Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Приближения наимпростейшими дробями и преобразование Гильберта, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 123–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:14:02

УДК 517.538.52+517.444

В. Ю. Протасов

Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта

Исследуются задачи о приближении функций класса L_p наипростейшими дробями на действительной прямой и на полупрямой. Наипростейшей дробью называется рациональная функция вида $g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t-z_k}$, где $z_1, \dots, z_n$ – комплексные числа. Описано множество функций, которые с любой точностью приближаются наипростейшими дробями, а также множество функций, которые приближаются их выпуклыми комбинациями (конус наипростейших дробей). Получены оценки норм наипростейших дробей и условия для сходимости функциональных рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-z_k}$ в пространстве L_p . Техника исследования основана на применении преобразования Гильберта и методов выпуклого анализа.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: аппроксимация, наипростейшая дробь, сходимость функционального ряда, преобразование Гильберта, целая функция, логарифмическая производная.

§ 1. Введение

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция вида

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k},$$

где $z_1, \dots, z_n$ – комплексные числа (полюсы), среди которых могут быть равные. Наипростейшие дроби $g(t)$ суть логарифмические производные полиномов: $g(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$, где $p(t) = C(t-z_1) \cdots (t-z_n)$ – алгебраический полином степени n . Задачи аппроксимации наипростейшими дробями в различных пространствах функций исследовались во многих работах (см. библиографию в [1]). Так, например, приближение функций наипростейшими дробями в равномерной метрике на компактах в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ изучалось в работах [2], [3], наипростейшие дроби Паде были построены в [3]. Исследование наипростейших дробей на некомпактных многообразиях, по-видимому, берет начало с задачи, поставленной в 1960-х годах Е. А. Гориним: как близко могут подходить к действительной оси $\mathbb{R}$ полюсы наипростейшей дроби, если ее значения во всех точках $t \in \mathbb{R}$ не превосходят 1? Эта задача была полностью решена В. И. Данченко [1], показавшим, что расстояние от полюсов до

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00208), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ РФ” (грант НШ-3233.2008.1) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых докторов наук” (грант МД-2195.2008.1).

действительной прямой может быть сколь угодно мало, а минимум этого расстояния асимптотически эквивалентен $\frac{\ln \ln n}{\ln n}$ при $n \rightarrow \infty$. Используя данный результат, П. А. Бородин и О. Н. Косухин [4] доказали, что любая функция из пространства $C_0(\mathbb{R})$ может быть с любой точностью равномерно на $\mathbb{R}$ приближена наипростейшими дробями. При этом полюсы приближающих дробей могут быть взяты сколь угодно далеко от действительной оси.

Напомним, что $C_0(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций $f(t)$ на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси принадлежат $C_0(\mathbb{R})$ и согласно результату из [4] плотны в этом пространстве. Наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси также принадлежат пространствам $L_p(\mathbb{R})$ при всех $p > 1$. Однако, как было отмечено в [4], они не плотны ни в одном из этих пространств. Для $p \in (1, +\infty)$ обозначим через $S_p(\mathbb{R})$ замыкание множества наипростейших дробей в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. Имеем $S_p \neq L_p$ для любого p . Возникает естественная задача описания множества S_p , или, что то же самое, описания множества функций, которые с любой точностью приближаются в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями $\frac{\mathbf{p}'(t)}{\mathbf{p}(t)}$, где $\mathbf{p}$ – алгебраический полином. Решение этой задачи получено в настоящей работе (теорема 3). Функция $f \in L_p(\mathbb{R})$ принадлежит S_p тогда и только тогда, когда она является аналитической и имеет вид $f(t) = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$, где Φ – целая функция порядка не выше $\frac{1}{q}$, q – число, сопряженное к p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Таким образом, S_p состоит из тех функций пространства L_p , которые являются логарифмическими производными целых функций порядка не выше $\frac{1}{q}$.

Как следует из теоремы 3, множество S_p достаточно узко. Оно не является ни линейным многообразием, ни выпуклым множеством. Это заставляет искать другие способы приближения функций наипростейшими дробями. Обозначим через $V_p(\mathbb{R})$ замыкание в $L_p(\mathbb{R})$ выпуклой оболочки наипростейших дробей. Множество $V_p(\mathbb{R})$ состоит из функций, которые сколь угодно точно приближаются в $L_p(\mathbb{R})$ дробями вида

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{t - z_k}, \quad (1)$$

где $p_1, \dots, p_n \geq 0$, и является наименьшим выпуклым замкнутым конусом в $L_p(\mathbb{R})$, содержащим все функции вида $\frac{1}{t-z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Оно состоит из функций, сколь угодно точно приближающихся в $L_p(\mathbb{R})$ функциями $c \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}}$, где $c > 0$ и $\mathbf{p}$ – полином. Действительно, дробь вида (1) можно приблизить такой же дробью с рациональными коэффициентами p_k , т. е. функцией $\frac{1}{N} g_0(t)$, где $N \in \mathbb{N}$ – наименьшее общее кратное знаменателей p_k и g_0 – наипростейшая дробь. Следовательно, $g(t)$ приближается функциями вида $\frac{1}{N} \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}}$. Каждая такая функция принадлежит выпуклой оболочке множества S_p , поскольку $g_0 \in S_p$ и $0 \in S_p$. Последнее выполнено в силу того, что $\left\| \frac{1}{t-ir} \right\|_p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $r \in \mathbb{R}$. Ясно, что $S_p \subset V_p \subset L_p$. Оказывается, что для любого $p \in (1, +\infty)$ все включения являются строгими. Конус V_p имеет простое описание: как будет показано в § 2 (теорема 1), функция f принадлежит V_p тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{F}(a) - |b|$ неотрицательна почти всюду на $\mathbb{R}$, где $a = \operatorname{Re} f$, $b = \operatorname{Im} f$ – соответственно действительная и мнимая части f , а $\mathcal{F}$ – преобразование Гильберта.

В частности, действительная функция $f \in L_p$ принадлежит V_p в точности тогда, когда $\mathcal{F}(f) \geq 0$. В том же параграфе мы покажем, что $S_p \neq V_p$, и получим описание двойственного конуса V_p^* .

В § 3 теорема 1 будет использована для получения оценок снизу нормы наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$, обобщающих некоторые результаты работы [1], а в § 4 будет изучена сходимость функциональных рядов вида $\sum_k \frac{1}{t-z_k}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. В § 6 мы исследуем аналогичные задачи на полупрямой $\mathbb{R}_+$ и покажем, что при $p \geq 2$ конус $V_p(\mathbb{R}_+)$ совпадает со всем пространством $L_p(\mathbb{R}_+)$ (ранее П. А. Бородиным было доказано, что $V_p(\mathbb{R}_+) \neq L_p(\mathbb{R}_+)$ для $p \in (1, 2)$). Наконец, в § 7 мы сформулируем несколько нерешенных задач об аппроксимации функций наимпростейшими дробями в L_p и об оценке норм наимпростейших дробей в этих пространствах.

В настоящей работе использованы стандартные обозначения $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ для множеств натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно, $L_p(\mathbb{R})$ – пространство функций с нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt)^{1/p}$. Везде мы будем считать, что $1 < p < \infty$, через q обозначим сопряженное число к p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Запись $f_1 \geq f_2$ означает, что $f_1(t) \geq f_2(t)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$, то же для отношений $>$ и $=$. Через $\mathcal{P}$ обозначаем пространство полиномов одной переменной.

