Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, Циклы малой коразмерности на простом $2p$ - или $4p$ -мерном абелевом многообразии, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, том 63, выпуск 6, 167–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/im272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:52:09

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

Циклы малой коразмерности на простом $2p$ - или $4p$ -мерном абелевом многообразии

Пусть J – простое $2p$ - или $4p$ -мерное абелево многообразие над полем комплексных чисел, где $p \neq 5$ – простое число. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\text{Cent End}^0(J)$ – вполне вещественное поле степени 1, 2, 4 над $\mathbb{Q}$;
- 2) J – такое простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , что $K/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение;
- 3) J – такое простое $2p$ -мерное абелево многообразие, что $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Тогда для всех натуральных $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Хорошо известно, что обычная гипотеза Ходжа верна для любого простого абелева многообразия J простой размерности; более того, в этом случае для любого натурального r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [15], [11].

С другой стороны, Д. Мамфорд открыл существование такого простого 4-мерного абелева многообразия J CM-типа, что $\mathbb{Q}$ -пространство $H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}$ не порождается классами когомологий пересечений дивизоров [10].

Обозначим через $\text{Div}^{[r]}(J)$ $\mathbb{Q}$ -подпространство в $H^{2r}(J, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий пересечений дивизоров. В этой статье мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть J – простое абелево многообразие CM-типа (K, Φ) . Предположим, что $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq \dim J - n$ для некоторого натурального числа $n \geq 1$. Тогда для любого натурального числа $r \leq (\dim J)/(2(n+1))$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров. Если $n = 1$, то для любого натурального числа $r < \dim J/2$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00647).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть J – простое абелево многообразие над полем комплексных чисел. Предположим, что $\dim J \in \{2p, 4p\}$, где p – простое число, и выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\text{Cent End}^0(J)$ – вполне вещественное поле степени 1, 2 или 4 над $\mathbb{Q}$;
- 2) J – такое простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , что $K/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение;
- 3) J – такое простое $2p$ -мерное абелево многообразие, что $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Тогда для всех натуральных $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров, исключая следующие случаи:

- а) $\dim J = 20$, $\text{End}^0(J)$ – неопределенная кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ и $(\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}) = (A_5, 2E(\omega_3))$; в этом случае

$$\begin{aligned} H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2} &= \text{Div}^{[2]}(J), \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3} / \text{Div}^{[3]}(J)) &= 1, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^8(J, \mathbb{Q}) \cap H^{4,4} / \text{Div}^{[4]}(J)) &= 4; \end{aligned}$$

- б) $\dim J = 10$, $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ и полупростая часть $\text{Lie Hg}^{ss}(J) \otimes \mathbb{C}$ – простая алгебра Ли типа A_4 , $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = E(\omega_2)(\chi) + E(\omega_3)(-\chi)$, где χ – вес $\text{Cent Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ -модуля $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$; в этом случае

$$\begin{aligned} H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2} &= \text{Div}^{[2]}(J), \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3} / \text{Div}^{[3]}(J)) &= 1, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^8(J, \mathbb{Q}) \cap H^{4,4} / \text{Div}^{[4]}(J)) &= 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть J – простое абелево многообразие над полем комплексных чисел. Предположим, что $\dim J \in \{2p, 4p\}$, где p – простое число, $p \geq 3$, и выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\text{Cent End}^0(J)$ – вполне вещественное поле степени 1, 2 или 4 над $\mathbb{Q}$;
- 2) J – такое простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , что $K/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение;
- 3) J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие, $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Тогда $\mathbb{Q}$ -пространство $H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

§ 1. О структуре группы Ходжа абелева многообразия

1.1. Пусть J – абелево многообразие над полем комплексных чисел. Из общей теории групп мультипликативного типа следует, что задание разложения Ходжа пространства $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ эквивалентно заданию морфизма вещественных алгебраических групп $h: \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, где $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ –

вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m ограничением поля скаляров от $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R}$. Пусть

$$U^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}.$$

Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(H^1(J, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* абелева многообразия J и обозначается через $\text{Hg}(J)$ [7]. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(H^1(J, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m))$, называется *группой Мамфорда–Тэйта* абелева многообразия J и обозначается через $\text{MT}(J)$.

Хорошо известно, что существует изогения $G_m \times \text{Hg}(J) \rightarrow \text{MT}(J)$, $\text{Hg}(J)$ и $\text{MT}(J)$ – редуктивные $\mathbb{Q}$ -группы, действующие естественным образом в пространстве $H^1(J, \mathbb{Q})$ и в пространствах $H^i(J, \mathbb{Q}) = \wedge^i H^1(J, \mathbb{Q})$. Наиболее важными свойствами канонических представлений этих групп являются следующие:

$$\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \text{End}_{\text{Hg}(J)} H^1(J, \mathbb{Q}) = \text{End}_{\text{MT}(J)} H^1(J, \mathbb{Q}), \quad (1.1)$$

$$H^{2r}(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} = H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}, \quad (1.2)$$

где $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus H^{p,q}$ – разложение Ходжа.

1.2. ТЕОРЕМА (П. Делиня [20, теорема 0.5.1b]). *Любой простой фактор $\mathfrak{g}$ редуктивной алгебры Ли $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ является классической алгеброй Ли типа A_m, B_m, C_m или D_m , и старший вес любого неприводимого $\mathfrak{g}$ -подмодуля $V \subset H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ является микровесом.*

Напомним список микровесов:

для типа A_m ($m \geq 1$): $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$;

для типа B_m ($m \geq 2$): ω_m ;

для типа C_m ($m \geq 3$): ω_1 ;

для типа D_m ($m \geq 4$): $\omega_1, \omega_{m-1}, \omega_m$;

для типа E_6 : ω_1, ω_6 ;

для типа E_7 : ω_7 ,

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ – фундаментальные веса.

1.3. ТЕОРЕМА (М.В. Борового [1]). *Пусть J – простое абелево многообразие над полем комплексных чисел. Обозначим через K_0 максимальное вполне вещественное подполе в $\text{Cent}(\text{End}^0(J))$. Тогда полупростая часть $\text{Lie Hg}^{ss}(J) = \text{Lie}[\text{Hg}(J), \text{Hg}(J)]$ является произведением $\mathbb{Q}$ -простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_m$, где $m \leq [K_0 : \mathbb{Q}]$. В частности, если $\text{Cent}(\text{End}^0(J)) = \mathbb{Q}$, то $\text{Hg}(J)$ – $\mathbb{Q}$ -простая алгебраическая группа.*

1.4. Обозначим через $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ множество всех положительных натуральных чисел и рассмотрим некоторые множества *исключительных* чисел [17]

$$\begin{aligned} \text{Ex}(1) &= \left\{ 4^l, \frac{1}{2} \binom{4l+2}{2l+1}^{2m-1}, 2^{8lm+4l-4m-3}, 4^l(m+1)^{2l+1} \mid l, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \\ &= \{4, 10, 16, 32, 64, 108, 126, 256, 500, 512, 864, 1024, \dots\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ex}(3) &= \left\{ 4^{l+1}, 6^{l+1}, \binom{4m+4}{2m+2}^l, \binom{4m+2}{2m+1}^{2l}, \right. \\
&\quad \left. 2^{(4m-1)l}, 4^l(m+2)^{2l}, 2^{l+1}(m+4)^{l+1} \mid l, m \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \{8, 16, 36, 64, 70, 100, 128, 144, 196, 216, 256, 324, 400, 484, 512, 576, \\
&\quad 676, 784, 900, 924, 1000, 1024, \dots\}, \\
\text{Ex}(4) &= \left\{ \binom{l+2}{m} \left(1 < m < \frac{l+2}{2} \right), \binom{l+2}{m}^{n+1} \left(1 \leq m < \frac{l+2}{2} \right) \mid l, m, n \in \mathbb{N}^+ \right\} \\
&= \{9, 10, 15, 16, 21, 25, 27, 28, 35, 36, 45, 49, 55, 56, 64, 66, 78, 81, 84, \\
&\quad 91, 100, \dots\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что плотность $\text{Ex}(1) \cup \text{Ex}(3) \cup \text{Ex}(4)$ во множестве $\mathbb{N}$ равна нулю.

1.5. Пусть $K = \text{Cent}(\text{End}^0(J))$, K_0 – максимальная вполне вещественная часть K . Согласно классификации Альберта K -алгебра с делением $\text{End}^0(J)$ принадлежит одному из следующих типов [8, п. 21].

Тип I. $\text{End}^0(J) = K = K_0$ – вполне вещественное поле алгебраических чисел.

Тип II. $K = K_0$, $\text{End}^0(J)$ – такая кватернионная алгебра с делением над K , что для любого вложения $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}$ мы имеем $\text{End}^0(J) \otimes_{K, \sigma} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$.

Тип III. $K = K_0$, $\text{End}^0(J)$ – такая кватернионная алгебра с делением над K , что для любого вложения $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}$ алгебра $\text{End}^0(J) \otimes_{K, \sigma} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ является алгеброй классических кватернионов.

Тип IV. K – мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля K_0 , и для любого вложения $\sigma: K_0 \rightarrow \mathbb{R}$ имеем $\text{End}^0(J) \otimes_{K_0, \sigma} \mathbb{R} = M_n(\mathbb{C})$.

§ 2. Циклы на абелевом многообразии типа I, II или III по классификации Альберта

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть g – простая алгебра Ли типа A_5 . Тогда

$$\begin{aligned}
\wedge^2 E(\omega_3) &= E(\omega_2 + \omega_4) + E(0); \\
\wedge^3 E(\omega_3) &= E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3); \\
\wedge^4 E(\omega_3) &= E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0); \\
\wedge^5 E(\omega_3) &= E(2\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_4) \\
&\quad + E(\omega_2 + 2\omega_4 + \omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3); \\
\wedge^6 E(\omega_3) &= E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
&\quad + E(2\omega_2 + 2\omega_4) + E(3\omega_1 + 3\omega_5) \\
&\quad + E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0); \\
\wedge^7 E(\omega_3) &= E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_5) \\
&\quad + E(2\omega_1 + \omega_4 + 3\omega_5) + E(3\omega_1 + 2\omega_3) + E(2\omega_3 + 3\omega_5) \\
&\quad + E(2\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_4) \\
&\quad + E(\omega_2 + 2\omega_4 + \omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3); \\
\wedge^8 E(\omega_3) &= E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + 2\omega_5) + E(2\omega_1 + 2\omega_3 + \omega_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E(\omega_2 + 2\omega_3 + 2\omega_5) + E(4\omega_1 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + 4\omega_5) \\
& + E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
& + E(2\omega_2 + 2\omega_4) + E(3\omega_1 + 3\omega_5) \\
& + E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0).
\end{aligned}$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В обозначениях [2, гл. 6, п. 4.7]

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{6} (5\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6), \\
\omega_2 &= \frac{1}{6} (4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 - 2\varepsilon_6), \\
\omega_3 &= \frac{1}{6} (3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - 3\varepsilon_4 - 3\varepsilon_5 - 3\varepsilon_6), \\
\omega_4 &= \frac{1}{6} (2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_4 - 4\varepsilon_5 - 4\varepsilon_6), \\
\omega_5 &= \frac{1}{6} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - 5\varepsilon_6).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\text{ch } E(\omega_3) = \sum_{\substack{a_i \in \{\pm 1\} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0}} \exp\left(\frac{a_1\varepsilon_1}{2} + \frac{a_2\varepsilon_2}{2} + \frac{a_3\varepsilon_3}{2} + \frac{a_4\varepsilon_4}{2} + \frac{a_5\varepsilon_5}{2} + \frac{a_6\varepsilon_6}{2}\right).$$

Например, рассмотрим $\wedge^6 E(\omega_3)$. Прежде всего мы имеем $\dim \wedge^6 E(\omega_3) = 38760$. С другой стороны, $\wedge^6 E(\omega_3)$ имеет прямое слагаемое $\wedge^4 E(\omega_3)$, потому что $E(\omega_3)$ – симплектическое представление (это следует из соотношения $\wedge^6 E(\omega_3) = F \oplus \wedge^4 E(\omega_3)$, где F – g -модуль [2, гл. 8, п. 13.3, лемма 2]). Заметим, что

$$\begin{aligned}
2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5 &= 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 \\
&= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 + \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6)
\end{aligned}$$

– вес $\wedge^6 E(\omega_3)$ кратности 1, поэтому формула Г. Вейля влечет

$$\begin{aligned}
12250 &= \dim E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) \\
&= \max\{\dim E(\omega) \mid \omega \text{ является весом } \wedge^6 E(\omega_3)/[\wedge^4 E(\omega_3)]\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5)$ – g -подмодуль $\wedge^6 E(\omega_3)$. Дуальный g -модуль $E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5)$ является g -подмодулем $\wedge^6 E(\omega_3)$. Мы видим, что

$$9415 = \dim \wedge^6 E(\omega_3)/[\wedge^4 E(\omega_3) + E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5)].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
2\omega_2 + 2\omega_4 &= 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 + \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6)
\end{aligned}$$

– вес $\wedge^6 E(\omega_3)$ кратности 1, $\dim E(2\omega_2 + 2\omega_4) = 6720$. Более того, $2\omega_2 + 2\omega_4$ не является весом $E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) = E(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - 2\varepsilon_6)$ (иначе мы имели бы $2\omega_2 + 2\omega_4 = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 - n_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - n_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - n_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) - n_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_5) - n_5(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)$, где $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ [2, гл. 8, п. 6.2, лемма 2]; сравнение коэффициентов при ε_1 дает равенство $n_1 = 1$; сравнение коэффициентов при ε_2 дает равенство $n_2 = 0$; сравнение коэффициентов при ε_3 дает равенство $0 = n_3$; сравнение коэффициентов при ε_4 дает соотношение $0 = -1 - n_4$, что противоречит неравенству $n_4 \geq 0$). Следовательно, $E(2\omega_2 + 2\omega_4) - g$ -подмодуль

$$\wedge^6 E(\omega_3) / [\wedge^4 E(\omega_3) + E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5)].$$

Более того, $\dim E(3\omega_1 + 3\omega_5) = 2695 = \dim \wedge^6 E(\omega_3) / [\wedge^4 E(\omega_3) + E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) + E(2\omega_2 + 2\omega_4)]$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
3\omega_1 + 3\omega_5 &= 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_6 \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6)
\end{aligned}$$

– вес $\wedge^6 E(\omega_3)$ кратности 1. Он не является весом $E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) = E(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - 2\varepsilon_6)$ (иначе мы имели бы

$$\begin{aligned}
3\omega_1 + 3\omega_5 &= 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_6 = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 \\
&\quad - n_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - n_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - n_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) - n_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_5) - n_5(\varepsilon_5 - \varepsilon_6),
\end{aligned}$$

где $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$; сравнение коэффициентов при ε_6 дает равенство $-3 = -2 + n_5$, что противоречит неравенству $n_5 \geq 0$). С другой стороны, он не является весом

$$E(2\omega_2 + 2\omega_4) = E(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_5 - 2\varepsilon_6)$$

(иначе мы имели бы $3\omega_1 + 3\omega_5 = 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_6 = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_5 - 2\varepsilon_6 - n_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - n_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - n_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) - n_4(\varepsilon_4 - \varepsilon_5) - n_5(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)$, где $n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$; сравнение коэффициентов при ε_6 дает соотношение $-3 = -2 + n_5$, что противоречит неравенству $n_5 \geq 0$). Поэтому мы получаем разложение

$$\begin{aligned}
\wedge^6 E(\omega_3) &= E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
&\quad + E(2\omega_2 + 2\omega_4) + E(3\omega_1 + 3\omega_5) + \wedge^4 E(\omega_3).
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

2.2. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J \in \{2p, 4p\}$, где p – простое число, и $\text{Cent}(\text{End}(J)) = \mathbb{Z}$. Тогда для любого натурального числа $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров, исключая следующий случай: $\dim J = 20$, $\text{End}^0(J)$ – неопределенная кватернионная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ и (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}) = (A_5, 2E(\omega_3))$; в этом случае*

$$\begin{aligned} H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2} &= \text{Div}^{[2]}(J), \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3} / \text{Div}^{[3]}(J)) &= 1, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^8(J, \mathbb{Q}) \cap H^{4,4} / \text{Div}^{[4]}(J)) &= 4. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = \dim J$. Легко проверить, что $\{2p, 4p\} \cap \text{Ex}(1) = \{4, 10\}$.

