$.

Пусть $H_L^{n\sigma}$ – произвольная поверхностная гиперболическая гармоника степени однородности σ . Тогда для любого η , принадлежащего псевдосфере единичного радиуса, справедливо равенство

$$\int_{S_H} F([\xi, \eta]) H_L^{n\sigma}(\xi) d\xi = \lambda_{n,\sigma} H_L^{n\sigma}(\eta), \quad (3.7)$$

где собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ не зависит от мультииндекса L гармоники $H_L^{n\sigma}$.

Отметим, что хотя теорема 3.3 была доказана в работе [22, теорема 2] для произвольного значения $n \in \mathbb{N}$, однако собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ было вычислено лишь для двух важных с физической точки зрения значений размерности: $n = 2$ и $n = 4$. Кроме того, в формулировке условий, которым должна удовлетворять функция $F(x)$, было указано требование экспоненциального убывания

при $x \rightarrow \pm\infty$, которое без ущерба может быть отброшено, как следует из доказательства теоремы 3.4, приводимой ниже. Для полноты формулировки данной теоремы приведем также полученные ранее собственные значения:

$$\lambda_{2,\sigma} = 2 \int_0^{+\infty} f(\alpha) K_\sigma(i\alpha) d\alpha, \quad \lambda_{4,\sigma} = -4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha) K_{\sigma+1}(i\alpha)}{\alpha} d\alpha, \quad (3.8)$$

где

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\alpha t} dt,$$

а $K_\nu(t)$ – функция Макдональда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $F(x)$ – ограниченная измеримая функция. Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{A}$ из $L^1_{\text{loc}}(S_H(\xi), d\xi)$ в $L^1_{\text{loc}}(S_H(\eta), d\eta)$, определяемый равенством⁴

$$[\mathcal{A}f](\eta) = \int_{S_H(\xi)} F([\xi, \eta]) f(\xi) d\xi. \quad (3.9)$$

Как было показано в [22, лемма 2], $\mathcal{A}$ является сплетающим оператором квазирегулярного представления R группы Ли $\text{SO}_0(n-1, 1)$. Согласно следствию 3.1 представление R имеет простой спектр, поэтому сплетающий оператор $\mathcal{A}$ может переводить подпространство $\mathcal{H}^{n\sigma}$ только в себя. Отсюда ввиду леммы Шура⁵ мы получаем равенство (3.7). Следующая теорема уточняет формулировку обобщенной теоремы Функа–Гекке (теорема 3.3), определяя собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ в (3.7) для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

ТЕОРЕМА 3.4. *Собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ интегрального оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathcal{H}^{n\sigma}$ поверхностных гиперболических гармоник степени одномерности σ выражается формулой*

$$\lambda_{n,\sigma} = 2^{\frac{n}{2}} (-\pi i)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha) K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(i\alpha)}{\alpha^{\frac{n-2}{2}}} d\alpha,$$

где $K_\nu(z)$ – функция Макдональда, а

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\alpha t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим сначала важный частный случай определения 3.1, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет тригонометрическое ядро вида $\Phi(x) =$

⁴Точнее, мы ограничиваемся рассмотрением таких $f \in L^1_{\text{loc}}(S_H(\xi), d\xi)$, для которых функция $\xi \mapsto F([\xi, \eta])f(\xi)$ суммируема по мере (3.2) на $S_H(\xi)$ для почти всех $\eta \in S_H(\eta)$. Для указанных f , очевидно, справедливо $[\mathcal{A}f](\eta) \in L^1_{\text{loc}}(S_H(\eta), d\eta)$.

⁵Нам нужна здесь не столько лемма Шура, сколько ее следствие – операторная неприводимость представления R^σ . Непосредственное доказательство операторной неприводимости R^σ в случае группы Ли $\text{SO}_0(3, 1)$ приведено в [18, гл. 3, § 5], общий случай рассматривается аналогично. Лемма Шура справедлива также для так называемых квазипростых представлений редуктивных групп Ли (результат Хариш-Чандры).

$\cos(sx)$, $\Psi(x) = \sin(sx)$ или, более общо, $F(x) = e^{isx}$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ввиду соотношений

$$F(x) = \Phi(x) + i\Psi(x), \quad 2\Phi(x) = F(x) + F(-x), \quad 2i\Psi(x) = F(x) - F(-x)$$

достаточно рассмотреть один лишь комплексный вариант ядра. Все предыдущие рассуждения относительно инвариантности подпространств $\mathcal{H}^{n\sigma}$ будут справедливы, разумеется, и для таких операторов $\mathcal{A}$. Покажем теперь, что для любого вектора η такого, что $[\eta, \eta] = 1$ и $\eta_n > 0$, справедливо равенство

$$\int_{S_H} e^{-is[\xi, \eta]} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi = \mu_n(s, \sigma) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta), \quad (3.10)$$

где

$$\mu_n(s, \sigma) = 2^{\frac{n}{2}} \left(-\frac{\pi i}{s} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\sigma + \frac{n-2}{2}}(is)$$

(ср. с [22, теорема 1]).