Одним из основных инструментов исследования будет преобразование Гильберта. Для данной функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ ее преобразование Гильберта определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(f)[x] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad (2)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R} \setminus (x-\varepsilon, x+\varepsilon)} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ интеграл сходится для почти всех $x \in \mathbb{R}$, причем образ $\mathcal{F}(f)$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Оператор $\mathcal{F}$ непрерывен в $L_p(\mathbb{R})$ при любом $p \in (1, +\infty)$, и справедлива формула обращения $\mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F}$ [5, п. 6.4-2]. Норма оператора $\mathcal{F}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равна $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}$ при $p \leq 2$ и $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p}$ при $p > 2$ [6]. Для функций вида $g(t) = \frac{1}{t-z}$, где $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, имеют место соотношения

$$\mathcal{F}(g) = \begin{cases} -ig & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ ig & \text{при } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad (3)$$

легко вытекающие из формул Сохоцкого–Племеля [7, п. 4.6]. Таким образом, все такие функции $g(t)$ являются собственными элементами оператора $\mathcal{F}$, соответствующими собственному значению $-i$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и собственному значению i при $\operatorname{Im} z < 0$.

§ 2. Конус наимпростейших дробей

Опишем сначала конус $V_p(\mathbb{R})$, порожденный в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ наимпростейшими дробями. Этот конус состоит из функций, которые приближаются в $L_p(\mathbb{R})$ выражениями вида (1). Пусть $f \in L_p(\mathbb{R})$. Обозначим $a = \operatorname{Re} f$, $b = \operatorname{Im} f$. Таким образом, $f(t) = a(t) + ib(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Функция $f \in L_p$ принадлежит V_p тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(a) \geq |b|$.

Таким образом, функция f сколь угодно точно приближается выпуклыми комбинациями наипростейших дробей, или, что то же самое, функциями вида $c \frac{p'}{p}$, где p – полином и $c > 0$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(a)[t] \geq |b(t)|$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что критерий не использует гладкость функции f , а только соотношение между ее мнимой и действительной частями. Например, для действительнзначных функций получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_p$, принадлежит V_p тогда и только тогда, когда функция $\mathcal{F}(f)$ неотрицательна почти всюду на $\mathbb{R}$.

Преобразование Гильберта переводит конус действительнзначных функций, принадлежащих V_p , в конус неотрицательных функций. Поскольку выполнено $\mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F}$, то для любой неотрицательной функции $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ имеем $-\mathcal{F}\varphi \in V_p$. Доказательство теоремы 1 носит конструктивный характер и позволяет находить полюсы дробей и коэффициенты p_k для приближения данной функции f с любой точностью (замечание 2). В доказательстве будет использована следующая несложная лемма. Для данной функции ψ обозначим $\psi_{h,s}(t) = h^{-1}\psi(h^{-1}(t-s))$, где $h > 0$ и $s \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 1. Если $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$, $p \in (1, +\infty)$, и $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 1$, то линейные комбинации функций $\psi_{h,s}$, $h > 0$, $s \in \mathbb{R}$, с неотрицательными коэффициентами сколь угодно точно приближают в L_p любую неотрицательную функцию $f \in L_p(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приблизим функцию f в $L_p(\mathbb{R})$ неотрицательной непрерывной финитной функцией $\tilde{f}$, которая, в свою очередь, может быть приближена ее сверткой с функцией $\psi_{h,0}$:

$$\|\tilde{f} * \psi_{h,0} - \tilde{f}\|_p \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t)f_2(x-t) dt$ (см., например, [8, теорема 1.18]). Свертка $\tilde{f} * \psi_{h,0}$ может быть сколь угодно точно приближена соответствующей интегральной суммой:

$$\left\| \sigma \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(k\sigma) \psi_{h,k\sigma} - \tilde{f} * \psi_{h,0} \right\|_p \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0. \quad (5)$$

Если $f \geq 0$, то формула (5) дает искомую линейную комбинацию функций $\psi_{h,k\sigma}$, $k \in \mathbb{Z}$, с неотрицательными коэффициентами $p_k = \sigma \tilde{f}(k\sigma)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Подставляя функции $\frac{1}{t-z} = \alpha(t) + i\beta(t)$ и $\frac{1}{t-\bar{z}} = \alpha(t) - i\beta(t)$ в соотношения (3) и суммируя, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha) &= \beta, & \mathcal{F}(\beta) &= -\alpha & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ \mathcal{F}(\alpha) &= -\beta, & \mathcal{F}(\beta) &= \alpha & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку $\beta > 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\beta < 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, в любом случае имеем $\mathcal{F}(\alpha) = |\beta|$. Тогда для любых $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и для любых $p_1, \dots, p_n \geq 0$ получаем

$$\mathcal{F}\left(\sum_k p_k \alpha_k\right) = \sum_k p_k |\beta_k| \geq \left|\sum_k p_k \beta_k\right|,$$

где $\frac{1}{t-z_k} = \alpha_k(t) + i\beta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$. Таким образом, неравенство $\mathcal{F}(a) \geq |b|$ выполняется для всех функций вида $f(t) = \sum_k \frac{p_k}{t-z_k}$, а значит, и для всех $f \in V_p$.

Теперь применим лемму 1 к функции $\psi(t) = \frac{1}{\pi(t^2+1)}$. Для любого $z \in \mathbb{C}$, лежащего в верхней полуплоскости, $\beta(t) = \operatorname{Im} \frac{1}{t-z} = \pi\psi_{y,x}$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Если для $f \in L_p(\mathbb{R})$ имеем $\mathcal{F}(a) \geq |b|$, то $\frac{1}{2}(\mathcal{F}(a)+b) \geq 0$. Применив к этой функции лемму 1, для любого $\varepsilon > 0$ находим такие точки $z_1, \dots, z_n$ в верхней полуплоскости и такие $p_1, \dots, p_n \geq 0$, что

$$\left\|\sum_{k=1}^n p_k \beta_k - \frac{1}{2}(\mathcal{F}(a)+b)\right\|_p < \varepsilon. \quad (7)$$

Аналогично, поскольку $\frac{1}{2}(b - \mathcal{F}(a)) \leq 0$, для этой функции найдутся точки $z_{n+1}, \dots, z_{2n}$ нижней полуплоскости и $p_{n+1}, \dots, p_{2n} \geq 0$, для которых

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{2n} p_k \beta_k - \frac{1}{2}(b - \mathcal{F}(a))\right\|_p < \varepsilon. \quad (8)$$

Суммируя неравенства (7) и (8), получаем

$$\left\|\sum_{k=1}^{2n} p_k \beta_k - b\right\|_p < 2\varepsilon, \quad (9)$$

а вычитая те же неравенства, получаем

$$\left\|\sum_{k=1}^n p_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^{2n} p_k \beta_k - \mathcal{F}(a)\right\|_p < 2\varepsilon.$$

Заметим теперь, что в силу (6)

$$\sum_{k=1}^n p_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^{2n} p_k \beta_k = \mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{2n} p_k \alpha_k\right).$$

Итак, $\|\mathcal{F}(\sum_{k=1}^{2n} p_k \alpha_k) - \mathcal{F}(a)\|_p < 2\varepsilon$, следовательно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{2n} p_k \alpha_k - a\right\|_p \leq \|\mathcal{F}^{-1}\|_p \left\|\mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{2n} p_k \alpha_k\right) - \mathcal{F}(a)\right\|_p \leq 2\|\mathcal{F}^{-1}\|_p \varepsilon = 2\|\mathcal{F}\|_p \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left\|\sum_{k=1}^{2n} p_k \alpha_k - a\right\|_p \leq 2\|\mathcal{F}\|_p \varepsilon. \quad (10)$$