Если $\text{End}(J) = \mathbb{Z}$ и $\dim J \notin \text{Ex}(1)$, то $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ – простая алгебра Ли типа C_q , и $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, теорема 1.1].

Если $\text{End}(J) = \mathbb{Z}$ и $\dim J = 4$, то пара (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ принимает одно из следующих значений: $(C_4, E(\omega_1))$, $(A_1 \times A_1 \times A_1, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)}))$, и $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, лемма 2.6].

Если $\text{End}(J) = \mathbb{Z}$ и $\dim J = 10$, то (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ принимает одно из следующих значений: $(C_{10}, E(\omega_1))$, $(A_5, E(\omega_3))$, и $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, лемма 2.6].

С другой стороны, $\{2p, 4p\} \cap 2\text{Ex}(1) = \{8, 20\}$.

Если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ и $\dim J \notin 2\text{Ex}(1)$, то (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ принимает значение $(C_{q/2}, 2E(\omega_1))$, и $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, теорема 1.1].

Если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ и $\dim J = 8$, то (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ принимает одно из следующих значений: $(C_4, 2E(\omega_1))$, $(A_1 \times A_1 \times A_1, 2E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(3)}))$. В первом случае $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, доказательство теоремы 1.1]; во втором случае легко видеть, что при условиях основной теоремы $r < p = 2$, поэтому результат следует из хорошо известной теоремы Лефшеца, согласно которой существует канонический изоморфизм

$$\text{NS}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(-1) \xrightarrow{\sim} H^2(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} = H^2(J, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}.$$

Если $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ и $\dim J = 20$, то (тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ принимает одно из следующих значений: $(C_{10}, 2E(\omega_1))$, $(A_5, 2E(\omega_3))$. В первом случае $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, доказательство теоремы 1.1]. Во втором случае легко видеть, что при условиях основной теоремы $r < p = 5$. Лемма Шура и соотношение $\text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$ показывают, что $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 – изоморфные неприводимые симплектические $\mathfrak{sl}_6$ -модули. Следовательно, существует

такое вложение $\mathfrak{sl}_6 \subset \mathfrak{sp}_{20}$, что можно рассматривать V_i как изоморфные неприводимые симплектические $\mathfrak{sp}_{20}$ -модули, и ограничение естественного представления $\mathfrak{sp}_{20}$ в V_i на подалгебру $\mathfrak{sl}_6$ совпадает с данным представлением $\mathfrak{sl}_6$ в V_i .

Мы имеем

$$(H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}) \otimes \mathbb{C} = H^{2r}(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} \otimes \mathbb{C} = [\wedge^{2r}(V_1 \oplus V_2)]^{\mathfrak{sl}_6}.$$

С другой стороны, по теореме Лефшеца

$$\begin{aligned} \text{NS}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}(-1) &\xrightarrow{\sim} H^2(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} \otimes \mathbb{C} = (H^2(J, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}) \otimes \mathbb{C} \\ &= [\wedge^2(V_1 \oplus V_2)]^{\mathfrak{sl}_6} = [\wedge^2 V_1]^{\mathfrak{sl}_6} \oplus [V_1 \otimes V_2]^{\mathfrak{sl}_6} \oplus [\wedge^2 V_2]^{\mathfrak{sl}_6} \end{aligned}$$

— прямая сумма трех 1-мерных пространств. Очевидно, что над $\mathfrak{sl}_6$ и $\mathfrak{sp}_{20}$ мы имеем $V_i^* \xrightarrow{\sim} V_i$; более того,

$$[\wedge^2 V_1]^{\mathfrak{sl}_6} = [\wedge^2 V_1]^{\mathfrak{sp}_{20}}, \quad [V_1 \otimes V_2]^{\mathfrak{sl}_6} = [V_1 \otimes V_2]^{\mathfrak{sp}_{20}}, \quad [\wedge^2 V_2]^{\mathfrak{sl}_6} = [\wedge^2 V_2]^{\mathfrak{sp}_{20}}.$$

Следовательно, $[\wedge^{2r}(V_1 \oplus V_2)]^{\mathfrak{sp}_{20}} = \text{Div}^{[r]}(J) \otimes \mathbb{C}$.

Напомним, что $\wedge^i E(\omega_1) = E(\omega_i) + \wedge^{i-2} E(\omega_1)$ для $i \leq 10$ и для простой алгебры Ли типа C_{10} [2, гл. 8, п. 13.3, лемма 2]. Поэтому

$$\begin{aligned} \wedge^2 E(\omega_1) &= E(\omega_2) + E(0); \\ \wedge^3 E(\omega_1) &= E(\omega_3) + E(\omega_1); \\ \wedge^4 E(\omega_1) &= E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0); \\ \wedge^5 E(\omega_1) &= E(\omega_5) + E(\omega_3) + E(\omega_1); \\ \wedge^6 E(\omega_1) &= E(\omega_6) + E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0); \\ \wedge^7 E(\omega_1) &= E(\omega_7) + E(\omega_5) + E(\omega_3) + E(\omega_1); \\ \wedge^8 E(\omega_1) &= E(\omega_8) + E(\omega_6) + E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0). \end{aligned}$$

С другой стороны, предложение 2.1 и лемма Шура показывают, что

$$\begin{aligned} \dim [\wedge^4 V_i]^{\mathfrak{sl}_6} &= \dim [\wedge^4 E(\omega_3)]^{\mathfrak{sl}_6} \\ &= \dim [E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) \\ &\quad + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)]^{\mathfrak{sl}_6} = 1 \\ &= \dim [E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0)]^{\mathfrak{sp}_{20}} = \dim [\wedge^4 V_i]^{\mathfrak{sp}_{20}}; \\ \dim [\wedge^3 V_1 \otimes V_2]^{\mathfrak{sl}_6} &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_6}(\wedge^3 V_1, V_2) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_6}(E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) \\ &\quad + E(\omega_3), E(\omega_3)) = 1 \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sp}_{20}}(E(\omega_3) + E(\omega_1), E(\omega_1)) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sp}_{20}}(\wedge^3 V_1, V_2) = \dim [\wedge^3 V_1 \otimes V_2]^{\mathfrak{sp}_{20}}; \\ \dim [\wedge^2 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\mathfrak{sl}_6} &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_6}(\wedge^2 V_1, \wedge^2 V_2) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_6}(E(\omega_2 + \omega_4) + E(0), E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)) = 2 \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sp}_{20}}(E(\omega_2) + E(0), E(\omega_2) + E(0)) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathfrak{sp}_{20}}(\wedge^2 V_1, \wedge^2 V_2) = \dim [\wedge^2 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\mathfrak{sp}_{20}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $[\wedge^4(V_1 \oplus V_2)]^{\text{sl}_6} = [\wedge^4(V_1 \oplus V_2)]^{\text{sp}_{20}}$, и $H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

Аналогично мы получаем

$$\begin{aligned}
\dim [\wedge^6 V_i]^{\text{sl}_6} &= \dim [\wedge^6 E(\omega_3)]^{\text{sl}_6} = \dim [E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) \\
&\quad + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) + E(3\omega_1 + 3\omega_5) + E(2\omega_2 + 2\omega_4) \\
&\quad + E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) \\
&\quad + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)]^{\text{sl}_6} = 1 \\
&= \dim [E(\omega_6) + E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0)]^{\text{sp}_{20}} = \dim [\wedge^6 V_i]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^5 V_1 \otimes V_2]^{\text{sl}_6} &= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^5 V_1, V_2) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(E(2\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_4) \\
&\quad + E(\omega_2 + 2\omega_4 + \omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) \\
&\quad + E(\omega_3), E(\omega_3)) = 1 \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(E(\omega_5) + E(\omega_3) + E(\omega_1), E(\omega_1)) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(\wedge^5 V_1, V_2) = \dim [\wedge^5 V_1 \otimes V_2]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^4 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\text{sl}_6} &= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^4 V_1, \wedge^2 V_2) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) \\
&\quad + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0), E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)) = 2 \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0), E(\omega_2) + E(0)) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(\wedge^4 V_1, \wedge^2 V_2) = \dim [\wedge^4 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^3 V_1 \otimes \wedge^3 V_2]^{\text{sl}_6} &= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^3 V_1, \wedge^3 V_2) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3), \\
&\quad E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3)) = 3.
\end{aligned}$$

В то же время мы имеем

$$\begin{aligned}
2 &= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(E(\omega_3) + E(\omega_1), E(\omega_3) + E(\omega_1)) \\
&= \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}}(\wedge^3 V_1, \wedge^3 V_2) = \dim [\wedge^3 V_1 \otimes \wedge^3 V_2]^{\text{sp}_{20}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$[\wedge^6(V_1 \oplus V_2)]^{\text{sl}_6} \neq [\wedge^6(V_1 \oplus V_2)]^{\text{sp}_{20}},$$

и $H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3}$ не порождается классами когомологий пересечений дивизоров,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3} / \text{Div}^{[3]}(J)) = 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\dim [\wedge^8 V_i]^{\text{sl}_6} &= \dim [\wedge^8 E(\omega_3)]^{\text{sl}_6} = \dim [E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
&\quad + E(2\omega_1 + 2\omega_3 + \omega_4) + E(\omega_2 + 2\omega_3 + 2\omega_5) \\
&\quad + E(4\omega_1 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + 4\omega_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
& + E(3\omega_1 + 3\omega_5) + E(2\omega_2 + 2\omega_4) \\
& + E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) \\
& + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)]^{\text{sl}_6} = 1 \\
& = \dim [E(\omega_8) + E(\omega_6) + E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0)]^{\text{sp}_{20}} \\
& = \dim [\wedge^8 V_i]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^7 V_1 \otimes V_2]^{\text{sl}_6} & = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^7 V_1, V_2) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6} (E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5) \\
& \quad + E(3\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_5) + E(2\omega_1 + \omega_4 + 3\omega_5) \\
& \quad + E(3\omega_1 + 2\omega_3) + E(2\omega_3 + 3\omega_5) + E(2\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_5) \\
& \quad + E(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_4) + E(\omega_2 + 2\omega_4 + \omega_5) \\
& \quad + E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3), E(\omega_3)) = 1 \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (E(\omega_7) + E(\omega_5) + E(\omega_3) + E(\omega_1), E(\omega_1)) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (\wedge^7 V_1, V_2) = \dim [\wedge^7 V_1 \otimes V_2]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^6 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\text{sl}_6} & = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^6 V_1, \wedge^2 V_2) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6} (E(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_5) \\
& \quad + E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 + 2\omega_5) \\
& \quad + E(3\omega_1 + 3\omega_5) + E(2\omega_2 + 2\omega_4) + E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) \\
& \quad + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0), \\
& \quad E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)) = 2 \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (E(\omega_6) + E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0), \\
& \quad E(\omega_2) + E(0)) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (\wedge^6 V_1, \wedge^2 V_2) = \dim [\wedge^6 V_1 \otimes \wedge^2 V_2]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^5 V_1 \otimes \wedge^3 V_2]^{\text{sl}_6} & = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^5 V_1, \wedge^3 V_2) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6} (E(2\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_5) + E(\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_4) \\
& \quad + E(\omega_2 + 2\omega_4 + \omega_5) \\
& \quad + E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3), \\
& \quad E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2 + \omega_5) + E(\omega_3)) = 3.
\end{aligned}$$

В то же время мы имеем

$$\begin{aligned}
2 & = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (E(\omega_5) + E(\omega_3) + E(\omega_1), E(\omega_3) + E(\omega_1)) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sp}_{20}} (\wedge^5 V_1, \wedge^3 V_2) = \dim [\wedge^5 V_1 \otimes \wedge^3 V_2]^{\text{sp}_{20}}; \\
\dim [\wedge^4 V_1 \otimes \wedge^4 V_2]^{\text{sl}_6} & = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6}(\wedge^4 V_1, \wedge^4 V_2) \\
& = \dim \text{Hom}_{\text{sl}_6} (E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) \\
& \quad + E(3\omega_4) + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0), \\
& \quad E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 + \omega_5) + E(3\omega_2) + E(3\omega_4) \\
& \quad + E(\omega_2 + \omega_4) + E(0)) = 5.
\end{aligned}$$

В то же время мы имеем

$$\begin{aligned} 3 &= \dim \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sp}_{20}}(E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0), E(\omega_4) + E(\omega_2) + E(0)) \\ &= \dim \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sp}_{20}}(\wedge^4 V_1, \wedge^4 V_2) = \dim [\wedge^4 V_1 \otimes \wedge^4 V_2]^{\operatorname{Sp}_{20}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}}(H^8(J, \mathbb{Q}) \cap H^{4,4}/\operatorname{Div}^{[4]}(J)) = 4$.

Легко видеть, что $\{2p, 4p\} \cap \operatorname{Ex}(3) = \{8\}$. Если $\operatorname{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ – тело классических кватернионов и $q = \dim J \notin \operatorname{Ex}(3)$, то

$$(\text{тип } \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}) = (D_{q/2}, 2E(\omega_1)),$$

и для всех натуральных чисел $r \neq (1/2) \dim J$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, теорема 1.1].

Если $\operatorname{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{K}$ – тело классических кватернионов и $\dim J = 8$, то (тип $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$) принимает одно из следующих значений:

$$(D_4, 2E(\omega_1)), \quad (D_4, 2E(\omega_{3,4})), \quad (B_3, 2E(\omega_3))$$

(это следует из [18, теорема 2.2] и теорем 1.2, 1.3). В первом случае для всех натуральных $r \neq 4$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, доказательство теоремы 1.1]; в остальных случаях для всех $r < p = 2$ результат следует из теоремы Лефшеца. Лемма доказана.

2.3. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J = 2p$ и $\operatorname{Cent}(\operatorname{End}^0(J))$ – вещественное квадратичное поле. Тогда для всех натуральных r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\operatorname{End}^0(J)$ – вещественное квадратичное поле. Тогда соотношения (1.1), (1.2), лемма Шура и теорема Лефшеца дают соотношение

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = V_1 \oplus V_2,$$

где V_1, V_2 – неизоморфные симплектические неприводимые $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени $2p$ [14, п. 5.2]. В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. Поэтому

$$(\text{тип } \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (C_p \times C_p, E(\omega_1^{(1)}) + E(\omega_1^{(2)}))$$

(см. [18, теорема 2.2]). Поскольку $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J)$ является максимально большим, результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2].