Собственное значение $\mu(s, \sigma)$ оператора $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathcal{H}^{n\sigma}$ не зависит от выбора вектора η , поэтому мы можем выбрать в качестве η вершину η_0 верхней полы гиперboloида $[\eta, \eta] = 1$. Вершина $\eta_0 \in S_H$, как и “северный полюс” $\xi_0 \in S^{n-1}$, имеет эйлеровы координаты, равные нулю: $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$[\xi, \eta] = \operatorname{ch} \theta_{n-1} \operatorname{ch} \varphi_{n-1} = \operatorname{ch} \theta_{n-1},$$

поэтому

$$I = \int_{S_H} e^{-is[\xi, \eta]} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi = \int_{S_H} e^{-is \operatorname{ch} \theta_{n-1}} \operatorname{sh}^{\frac{3-n}{2}}(\theta_{n-1}) \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta_{n-1}) d\xi,$$

где мера $d\xi$ на S_H выражается формулой (3.2). Разделяя “чисто гиперболические” и сферические эйлеровы координаты, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-is \operatorname{ch} \theta_{n-1}} \operatorname{sh}^{\frac{n-1}{2}}(\theta_{n-1}) \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-3}{2}}^{\frac{3-n}{2}}(\operatorname{ch} \theta_{n-1}) \\ &\quad \times \left(\int_{S^{n-2}} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-2} \right) d\theta_{n-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что внутренний интеграл равен площади поверхности $(n-2)$ -мерной сферы:

$$\mu(S^{n-2}) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

и вводя новую переменную $t = \operatorname{ch} \theta_{n-1}$, получим

$$I = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_1^{+\infty} e^{-ist} (t^2 - 1)^{\frac{n-3}{4}} \mathfrak{P}_{\sigma + \frac{n-2}{2}}^{\frac{3-n}{2}}(t) dt = \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{K_{\sigma + \frac{n-2}{2}}(is)}{(is)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Для вычисления интеграла мы воспользовались [15, т. 3, с. 202, (5)].

Вычислим теперь значение $H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta_0)$. Для этого воспользуемся формулой (14) из [23, с. 157], выражающей присоединенную функцию Лежандра $\mathfrak{P}_\nu^\mu(\operatorname{ch} \theta_{n-1})$ через гипергеометрическую функцию:

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(\operatorname{ch} \theta_{n-1}) = \frac{2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} (\operatorname{sh} \theta_{n-1})^{-\mu} {}_2F_1\left(-\mu-\nu; 1+\nu-\mu; 1-\mu; \frac{1-\operatorname{ch} \theta_{n-1}}{2}\right).$$

Откуда⁶ имеем

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta) = \frac{2^{\frac{3-n}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

и теперь получаем

$$\mu_n(s, \sigma) = 2^{\frac{n}{2}} \left(-\frac{\pi i}{s}\right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(is).$$

Формула (3.10) полностью доказана.

б) Вычислим теперь собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ для функции $F(x)$, удовлетворяющей условиям а) и б) теоремы 3.4. Введем, как и в доказательстве теоремы Функа–Гекке, функцию $k(x)$, определяя ее равенством

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{ixt} dt.$$

Тогда в силу того же условия а) функция $k(x)$ будет интегрируема с квадратом на $(-\infty, +\infty)$, а в силу условия б) и [22, лемма 1] носитель $k(x)$ как функция действительного переменного будет сосредоточен на правой полупрямой. Откуда имеем $k(x) \in L^2(0, +\infty)$. Кроме того, по той же лемме 1 функция $F(\alpha)$ допускает представление:

$$F(\alpha) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A k(x) e^{-i\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F_A(\alpha).$$

Используя это представление, а также то, что собственное значение $\lambda_{n,\sigma}$ не зависит от мультииндекса K (теорема 3.3), получим

$$\begin{aligned} \int_{S_H} F([\xi, \eta]) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{S_H} F_A([\xi, \eta]) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S_H} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) \int_0^A k(x) e^{-ix[\xi, \eta]} dx d\xi \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A k(x) \int_{S_H} e^{-ix[\xi, \eta]} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\varepsilon^A k(x) \int_{S_H} e^{-ix[\xi, \eta]} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi dx. \end{aligned}$$

⁶Отметим, что зональные гиперболические гармоники в монографии Виленкина [7, (4), с. 499] отличаются от наших числовым множителем $2^{(n-3)/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})$, поэтому в обозначениях Виленкина $\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta) = 1$. В то же время ясно, что собственное значение $\mu_n(s, \sigma)$ от нормировки гармоники $H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta)$ не зависит.