Совместив неравенства (10) и (9), получаем, что расстояние $\left\|\sum_{k=1}^{2n} \frac{p_k}{t-z_k} - f(t)\right\|_p$ не превосходит $2(1 + \|\mathcal{F}\|_p)\varepsilon$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из теоремы 1, конус V_p имеет пустую внутренность в пространстве $L_p(\mathbb{R})$. С другой стороны, он достаточно массивен, в том смысле, что $V_p - V_p = L_p$, т.е. любая функция $f \in L_p(\mathbb{R})$ является разностью двух функций из конуса V_p . Для того чтобы это показать, положим $f_1 = -\mathcal{F}((\mathcal{F}a)_+ + |b|) + ib_+$, $f_2 = \mathcal{F}((\mathcal{F}a)_- - |b|) - ib_-$, где $a = \operatorname{Re} f$, $b = \operatorname{Im} f$, и используем следующие обозначения: $\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|)$ и $\varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi - |\varphi|)$ – соответственно положительная и отрицательная части функции φ . Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $f = f_1 - f_2$ и обе функции f_1, f_2 удовлетворяют условиям теоремы 1, а значит, $f_1, f_2 \in V_p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с теоремой 1 возникает задача о конструктивном нахождении полюсов $z_1, \dots, z_{2n}$ и коэффициентов $p_1, \dots, p_{2n}$ для приближения данной функции f с данной точностью: $\|\sum_{k=1}^{2n} \frac{p_k}{t - z_k} - f(t)\|_p < \varepsilon$. Другая формулировка этой задачи следующая: найти полином $\mathbf{p}$ и константу $c > 0$, для которых $\|c \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}} - f\|_p < \varepsilon$. Доказательства теоремы 1 и леммы 1 намечают один из возможных путей решения задачи. Если функция f удовлетворяет неравенству $\mathcal{F}(a) \geq |b|$ (а иначе она не приближается с любой точностью), то $f_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(a) + b) \geq 0$ и $f_2 = \frac{1}{2}(b - \mathcal{F}(a)) \leq 0$. Как установлено в доказательстве теоремы 1, достаточно приблизить в L_p функцию f_1 линейными комбинациями (с неотрицательными коэффициентами p_k) функций $\psi_{y,x}$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$, где $\psi(t) = \frac{1}{\pi(t^2+1)}$; функция f_2 приближается аналогично. Приближение функции f_1 можно осуществить по схеме, приведенной в доказательстве леммы 1. Сначала “обрезаем” функцию f_1 до носителя $[-N, N]$, затем приближаем f_1 непрерывной функцией $\tilde{f}_1$, например усреднением по Стеклову: $f_1 = f_1 * \chi_{h,0}$, где χ – характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$. Затем приближаем $\tilde{f}_1$ по формуле (4). Параметр h в обоих случаях выбирается с помощью оценки

$$\|f * \psi_{h,0} - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_p(f, th) |\psi(t)| dt,$$

где $\omega_p(f, s) = \sup_{|t| \leq s} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p$ – модуль непрерывности функции f в пространстве L_p [8, с.18]. Наконец, свертка $\tilde{f}_1 * \psi_{h,0}$ приближается по формуле (5). Выражение, стоящее в этой формуле, оценивается сверху как $\omega_p(\psi_{h,0}, \sigma) \|\tilde{f}_1\|_\infty + \omega_\infty(\tilde{f}_1, \sigma) \|\psi_{h,0}\|_\infty$, из чего находится параметр σ , обеспечивающий нужную точность приближения. В итоге получаем, что f приближается дробями с полюсами $z_{k,j} = (\sigma k, (-1)^j h)$ и с соответствующими коэффициентами $p_{k,j} = \pi \sigma \tilde{f}_j(k\sigma) = \frac{\pi \sigma}{2h} \int_{-h}^h f_j(k\sigma + t) dt$, где $j \in \{1, 2\}$ и $|k| \leq N\sigma^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Согласно теореме 1 имеем $V_p \neq L_p$. Возникает вопрос: верно ли, что $S_p = V_p$? Иными словами: любая ли функция из конуса V_p сколь угодно точно приближается наипростейшими дробями, т.е. принадлежит S_p ? Следующий простой аргумент показывает, что $S_p \neq V_p$. Вначале установим один вспомогательный факт. Для данной функции $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, положительной почти всюду, и для данного $N > 0$ рассмотрим величину

$$\rho(N, \varphi) = \inf \{c > 0 \mid \varphi(t_1) \leq c\varphi(t_2) \text{ для почти всех } t_1, t_2 \in [-N, N]\}. \quad (11)$$

Если $\rho(N, \varphi) = 1$, то φ равна константе почти всюду на $[-N, N]$, иначе $\rho(N, \varphi) > 1$.

ЛЕММА 2. Если полюсы наипростейшей дроби $g = a + ib$ лежат вне круга $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, где $R > N$, то $\rho(N, \mathcal{F}(a)) \leq \left(\frac{R+N}{R-N}\right)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функционал $\rho(N, \varphi)$ является выпуклым по аргументу φ , достаточно доказать утверждение для функций $g(t) = \frac{1}{t-z}$, тогда оно будет выполнено и для сумм таких функций. Имеем $\varphi(t) = \mathcal{F}(a)[t] = \frac{|y|}{(t-x)^2+y^2}$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Легко доказать, что если $\sqrt{x^2+y^2} \geq R > N$, то $\varphi(t_1) \leq \left(\frac{R+N}{R-N}\right)^2 \varphi(t_2)$ для любых $t_1, t_2 \in [-N, N]$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $p \in (1, +\infty)$ выполнено $S_p \neq V_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\mathcal{F}(\operatorname{Re} \frac{1}{t-z})\|_p = \|\operatorname{Im} \frac{1}{t-z}\|_p \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$, найдется такое $R > 0$, что $\|\mathcal{F}(\operatorname{Re} \frac{1}{t-z})\|_p \geq 1$ для любого z из круга $|z| \leq R$. Так как $\mathcal{F}(\operatorname{Re} \frac{1}{t-z}) \geq 0$ при каждом z , то для любой наипростейшей дроби g , имеющей хотя бы один полюс внутри круга $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$, выполнено $\|\mathcal{F}(\operatorname{Re} g)\|_p \geq 1$. Возьмем произвольное $N \in (0, R)$ и положительную функцию $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ такие, что $\|\varphi\|_p < 1$ и $\rho(N, \varphi) > \left(\frac{R+N}{R-N}\right)^2$. Согласно лемме 2 для любой наипростейшей дроби g такой, что $\|\mathcal{F}(\operatorname{Re} g)\|_p \leq 1$, имеем $\rho(N, \mathcal{F}(\operatorname{Re} g)) \leq \left(\frac{R+N}{R-N}\right)^2$. Поэтому функция $a = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) = -\mathcal{F}(\varphi)$ не принадлежит S_p . С другой стороны, так как $\varphi \geq 0$, то $a \in V_p$ (теорема 1), что завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Сравним полученные результаты для пространства $L_p(\mathbb{R})$ с известными аналогичными результатами для $C_0(\mathbb{R})$. Согласно [4] для любого $c > 0$ наипростейшие дроби с полюсами вне полосы $|\operatorname{Im} z| \leq c$ плотны в $C_0(\mathbb{R})$. Таким образом, полюсы наипростейших дробей, приближающих произвольную функцию в C_0 , не обязательно близко подходят к действительной оси. В метрике L_p , напротив, ни для какого $c > 0$ выпуклые комбинации наипростейших дробей с полюсами вне полосы $|\operatorname{Im} z| \leq c$ не плотны в V_p . Согласно лемме 2 для любой такой комбинации g выполнено неравенство $\rho(N, \mathcal{F}(\operatorname{Re} g)) \leq \left(\frac{c+N}{c-N}\right)^2$, где $N < c$. Поэтому приблизить такими комбинациями можно только функции, удовлетворяющие этому неравенству.