Предположим, что $\operatorname{End}(J) \otimes \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$. Тогда

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq [V_1 \oplus V_1] \oplus [V_2 \oplus V_2],$$

где V_1, V_2 – неизоморфные симплектические неприводимые $\operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени p [14, п. 5.2]. Поэтому $p = 2$ и

$$(\text{тип } \operatorname{Lie} \operatorname{Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (A_1 \times A_1, 2E(\omega_1^{(1)}) + 2E(\omega_1^{(2)}))$$

(см. [18, теорема 2.2]). Поскольку $\mathrm{Lie\,Hg}(J)$ является максимально большим, результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2].

Предположим, что $\mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{R} = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ – тело классических кватернионов. Тогда

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq [V_1 \oplus V_1] \oplus [V_2 \oplus V_2],$$

где V_1, V_2 – неизоморфные ортогональные неприводимые $\mathrm{Lie\,Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени p [14, п. 5.2]. В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\mathrm{Lie\,Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. С другой стороны, не существуют такие представления степени p [18, теорема 2.2]. Лемма доказана.

2.4. ЛЕММА. *Для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{so}_{2p}$ типа $A_1 \times D_p$, $p \geq 3$, и для любого натурального $m \leq 2(p-1)$ мы имеем*

$$\dim [\wedge^m E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})]^{\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{so}_{2p}} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } m \text{ четно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h – подалгебра Картана в $\mathfrak{sl}_2$. Мы имеем следующее разложение $(h \times \mathfrak{so}_{2p})$ -модулей

$$E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}) = E(\omega_1^{(2)})(\chi) \oplus E(\omega_1^{(2)})(-\chi),$$

где χ – вес h -модуля $E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})$. Более того,

$$\begin{aligned} [\wedge^m E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})]^{\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{so}_{2p}} &\subset [\wedge^m (E(\omega_1^{(2)})(\chi) \oplus E(\omega_1^{(2)})(-\chi))]^{h \times \mathfrak{so}_{2p}} \\ &= \bigoplus_{i=0}^m [\wedge^i (E(\omega_1^{(2)})(\chi)) \otimes \wedge^{m-i} (E(\omega_1^{(2)})(-\chi))]^{h \times \mathfrak{so}_{2p}} \\ &= \bigoplus_{i=0}^m [(\wedge^i E(\omega_1^{(2)}))(i\chi) \otimes (\wedge^{m-i} E(\omega_1^{(2)}))((-m+i)\chi)]^{h \times \mathfrak{so}_{2p}} \\ &= \bigoplus_{i=0}^m [(\wedge^i E(\omega_1^{(2)})) \otimes (\wedge^{m-i} E(\omega_1^{(2)}))((-m+2i)\chi)]^{h \times \mathfrak{so}_{2p}} \\ &\simeq \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq 2i, \\ [\wedge^i E(\omega_1^{(2)}) \otimes \wedge^i E(\omega_1^{(2)})]^{\mathfrak{so}_{2p}} \simeq \mathrm{End}_{\mathfrak{so}_{2p}} \wedge^i E(\omega_1^{(2)}) & \text{для } m = 2i. \end{cases} \end{aligned}$$

Хорошо известно, что $\wedge^i E(\omega_1^{(2)})$ – неприводимое представление для $1 \leq i \leq p-1$ [2, гл. 8, п. 13.4]. В нашем случае $i = m/2 \leq p-1$, поэтому лемма 2.4 следует из леммы Шура.

2.5. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J = 4p$ и $\mathrm{Cent}(\mathrm{End}^0(J))$ – вещественное квадратичное поле. Тогда для всех натуральных $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p = 2$, то результат следует из теоремы Лефшеца. Поэтому мы предполагаем, что $p \geq 3$.

Пусть $f \in \text{End}(H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$ – полупростой эндоморфизм $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$, действующий как умножение на $(m - n)$ на компоненте Ходжа $H^{m,n}$ пространства $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$. Хорошо известно, что $\text{Lie Hg}(J)$ – наименьшая $\mathbb{Q}$ -подалгебра Ли в $\text{End}(H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C})$, для которой $\text{Lie Hg}(J)(\mathbb{C})$ содержит f . В частности, f является элементом Ходжа алгебры Ли $\text{Lie Hg}(J)$ в смысле [21, п. 1,4].

По хорошо известной теореме М.В. Борового (теорема 1.3) $\text{Lie Hg}(J)$ – произведение $\mathbb{Q}$ -простых алгебр Ли $g_1, \dots, g_m$, где $m \leq [K_0: \mathbb{Q}]$, и K_0 – максимальное вполне вещественное подполе $\text{Cent}(\text{End}^0(J))$. В нашем случае $m \leq 2$.

Предположим, что $\text{End}^0(J)$ – вещественное квадратичное поле K_0 . Тогда соотношения (1.1), (1.2), лемма Шура и теорема Лефшеца дают разложение

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K_0 = W_1 \oplus W_2,$$

где W_1, W_2 – неизоморфные симплектические абсолютно неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} K_0$ -модули степени $4p$ [16, п. 1.5]. Мы фиксируем вложение $K_0 \subset \mathbb{C}$. Ясно, что $H^1(J, \mathbb{R}) = W_{1\mathbb{R}} \oplus W_{2\mathbb{R}}$, где $W_{i\mathbb{R}} = W_i \otimes_{K_0} \mathbb{R}$.

Пусть $\text{MT}(J)$ – группа Мамфорда–Тэйта абелева многообразия J . Это наименьшая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(H^1(J, \mathbb{Q}))$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_m)$. Хорошо известно, что существует изогения

$$G_m \times \text{Hg}(J) \rightarrow \text{MT}(J), \quad \text{End}(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \text{End}_{\text{MT}(J)} H^1(J, \mathbb{Q}),$$

следовательно, $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} K_0 = W_1 \oplus W_2$ – разложение $\text{MT}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} K_0$ -модулей, и поэтому W_i снабжено канонической K_0 -структурой Ходжа, индуцированной композицией морфизмов

$$\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \xrightarrow{h} \text{MT}(J) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(W_i \otimes_{K_0} \mathbb{R}).$$

В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в $V_i = W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}}$ определено микровесами простых классических алгебр Ли. Поэтому теорема 2.2 из [18] влечет, что (тип $\text{Im}[\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{End}(W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}})], W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}}$) принимает одно из следующих значений:

$$(C_{2p}, E(\omega_1)), \quad (A_1 \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)})).$$

Заметим, что тип $\text{Im}[\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{End}(W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}})]$ не зависит от выбора $i \in \{1, 2\}$ (иначе $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет простые факторы типов A_1, D_p, C_{2p} , и число $\mathbb{Q}$ -простых компонент $\text{Lie Hg}(J)$ больше или равно 3, что противоречит теореме 1.3).

Если (тип $\text{Im}[\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{End}(W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}})] = C_{2p}$, то

$$(\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (C_{2p} \times C_{2p}, E(\omega_1^{(1)} + E(\omega_1^{(2)}))),$$

поэтому $\text{Lie Hg}(J)$ является максимально большим, и результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2].

Далее мы предполагаем, что $(\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{End}(W_i \otimes_{K_0} \overline{\mathbb{Q}})) = A_1 \times D_p$. В этом случае $\text{Lie Hg}(J) = g_1 \oplus g_2$, где g_1, g_2 – $\mathbb{Q}$ -простые алгебры Ли.

Мы утверждаем, что $g_i \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ не является простой алгеброй Ли. Действительно, $f = f_1 \oplus f_2$, где $(\forall i) f_i \neq 0$, потому что f – элемент Ходжа алгебры Ли $\text{Lie Hg}(J)$ [21, п. 1.2.d)]. Если φ – линейный диагонализруемый оператор, то мы обозначаем через $\text{Spec}(\varphi)$ множество всех собственных чисел φ . Предположим, что $g_1 \otimes \mathbb{C}$ – простая алгебра Ли. Тогда $(\forall i) g_1 \otimes \mathbb{C}$ действует нетривиально на $W_i \otimes_{K_0} \mathbb{C}$, и это действие точное. В частности, f_1 действует нетривиально на $W_i \otimes_{K_0} \mathbb{C}$ $(\forall i)$, и $\text{Card}(\text{Spec}(f_1|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) \geq 2$. С другой стороны, $f_2 \neq 0$ действует нетривиально на $(W_1 \otimes \mathbb{C}) \oplus (W_2 \otimes \mathbb{C})$, поэтому f_2 действует нетривиально на некотором $W_i \otimes \mathbb{C}$. В итоге $\text{Card}(\text{Spec}(f_2|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) \geq 2$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Мы видим, что

$$\text{Card}(\text{Spec}((f_1 + f_2)|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) - 1 \geq \sum_{j=1}^2 [\text{Card}(\text{Spec}(f_j|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) - 1] \geq 2$$

(см. [21, пп. 0.2, 1.5]). Поэтому

$$\text{Card}(\text{Spec}((f_1 + f_2)|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) \geq 3. \quad (2.1)$$

С другой стороны, $W_i \otimes \mathbb{C}$ имеет разложение Ходжа типа $(1, 0) + (0, 1)$, поэтому

$$\text{Card}(\text{Spec}((f_1 + f_2)|_{W_i \otimes \mathbb{C}})) = 2,$$

что противоречит неравенству (2.1). Значит, $g_i \otimes \mathbb{C}$ не является простой алгеброй Ли $(i = 1, 2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & (\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}) \\ &= (A_1 \times A_1 \times D_p \times D_p, E(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(3)}) + E(\omega_1^{(2)} + \omega_1^{(4)})). \end{aligned}$$

Мы выводим из этого результата и из леммы 2.4, что для $p \geq 3$ и для любого натурального $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

Осталось доказать следующие леммы.

2.6. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J = 4p$, $\text{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над вещественным квадратичным полем $K = \text{Cent } \text{End}^0(J)$, расщепляющаяся в любой вещественной точке поля K . Тогда для всех натуральных r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (1.1), (1.2), лемма Шура и теорема Лефшеца дают разложение $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = (V_1 \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus V_2)$, где V_1, V_2 – неизоморфные симплектические неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени $2p$ [14, п. 5.2]. В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. Поэтому

$$(\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (C_p \times C_p, 2E(\omega_1^{(1)}) + 2E(\omega_1^{(2)}))$$

(см. [18, теорема 2.2]). Поскольку $\text{Lie Hg}(J)$ максимально большой, результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2]. Лемма доказана.

2.7. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J = 4p$, $p \geq 3$, $\text{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над вещественным квадратичным полем $K = \text{Cent } \text{End}^0(J)$, не расщепляющаяся ни в одной вещественной точке поля K . Тогда для всех натуральных $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (1.1), (1.2), лемма Шура и теорема Лефшеца дают разложение $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = (V_1 \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus V_2)$, где V_1, V_2 – неизоморфные ортогональные неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени $2p$ [14, п. 5.2]. В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. Поэтому

$$(\text{тип } \text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (D_p \times D_p, 2E(\omega_1^{(1)}) + 2E(\omega_1^{(2)}))$$

(см. [18, теорема 2.2]). Следовательно, $\text{Lie Hg}(J)$ максимально большой.

Мы утверждаем, что для $i + j \leq 2p - 2$

$$[\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} \neq (0) \Leftrightarrow i = j, \quad (2.2)$$

$$\dim [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} = 1 \quad \text{для } i \leq p - 1. \quad (2.3)$$

Действительно, хорошо известно, что $\wedge^r E(\omega_1^{(1)}) = E(\omega_r^{(1)})$ для $1 \leq r \leq p - 2$, представление $\wedge^{p-1} E(\omega_1^{(1)})$ неприводимо [2, гл. 8, п. 13.4] и $\wedge^p E(\omega_1^{(1)}) = E(2\omega_{p-1}^{(1)}) + E(2\omega_p^{(1)})$ [2, гл. 8, п. 13, упражнение 10]. Из невырожденности канонического спаривания $\text{so}(V_1)$ -модулей $\wedge^i V_1 \times \wedge^{2p-i} V_1 \rightarrow \wedge^{2p} V_1 = \overline{\mathbb{Q}}$ следует, что $\wedge^{2p-i} V_1 = (\wedge^i V_1)^* = \wedge^i V_1^* \xrightarrow{\sim} \wedge^i V_1$. Поэтому последовательность

$$E(0), V_1, \wedge^2 V_1, \dots, \wedge^{p-2} V_1, \wedge^{p-1} V_1, \wedge^p V_1, \wedge^{p+1} V_1, \wedge^{p+2} V_1, \dots, \wedge^{2p-2} V_1, \wedge^{2p-1} V_1, \wedge^{2p} V_1$$

совпадает с последовательностью

$$E(0), E(\omega_1^{(1)}), E(\omega_2^{(1)}), \dots, E(\omega_{p-2}^{(1)}), \wedge^{p-1} V_1, E(2\omega_{p-1}^{(1)}) + E(2\omega_p^{(1)}), \wedge^{p-1} V_1, E(\omega_{p-2}^{(1)}), \dots, E(\omega_2^{(1)}), E(\omega_1^{(1)}), E(0).$$

Если $i + j \leq 2p - 2$, то $i \leq p - 1$ или $j \leq p - 1$.

Предположим, что $i \leq p - 1$, $j \leq p - 1$. Тогда в силу леммы Шура

$$\begin{aligned} [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} &= \text{Hom}_{\text{so}(V_1)}(\wedge^i V_1^*, \wedge^j V_1) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{so}(V_1)}(\wedge^i V_1, \wedge^j V_1) \neq (0) \Leftrightarrow i = j \end{aligned}$$

и $\dim [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} = 1$.

Предположим, что $i \leq p - 1$, $j \geq p$. Тогда $j = p + s$ ($s \geq 0$), $\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1 = \wedge^i V_1 \otimes \wedge^{p+s} V_1 \xrightarrow{\sim} \wedge^i V_1 \otimes \wedge^{p-s} V_1$; мы видим, что $[\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} \neq (0) \Leftrightarrow (s \geq 1 \text{ и } i = p - s) \Rightarrow i + j = 2p$, что противоречит неравенству $i + j \leq 2p - 2$. Поэтому утверждение (2.2) доказано.

Из (2.2), (2.3) следует, что для $r < p$

$$\begin{aligned} & [H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}] \otimes \overline{\mathbb{Q}} \\ &= \bigoplus_{i+j+k+l=2r \leq 2p-2} [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1 \otimes \wedge^k V_2 \otimes \wedge^l V_2]^{\text{so}(V_1) \times \text{so}(V_2)} \\ &= \bigoplus_{i+j+k+l=2r \leq 2p-2} [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^j V_1]^{\text{so}(V_1)} \otimes [\wedge^k V_2 \otimes \wedge^l V_2]^{\text{so}(V_2)} \end{aligned}$$

порождается

$$\bigoplus_{i+k=r \leq p-1} [\wedge^i V_1 \otimes \wedge^i V_1]^{\text{so}(V_1)} \otimes [\wedge^k V_2 \otimes \wedge^k V_2].$$

Последнее пространство порождается внешними произведениями образующих 1-мерных пространств $[V_1 \otimes V_1]^{\text{so}(V_1)}$, $[V_2 \otimes V_2]^{\text{so}(V_2)}$. Поэтому $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров. Лемма доказана.

2.8. ЛЕММА. *Предположим, что $\dim J = 4p$ и $K = \text{Cent}(\text{End}^0(J))$ – вполне вещественное поле степени 4 над $\mathbb{Q}$. Тогда для всех натуральных r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{End}^0(J)$ – вполне вещественное поле. Тогда соотношения (1.1), (1.2), лемма Шура и теорема Лефшеца дают разложение $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$, где $V_1, \dots, V_4$ – неизоморфные симплектические неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени $2p$ [14, п. 5.2]. В силу теоремы 1.2 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. Поэтому

(тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (C_p \times C_p \times C_p \times C_p, E(\omega_1^{(1)}) + \dots + E(\omega_1^{(4)}))$ (см. [18, теорема 2.2]). Поскольку $\text{Lie Hg}(J)$ максимально большой, результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2].