Применим к внутреннему интегралу уже доказанное равенство (3.10):

$$\begin{aligned} & \int_{S_H} F([\xi, \eta]) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{l.i.m}_{A \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon}^A k(x) \left(-\frac{\pi i}{x} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(ix) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta) dx. \end{aligned}$$

Интеграл имеет предел при $A \rightarrow +\infty$, так как и $k(x)$, и $K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}$ ограничены при $x \rightarrow +\infty$ [23, с. 322, 370]. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{S_H} F([\xi, \eta]) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi \\ &= \left(2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-3}{2}} (-i)^{\frac{n-2}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{k(x) K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(ix)}{x^{\frac{n-2}{2}}} dx \right) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta). \end{aligned}$$

Далее, так как $k(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$, то это же равенство справедливо и для всех производных $k^{(n)}(x)$, откуда, учитывая гладкость $k(x)$ имеем $k(x) = o(x^k)$ при $x \rightarrow +0$ для всех натуральных k . Функция Макдональда $K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(ix)$ ограничена при $x \rightarrow +0$. Это доказано, например, в [22, с. 223]. Окончательно получаем

$$\int_{S_H} F([\xi, \eta]) H_{(0,0)}^{n\sigma}(\xi) d\xi = \lambda_{n,\sigma} H_{(0,0)}^{n\sigma}(\eta),$$

где

$$\lambda_{n,\sigma} = 2^{\frac{n}{2}} (-\pi i)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{k(x) K_{\sigma+\frac{n-2}{2}}(ix)}{x^{\frac{n-2}{2}}} dx, \quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{ixt} dt.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. A. Erdélyi, “Die Funksche Integralgleichung der Kugelflächen-funktionen und ihre Übertragung auf die Überkugel”, *Math. Ann.*, **115**:1 (1938), 456–465.
2. E. Hecke, “Über orthogonal-invariante Integralgleichungen”, *Math. Ann.*, **78**:1–4 (1916), 398–404.
3. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
4. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
5. В. П. Бурский, Т. В. Штепина, “О спектре эквивариантного расширения оператора Лапласа в шаре”, *Укр. матем. журн.*, **52**:11 (2000), 1473–1483; англ. пер.: V. P. Burskii, T. V. Shtepina, “On the spectrum of an equivariant extension of the Laplace operator in a ball”, *Ukrainian Math. J.*, **52**:11 (2000), 1679–1690.
6. А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит*, Научн. книга, Новосибирск, 2002; англ. пер.: A. A. Kirillov, *Lectures on the orbit method*, Grad. Stud. Math., **64**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

7. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
8. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970; англ. пер.: D. P. Želobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
9. В. В. Штепин, “Промежуточная ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и ее конечномерные представления”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 201–223; англ. пер.: V. V. Shtepin, “The intermediate orthogonal Lie algebra $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ and its finite-dimensional representations”, *Izv. Math.*, **62**:3 (1998), 627–648.
10. В. В. Штепин, “Промежуточная алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, весовая схема и конечномерные представления со старшим весом”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:2 (2004), 159–190; англ. пер.: V. V. Shtepin, “The intermediate Lie algebra $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, the weight scheme and finite-dimensional representations with highest weight”, *Izv. Math.*, **68**:2 (2004), 375–404.
11. Д. П. Желобенко, А. Штерн, *Представления групп Ли*, Наука, М., 1983.
12. P. Funk, “Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen”, *Math. Ann.*, **77**:1 (1915), 136–152.
13. В. С. Владимиров, “Об интегральном уравнении, связанном со сферическими функциями”, *Научные доклады высшей школы, Физ.-мат. науки*, **6** (1958), 142–146.
14. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge; Macmillan, New York, 1944.
15. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, в 3-х т., Наука, М., 1983; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 2. Special functions*, Gordon & Breach, New York, 1988.
16. А. О. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1980; пер. с англ.: A. O. Barut, R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, Geest & Portig, PWN–Polish Scientific Publishers, 1977.
17. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Научн. книга, Новосибирск, 1998; пер. с англ.: E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Grad. Stud. Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
18. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, Vol. 5: Integral geometry and representation theory, Academic Press, New York–London, 1966.
19. Н. Я. Виленкин, “Специальные функции, связанные с представлениями класса 1 групп движений пространств постоянной кривизны”, *Тр. ММО*, **12**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1963, 185–257; англ. пер.: N. Ya. Vilenkin, “Special functions connected with class 1 representations of groups of motions in spaces of constant curvature”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 209–290.
20. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.
21. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.

22. Т. В. Штепина, “Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 213–224; англ. пер.: T. V. Shtepina, “A generalization of the Funk–Hecke theorem to the case of hyperbolic spaces”, *Izv. Math.*, **68**:5 (2004), 1051–1061.
23. А. Кратцер, В. Франц, *Трансцендентные функции*, ИЛ, М., 1963; пер. с нем.: A. Kratzer, W. Franz, *Transzendente Funktionen*, Geest & Portig, Leipzig, 1960.

В. В. ШТЕПИН (V. V. SHTERIN)
Донецкий национальный университет
E-mail: shtepina@stels.net

Поступило в редакцию
17.08.2007
26.05.2008

Т. В. ШТЕПИНА (T. V. SHTERINA)
Донецкий институт социального образования
E-mail: asar-feuer@rambler.ru