Одна из задач выпуклого анализа состоит в нахождении наиболее простого описания для известных выпуклых объектов (см., например, [9]–[11]). Теорема 1 решает данную задачу для конуса V_p . Этот конус, с одной стороны, является конической оболочкой семейства функций $\{\frac{1}{t-z}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$, с другой – согласно теореме 1 задается одним выпуклым неравенством $|\operatorname{Im} f| \leq \mathcal{F}(\operatorname{Re} f)$. Это неравенство фактически является системой бесконечного числа линейных неравенств (поскольку оно должно быть выполнено почти в каждой точке $t \in \mathbb{R}$). Еще одна задача выпуклого анализа состоит в нахождении двойственного (или сопряженного) к данному выпуклому объекту. Напомним, что если K – выпуклый конус в нормированном пространстве X над полем $\mathbb{C}$, то его сопряженный конус K^* состоит из элементов сопряженного пространства X^* (пространства линейных непрерывных функционалов на X), для которых $\operatorname{Re}(x^*, x) \geq 0$ при всех $x \in K$. В случае $X = L_p(\mathbb{R})$ имеем $X^* = L_q(\mathbb{R})$, где $(x^*, x) = \int_{\mathbb{R}} x^*(t) \overline{x(t)} dt$. Так, $V_p^* = \{\varphi \in L_q(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \varphi f dt \geq 0, f \in V_p\}$, или, что то же самое,

$$V_p^* = \left\{ \varphi \in L_q(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \right\}. \quad (12)$$

Задача описания этого конуса имеет следующее простое решение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $p \in (1, +\infty)$ имеем $V_p^* = V_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы пользуемся равенством $(\mathcal{F}(f_1), \mathcal{F}(f_2)) = (f_1, f_2)$, выполненным для любых $f_1 \in L_q$, $f_2 \in L_q$. Покажем, что $V_q \subset V_p^*$. Пусть $f_1 = a_1 + ib_1 \in V_q$. Для любого $f_2 = a_2 + ib_2 \in V_p$ имеем

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} f_1 \bar{f}_2 dt = \int_{\mathbb{R}} a_1 a_2 dt + \int_{\mathbb{R}} b_1 b_2 dt = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}(a_1) \mathcal{F}(a_2) + b_1 b_2) dt. \quad (13)$$

Последний интеграл неотрицателен, поскольку $\mathcal{F}(a_k) \geq |b_k|$, $k = 1, 2$ (теорема 1), а значит, $\mathcal{F}(a_1) \mathcal{F}(a_2) + b_1 b_2 \geq 0$. Следовательно, $f_1 \in V_p^*$. Таким образом, $V_q \subset V_p^*$. Предположим, что найдется элемент $f_1 \in V_p^*$, не принадлежащий V_q . Согласно теореме 1 существует множество $A \subset \mathbb{R}$, имеющее конечную положительную меру, на котором $\mathcal{F}(a_1)[t] < |b_1(t)|$, $t \in A$. Тогда положим $b_2(t) = -\operatorname{sign} b_1(t)$, $\mathcal{F}(a_2)[t] = 1$ для $t \in A$ и $b_2(t) = \mathcal{F}(a_2)[t] = 0$ для $t \notin A$. Функция a_2 определяется из равенства $a_2 = -\mathcal{F}(\mathcal{F}(a_2))$. Тогда функция $\mathcal{F}(a_1) \mathcal{F}(a_2) + b_1 b_2$ вне множества A равна нулю, а на множестве A равна $\mathcal{F}(a_1) - |b_1|$, а значит, отрицательна почти всюду. В силу (13) это означает, что $\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} f_1 \bar{f}_2 dt < 0$ и, следовательно, $f_1 \notin V_p^*$. Последнее противоречит предположению.

§ 3. Оценки норм наипростейших дробей

Для того чтобы охарактеризовать множество S_p функций, приближающихся в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями, нам понадобятся несколько вспомогательных результатов. В этом параграфе мы получим оценки снизу норм наипростейших дробей. Для любого $p \in (1, +\infty)$ обозначим $\gamma_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+1)^p} \right)^{1/p}$. Для данной наипростейшей дроби $g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t-z_k}$ и данного $r > 0$ положим $\left\| \frac{1}{y} \right\|_r = \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{y_k} \right|^r \right)^{1/r}$, где $y_k = \operatorname{Im} z_k$. В частности,

$$\left\| \frac{1}{y} \right\|_{p-1}^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{y_k} \right|^{p-1} \right)^{1/p}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{t-z_k}$, то выполнено неравенство

$$\| \operatorname{Re} g \|_p \geq \gamma_p \| \mathcal{F} \|_p^{-1} \left\| \frac{1}{y} \right\|_{p-1}^{1/q}, \quad (14)$$

которое является точным по порядку: для любого $\varepsilon > 0$ и любых значений $y_1, \dots, y_n$ существуют такие z_k , что

$$\operatorname{Im} z_k = y_k, \quad \| \operatorname{Re} g \|_p \leq (1 + \varepsilon) \gamma_p \| \mathcal{F} \|_p \left\| \frac{1}{y} \right\|_{p-1}^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = a + ib$ и $\frac{1}{t-z_k} = \alpha_k(t) + i\beta_k(t)$. В силу (6) имеем $\mathcal{F}(a) = \sum_{k=1}^n |\beta_k(t)|$, следовательно,

$$\| \mathcal{F}(a) \|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^n |\beta_k(t)| \right)^p dt \geq \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} |\beta_k(t)|^p dt, \quad (15)$$

где

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta_k(t)|^p dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|y_k|}{(t - x_k)^2 + y_k^2} \right)^p dt = |y_k|^{1-p} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2 + 1)^p} dt. \quad (16)$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{F}(a)\|_p^p \geq \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{1-p} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2 + 1)^p} dt.$$

Учитывая, что $\|a\|_p \geq \|\mathcal{F}\|_p^{-1} \|\mathcal{F}(a)\|_p$, завершаем доказательство неравенства.

Для доказательства точности по порядку заметим, что если, сохраняя значения y_k , увеличивать все попарные расстояния между числами x_k , то неравенство (15) будет стремиться к равенству. Таким образом, при любом $\delta > 0$ найдется достаточно большое N такое, что при $x_k = kN$, $k = 1, \dots, n$, правая часть (15) будет превосходить $(1 - \delta) \int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=1}^n |\beta_k(t)|)^p dt$, следовательно, $\|a\|_p \leq (1 - \delta)^{-1/p} \gamma_p \|\mathcal{F}\|_p \left\| \frac{1}{y} \right\|_{p-1}^{1/q}$. Теорема доказана.

Пусть $H_p(\mathbb{C}^+)$ – пространство Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$, т. е. пространство голоморфных в $\mathbb{C}^+$ функций с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{H_p(\mathbb{C}^+)} = \sup_{b>0} \|\varphi(\cdot + ib)\|_p.$$

Любая функция $\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)$ имеет конечные пределы $\varphi(t)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$, при этом $\varphi \in L_p(\mathbb{R}_+)$. Все наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости принадлежат $H_p(\mathbb{C}^+)$. Пусть g – наипростейшая дробь, все полюсы которой лежат в $\mathbb{C}^+$. В работе [1] были получены оценки снизу величины $\inf_{\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)} \|g + \varphi\|_p$ в терминах наименьшего расстояния от полюсов g до действительной оси. Теорема 2 позволяет обобщить этот результат и оценить данную величину с учетом *всех* расстояний от полюсов g до действительной оси.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если все полюсы наипростейшей дроби g лежат в $\mathbb{C}^+$, то выполнено неравенство

$$\inf_{\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)} \|g + \varphi\|_p \geq \frac{2}{1 + \|\mathcal{F}\|_p} \|g\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку g имеет все полюсы в верхней полуплоскости, то, применив (3), получим $\mathcal{F}(g) = -ig$. С другой стороны, для любой функции $\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)$ имеем $\mathcal{F}(\varphi) = i\varphi$ [12, гл. 2]. Сложив эти два равенства и умножив на i , получаем $g - \varphi = i\mathcal{F}(g + \varphi)$, откуда

$$g = \frac{1}{2}((g + \varphi) + i\mathcal{F}(g + \varphi)).$$

Применяем неравенство треугольника и неравенство $\mathcal{F}(g + \varphi) \leq \|\mathcal{F}\|_p \|g + \varphi\|_p$:

$$\|g\|_p \leq \frac{1}{2} \|g + \varphi\|_p (1 + \|\mathcal{F}\|_p),$$

что завершает доказательство предложения.