Предположим, что $\text{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над K , расщепляющаяся в любой вещественной точке K . Тогда

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq [V_1 \oplus V_1] \oplus \dots \oplus [V_4 \oplus V_4],$$

где $V_1, \dots, V_4$ – неизоморфные симплектические неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени p [14, п. 5.2]. Поэтому $p = 2$ и

(тип $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}) = (A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1, 2E(\omega_1^{(1)}) + \dots + 2E(\omega_1^{(4)}))$ (см. [18, теорема 2.2]). Поскольку $\text{Lie Hg}(J)$ максимально большой, результат следует из стандартных вычислений [14, п. 5.2].

Предположим, что $\text{End}^0(J)$ – кватернионная алгебра с делением над K , не расщепляющаяся в любой вещественной точке поля K . Тогда

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} \simeq [V_1 \oplus V_1] \oplus \dots \oplus [V_4 \oplus V_4],$$

где $V_1, \dots, V_4$ – неизоморфные ортогональные неприводимые $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ -модули степени p [14, п. 5.2]. Это приводит к противоречию с классификацией неприводимых ортогональных представлений степени p [18, теорема 2.2], потому что в силу теоремы 1.2 каноническое представление $\text{Lie Hg}(J) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ в V_i определено микровесами простых классических алгебр Ли. Лемма доказана.

§ 3. Циклы на простом абелевом многообразии CM-типа

3.1. Следуя статье Г. Польманна [10, § 2], напомним некоторые факты, касающиеся абелева многообразия CM-типа. Пусть J – q -мерное абелево многообразие над полем комплексных чисел. Аналитическая координатная система $(\mathbb{C}^q/D, \theta)$ для J состоит из комплексного тора $\mathbb{C}^q/D$ (D – дискретная ранга $2q$ подгруппа $\mathbb{C}^q$) и аналитического изоморфизма $\theta: J \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^q/D$. Аналитическое представление $\text{End}^0(J)$ относительно θ – это морфизм колец $S_*: \text{End}^0(J) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^q)$, где для любого $\lambda \in \text{End}^0(J)$ $S_*(\lambda)$ – такое $\mathbb{C}$ -линейное отображение, что $\theta \circ \lambda = S_*(\lambda) \circ \theta$.

Мы говорим, что J – абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , если и только если K – числовое поле степени $2q$ над $\mathbb{Q}$, которое является чисто мнимым квадратичным расширением вполне вещественного поля K_0 , $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$ – множество различных несопряженных изоморфизмов K в $\mathbb{C}$ и существует такой мономорфизм $i: K \rightarrow \text{End}^0(J)$, что $S_*|_{i(K)} \simeq \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_q$.

Ясно, что $H_1(J, \mathbb{Z}) \simeq D$, поскольку $\mathbb{C}^q$ – универсальное накрывающее пространство J и D – группа накрывающих преобразований J относительно θ . Далее, $H^1(J, \mathbb{Q})$ может быть отождествлено с $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \cdot D, \mathbb{Q})$, поэтому $H^1(J, \mathbb{C})$ отождествляется с $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \cdot D, \mathbb{C})$, где $\mathbb{Q} \cdot D$ – $\mathbb{Q}$ -линейная оболочка D в $\mathbb{C}^q$. При этом отождествлении если $z_1, \dots, z_q$ – комплексные координатные функции на $\mathbb{C}^q$, то $H^{1,0} = H^{1,0}(J, \mathbb{C})$ (соответственно $H^{0,1}$) порождается над $\mathbb{C}$ ограничениями $z_1, \dots, z_q$ (соответственно $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_q$) на $\mathbb{Q} \cdot D$. При подходящем выборе координатной системы в $\mathbb{C}^q$ отображение $\alpha \rightarrow (\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_q(\alpha))$ для $\alpha \in K$ индуцирует изоморфизм K на $\mathbb{Q} \cdot D$. С помощью этого изоморфизма $H^1(J, \mathbb{Q})$ (соответственно $H^1(J, \mathbb{C})$) отождествляется с $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{Q})$ (соответственно $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$), поэтому мы можем положить $H^r(J, \mathbb{C}) = \bigwedge^r \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$. Мы видим также, что композиция ограничения z_i на $\mathbb{Q} \cdot D$ с изоморфизмом $K \simeq \mathbb{Q} \cdot D$ совпадает с φ_i . Поэтому мы имеем

$$H^{1,0} = \sum_i \mathbb{C} \varphi_i, \quad H^{0,1} = \sum_i \mathbb{C} \bar{\varphi}_i.$$

Пусть ρ – комплексное сопряжение. Если J – абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , то мы будем использовать следующие обозначения: $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_q\}$, $\Phi^\rho = \{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_q\}$. Для упорядоченного подмножества $\Delta \subset \Phi \cup \Phi^\rho$ пусть $\bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi$ – внешнее произведение элементов Δ . При таких отождествлениях мы имеем:

(а) $H^r(J, \mathbb{C})$ имеет базис, состоящий из таких произведений $\bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi$, что $\text{Card}(\Delta) = r$, $r = 1, \dots, 2q$;

(б) компоненты $H^{m,n} = \bigwedge^m H^{1,0} \otimes \bigwedge^n H^{0,1}$ разложения Ходжа $H^r(J, \mathbb{C}) = \sum_{m+n=r} H^{m,n}$ имеют базис, состоящий из таких внешних произведений $\bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi$, что $\text{Card}(\Delta \cap \Phi) = m$ и $\text{Card}(\Delta \cap \Phi^\rho) = n$.

Мы всегда будем предполагать (без потери общности), что $K \subset \mathbb{C}$ и $\varphi_1 = \text{id}$. Пусть L – замыкание Галуа поля K в $\mathbb{C}$ и $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ – группа Галуа L над $\mathbb{Q}$. Мы всегда предполагаем, что $(x^\sigma)^\tau = x^{\sigma\tau}$ для $x \in L$, $\sigma, \tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Хорошо известно, что $\rho \in \text{Cent Gal}(L/\mathbb{Q})$ [13, п. 5.5, предложения 5.11, 5.12]. Наконец, пусть группа $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ всех автоморфизмов $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$ действует на $H^r(J, \mathbb{C})$; если $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ и $f \in H^r(J, \mathbb{C})$ – альтернированная r -линейная функция $K^r \rightarrow \mathbb{C}$, то определим $f^\sigma \in H^r(J, \mathbb{C})$ условием $(f^\sigma)(\alpha) = (f(\alpha))^\sigma$ для всех $\alpha \in K^r$. Тогда $f^\sigma = f$, если и только если $f \in H^r(J, \mathbb{Q})$.

3.2. ТЕОРЕМА (Г. Польманна [10, § 2, теорема 1]). Пусть J – абелево многообразие CM-типа (K, Φ) ; тогда $(H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ имеет базис, состоящий из таких $\bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi \in H^{2r}(J, \mathbb{C})$, что

$$\forall \tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \quad \text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi) = \text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi^\rho). \quad (3.1)$$

3.3. Положим $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, $H = \text{Gal}(L/K)$. Группа G имеет естественное правое действие на поле L , которое отождествляет вложения K с $H \backslash G$, и отмеченная инволюция ρ действует на $H \backslash G$. Мы рассматриваем CM-тип (K, Φ) , где $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_q\} \subset H \backslash G$, как выбор представителей для действия ρ .

Пусть $S = H\varphi_1 \cup \dots \cup H\varphi_q$. Хорошо известно, что

$$\text{пара } (K, \Phi) \text{ проста} \Leftrightarrow H = \{g \in G \mid gS = S\}.$$

Положим $H^* = \{g \in G \mid gS^{-1} = S^{-1}\} = \{g \in G \mid Sg = S\}$. Пусть K^* – неподвижное поле H^* и Φ^* – образ S^{-1} в $H^* \backslash G$. Тогда K^* – CM-поле и (K^*, Φ^*) – CM-тип, называемый *отражением* CM-типа (K, Φ) .

Пусть $\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$, $\text{Res}_{K^*/\mathbb{Q}} G_m$ – ограничения скаляров по Вейлю. Мы можем определить алгебраический морфизм $N: \text{Res}_{K^*/\mathbb{Q}} G_m \rightarrow \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$ формулой

$$N(x) = \prod_{\sigma \in \Phi^*} x^\sigma.$$

Хорошо известно, что образ N совпадает с группой Мамфорда–Тэйта $\text{MT}(J)$ многообразия J [19, теорема 2]. Мы имеем $\text{Hg}(J) \subset \text{MT}(J) \subset \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$. С другой стороны, $X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m)$ – свободный $\mathbb{Z}$ -модуль $\sum_{\sigma \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})} \mathbb{Z}[\sigma]$, где $[\sigma]$ обозначает характер в $X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) = \mathbb{Z}^{\text{Hom}(K, \mathbb{C})}$, соответствующий $\sigma \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$. Будем обозначать через $[[\sigma]]$ образ $[\sigma]$ при сюръективном морфизме

$$X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow X(\text{Hg}(J)) \otimes \mathbb{Q},$$

индуцированном каноническим вложением $\text{Hg}(J) \subset \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$.

В этих обозначениях мы имеем следующее описание группы Ходжа $\text{Hg}(J)$ многообразия J . Пусть y_Φ – однопараметрическая подгруппа

$$y_\Phi: G_{m\mathbb{C}} \rightarrow (\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m)_{\mathbb{C}},$$

отвечающая морфизму

$$y_\Phi^*: X((\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m)_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}^{\text{Hom}(K, \mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{Z} \simeq X(G_{m\mathbb{C}}),$$

определенному формулой

$$y_\Phi^*(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{для } \sigma \in \Phi, \\ -1 & \text{для } \sigma \notin \Phi. \end{cases}$$

Тогда $\text{Hg}(J)$ – наименьшая алгебраическая подгруппа $\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$, определенная над $\mathbb{Q}$ и содержащая образ y_Φ . Более того, $X(\text{Hg}(J)) \otimes \mathbb{Q}$ – подпространство в $X(\text{Res}_{K^*/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q}$, порожденное формальными суммами

$$\sum_{\sigma \in \Phi^*} [\sigma g|_{K^*}],$$

где g пробегает $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ и $\sigma g|_{K^*}$ рассматривается как вложение $K^* \rightarrow \mathbb{C}$ [9, § 4].

3.4. ЛЕММА. Если $\Delta \subset \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ такое, что

$$\text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi) = \text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi^\rho) \quad (3.2)$$

для любого $\tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, то мы имеем $\sum_{\delta \in \Delta} [[\delta]] = 0$. В частности, для любого вложения $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$ имеем $[[\sigma]] + [[\rho\sigma]] = 0$, и $X(\text{Hg}(J)) \otimes \mathbb{Q}$ порождается элементами $[[\sigma]]$, где $\sigma \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.2 мы имеем разложение

$$H^1(J, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})} V(\sigma),$$

где $V(\sigma) = \{v \in H^1(J, \mathbb{C}) \mid S^*(\alpha)v = \alpha^\sigma v \text{ для всех } \alpha \in K\}$ и $S^*: K \rightarrow \text{End} H^1(J, \mathbb{C})$ – аналитическое представление K . Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} V(\sigma) = 1$. В силу теоремы Г. Польманна мы знаем, что

$$(H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}) \otimes \mathbb{C} = [\wedge^{2r} H^1(J, \mathbb{C})]^{\text{Hg}(J) \otimes \mathbb{C}}$$

порождается $V(\delta_1) \wedge \dots \wedge V(\delta_{2r})$, где $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_{2r}\}$ удовлетворяет условию (3.2), поэтому $\text{Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ действует тривиально на $V(\delta_1) \wedge \dots \wedge V(\delta_{2r})$ с помощью характера $\chi = [[\delta_1]] + \dots + [[\delta_{2r}]] \in X(\text{Hg}(J) \otimes \mathbb{C})$. Следовательно, $\sum_{\delta \in \Delta} [[\delta]] = 0$. Применяя это к $\Delta = \{\sigma, \rho\sigma\}$, получим $[[\sigma]] + [[\rho\sigma]] = 0$. Лемма доказана.

3.5. ТЕОРЕМА. Пусть J – простое абелево многообразие CM-типа (K, Φ) . Предположим, что для некоторого натурального числа $n \geq 1$ $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq \dim J - n$. Тогда для любого натурального числа $r \leq (\dim J)/(2(n+1))$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров. Если $n = 1$, то для любого натурального числа $r < \dim J/2$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q = \dim J$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow R \rightarrow X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow X(\text{Hg}(J)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

индуцированную каноническим вложением $\text{Hg}(J) \subset \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m$.

Пусть $n = 1$. Можно считать, что m – наименьшее натуральное число $(1/2)q$, для которого $H^{2m}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}$ не порождается классами когомологий пересечений дивизоров. В силу теоремы Г. Польманна существует такое подмножество $\Delta \subset \text{Hom}(K, \mathbb{C})$, что $\text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi) = \text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi^\rho)$ для любого $\tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ и $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \rho\delta_{m+1}, \dots, \rho\delta_{2m}\}$, где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2m}$ – различные элементы Φ .

В силу леммы 3.4 $\mathbb{Q}$ -пространство R соотношений в точной последовательности (3.3) содержит $\mathbb{Q}$ -подпространство R_{stand} пространства R , порожденное стандартными соотношениями $[\sigma] + [\rho\sigma]$ ($\sigma \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$). Очевидно, что

$$\{[\delta] \pmod{R_{\text{stand}}} \mid \delta \in \Phi\}$$

– базис q -мерного пространства

$$(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R_{\text{stand}} \simeq X(\text{Res}_{K_0/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q}.$$

С другой стороны, $2m = \text{Card}(\Delta) < q$; поскольку G действует транзитивно на множестве $\text{Hom}(K, \mathbb{C})$, то существует такой элемент $\tau \in G$, что

$$\delta_1^\tau \in \Phi \setminus \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2m}\}.$$

В силу леммы 3.4 имеются соотношения

$$\begin{aligned} [\delta_1] + [\delta_2] + \dots + [\delta_m] + [\rho\delta_{m+1}] + \dots + [\rho\delta_{2m}] &\in R, \\ [\delta_1^\tau] + [\delta_2^\tau] + \dots + [\delta_m^\tau] + [\rho\delta_{m+1}^\tau] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\tau] &\in R. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что образы этих соотношений в q -мерном пространстве $(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R_{\text{stand}}$ линейно независимы.

Действительно, пусть $\delta_{2m+1} = \delta_1^\tau$, $\Phi \setminus \{\delta_1, \dots, \delta_{2m}, \delta_{2m+1}\} = \{\delta_{2m+2}, \dots, \delta_q\}$. Очевидно, что $e_i = [\delta_i] \pmod{R_{\text{stand}}}$ ($i = 1, \dots, q$) – базис $(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R_{\text{stand}}$. Мы имеем $[\delta_i^\tau] \pmod{R_{\text{stand}}} \in \{\pm e_{f(i)}\}$; если $i \neq j$, то $f(i) \neq f(j)$. В этих обозначениях

$$\begin{aligned} &[\delta_1] + [\delta_2] + \dots + [\delta_m] + [\rho\delta_{m+1}] + \dots + [\rho\delta_{2m}] \pmod{R_{\text{stand}}} \\ &= e_1 + e_2 + \dots + e_m - e_{m+1} - \dots - e_{2m}, \\ &[\delta_1^\tau] + [\delta_2^\tau] + \dots + [\delta_m^\tau] + [\rho\delta_{m+1}^\tau] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\tau] \pmod{R_{\text{stand}}} \\ &= n_1 e_1 + \dots + n_{2m} e_{2m} + e_{2m+1} + n_{2m+2} e_{2m+2} + \dots + n_q e_q, \end{aligned}$$

где $n_i \in \{0, \pm 1\}$. Матрица координат этих элементов относительно базиса $\{e_1, \dots, e_q\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n_1 & n_2 & \dots & n_m & n_{m+1} & \dots & n_{2m} & 1 & n_{2m+2} & n_{2m+3} & \dots & n_q \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен 2, утверждение доказано.

Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}}(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R \leq q - 2$. Точность последовательности (3.3) дает соотношение $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \leq q - 2$ вопреки нашему предположению.

Начиная с этого места, мы предполагаем, что $n \geq 2$.

Пусть m – наименьшее натуральное число $\leq q/(2(n+1))$, для которого $H^{2m}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{m,m}$ не порождается классами когомологий пересечений дивизоров. В силу теоремы Г. Польманна существует такое подмножество $\Delta \subset \text{Hom}(K, \mathbb{C})$, что

$$\text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi) = \text{Card}(\Delta^\tau \cap \Phi^\rho)$$

для любого $\tau \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ и $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \rho\delta_{m+1}, \dots, \rho\delta_{2m}\}$, где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2m}$ – различные элементы $\Phi = \{\delta_1, \dots, \delta_{2m}, \dots, \delta_q\}$.

С другой стороны, $2m = \text{Card}(\Delta) \leq q/(n+1)$; поскольку G действует транзитивно на множестве $\text{Hom}(K, \mathbb{C})$, то существует такой элемент $\tau \in G$, что $\delta_1^\tau \in \Phi \setminus \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2m}\}$.

Напомним, что $e_i = [\delta_i] \pmod{R_{\text{stand}}}$ ($i = 1, \dots, q$) – базис пространства $(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R_{\text{stand}}$. Мы имеем $[\delta_i^\tau] \pmod{R_{\text{stand}}} \in \{\pm e_{f(i)}\}$; если $i \neq j$, то $f(i) \neq f(j)$, и можно считать, что $f(i) \leq 4m$ для всех $i \leq 2m$, $f(1) = 4m$.

В силу леммы 3.4 имеются соотношения

$$\begin{aligned} [\delta_1] + [\delta_2] + \dots + [\delta_m] + [\rho\delta_{m+1}] + \dots + [\rho\delta_{2m}] &\in R, \\ [\delta_1^\tau] + [\delta_2^\tau] + \dots + [\delta_m^\tau] + [\rho\delta_{m+1}^\tau] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\tau] &\in R. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &[\delta_1] + [\delta_2] + \dots + [\delta_m] + [\rho\delta_{m+1}] + \dots + [\rho\delta_{2m}] \pmod{R_{\text{stand}}} \\ &= e_1 + e_2 + \dots + e_m - e_{m+1} - \dots - e_{2m}, \\ &[\delta_1^\tau] + [\delta_2^\tau] + \dots + [\delta_m^\tau] + [\rho\delta_{m+1}^\tau] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\tau] \pmod{R_{\text{stand}}} \\ &= n_1 e_1 + \dots + n_{4m-1} e_{4m-1} \pm e_{4m}, \end{aligned}$$

где $n_i \in \{0, \pm 1\}$. Матрица координат этих элементов относительно базиса $\{e_1, \dots, e_q\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & n_{2m} & n_{2m+1} & \dots & n_{4m-1} & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Более того, $4m = \text{Card}(\Delta) \leq 2q/(n+1) < q$; поскольку G действует транзитивно на множестве $\text{Hom}(K, \mathbb{C})$, то существует такой элемент $\sigma \in G$, что $\delta_1^\sigma \in \Phi \setminus \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2m}, \delta_{2m+1}, \dots, \delta_{4m}\}$.

Мы имеем $[\delta_i^\sigma] \pmod{R_{\text{stand}}} \in \{\pm e_{g(i)}\}$; если $i \neq j$, то $g(i) \neq g(j)$, и можно считать, что $g(i) \leq 6m$ для всех $i \leq 2m$, $g(1) = 6m$.

В силу леммы 3.4 имеется соотношение

$$[\delta_1^\sigma] + [\delta_2^\sigma] + \dots + [\delta_m^\sigma] + [\rho\delta_{m+1}^\sigma] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\sigma] \in R.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &[\delta_1^\sigma] + [\delta_2^\sigma] + \dots + [\delta_m^\sigma] + [\rho\delta_{m+1}^\sigma] + \dots + [\rho\delta_{2m}^\sigma] \pmod{R_{\text{stand}}} \\ &= n'_1 e_1 + \dots + n'_{6m-1} e_{6m-1} \pm e_{6m}, \end{aligned}$$

где $n'_i \in \{0, \pm 1\}$. Мы расширим матрицу (3.4) до матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n_1 & \dots & n_{2m} & n_{2m+1} & \dots & n_{4m-1} & \pm 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n'_1 & \dots & n'_{2m} & n'_{2m+1} & \dots & n'_{4m-1} & n'_{4m} & n'_{4m+1} & \dots & n'_{6m-1} & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

По индукции мы получим матрицу с $n+1$ строкой:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & * & \dots & \pm 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & \pm 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен $n+1$, мы имеем

$$\dim_{\mathbb{Q}}(X(\text{Res}_{K/\mathbb{Q}} G_m) \otimes \mathbb{Q})/R \leq q - (n+1).$$

Точность последовательности (3.3) показывает, что $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \leq q - (n+1) < q - n$ вопреки неравенству $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq \dim J - n$. Теорема доказана.

3.6. ТЕОРЕМА (К. Риббе [4, теорема 1.4]). Пусть J – простое q -мерное абелево многообразие CM -типа (K, Φ) . Тогда для любого нечетного простого числа p , делящего q , мы имеем неравенство $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq p$.

В [4] этот результат имеет вид неравенства $\text{rank}(\Phi) \geq p + 1$. С другой стороны, хорошо известно, что $\text{rank}(\Phi) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{MT}(J)$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq p$.

3.7. ЛЕММА. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение. Тогда CM -тип Φ не является простым, если и только если существует такой элемент $g \neq 1$ в G , что $g \cdot \Phi = \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $H = (1)$ в этом случае, поэтому $S = H\varphi_1 \cup \dots \cup H\varphi_q = \Phi$. Хорошо известно, что

$$\text{пара } (K, \Phi) \text{ проста} \Leftrightarrow H = \{g \in G \mid gS = S\}.$$

Лемма доказана.

3.8. ЛЕММА. Пусть J – простое $2r$ -мерное абелево многообразие CM -типа (K, Φ) , где $K/\mathbb{Q}$ – циклическое расширение, и p – нечетное простое число. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = 2r$ и для всех натуральных r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно одному результату Т. Куботы [5] мы имеем для абелевой группы G

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Phi) &= \\ &= 1 + \text{Card} \left(\left\{ \chi \mid \chi \text{ – неприводимый характер } G, \chi(\rho) = -1 \text{ и } \sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) \neq 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

В рассматриваемой ситуации $G = \langle a, b \rangle$, где $a^p = b^4 = 1$, $b^2 = \rho$. Поскольку $(ab)^{2p} = \rho$, то мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} \chi(\rho) = -1 &\Leftrightarrow (\chi(ab))^{2p} = -1 \\ &\Leftrightarrow \chi(ab) \text{ – примитивный корень из единицы степени } 4p \text{ или } \chi(ab) = \pm i. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(\mathbb{Z}/4p\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z},$$

поэтому число различных примитивных корней степени $4p$ из единицы равно $2p-2$. Мы говорим, что χ – примитивный характер, если и только если $\chi(ab)$ – примитивный корень степени $4p$ из единицы. Группа Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует транзитивно на множестве примитивных характеров через ее естественное действие на корнях из единицы. В частности, $\chi^\tau(\sigma) = (\chi(\sigma))^\tau$ для $\sigma \in \Phi$, $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Предположим, что $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) = 0$ для некоторого примитивного характера χ . Тогда для любого $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ мы получаем соотношение $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi^\tau(\sigma) = 0$. Поэтому $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) = 0$ для *любого* примитивного характера χ . В этой ситуации мы выводим из результата Т. Куботы неравенство $\text{rank}(\Phi) \leq 3$. Поэтому $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \leq 2$, что противоречит теореме 3.6.

Следовательно, $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) \neq 0$ для любого примитивного характера χ . Остается показать, что $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) \neq 0$ для любого характера χ , удовлетворяющего равенству $\chi(ab) = \pm i$.

Предположим, например, что $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) = 0$ для некоторого характера χ , удовлетворяющего равенству $\chi(ab) = i$. Заметим, что $\chi((ab)^4) = \chi(a^4) = 1$, a^4 — образующая $\langle a \rangle$, поэтому $\chi(a) = 1$. С другой стороны, $\chi(b) = i$, $\chi(\rho b) = -i$, поэтому

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a, \rho \rangle} \chi(\sigma) \right) = p \pmod{2} = 1 \pmod{2},$$

что противоречит соотношению $\sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) = 0$.

Следовательно, $\operatorname{rank}(\Phi) = 1 + 2p$ и $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Hg}(J) = 2p = \dim J$. Поскольку группа Ходжа максимально большая, $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров. Лемма доказана.

3.9. ЛЕММА. Пусть J — простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , где $K/\mathbb{Q}$ — абелево нециклическое расширение, p — нечетное простое число. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Hg}(J) \geq 2p - 1$ и для любого натурального $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результату Т. Куботы [5] мы имеем для абелевой группы G

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(\Phi) &= \\ &= 1 + \operatorname{Card} \left(\left\{ \chi \mid \chi - \text{неприводимый характер } G, \chi(\rho) = -1 \text{ и } \sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) \neq 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Hg}(J) \geq 2p - 1$, если и только если существует не более одного характера χ , для которого

$$\chi(\rho) = -1 \text{ и } \sum_{\sigma \in \Phi} \chi(\sigma) = 0. \quad (3.5)$$

В нашей ситуации $G = \langle a, b, \rho \rangle$, где $a^p = b^2 = \rho^2 = 1$. Любой рассматриваемый характер χ определяется своими значениями $\chi(a) = \exp(2\pi i m/p)$, где $m \in \mathbb{Z}$, $\chi(b) = \pm 1$, $\chi(\rho) = -1$.

Если $\chi(a) = 1$, то мы получаем из (3.5) следующее равенство (для подходящего выбора $\pm$):

$$\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle} 1 + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle} (-1) + \left(\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle b} 1 + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle b} (-1) \right) \cdot (\pm 1) = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что

$$\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle} 1 + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle} (-1) = p \pmod{2} = 1 \pmod{2},$$

поэтому

$$\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle} 1 + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle} (-1) \neq 0.$$

Аналогично

$$\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle b} 1 + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle b} (-1) \neq 0.$$

Следовательно, (3.6) выполняется не более чем для одного выбора $\pm$.

Если $\chi(a) \neq 1$, то $\chi(a)$ – примитивный корень из единицы степени p , и остается показать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle} \chi(\sigma) + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle} (-1) \chi(\sigma \rho) \\ & + \left(\sum_{\sigma \in \Phi \cap \langle a \rangle b} \chi(\sigma b) + \sum_{\sigma \in \Phi \cap \rho \langle a \rangle b} (-1) \chi(\sigma \rho b) \right) \chi(b) \neq 0 \end{aligned}$$

для любого выбора $\pm 1 = \chi(b)$.

Напомним, что $\varepsilon = \chi(a)$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon^{p-1} = -1 - \varepsilon - \varepsilon^2 - \dots - \varepsilon^{p-2}, \quad (3.7)$$

где $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть $m \in \{1, 2, 3, \dots, 2^{2p-1}\}$, и пусть $m-1 = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \dots + n_{2p-2} 2^{2p-2}$, где $n_i \in \{0, 1\}$. Определим СМ-тип

$$\begin{aligned} \Phi_m = \{ & 1, \rho^{n_{2p-2}} a, \rho^{n_{2p-3}} a^2, \dots, \rho^{n_p} a^{p-1}, \rho^{n_{p-1}} b, \rho^{n_{p-2}} ab, \\ & \rho^{n_{p-3}} a^2 b, \dots, \rho^{n_0} a^{p-1} b \}. \end{aligned}$$

Ясно, что любой СМ-тип, содержащий 1, имеет вид Φ_m для некоторого m .

Остается показать, что для любого простого СМ-типа (K, Φ_m) и для любого выбора $\pm$ мы имеем

$$1 + \sum_{k \in \{1, \dots, p-1\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k + \left(\sum_{k \in \{0, \dots, p-1\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k \right) \cdot (\pm 1) \neq 0.$$

Предположим, что

$$1 + \sum_{k \in \{1, \dots, p-1\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k = (\pm 1) \cdot \left(\sum_{k \in \{0, \dots, p-1\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k \right). \quad (3.8)$$

Противоречие.

Допустим, что $n_p = n_0 = 0$. Тогда мы получим из (3.8)

$$\begin{aligned} & 1 + \varepsilon^{p-1} + \sum_{k \in \{1, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k \\ & = (\pm 1) \cdot \left(\varepsilon^{p-1} + \sum_{k \in \{0, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выберем знак $+$ в (3.9). Тогда

$$1 + \sum_{k \in \{1, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k = \sum_{k \in \{0, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k.$$

Линейная независимость $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2}$ над $\mathbb{Q}$ влечет следующие соотношения:

$$n_{p-1} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p-2\} \quad n_{2p-k-1} = n_{p-k-1}.$$

Поэтому

$$\Phi_m = \{1, \rho^{n_{2p-2}} a, \rho^{n_{2p-3}} a^2, \dots, \rho^{n_{p+1}} a^{p-2}, a^{p-1}, \\ b, \rho^{n_{2p-2}} ab, \rho^{n_{2p-3}} a^2 b, \dots, \rho^{n_{p+1}} a^{p-2} b, a^{p-1} b\}.$$

В частности, $b\Phi_m = \Phi_m$. В силу леммы 3.7 этот СМ-тип не прост.

Выберем знак $-$ в (3.9). Тогда

$$1 + 2\varepsilon^{p-1} + \sum_{k \in \{1, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k + \sum_{k \in \{0, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k = 0.$$

Линейная независимость $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2}$ над $\mathbb{Q}$ и (3.7) дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1: & \quad 1 - 2 + (-1)^{n_{p-1}} = 0, \\ \varepsilon: & \quad -2 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{p-2}} = 0, \\ \varepsilon^2: & \quad -2 + (-1)^{n_{2p-3}} + (-1)^{n_{p-3}} = 0, \\ \dots: & \quad \dots\dots\dots \\ \varepsilon^{p-2}: & \quad -2 + (-1)^{n_{p+1}} + (-1)^{n_1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $n_i = 0$ для любого i . Поэтому $\Phi_m = \{1, a, a^2, \dots, a^{p-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{p-1}b\}$, $b\Phi_m = \Phi_m$, и Φ_m не прост.

Допустим, что $n_p = 0$, $n_0 = 1$. Мы можем заменить b на ρb и свести этот случай к предыдущему.