При $p = 2$ имеем $\|\mathcal{F}\| = 1$, и в силу предложения 2 выполнено равенство $\inf_{\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)} \|g + \varphi\|_2 = \|g\|_2$. Следовательно, при $p = 2$ оценка, полученная в предложении 2, точна.

Совместив предложение 2 с теоремой 2, получаем оценку нормы наимпростейшей дроби величиной $\left\| \frac{1}{y} \right\|_{p-1}^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{y_k} \right)^{p-1} \right)^{1/p}$, где $y_1, \dots, y_m$ – мнимые части полюсов дроби g , лежащих в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть g – наимпростейшая дробь с полюсами $z_1, \dots, z_n$, причем $\text{Im } z_k = y_k > 0$ при $k = 1, \dots, m$. Тогда

$$\inf_{\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)} \|g + \varphi\|_p \geq \frac{2\gamma_p}{\|\mathcal{F}\|_p(1 + \|\mathcal{F}\|_p)} \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{y_k} \right)^{p-1} \right)^{1/p}$$

для любой функции $\varphi \in H_p(\mathbb{C}^+)$.

§ 4. Ряды наимпростейших дробей

В этом параграфе мы перейдем от конечных сумм к рядам вида $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{t - z_k}$. Как и ранее, обозначаем $\text{Re}\left(\frac{1}{t - z_k}\right) = \alpha_k(t)$, $\text{Im}\left(\frac{1}{t - z_k}\right) = \beta_k(t)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность комплексных чисел, не лежащих на действительной оси, $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел. Тогда сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{t - z_k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k |\beta_k(t)|$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого k согласно (6) имеем $\mathcal{F}(\alpha_k) = |\beta_k|$. Если ряд $\sum \frac{p_k}{t - z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то ряд $\sum p_k \alpha_k(t)$ также сходится, а значит, сходится и ряд $\sum p_k \mathcal{F}(\alpha_k) = \sum p_k |\beta_k|$. Обратно, если в L_p сходится ряд $\sum p_k |\beta_k|$, то, конечно, сходится и ряд $\sum p_k \beta_k$, а применив преобразование Гильберта, получаем, что сходится и ряд $\sum p_k \alpha_k$. Лемма доказана.

Ряд $\sum_k f_k$ сходится в L_p безусловно, если его сумма не зависит от порядка слагаемых.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{t - z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то он сходится безусловно.

Показателем сходимости последовательности ненулевых комплексных чисел $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ называется величина $\tau\{z_k\} = \inf\{\alpha > 0, \sum_k |z_k|^{-\alpha} < \infty\}$. При этом $\inf \emptyset = +\infty$. Для конечной последовательности $\tau\{z_k\} = 0$. Если m_j – количество членов последовательности на полуинтервале $[2^{j-1}, 2^j)$, то $\tau = -\log_2 R$, где R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_j m_j z^j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) Если ряд $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то справедливо неравенство $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$.

б) Если $\sum_k |\text{Im } z_k|^{-1/q} < \infty$, то ряд f сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Обозначим $x_k = \text{Re } z_k$, $y_k = \text{Im } z_k$. Разобьем множество полюсов $\{z_k\}$ на четыре части, лежащие в четырех квадрантах плоскости $\mathbb{C}$ (квадранты соответствуют знакам x_k и y_k). Поскольку ряд f сходится

в $L_p(\mathbb{R})$ безусловно (следствие 4), каждый из четырех рядов, соответствующих данному разбиению, также сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Достаточно доказать, что для каждого из них $\tau \leq \frac{1}{q}$. Из соображений симметрии можно ограничиться рассмотрением только одного ряда, соответствующего положительному квадранту. Таким образом, считаем, что все полюсы z_k лежат в положительном квадранте, т.е. $x_k, y_k \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Далее, в силу теоремы 2 только для конечного числа полюсов величина y_k может быть меньше 1. Удалив эти полюсы, считаем, что $y_k \geq 1$ для всех k . Итак, для всех полюсов ряда f имеем $y_k \geq 1, x_k \geq 0$. Разобьем теперь ряд f на две части: в один соберем все слагаемые, для которых $x_k \leq y_k$, в другой – остальные слагаемые. Докажем, что для каждого из двух рядов $\tau \leq \frac{1}{q}$. Начнем с первого ряда. Будем его обозначать так же, как исходный ряд, т.е. считаем, что $0 \leq x_k \leq y_k$ для всех k .

Ряд $\operatorname{Im} f = \sum_k \beta_k(t) = \sum_k \frac{y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}$ сходится в L_p . Несложно проверить, что $\frac{y_k}{t^2+y_k^2} \leq \frac{3y_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому ряд $\sum_k \frac{y_k}{t^2+y_k^2}$ также сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через m_j количество тех индексов k , для которых $2^{j-1} \leq y_k < 2^j$. Ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2^j m_j}{t^2+2^{2j}}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Пусть M – норма суммы этого ряда. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} M^p &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_j \frac{2^j m_j}{t^2 + 2^{2j}} \right)^p dt \geq \int_{2^{s-1}}^{2^s} \left(\frac{2^s m_s}{t^2 + 2^{2s}} \right)^p dt \geq 2^{s-1} \left(\frac{2^s m_s}{2^{2s} + 2^{2s}} \right)^p \\ &= 2^{-(s+1)p+s-1} m_s^p. \end{aligned}$$

Итак, $2^{-(s+1)+\frac{s-1}{p}} m_s \leq M$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $2^{s(\frac{1}{p}-1)} m_s = (2^{-\frac{1}{q}})^s m_s$ равномерно ограничена для всех $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, радиус сходимости степенного ряда $\sum_k m_k z^k$ не меньше $2^{-\frac{1}{q}}$, и значит, $\tau\{y_k\} \leq \frac{1}{q}$. Однако, поскольку $|z_k| \geq |y_k|$, имеем $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$. Рассмотрим второй ряд. Будем его обозначать так же, как исходный ряд, т.е. теперь считаем, что $y_k < x_k$ при всех k . На отрицательной полуоси $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$ имеем $\operatorname{Re} \frac{1}{t-z_k} = \alpha_k(t) = \frac{t-x_k}{(t-x_k)^2+y_k^2} < 0$. Ряд $\operatorname{Re} f = \sum_k \frac{t-x_k}{(t-x_k)^2+y_k^2}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, а значит, и в $L_p(\mathbb{R}_-)$. Поскольку $\frac{1}{|t-x_k|} < \frac{2|t-x_k|}{(t-x_k)^2+y_k^2}$ для всех $t \in \mathbb{R}_-$, ряд $\sum_k \frac{1}{|t-x_k|}$ также сходится в $L_p(\mathbb{R}_-)$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через n_j количество тех индексов k , для которых $2^{j-1} \leq x_k < 2^j$. Ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{n_j}{2^{2j-t}}$ сходится в $L_p(\mathbb{R}_-)$. Пусть N – норма суммы этого ряда. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} N^p &= \int_{\mathbb{R}_-} \left(\sum_j \frac{n_j}{2^{2j-t}} \right)^p dt \geq \int_{-2^s}^{-2^{s-1}} \left(\frac{n_s}{2^s - t} \right)^p dt \geq 2^{s-1} \left(\frac{n_s}{2^s + 2^s} \right)^p \\ &= 2^{-(s+1)p+s-1} n_s^p. \end{aligned}$$

Итак, $2^{-(s+1)+\frac{s-1}{p}} n_s \leq N$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Из этого неравенства так же, как и для первого ряда, заключаем, что $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$.

б) Применив соотношение (16), получаем, что выполнены равенства $\|\beta_k\|_p = |y_k|^{\frac{1-p}{p}} \gamma_p = |y_k|^{-\frac{1}{q}} \gamma_p$ для любого k (где γ_p – константа из теоремы 2). Поэтому если $\sum_k |y_k|^{-\frac{1}{q}} < \infty$, то $\sum_k \|\beta_k\|_p < \infty$, следовательно, ряд $\sum_k |\beta_k|$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$. В силу леммы 3 это означает, что ряд f сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Предложение 3 позволяет сделать некоторые выводы о свойствах предельной функции $f(t)$. Поскольку $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q} < 1$, то $\sum_k \frac{1}{|z_k|} < \infty$. Следовательно, функциональный ряд $f(z) = \sum_k \frac{1}{z - z_k}$ сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем полюсов z_k . Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если ряд $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то функция f является аналитической и продолжается в $\mathbb{C}$ до мероморфной функции $f(z)$ с простыми полюсами в точках z_k . Функция $f(z)$ задается тем же рядом, который равномерно сходится на каждом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем полюсов.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В предложении 3 очевиден “зазор” между необходимыми и достаточными условиями. Если ряд $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$, то $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$. Обратное, вообще говоря, не верно: если, например, величины $\operatorname{Im} z_k$ ограничены равномерно по всем k , то, как бы ни возрастали модули $|z_k|$, ряд не будет сходиться в $L_p(\mathbb{R})$ в силу теоремы 2. Для сходимости ряда нужно возрастание не только модулей z_k , но и мнимых частей $\operatorname{Im} z_k$. Далее, в § 7, мы сформулируем соответствующую задачу. В некоторых частных случаях, однако, можно сблизить необходимые и достаточные условия, например в случае, если все полюсы z_k лежат внутри угла $\{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| \geq c|z|\}$, где $c > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Предположим, что $\{z_k\}$ – последовательность комплексных чисел, для которой величина $\frac{|\operatorname{Im} z_k|}{|z_k|}$ ограничена снизу некоторой положительной константой. Тогда условие $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$ является необходимым для сходимости ряда $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t - z_k}$ в $L_p(\mathbb{R})$, а условие $\tau\{z_k\} < \frac{1}{q}$ является достаточным.*

§ 5. Приближение наипростейшими дробями на прямой

Теперь, используя результаты предыдущих параграфов, мы можем получить условия того, что данная функция f с любой точностью приближается в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями, и тем самым полностью охарактеризовать множество S_p .

Напомним, что функция, голоморфная во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *целой*. Порядком *целой функции* Φ называется величина

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r},$$

где $M(r) = \max_{|z| \leq r} |\Phi(r)|$.

ТЕОРЕМА 3. *Функция $f \in L_p(\mathbb{R})$ сколь угодно точно приближается в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями тогда и только тогда, когда она является аналитической на $\mathbb{R}$ и выполнено одно из следующих равносильных условий:*

(i) *функция f продолжается в $\mathbb{C}$ до мероморфной функции $f(z) = \sum_k \frac{1}{z - z_k}$, где $z_1, z_2, \dots$ – конечная или бесконечная последовательность комплексных чисел, причем $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q}$;*

(ii) *функция f является логарифмической производной целой функции порядка не выше $\frac{1}{q}$, т.е. $f(t) = \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, где Φ – целая функция порядка не выше $\frac{1}{q}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Достаточность данных условий вполне естественна. Если функция представляется в виде суммы ряда, сходящегося в L_p , то его частичные суммы, являющиеся наипростейшими дробями, будут давать искомые приближения. Из условий теоремы, однако, не следует сходимости этого ряда в L_p , а лишь сходимости на каждом компакте. Как мы увидим, для ряда из наипростейших дробей сходимости на каждом компакте вместе с условием $f \in L_p$ влечет сходимости в L_p . Необходимость же данных условий менее очевидна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть функция $f = a + ib$ приближается в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями $f_m = a_m + ib_m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\mathcal{F}(a_m)$ сходится к $\mathcal{F}(a)$ в $L_p(\mathbb{R})$. Согласно теореме 1 имеем $\mathcal{F}(a_m) \geq 0$. Если на любом отрезке $[-N, N]$ величина $\rho(N, \mathcal{F}(a_m))$, определяемая формулой (11), стремится к единице при $m \rightarrow \infty$, то $\mathcal{F}(a)$ – тождественная константа, а так как $\mathcal{F}(a) \in L_p$, то эта функция – тождественный нуль. Поскольку $f \in V_p$, применив теорему 1, получаем $|b| \leq \mathcal{F}(a) = 0$, а значит, $b = 0$, и f – тождественный нуль. Если же на некотором отрезке эта величина не стремится к единице, то бесконечно много полюсов дробей f_m находятся внутри некоторого круга (лемма 2). Следовательно, эти полюсы имеют предельные точки. Пусть z_1 – наименьшая по модулю предельная точка (если таковых много, то берем любую). Переходя к подпоследовательности $\{f_m\}$, считаем, что наименьший по модулю полюс f_m стремится к z_1 при $m \rightarrow \infty$. Далее, z_2 – наименьшая по модулю предельная точка полюсов, отличных от тех, которые сходятся к z_1 . Снова переходим к подпоследовательности $\{f_m\}$ и т. д. Получаем последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots$, неубывающую по модулю (она может содержать совпадающие члены). Покажем, что $f(t) = \sum_k \frac{1}{t - z_k}$.

Пусть $f_m(t) = \sum_k \frac{1}{t - z_m^k}$ (сумма конечна). При этом для каждого m упорядочиваем полюсы z_m^k по возрастанию модуля: $|z_m^1| \leq |z_m^2| \leq \dots$. Для любого k имеем $z_m^k \rightarrow z_k$ при $m \rightarrow \infty$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна и содержит, допустим, n членов, то при любом $k > n$ все полюсы z_m^k стремятся к бесконечности при $m \rightarrow \infty$. В силу леммы 2 это означает, что функция $\varphi_m = \mathcal{F}(a_m(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k})$ стремится к тождественной константе равномерно на каждом отрезке при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $\mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k})$ есть тождественная константа, принадлежащая $L_p(\mathbb{R})$, т. е. тождественный нуль. Таким образом, функции $f(t)$ и $\sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}$ имеют одинаковые действительные части. Докажем, что их мнимые части также совпадают. Возьмем достаточно большое m , при котором $\|f - f_m\|_p < \varepsilon$ и первые n полюсов функции f_m достаточно близки к точкам $z_1, \dots, z_n$ соответственно. Обозначим $r_m(t) = f_m(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}$. При больших m имеем

$$\left\| f_m(t) - r_m(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k} \right\|_p < \varepsilon.$$

Поскольку $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - z_k}$, то $\|\operatorname{Re} r_m\|_p < 2\varepsilon$. С другой стороны, $r_m \in V_p$, и, применив теорему 1, получаем $|\operatorname{Im} r_m| \leq \mathcal{F}(\operatorname{Re} r_m)$, откуда имеем

$$\|\operatorname{Im} r_m\|_p \leq \|\mathcal{F}(\operatorname{Re} r_m)\|_p \leq \|\mathcal{F}\|_p \cdot 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\|\operatorname{Im}(f_m(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t-z_k})\|_p < 3\varepsilon$. Итак, мнимая часть суммы $\sum_{k=1}^n \frac{1}{t-z_k}$ является пределом в $L_p(\mathbb{R})$ мнимых частей функций f_m при $m \rightarrow \infty$, а значит, совпадает с $\operatorname{Im} f$. Это завершает доказательство в случае конечного числа предельных точек z_k .