Допустим, что $n_p = 1$, $n_0 = 0$. Тогда мы получим из (3.8)

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon^{p-1} + \sum_{k \in \{1, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{2p-k-1}} \varepsilon^k \\ = (\pm 1) \cdot \left(\varepsilon^{p-1} + \sum_{k \in \{0, \dots, p-2\}} (-1)^{n_{p-k-1}} \varepsilon^k \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Более того, коэффициенты при 1 равны $1 + 1 = (\pm 1)(-1 + (-1)^{n_{p-1}})$. Следовательно, мы имеем знак $-$, и поэтому

$$\begin{aligned} 1: & \quad 1 + 1 = -(-1 + (-1)^{n_{p-1}}), \\ \varepsilon: & \quad 1 + (-1)^{n_{2p-2}} = -(-1 + (-1)^{n_{p-2}}), \\ \varepsilon^2: & \quad 1 + (-1)^{n_{2p-3}} = -(-1 + (-1)^{n_{p-3}}), \\ \dots: & \quad \dots\dots\dots \\ \varepsilon^{p-2}: & \quad 1 + (-1)^{n_{p+1}} = -(-1 + (-1)^{n_1}). \end{aligned}$$

В итоге $n_{p-1} = 1$, $n_{2p-2} = 1 - n_{p-2}$, $n_{2p-3} = 1 - n_{p-3}$, $\dots$, $n_{p+1} = 1 - n_1$. Поэтому

$$\Phi_m = \{1, \rho^{n_{2p-2}}a, \rho^{n_{2p-3}}a^2, \dots, \rho^{n_{p+1}}a^{p-2}, \rho a^{p-1}, \\ \rho b, \rho b \cdot \rho^{n_{2p-2}}a, \rho b \cdot \rho^{n_{2p-3}}a^2, \dots, \rho b \cdot \rho^{n_{p+1}}a^{p-2}, \rho b \cdot \rho a^{p-1}\}.$$

В частности, $\rho b \Phi_m = \Phi_m$. В силу леммы 3.7 этот СМ-тип не прост.

Допустим, что $n_p = 1$, $n_0 = 1$. Мы можем заменить b на ρb и свести этот случай к предыдущему.

Следовательно, мы доказали, что $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq 2p - 1$. Поэтому результат следует из теоремы 3.5.

3.10. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с группой Галуа G . Комплексное сопряжение ρ лежит в центре $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Поэтому для любого неприводимого представления π элемент $\pi(\rho)$ является скаляром и поэтому должен быть равен $\pm I$ (I – единичная матрица). Мы говорим, что π четное (соответственно нечетное), если $\pi(\rho) = I$ (соответственно $-I$). Рассмотрим регулярное представление

$$\text{reg}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \text{End} \mathbb{Z}[G], \quad \text{reg}(g_0) \left(\sum_{g \in G} m_g g \right) = \sum_{g \in G} m_g g_0 g.$$

Мы имеем разложение

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\pi} V_{\pi}^{\oplus d_{\pi}}, \quad (3.11)$$

где π пробегает неприводимые представления G , V_{π} – пространство π и $d_{\pi} = \dim V_{\pi}$. Мы отождествляем Φ с элементом $\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma \in \mathbb{Q}[G]$.

3.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [6, предложение 1]. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с группой Галуа G и (K, Φ) – простой СМ-тип. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq \sum' d_{\pi},$$

где суммирование проводится по всем нечетным неприводимым представлениям π с $\pi(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma) \neq 0$.

Мы хотим иметь более точную оценку для размерности группы Ходжа. Она неявно содержится в [6, доказательство предложения 1]:

3.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с группой Галуа G и (K, Φ) – простой СМ-тип. Тогда

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = \sum_{\pi}' d_{\pi} \cdot \text{rank}(\Phi|_{V_{\pi}}) = \sum_{\pi}' d_{\pi} \cdot \text{rank}(\pi(\Phi)),$$

где суммирование производится по всем нечетным неприводимым представлениям π с $\pi(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (следуя [6, с. 194, 195]). Хорошо известно, что $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{MT}(J) - 1 = \text{rank}(\Phi) - 1$, где $\text{rank}(\Phi) = \text{rank}(\text{reg}(\Phi)) = \sum_{\pi} d_{\pi} \text{rank}(\pi(\Phi))$.

Если π неприводимо и нетривиально, то оно не имеет ненулевого неподвижного вектора, и поэтому $\sum_{g \in G} \pi(g)$ – нулевая матрица. Если кроме того π четное, то мы имеем

$$0 = \sum_{g \in G} \pi(g) = \pi(\Phi) + \pi(\Phi\rho) = 2\pi(\Phi).$$

Если π – тривиальное представление, то π четное и $\pi(\Phi) \neq 0$. Поэтому

$$\text{rank}(\Phi) = 1 + \sum'_{\pi} d_{\pi} \cdot \text{rank}(\pi(\Phi)),$$

где суммирование производится по всем нечетным неприводимым представлениям π с $\pi(\Phi) \neq 0$. Предложение доказано.

3.13. ЛЕММА. Пусть J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , где $K/\mathbb{Q}$ – нормальное неабелево расширение с группой Галуа G , p – простое число, $p \geq 3$. Тогда G изоморфна диэдральной группе D_{2p} или дициклической группе порядка $4p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим каноническую точную последовательность $1 \rightarrow \{1, \rho\} \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) \rightarrow 1$. Заметим, что

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (3.12)$$

Поскольку p -силовская подгруппа $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ имеет индекс 2 в $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$, то она является нормальной подгруппой; поэтому $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$ – член точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

и $H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = (0)$, так как 2 и p аннулируют эту группу когомологий. Поэтому точная последовательность (3.13) расщепляется, и соотношение (3.12) показывает, что существуют только две неизоморфные группы порядка $2p$. Первая является циклической группой, вторая – диэдральной группой D_p [12, п. 5.3]. Пусть a – элемент порядка p в $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Предположим, что 2-силовская подгруппа в $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ не является циклической, и пусть ρ, b – ее образующие. Ясно, что $a \pmod{\langle \rho \rangle}, b \pmod{\langle \rho \rangle}$ порождают $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$. Мы имеем $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} = a \pmod{\langle \rho \rangle}$ или $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} \neq a \pmod{\langle \rho \rangle}$. В первом случае $bab^{-1} = a\rho^n$ – элемент порядка p , поэтому $\rho^n = 1$ и G – абелева группа, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) = D_p$, и можно считать, что $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} = a^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle}$ [12, п. 5.3]. Следовательно, $bab^{-1} = a^{-1}\rho^n$ для некоторого $n \in \{0, 1\}$. Заметим, что bab^{-1} – элемент порядка p . Поэтому $n = 0$, $bab^{-1} = a^{-1}$. Следовательно, $G = \langle a, b, \rho \rangle$, где $a^p = b^2 = \rho^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $\rho \in \text{Cent}(G)$, поэтому G – диэдральная группа D_{2p} порядка $4p$ [12, п. 5.3].

Далее мы предполагаем, что 2-силовская подгруппа в $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ является циклической, и пусть b – ее образующая. Поскольку b^2 – единственный элемент порядка 2 в циклической подгруппе $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ и ρ принадлежит этой 2-силовской

подгруппе (потому что $\rho \in \text{Cent Gal}(K/\mathbb{Q})$ [13, п. 5.5, предложение 5.11]), мы имеем $b^2 = \rho$. Ясно, что $a \pmod{\langle \rho \rangle}$, $b \pmod{\langle \rho \rangle}$ порождают $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q})$. Поэтому мы имеем $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} = a \pmod{\langle \rho \rangle}$ или $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} \neq a \pmod{\langle \rho \rangle}$. В первом случае $bab^{-1} = a\rho^n$ – элемент порядка p , поэтому $\rho^n = 1$ и G – циклическая группа, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}) = D_p$, и мы можем считать, что $bab^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle} = a^{-1} \pmod{\langle \rho \rangle}$ [12, п. 5.3]. Следовательно, $bab^{-1} = a^{-1}\rho^n$ для некоторого $n \in \{0, 1\}$. Заметим, что bab^{-1} – элемент порядка p . Поэтому $n = 0$, $bab^{-1} = a^{-1}$. В итоге $G = \langle a, b \rangle$, где $a^p = b^4 = 1$, $b^2 = \rho \in \text{Cent}(G)$, $bab^{-1} = a^{-1}$, поэтому G – дициклическая группа порядка $4p$ [3, гл. 1, п. 1.6]. Лемма доказана.

3.14. ЛЕММА. *Предположим, что J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , где p – простое число, $p \geq 3$. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с диэдральной группой Галуа $G = D_{2p}$. Тогда*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq 2p - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним описание неприводимых представлений D_{2p} [12, п. 5.3]. Существуют такие четыре представления степени 1 с характерами $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$, что

$$\begin{aligned} \Psi_1(a) = \Psi_1(b) = \Psi_1(\rho) = 1, & \quad \Psi_2(a) = \Psi_2(\rho) = 1, \quad \Psi_2(b) = -1, \\ \Psi_3(a) = \Psi_3(b) = 1, \quad \Psi_3(\rho) = -1, & \quad \Psi_4(a) = 1, \quad \Psi_4(b) = \Psi_4(\rho) = -1. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon = e^{\pi i/p}$. Для любого натурального $h \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ определим неприводимое представление R_h степени 2 следующими формулами:

$$\begin{aligned} R_h((\rho a)^k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{hk} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hk} \end{pmatrix}, \\ R_h((\rho a)^k b) &= R_h(b(\rho a)^{-k}) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{hk} \\ \varepsilon^{-hk} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Хорошо известно, что $\Psi_1, \dots, \Psi_4, R_1, \dots, R_{p-1}$ – неизоморфные неприводимые представления D_{2p} [12, п. 5.3]. С другой стороны, $\Psi_1(\rho) = \Psi_2(\rho) = 1$, $\Psi_3(\rho) = \Psi_4(\rho) = -1$,

$$R_h(\rho) = R_h((\rho a)^p) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{hp} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi i h} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i h} \end{pmatrix} = (-I)^h.$$

Следовательно, имеются следующие нечетные неприводимые представления: $\Psi_3, \Psi_4, R_1, R_3, \dots, R_{p-2}$. Мы утверждаем, что

$$\sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_3(\sigma) \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_4(\sigma) \neq 0. \tag{3.15}$$

Действительно,

$$\Phi = \{1, \rho^{n_{2p-2}}a, \rho^{n_{2p-3}}a^2, \dots, \rho^{n_p}a^{p-1}, \rho^{n_{p-1}}b, \rho^{n_{p-2}}ab, \rho^{n_{p-3}}a^2b, \dots, \rho^{n_0}a^{p-1}b\},$$

где $n_i \in \{0, 1\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_3(\sigma) &= [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] \\ &\quad + [(-1)^{n_{p-1}} + (-1)^{n_{p-2}} + (-1)^{n_{p-3}} + \dots + (-1)^{n_0}], \\ \sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_4(\sigma) &= [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] \\ &\quad - [(-1)^{n_{p-1}} + (-1)^{n_{p-2}} + (-1)^{n_{p-3}} + \dots + (-1)^{n_0}]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] &= p \pmod{2} = 1 \pmod{2}, \\ [(-1)^{n_{p-1}} + (-1)^{n_{p-2}} + (-1)^{n_{p-3}} + \dots + (-1)^{n_0}] &= p \pmod{2} = 1 \pmod{2}, \end{aligned}$$

поэтому для некоторого выбора $\pm$ мы имеем

$$\begin{aligned} [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] \\ \pm [(-1)^{n_{p-1}} + (-1)^{n_{p-2}} + (-1)^{n_{p-3}} + \dots + (-1)^{n_0}] \neq 0, \end{aligned}$$

и утверждение (3.15) доказано.

В силу предложения 3.12 достаточно проверить, что для любого $h \in \{1, 3, \dots, p-2\}$

$$\det \left(R_h \left(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma \right) \right) \neq 0. \quad (3.16)$$

Мы перепишем $\Phi \in \mathbb{C}[G]$ как

$$\Phi = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} (\rho a)^{n_i} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} (\rho a)^{m_i} b.$$

Очевидно, что $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$. Предположим, что условие (3.16) не выполняется. Тогда мы получим из (3.14)

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \begin{pmatrix} \varepsilon^{hn_i} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hn_i} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{hm_i} \\ \varepsilon^{-hm_i} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U & V \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \det \begin{pmatrix} U & V \\ \bar{V} & \bar{U} \end{pmatrix} = |U|^2 - |V|^2 = 0. \end{aligned}$$

Поэтому условие $\det (R_h (\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma)) = 0$ эквивалентно условию $|U| = |V|$, где

$$U = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hn_i}, \quad V = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hm_i}.$$

7*

Сначала мы рассмотрим случай $U = V = 0$. В этой ситуации

$$\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hn_i} = 0 \quad \& \quad \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hm_i} = 0. \quad (3.17)$$

Заметим, что для $h \in \{1, 3, \dots, p-2\}$ $\varepsilon^h = e^{\pi i h/p}$ – примитивный корень степени $2p$ из единицы. Действительно,

$$(e^{\pi i h/p})^m = 1 \Leftrightarrow hm \in 2p\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2|m \quad \& \quad p|m \Leftrightarrow m \in 2p\mathbb{Z}.$$

Следовательно, (3.17) эквивалентно

$$\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{n_i} = 0 \quad \& \quad \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{m_i} = 0. \quad (3.18)$$

Другими словами, $R_h(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma) = 0 \Leftrightarrow R_1(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma) = 0$. Начиная с этого места, мы считаем, что $h = 1$.

Заметим, что ε – корень полинома

$$\begin{aligned} X^{2p} - 1 &= (X^p - 1)(X^p + 1) = (X - 1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1) \\ &\quad \times (X + 1)(X^{p-1} - X^{p-2} + X^{p-3} - X^{p-4} + \dots - X + 1). \end{aligned}$$

Поскольку ε – примитивный корень степени $2p$, он является корнем полинома $X^{p-1} - X^{p-2} + X^{p-3} - X^{p-4} + \dots - X + 1$. Этот полином неприводим над $\mathbb{Q}$, так как $\varepsilon, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{p-2}$, $\varepsilon^{-1} = e^{(2p-1)\pi i/p}$, $\varepsilon^{-3} = e^{(2p-3)\pi i/p}$, $\dots$, $\varepsilon^{-(p-2)} = e^{(p+2)\pi i/p}$ – различные примитивные корни степени $2p$ из единицы, следовательно, $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = p-1$, элементы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и

$$\varepsilon^{p-1} = \varepsilon^{p-2} - \varepsilon^{p-3} + \varepsilon^{p-4} - \dots + \varepsilon - 1. \quad (3.19)$$

Мы перепишем первое условие в (3.18) как

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, p-2\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{n_i} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{p-1\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{p-1} \\ &+ \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^p + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{p+1, \dots, 2p-2\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{n_i} \\ &+ \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{2p-1\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{2p-1} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{2p} = 0. \end{aligned}$$

В силу (3.19) и $\varepsilon^p = -1$, $\varepsilon^{2p-1} = -\varepsilon^{p-1}$, $\varepsilon^{2p} = 1$ мы получаем условие

$$\sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, p-2\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{n_i} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{p-1\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} (\varepsilon^{p-2} - \varepsilon^{p-3} + \varepsilon^{p-4} - \dots + \varepsilon - 1)$$

Пусть $\Phi \in 1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1} + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$. В этом случае мы имеем

$$\Phi \in 1 + (\rho a)^{p+1} + (\rho a)^2 + (\rho a)^{p+3} + (\rho a)^4 + \dots + (\rho a)^{p-1} + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b.$$

Поэтому (3.19) дает соотношение $U = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots + \varepsilon^{p-1} = 0$. В этой ситуации мы доказали, что для простого СМ-типа Φ $V \neq 0$, значит, $\det(R_h(\Phi)) \neq 0$.