Допустим теперь, что последовательность $\{z_k\}$ бесконечна. Покажем вначале, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-z_k}$ сходится в $L_p(\mathbb{R})$. Пусть $\frac{1}{t-z_k} = \alpha_k(t) + i\beta_k(t)$ и $\frac{1}{t-z_m^k} = \alpha_m^k(t) + i\beta_m^k(t)$ (напомним, что z_m^k – полюсы f_m). Для произвольного $n \geq m$ теорема 1 влечет

$$\sum_{k=1}^n |\beta_m^k(t)| \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{F}(\alpha_m^k)[t] \leq \mathcal{F}(\operatorname{Re} f_m)[t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

При $m \rightarrow \infty$ левая часть неравенства стремится в $L_p(\mathbb{R})$ к $\sum_{k=1}^n |\beta_k|$ (так как $z_m^k \rightarrow z_k$), а правая – к $\mathcal{F}(a)$. Следовательно, $\sum_{k=1}^n |\beta_k| \leq \mathcal{F}(a)$ для любого n , и по теореме Лебега [13, гл. 5, § 5] ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|$ сходится в L_p . Тогда согласно лемме 3 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-z_k}$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$ к некоторой функции $\varphi(t)$. Теперь проводим те же рассуждения, что и для случая конечного числа полюсов $\{z_k\}$, показываем, что разность $f_m - \varphi$ стремится к тождественной константе C при $m \rightarrow \infty$. Однако так как $C = f - \varphi \in L_p$, то $C = 0$ и, следовательно, $f = \varphi$. Применив теперь предложения 3 и 4, получаем, что функция f аналитическая и удовлетворяет условию (i). Функция $f(z)$ представляется в виде $f(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$, где $\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_k})$. Поскольку ряд $\sum_k \frac{1}{|z_k|}$ сходится, произведение $\Phi(z)$ сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}$ и представляет целую функцию с нулями $\{z_k\}$. Так как $\tau\{z_k\} \leq \frac{1}{q} < 1$, то по теореме Бореля [14, гл. 7, § 2] порядок этой функции равен $\tau\{z_k\}$, что доказывает свойство (ii).

Обратно, если выполнено (ii), то, поскольку порядок целой функции Φ не превосходит $\frac{1}{q} < 1$, по той же теореме Бореля эта функция имеет вид $\Phi(z) = C \prod_k (1 - \frac{z}{z_k})$, где C – константа, а $\{z_k\}$ – последовательность комплексных чисел, показатель сходимости которой $\tau\{z_k\}$ равен порядку функции Φ . Тогда $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \sum_k \frac{1}{z-z_k} = f(z)$. Если ограничение функции f на действительную ось принадлежит $L_p(\mathbb{R})$, то ряд $\sum_k \frac{1}{t-z_k}$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$. В самом деле, ряд $\sum_k |\beta_k(t)|$ сходится в любой точке $t \in \mathbb{R}$ и, как показано ранее, почти всюду не превосходит $\mathcal{F}(\operatorname{Re} f)$. Следовательно, он сходится в $L_p(\mathbb{R})$, из чего по лемме 3 следует сходимость ряда $\sum \frac{1}{t-z_k}$ в $L_p(\mathbb{R})$. При этом предел равен $f(t)$, так как ряд сходится к этой функции в каждой точке t . Следовательно, f приближается в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями – частичными суммами ряда.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если порядок функции Φ равен нулю, то она является полиномом, и тогда функция f – либо тождественный нуль, либо наипростейшая дробь. С помощью предложения 3 легко строятся примеры целых функций Φ любого порядка $s \in (0, \frac{1}{q})$, для которых ограничение функции $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ на действительную ось принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Достаточно взять, например, $\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{iy_k})$, где $y_k > 0$, $\tau\{y_k\} = s$ и $\sum_k |y_k|^{-s} < \infty$.

§ 6. Наипростейшие дроби на полупрямой

Задача о приближении функций наипростейшими дробями ставится для пространства L_p не только на прямой, но и на других многообразиях. Так, для отрезка задача элементарна: в пространстве $L_p[0, 1]$ наипростейшие дроби плотны, поскольку они плотны в $C[0, 1]$ (этот факт следует из гораздо более общих результатов работы [2], читатель также без труда докажет это самостоятельно). На полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, как было доказано П. А. Бородиным [15], при $p < 2$ конус $V_p(\mathbb{R}_+)$ не совпадает с $L_p(\mathbb{R}_+)$. Мы дополним этот результат и покажем, что $V_p(\mathbb{R}_+) = L_p(\mathbb{R}_+)$ при всех $p \geq 2$.

ТЕОРЕМА 4. *При $p \in (1, 2)$ конус $V_p(\mathbb{R}_+)$ не совпадает со всем пространством $L_p(\mathbb{R}_+)$, а при $p \in [2, +\infty)$ имеем $V_p(\mathbb{R}_+) = L_p(\mathbb{R}_+)$.*

Для случая $p \in (1, 2)$ мы воспроизведем доказательство П. А. Бородина. Оно основано на следующем общем факте, называемом иногда леммой Фаркаша и являющемся следствием теоремы отделимости [9, § 2.2].

ЛЕММА 4. *Замкнутый выпуклый конус K в нормированном пространстве X не совпадает со всем X тогда и только тогда, когда существует ненулевой функционал $x^* \in X^*$, для которого $\operatorname{Re}(x^*, x) \geq 0$ при любом $x \in K$.*

Иными словами, $V_p \neq L_p$ тогда и только тогда, когда сопряженный конус $V_p^*(\mathbb{R}_+)$ отличен от $\{0\}$. Для доказательства теоремы 4 в случае $p \geq 2$ нам понадобятся еще две простые леммы.

ЛЕММА 5. *В нормированном пространстве X дано замкнутое выпуклое множество $U \subset X$. Если последовательность точек U слабо сходится к $x \in X$, то $x \in U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \notin U$, то по теореме отделимости [10, § 1.3] найдется функционал $x^* \in X^*$, для которого $\sup_{u \in U} \operatorname{Re}(x^*, u) < \operatorname{Re}(x^*, x)$, что противоречит условию слабой сходимости. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если последовательность функций $r_n \in L_p(\mathbb{R}_+)$, $p \in (1, +\infty)$, сходится равномерно к нулю на каждом компакте (т. е. для любого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ ограничения r_n на $[a, b]$ при всех достаточно больших n принадлежат $L_\infty[a, b]$ и сходятся к нулю в $L_\infty[a, b]$ при $n \rightarrow \infty$), а нормы $\|r_n\|_p$ равномерно ограничены, то эта последовательность слабо сходится к нулю в $L_p(\mathbb{R}_+)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой непрерывной финитной функции φ имеем $\int_0^\infty \varphi r_n dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку множество таких функций φ плотно в сопряженном пространстве $L_q(\mathbb{R}_+)$, то r_n слабо сходятся к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $p \in (1, 2)$. Согласно лемме 4 достаточно предъявить функцию $\varphi \in L_q(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \geq 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. В качестве такой функции подходит $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t}}{t+1}$. Действительно, $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(t+1)(t-z)} dt = \frac{2\pi i}{\sqrt{z}+i}$, где $\arg \sqrt{z} \in [0, \pi)$. Легко проверить, что $\operatorname{Re} \frac{2\pi i}{\sqrt{z}+i} \geq 0$ для любого $z \notin [0, +\infty)$.