Пусть $p = 3$. Тогда $G = D_6$ — диэдральная группа порядка 12. Поэтому мы имеем $bab^{-1} = a^2$ и $ba = a^2b$, $ba^2 = ab$.

С точностью до замены $a \leftrightarrow a^2$ можно считать, что $\Phi \in 1 + \rho a + a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$ или $\Phi \in 1 + \rho a + \rho a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$.

Пусть $\Phi \in 1 + \rho a + a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$. Тогда с точностью до замены $b \leftrightarrow \rho b$ можно считать, что

$$\begin{aligned} \Phi \in \{ & 1 + \rho a + a^2 + b + ab + a^2b, 1 + \rho a + a^2 + b + ab + \rho a^2b, \\ & 1 + \rho a + a^2 + b + \rho ab + a^2b, 1 + \rho a + a^2 + b + \rho ab + \rho a^2b \}. \end{aligned}$$

Если $\Phi = 1 + \rho a + a^2 + b + ab + a^2b$, то $\Phi b = b + \rho ab + a^2b + 1 + a + a^2 \in 1 + a + a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$. Если $\Phi = 1 + \rho a + a^2 + b + ab + \rho a^2b$, то $b\Phi = b + \rho a^2b + ab + 1 + a^2 + \rho a = \Phi$, поэтому в силу леммы 3.7 Φ не является простым СМ-типом. Если $\Phi = 1 + \rho a + a^2 + b + \rho ab + a^2b$, то $a^2b\Phi = a^2b + \rho ab + b + a^2 + \rho a + 1 = \Phi$, поэтому Φ не является простым СМ-типом. Если $\Phi = 1 + \rho a + a^2 + b + \rho ab + \rho a^2b$, то $\rho ab\Phi = \rho ab + b + \rho a^2b + \rho a + 1 + a^2 = \Phi$, поэтому Φ не является простым СМ-типом.

Пусть $\Phi \in 1 + \rho a + \rho a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$. Тогда с точностью до замены $b \leftrightarrow \rho b$ можно считать, что

$$\begin{aligned} \Phi \in \{ & 1 + \rho a + \rho a^2 + b + ab + a^2b, 1 + \rho a + \rho a^2 + b + ab + \rho a^2b, \\ & 1 + \rho a + \rho a^2 + b + \rho ab + a^2b, 1 + \rho a + \rho a^2 + b + \rho ab + \rho a^2b \}. \end{aligned}$$

Если $\Phi = 1 + \rho a + \rho a^2 + b + ab + a^2b$, то $\Phi b = b + \rho ab + \rho a^2b + 1 + a + a^2 \in 1 + a + a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$. Если $\Phi = 1 + \rho a + \rho a^2 + b + ab + \rho a^2b$, то $\rho a^2b\Phi = \rho a^2b + ab + b + \rho a^2 + \rho a + 1 = \Phi$, поэтому в силу леммы 3.7 Φ не является простым СМ-типом. Если $\Phi = 1 + \rho a + \rho a^2 + b + \rho ab + a^2b$, то $\rho ab\Phi = \rho ab + b + a^2b + \rho a + 1 + \rho a^2 = \Phi$, поэтому Φ не является простым СМ-типом. Если $\Phi = 1 + \rho a + \rho a^2 + b + \rho ab + \rho a^2b$, то $b\Phi = b + \rho a^2b + \rho ab + 1 + \rho a^2 + \rho a = \Phi$, поэтому Φ не является простым СМ-типом.

Следовательно, можно считать, что $\Phi \in 1 + a + a^2 + \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$ — простой СМ-тип, $\text{rank}(R_h(\Phi)) = 2$.

Ясно, что

$$\Psi_3(\Phi) = 0 \Leftrightarrow \Phi = 1 + a + a^2 + \rho b + \rho ab + \rho a^2b;$$

поскольку $\rho b(1 + a + a^2 + \rho b + \rho ab + \rho a^2b) = 1 + a + a^2 + \rho b + \rho ab + \rho a^2b$, то мы видим, что $1 + a + a^2 + \rho b + \rho ab + \rho a^2b$ не является простым СМ-типом. Поэтому $\Psi_3(\Phi) \neq 0$.

С другой стороны,

$$\Psi_4(\Phi) = 0 \Leftrightarrow \Phi = 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b;$$

поскольку $b(1 + a + a^2 + b + ab + a^2b) = 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$, то мы видим, что $1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$ не является простым СМ-типом. Поэтому $\Psi_4(\Phi) \neq 0$.

В силу предложения 3.12 мы имеем следующие соотношения:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = \text{rank}(\Psi_3(\Phi)) + \text{rank}(\Psi_4(\Phi)) + 2\text{rank}(R_h(\Phi)) = 6 \quad (3.22)$$

для любого простого 6-мерного абелева многообразия J СМ-типа (K, Φ) с диэдральной группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Будем считать в дальнейшем, что $p = 5$. Тогда $G = D_{10}$ – диэдральная группа порядка 20. Поэтому мы имеем $bab^{-1} = a^4$ и $ba = a^4b$, $ba^2 = a^3b$, $ba^3 = a^2b$, $ba^4 = ab$.

Любой СМ-тип $\Phi \in \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle] \oplus \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$ может быть представлен как $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(b)}$, где $\Phi^{(1)} \in \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]$, $\Phi^{(b)} \in \mathbb{Q}[\langle \rho a \rangle]b$.

С точностью до замен $a \leftrightarrow a^2$, $a \leftrightarrow a^3$, $a \leftrightarrow a^4$ можно считать, что пара $(\Phi^{(1)}, |U|^2)$ принимает одно из следующих значений:

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(1)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4, 0); \\ (\Phi_1^{(1)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4, 4); \\ (\Phi_3^{(1)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_6^{(1)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_7^{(1)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_{15}^{(1)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4, 4). \end{aligned}$$

Например, рассмотрим $\Phi_1^{(1)} = 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4$. Тогда

$$U = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - \varepsilon^4 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 2\varepsilon^4 = -2\varepsilon^4, \quad |U|^2 = 4.$$

С точностью до замены $b \leftrightarrow \rho b$ можно считать, что $(\Phi^{(b)}, |V|^2)$ принимает одно из следующих значений:

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(b)} &= b + ab + a^2b + a^3b + a^4b, 0); \\ (\Phi_1^{(b)} &= b + ab + a^2b + a^3b + \rho a^4b, 4); \\ (\Phi_2^{(b)} &= b + ab + a^2b + \rho a^3b + a^4b, 4); \\ (\Phi_3^{(b)} &= b + ab + a^2b + \rho a^3b + \rho a^4b, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_4^{(b)} &= b + ab + \rho a^2b + a^3b + a^4b, 4); \\ (\Phi_5^{(b)} &= b + ab + \rho a^2b + a^3b + \rho a^4b, 4(2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)); \\ (\Phi_6^{(b)} &= b + ab + \rho a^2b + \rho a^3b + a^4b, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_7^{(b)} &= b + ab + \rho a^2b + \rho a^3b + \rho a^4b, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\ (\Phi_8^{(b)} &= b + \rho ab + a^2b + a^3b + a^4b, 4); \\ (\Phi_9^{(b)} &= b + \rho ab + a^2b + a^3b + \rho a^4b, 4(2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)); \\ (\Phi_{10}^{(b)} &= b + \rho ab + a^2b + \rho a^3b + a^4b, 4(2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)); \\ (\Phi_{11}^{(b)} &= b + \rho ab + a^2b + \rho a^3b + \rho a^4b, 4(2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Phi_{12}^{(b)} &= b + \rho ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\
(\Phi_{13}^{(b)} &= b + \rho ab + \rho a^2 b + a^3 b + \rho a^4 b, 4(2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)); \\
(\Phi_{14}^{(b)} &= b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)); \\
(\Phi_{15}^{(b)} &= b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, 4).
\end{aligned}$$

Например, рассмотрим $\Phi_7^{(b)} = b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b$. Тогда

$$\begin{aligned}
V &= 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \varepsilon^4 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 \\
&= -2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 = -2((1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 1 + \varepsilon) = 2(1 - \varepsilon), \\
|V|^2 &= 4(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^{-1}) = 4(2 - \varepsilon - \varepsilon^{-1}) \\
&= 4(2 - \varepsilon - \varepsilon^9) = 4(2 - \varepsilon + \varepsilon^4) \\
&= 4(2 - \varepsilon - (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)) = 4(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Напомним, что $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Мы видим, что $\det(R_h(\Phi)) = |U|^2 - |V|^2 = 0$, если и только если Φ принимает одно из следующих значений:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{(1)} + \Phi_0^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + b + ab + a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad a\Phi = \Phi; \\
\Phi_1^{(1)} + \Phi_1^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + a^3 b + \rho a^4 b, \quad ba^2\Phi = \Phi; \\
\Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad ba^3\Phi = \Phi; \\
\Phi_1^{(1)} + \Phi_4^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad ba^4\Phi = \Phi; \\
\Phi_1^{(1)} + \Phi_8^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad b\Phi = \Phi; \\
\Phi_1^{(1)} + \Phi_{15}^{(b)} &= 1 + a + a^2 + a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad \rho ba\Phi = \Phi; \\
\Phi_3^{(1)} + \Phi_3^{(b)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad ba^3\Phi = \Phi; \\
\Phi_3^{(1)} + \Phi_6^{(b)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad ba^4\Phi = \Phi; \\
\Phi_3^{(1)} + \Phi_7^{(b)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad \rho ba\Phi = \Phi; \\
\Phi_3^{(1)} + \Phi_{12}^{(b)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad b\Phi = \Phi; \\
\Phi_3^{(1)} + \Phi_{14}^{(b)} &= 1 + a + a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad \rho ba^2\Phi = \Phi; \\
\Phi_6^{(1)} + \Phi_3^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4 + b + ab + a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad ba^4\Phi = \Phi; \\
\Phi_6^{(1)} + \Phi_6^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad b\Phi = \Phi; \\
\Phi_6^{(1)} + \Phi_7^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad \rho ba^2\Phi = \Phi; \\
\Phi_6^{(1)} + \Phi_{12}^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad ba\Phi = \Phi; \\
\Phi_6^{(1)} + \Phi_{14}^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad \rho ba^3\Phi = \Phi; \\
\Phi_7^{(1)} + \Phi_3^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad \rho ba\Phi = \Phi; \\
\Phi_7^{(1)} + \Phi_6^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad \rho ba^2\Phi = \Phi; \\
\Phi_7^{(1)} + \Phi_7^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad ba^4\Phi = \Phi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_7^{(1)} + \Phi_{12}^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad \rho b a^3 \Phi = \Phi; \\
\Phi_7^{(1)} + \Phi_{14}^{(b)} &= 1 + a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad b \Phi = \Phi; \\
\Phi_{15}^{(1)} + \Phi_1^{(b)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + a^3 b + \rho a^4 b, \quad \rho b a \Phi = \Phi; \\
\Phi_{15}^{(1)} + \Phi_2^{(b)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + a^2 b + \rho a^3 b + a^4 b, \quad \rho b a^2 \Phi = \Phi; \\
\Phi_{15}^{(1)} + \Phi_4^{(b)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + ab + \rho a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad \rho b a^3 \Phi = \Phi; \\
\Phi_{15}^{(1)} + \Phi_8^{(b)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + a^2 b + a^3 b + a^4 b, \quad \rho b a^4 \Phi = \Phi; \\
\Phi_{15}^{(1)} + \Phi_{15}^{(b)} &= 1 + \rho a + \rho a^2 + \rho a^3 + \rho a^4 + b + \rho ab + \rho a^2 b + \rho a^3 b + \rho a^4 b, \quad b \Phi = \Phi.
\end{aligned}$$

В силу леммы 3.7 все эти СМ-типы не являются простыми.

Следовательно, для любого простого СМ-типа Φ мы имеем

$$\det(R_h(\Phi)) \neq 0.$$

В силу (3.15) для любого простого СМ-типа Φ мы имеем $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq 2p - 1$.

Заметим, что в случае $p = 5$ мы получаем дополнительную информацию: существует непустой список *простых* СМ-типов Φ со свойством $\Psi_3(\Phi) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_3^{(1)} + \Phi_{11}^{(b)}; \quad \Phi_3^{(1)} + \Phi_{13}^{(b)}; \quad \Phi_6^{(1)} + \Phi_{11}^{(b)}; \quad \Phi_6^{(1)} + \Phi_{13}^{(b)}; \\
&\Phi_7^{(1)} + \Phi_5^{(b)}; \quad \Phi_7^{(1)} + \Phi_9^{(b)}; \quad \Phi_7^{(1)} + \Phi_{10}^{(b)}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3.15. ЛЕММА. *Предположим, что J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие СМ-типа (K, Φ) , где p – простое число, $p \geq 3$. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – расширение Галуа с дициклической группой Галуа G порядка $4p$. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = 2p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $G = \langle a, b \rangle$, где $a^p = b^4 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $\rho = b^2 \in \text{Cent}(G)$. Легко видеть, что $[G, G] = \langle a \rangle$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} (a^{m_1} b^{n_1})^{-1} \cdot (a^{m_2} b^{n_2})^{-1} \\
&= a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} (b^{n_2-n_1} a^{-m_1} b^{n_1-n_2}) b^{-n_1} a^{-m_2} \\
&\in a^{m_1} (b^{n_1} a^{m_2} \langle a \rangle b^{-n_1}) a^{-m_2} = a^{m_1} (b^{n_1} \langle a \rangle b^{-n_1}) a^{-m_2} \\
&= a^{m_1} \langle a \rangle a^{-m_2} = \langle a \rangle.
\end{aligned}$$

Следовательно, $G/[G, G] \simeq \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; поэтому существуют четыре представления степени 1 с такими характерами $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$, что

$$\begin{aligned}
\Psi_1(a) &= \Psi_1(b) = 1, & \Psi_2(a) &= 1, & \Psi_2(b) &= -1, \\
\Psi_3(a) &= 1, & \Psi_3(b) &= i, & \Psi_4(a) &= 1, & \Psi_4(b) &= -i.
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon = e^{\pi i/p}$. Для любого натурального h определим отображение R_h следующими формулами:

$$\begin{aligned}
R_h((\rho a)^k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon^{hk} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hk} \end{pmatrix}, \\
R_h((\rho a)^k b) &= R_h(b(\rho a)^{-k}) = \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hk} \\ i^h \varepsilon^{-hk} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Мы утверждаем, что R_h – представление G . Действительно,

$$\begin{aligned}
R_h((\rho a)^k(\rho a)^l) &= R_h((\rho a)^{k+l}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{h(k+l)} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-h(k+l)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon^{hk} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{hl} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hl} \end{pmatrix} = R_h((\rho a)^k)R_h((\rho a)^l), \\
R_h((\rho a)^k(\rho a)^lb) &= R_h((\rho a)^{k+l}b) = \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{h(k+l)} \\ i^h \varepsilon^{-h(k+l)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon^{hk} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hl} \\ i^h \varepsilon^{-hl} & 0 \end{pmatrix} = R_h((\rho a)^k)R_h((\rho a)^lb), \\
R_h((\rho a)^kb(\rho a)^l) &= R_h((\rho a)^kb(\rho a)^lb^{-1}b) \\
&= R_h((\rho a)^k(\rho a)^{-l}b) = R_h((\rho a)^{k-l}b) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{h(k-l)} \\ i^h \varepsilon^{-h(k-l)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hk} \\ i^h \varepsilon^{-hk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{hl} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hl} \end{pmatrix} \\
&= R_h((\rho a)^kb)R_h((\rho a)^l), \\
R_h((\rho a)^kb(\rho a)^lb) &= R_h((\rho a)^kb(\rho a)^lb^{-1}b^2) = R_h((\rho a)^k(\rho a)^{-l}\rho) \\
&= R_h((\rho a)^k(\rho a)^{-l}(\rho a)^p) = R_h((\rho a)^{k-l+p}) \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon^{h(k-l+p)} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-h(k-l+p)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^h \varepsilon^{h(k-l)} & 0 \\ 0 & (-1)^h \varepsilon^{-h(k-l)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hk} \\ i^h \varepsilon^{-hk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hl} \\ i^h \varepsilon^{-hl} & 0 \end{pmatrix} \\
&= R_h((\rho a)^kb)R_h((\rho a)^lb)
\end{aligned}$$

(поскольку $\varepsilon^p = e^{p\pi i/p} = e^{\pi i} = -1$).

Его характер χ_h определяется формулой

$$\chi_h((\rho a)^k) = \varepsilon^{hk} + \varepsilon^{-hk}, \quad \chi_h((\rho a)^kb) = 0.$$

В частности,

$$\begin{aligned}
\chi_h((\rho a)^k) &= \varepsilon^{hk} + \varepsilon^{-hk} = e^{\frac{1}{p}h\pi ik} + e^{-\frac{1}{p}h\pi ik} \\
&= e^{\frac{1}{p}(2p-h)\pi ik} + e^{-\frac{1}{p}(2p-h)\pi ik} = \chi_{2p-h}((\rho a)^k), \\
\chi_h((\rho a)^kb) &= 0 = \chi_{2p-h}((\rho a)^kb),
\end{aligned}$$

поэтому $R_h \simeq R_{2p-h}$ и R_h зависит только от $h \pmod{2p}$. Таким образом, можно считать, что $0 \leq h \leq p$.

Очевидно, R_0 и R_p – абелевы представления, так как

$$R_0(a) = R_0((\rho a)^{p+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} R_p(a) &= R_p((\rho a)^{p+1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{p(p+1)} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-p(p+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

следовательно, R_0 и R_p – *приводимые* представления.

Для $0 < h < p$ представление R_h неприводимо. Действительно, $\varepsilon^h \neq \varepsilon^{-h}$, потому что $\varepsilon^{2h} = e^{2\pi i h/p} \neq 1$; таким образом, координатные оси – единственные инвариантные прямые при действии

$$R_h(\rho a) = \begin{pmatrix} \varepsilon^h & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-h} \end{pmatrix}$$

и они неинвариантны при действии

$$R_h(b) = \begin{pmatrix} 0 & i^h \\ i^h & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\chi_h(\rho a) = \varepsilon^h + \varepsilon^{-h} = 2 \cos \pi h/p$ – различные числа для $0 < h < p$, то представления R_h неизоморфны. Соотношение $4 \cdot 1^2 + (p-1) \cdot 2^2 = 4p = \text{Card}(G)$ показывает, что $\Psi_1, \dots, \Psi_4, R_1, \dots, R_{p-1}$ дают полный список неприводимых представлений дициклической группы G .

С другой стороны, $\Psi_1(\rho) = \Psi_1(b^2) = 1$, $\Psi_2(\rho) = \Psi_2(b^2) = 1$, $\Psi_3(\rho) = \Psi_3(b^2) = i^2 = -1$, $\Psi_4(\rho) = \Psi_4(b^2) = (-i)^2 = -1$,

$$R_h(\rho) = R_h((\rho a)^p) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{hp} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi i h} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i h} \end{pmatrix} = (-I)^h.$$

Следовательно, имеются следующие нечетные неприводимые представления: $\Psi_3, \Psi_4, R_1, R_3, \dots, R_{p-2}$.

Мы утверждаем, что

$$\sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_3(\sigma) = \overline{\sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_4(\sigma)} \neq 0. \quad (3.24)$$

Действительно,

$$\Phi = \{1, \rho^{n_{2p-2}}a, \rho^{n_{2p-3}}a^2, \dots, \rho^{n_p}a^{p-1}, \rho^{n_{p-1}}b, \rho^{n_{p-2}}ab, \rho^{n_{p-3}}a^2b, \dots, \rho^{n_0}a^{p-1}b\},$$

где $n_i \in \{0, 1\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_3(\sigma) &= [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] \\ &\quad + i[(-1)^{n_{p-1}} + (-1)^{n_{p-2}} + (-1)^{n_{p-3}} + \dots + (-1)^{n_0}], \end{aligned}$$

$\Psi_4 = \overline{\Psi_3}$; с другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\sum_{\sigma \in \Phi} \Psi_3(\sigma) \right) &= [1 + (-1)^{n_{2p-2}} + (-1)^{n_{2p-3}} + \dots + (-1)^{n_p}] \\ &= p \pmod{2} = 1 \pmod{2}, \end{aligned}$$

поэтому утверждение (3.24) доказано.

В силу предложения 3.12 достаточно проверить, что для любого $h \in \{1, 3, \dots, p-2\}$

$$\det \left(R_h \left(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma \right) \right) \neq 0. \quad (3.25)$$

Мы перепишем $\Phi \in \mathbb{C}[G]$ как

$$\Phi = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} (\rho a)^{n_i} + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} (\rho a)^{m_i} b.$$

Предположим, что условие (3.25) не выполняется. Тогда мы получаем из (3.23)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \begin{pmatrix} \varepsilon^{hn_i} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-hn_i} \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, p\}, m_j \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } j \neq k \quad m_j - m_k \not\equiv 0 \pmod{p}}} \begin{pmatrix} 0 & i^h \varepsilon^{hm_j} \\ i^h \varepsilon^{-hm_j} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U & i^h V \\ i^h \bar{V} 0 & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 = \det \begin{pmatrix} U & i^h V \\ i^h \bar{V} 0 & \bar{U} \end{pmatrix} = |U|^2 + |V|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, условие $\det(R_h(\sum_{\sigma \in \Phi} \sigma)) = 0$ эквивалентно условию

$$U = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, n_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad n_i - n_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hn_i} = 0 \quad \& \quad V = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, p\}, m_i \in \{1, \dots, 2p\} \\ \text{для } i \neq j \quad m_i - m_j \not\equiv 0 \pmod{p}}} \varepsilon^{hm_i} = 0,$$

которое совпадает с условием (3.17). Этот случай исключен в п. 3.14. Лемма доказана.

3.16. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , где p – простое число, $p \geq 3$. Пусть $K/\mathbb{Q}$ – нормальное расширение. Тогда*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) \geq 2p - 1$$

и для любого натурального числа $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.

Это следует из лемм 3.8, 3.9, 3.13–3.15 и теоремы 3.5.

3.17. ЛЕММА. *Пусть J – простое 6-мерное абелево многообразие CM-типа (K, Φ) , где $K/\mathbb{Q}$ – неабелево нормальное расширение. Тогда $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Hg}(J) = 6$ и для любого натурального числа r $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.13, 3.15 мы можем считать, что $G = D_6$ – диэдральная группа порядка 12. Соотношение (3.22) показывает, что группа Ходжа является максимально большой. Следовательно, $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров. Лемма доказана.

**§ 4. Циклы на простом абелевом многообразии
с умножениями из мнимого квадратичного поля**

4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть g – простая алгебра Ли типа A_4 . Тогда:

$$\begin{aligned}\wedge^2 E(\omega_2) &= \wedge^8 E(\omega_3) = E(\omega_1 + \omega_3); \\ \wedge^3 E(\omega_2) &= \wedge^7 E(\omega_3) = E(2\omega_1 + \omega_4) + E(2\omega_3); \\ \wedge^4 E(\omega_2) &= \wedge^6 E(\omega_3) = E(\omega_1 + \omega_3 + \omega_4) + E(3\omega_1); \\ \wedge^5 E(\omega_2) &= \wedge^5 E(\omega_3) = E(2\omega_1 + \omega_3) + E(\omega_2 + 2\omega_4); \\ \wedge^6 E(\omega_2) &= \wedge^4 E(\omega_3) = E(\omega_1 + \omega_2 + \omega_4) + E(3\omega_4); \\ \wedge^7 E(\omega_2) &= \wedge^3 E(\omega_3) = E(\omega_1 + 2\omega_4) + E(2\omega_2); \\ \wedge^8 E(\omega_2) &= \wedge^2 E(\omega_3) = E(\omega_2 + \omega_4).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каноническое спаривание

$$\wedge^i E(\omega_2) \times \wedge^{10-i} E(\omega_2) \rightarrow \wedge^{10} E(\omega_2) = E(0)$$

невырождено, поэтому $\wedge^i E(\omega_2) = (\wedge^{10-i} E(\omega_2))^* = \wedge^{10-i} E(\omega_3)$. Остается найти $\wedge^i E(\omega_2)$ для $i \leq 5$ с помощью рутинных вычислений, которые аналогичны процедурам из п. 2.1.

4.2. ЛЕММА. Предположим, что J – простое $2p$ -мерное абелево многообразие, где p – простое число, и $\text{End}^0(J)$ – мнимое квадратичное поле. Тогда для всех натуральных $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров, исключая следующий случай: $\dim J = 10$, полупростая часть $\text{Lie Hg}^{ss}(J) \otimes \mathbb{C}$ является простой алгеброй Ли типа A_4 , $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = E(\omega_2)(\chi) + E(\omega_3)(-\chi)$, где χ – вес $\text{Cent Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ -модуля $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$; в этом случае

$$\begin{aligned}H^4(J, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2} &= \text{Div}^{[2]}(J), \quad \dim_{\mathbb{Q}}(H^6(J, \mathbb{Q}) \cap H^{3,3} / \text{Div}^{[3]}(J)) = 1, \\ \dim_{\mathbb{Q}}(H^8(J, \mathbb{Q}) \cap H^{4,4} / \text{Div}^{[4]}(J)) &= 1.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Лефшеца можно считать, что $p \geq 3$. Если $2p \notin \text{Ex}(4)$, то для любого натурального $r < p$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, теорема 1.1]. Легко видеть, что $2p \in \text{Ex}(4) \Leftrightarrow p = 5$.

Предположим, что $\dim J = 10$. В силу теорем 1.2 и 1.3 полупростая часть $\text{Hg}(J)^{ss} \otimes \mathbb{C}$ имеет тип A_9 или A_4 [18, теорема 2.2]. В первом случае для любого $r < 5$ $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}$ порождается классами когомологий пересечений дивизоров [17, п. 2.9].

Во втором случае мы имеем следующее разложение $\text{Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ -модулей:

$$H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = E(\omega_2)(\chi) + E(\omega_3)(-\chi),$$

где χ – вес $\text{Cent Hg}(J) \otimes \mathbb{C}$ -модуля $H^1(J, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ [17, п. 2.9, (2.9.2)], [18, теорема 2.2].

Следовательно, для $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ мы имеем $\text{rank NS}(J) = 1 = \dim_{\mathbb{Q}} \text{Div}^{[r]}(J)$ и

$$\begin{aligned}
 (H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}) \otimes \mathbb{C} &= H^{2r}(J, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(J)} \otimes \mathbb{C} = (\wedge^{2r} H^1(J, \mathbb{C}))^{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}} \\
 &= (\wedge^{2r} (E(\omega_2)(\chi) + E(\omega_3)(-\chi)))^{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}} \\
 &= \bigoplus_{i=0}^{2r} (\wedge^i (E(\omega_2)(\chi)) \otimes \wedge^{2r-i} (E(\omega_3)(-\chi)))^{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}} \\
 &= \bigoplus_{i=0}^{2r} (\wedge^i E(\omega_2) \otimes \wedge^{2r-i} E(\omega_3)((2i-2r)\chi))^{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}} \\
 &\simeq \bigoplus_{i=0}^{2r} \text{Hom}_{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}}(\wedge^i E(\omega_3), \wedge^{2r-i} E(\omega_3)((2i-2r)\chi)).
 \end{aligned}$$

Предложение 4.1 и лемма Шура дают соотношение

$$\text{Hom}_{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}}(\wedge^i E(\omega_3), \wedge^{2r-i} E(\omega_3)((2i-2r)\chi)) \neq (0) \Leftrightarrow i = r.$$

Поэтому

$$(H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r}) \otimes \mathbb{C} \simeq \text{End}_{\text{Lie Hg}(J) \otimes \mathbb{C}} \wedge^r E(\omega_3).$$

Лемма Шура и предложение 4.1 дают соотношения

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{Q}} H^{2r}(J, \mathbb{Q}) \cap H^{r,r} / \text{Div}^{[r]}(J) \\
 &= (\text{число неприводимых компонент } \wedge^r E(\omega_3)) - 1 \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{для } r = 1, 2, \\ 1 & \text{для } r = 3, 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Список литературы

1. Боровой М.В. Группа Ходжа и алгебра эндоморфизмов абелева многообразия // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1981. С. 124–126.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976. Гл. 1–3; 1977. Гл. 4–6; 1978. Гл. 7, 8.
3. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
4. Dodson B. On the Mumford–Tate group of an abelian variety with complex multiplication // J. Algebra. 1987. V. 111. P. 49–73.
5. Kubota T. On the field extension by complex multiplication // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 118. P. 113–122.
6. Mai L. Lower bounds for the ranks of CM types // J. Number Theory. 1989. V. 32. P. 192–202.
7. Mumford D. A note on Shimura’s paper “Discontinuous groups and abelian varieties” // Math. Ann. 1969. V. 181. № 4. P. 345–351.
8. Мамфорд Д. Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
9. Murty V.K. Computing the Hodge group of an abelian variety // Séminaire de Théorie des Nombres. Paris. 1988–1989. P. 141–158; Progr. Math. V. 91. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1990.

10. *Pohlmann H.J.* Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type // *Ann. Math.* 1968. V. 88. № 1. P. 161–180.
11. *Ribet K.A.* Hodge classes on certain types of abelian varieties // *Amer. J. Math.* 1983. V. 105. P. 523–538.
12. *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.
13. *Шимура Г.* Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М.: Мир, 1973.
14. *Танкеев С.Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1981. Т. 45. № 2. С. 398–434.
15. *Танкеев С.Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1982. Т. 46. № 1. С. 155–170.
16. *Танкеев С.Г.* Абелевы многообразия и общая гипотеза Ходжа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1993. Т. 57. № 4. С. 192–205.
17. *Танкеев С.Г.* Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 2. С. 159–194.
18. *Танкеев С.Г.* О следах Фробениуса // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62. № 1. С. 165–200.
19. *White S.P.* Sporadic cycles on CM abelian varieties // *Compositio Math.* 1993. V. 88. P. 123–142.
20. *Зархин Ю.Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.
21. *Zarhin Yu.G.* Linear irreducible Lie algebras and Hodge structures: Proceedings of the USA–USSR symposium on algebraic geometry. Chicago, June 20 – July 14, 1989 (S.Bloch, I.Dolgachev, W.Fulton eds.) // *Lecture Notes in Math.* 1991. V. 1479. P. 281–297.

Владимирский государственный университет
ул. Горького, 87, Владимир, 600026, Россия.
E-mail: tankeev-m2@vpti.vladimir.su

Поступило в редакцию
10.II.1998