В случае $p \in [2, +\infty)$ мы покажем, что функция $-\frac{1}{x+1}$ принадлежит конусу $V_p(\mathbb{R}_+)$. Из этого будет следовать, что $V_p = L_p$. В противном случае согласно лемме 4 найдется функция $\varphi \in L_q(\mathbb{R}_+)$ такая, что $F(z) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x-z} dx \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, причем $F(z) > 0$ для некоторого z . Так как $\pm \frac{1}{x+1} \in V_p$, то $\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x+1} dx = 0$. Таким образом, $\min_z F(z) = F(-1) = 0$. Поскольку F – гармоническая функция, а $z = -1$ – внутренняя точка ее области определения, получаем $F \equiv 0$ [16, § 28], что приводит к противоречию.

Для того чтобы установить, что $-\frac{1}{x+1} \in V_p(\mathbb{R}_+)$, рассмотрим для любого $n \geq 0$ интегралы

$$f_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^n \frac{\sqrt{t}}{(t+1)(t-x)} dt, \quad r_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_n^\infty \frac{\sqrt{t}}{(t+1)(t-x)} dt, \\ x \in [0, +\infty), \quad x \neq n,$$

понимаемые в смысле главного значения. Заменой $t = s^2$ они легко берутся в явном виде. Например,

$$r_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{\pi(x+1)} \ln \left| \frac{\sqrt{n}-\sqrt{x}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}} \right| + \frac{2}{\pi(x+1)} \left(\arctg \sqrt{n} - \frac{\pi}{2} \right). \quad (17)$$

Отсюда получаем $f_n(x) + r_n(x) = r_0(x) = -\frac{1}{x+1}$. Обозначим через $\psi_n(t)$ функцию, равную $-\frac{\sqrt{t}}{t+1}$ при $t \in [0, n]$ и нулю при остальных t . Так как $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\psi_n)) = -\psi_n \geq 0$, то согласно следствию 1 имеем $\mathcal{F}(\psi_n) \in V_p(\mathbb{R})$. А поскольку f_n является ограничением функции $\mathcal{F}(\psi_n)$ на полупрямую $\mathbb{R}_+$, имеем $f_n \in V_p(\mathbb{R}_+)$. Покажем теперь, что последовательность $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям леммы 6 при любом $p \geq 2$. В этом случае она будет слабо сходиться к нулю в $L_p(\mathbb{R}_+)$, а последовательность $f_n = -\frac{1}{x+1} - r_n$, в свою очередь, будет слабо сходиться к $-\frac{1}{x+1}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, применив лемму 5, получим $-\frac{1}{x+1} \in V_p(\mathbb{R}_+)$, что завершит доказательство.

Второе слагаемое в (17) сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $\mathbb{R}_+$, а его норма в $L_p(\mathbb{R}_+)$ равномерно ограничена при всех n . Поэтому оно удовлетворяет условиям леммы 6. Модуль первого слагаемого при каждом $x \neq n$ мажорируется величиной $G_n(x) = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left| \frac{\sqrt{n}-\sqrt{x}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}} \right| \right|$. Достаточно показать, что функции G_n также удовлетворяют условиям леммы 6. После замены $x = s^2 n$ получаем $G_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \eta(s)$, где $\eta(s) = \frac{1}{s} \left| \ln \left| \frac{1-s}{1+s} \right| \right|$. Функция η непрерывна во всех точках $s \in [0, +\infty)$, кроме $s = 1$, и принадлежит $L_p(\mathbb{R}_+)$ при любом конечном $p > 1$. На отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ эта функция ограничена некоторой константой M , поэтому $G_n(x) \leq M n^{-\frac{1}{2}}$ при всех $x \in [0, \frac{n}{4}]$. Следовательно, функции G_n сходятся к нулю на каждом компакте при $n \rightarrow \infty$. Наконец,

$$\int_0^\infty G_n^p(x) dx = n^{-p/2} \int_0^\infty 2n s \eta^p(s) ds = 2n^{1-\frac{p}{2}} \int_0^\infty s \eta^p(s) ds.$$

Поскольку функция $\eta(s)$ убывает при $s \rightarrow \infty$, как $1/s^2$, последний интеграл сходится, а так как $p \geq 2$, то множитель $2n^{1-\frac{p}{2}}$ ограничен при $n \in \mathbb{N}$ (это единственное место в доказательстве, где используется неравенство $p \geq 2$). Таким образом, нормы функций G_n в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+)$ равномерно ограничены. Поэтому функции G_n удовлетворяют условиям леммы 6, что и требовалось доказать.

§ 7. Несколько нерешенных задач

В заключение мы сформулируем несколько открытых на данный момент задач, связанных с аппроксимацией функций наипростейшими дробями в L_p .

ПРОБЛЕМА 1. Теорема 2 дает точную по порядку оценку снизу на L_p -норму мнимой части наипростейшей дроби g . Какова точная константа в этой оценке? Каковы точные константы в оценках снизу L_p -нормы g и L_p -расстояния от g до пространства $H_p(\mathbb{C}^+)$ (предложение 2)?

ПРОБЛЕМА 2. Охарактеризовать функции, сколь угодно точно приближаемые в $L_p(\mathbb{R})$ выпуклыми комбинациями наипростейших дробей с полюсами вне полосы $|\operatorname{Im} z| \leq c$ (см. замечание 3).

ПРОБЛЕМА 3. Каков критерий сходимости ряда $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t-z_k}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ в терминах последовательности полюсов $\{z_k\}$?

ПРОБЛЕМА 4. Для луча $\mathbb{R}_+$ охарактеризовать конус $V_p(\mathbb{R}_+)$ при $p \in (1, 2)$ и охарактеризовать множество $S_p(\mathbb{R}_+)$ при всех $p \in (1, +\infty)$.

Список литературы

1. В. И. Данченко, “Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 63–80; англ. пер.: V. I. Danchenko, “Estimates of the distances from the poles of logarithmic derivatives of polynomials to lines and circles”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 425–440.
2. В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:3–4 (2001), 502–507.
3. О. Н. Косухин, “Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 4, 54–59; англ. пер.: O. N. Kosukhin, “Approximation properties of the most simple fractions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:4 (2001), 36–40.
4. П. А. Бородин, О. Н. Косухин, “О приближении наипростейшими дробями на действительной оси”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, “Approximation by the simplest fractions on the real axis”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6.
5. А. В. Манжиров, А. Д. Полянин, *Справочник по интегральным уравнениям: методы решения*, Факториал, М., 2000; англ. пер.: A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*, 2nd edition, CRC, Boca Raton, FL, 2008.
6. S. K. Pichorides, “On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov”, *Studia Math.*, **44** (1972), 165–179.
7. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 3-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 2-го изд.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon, Oxford–New York–Paris; Addison-Wesley, Reading, MA–London, 1966.
8. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
9. J. M. Borwein, A. S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples*, CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC, **3**, Springer-Verlag, New York, 2000.

10. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
11. A. Barvinok, *A course in convexity*, Grad. Stud. Math., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
12. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
13. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 6-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
14. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 2. *Дальнейшее построение теории*, 2-е изд., Наука, М., 1968.
15. П. А. Бородин, “Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 803–810; англ. пер.: P. A. Borodin, “Estimates of the distances to direct lines and rays from the poles of simplest fractions bounded in the norm of L_p on these sets”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 725–732.
16. И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными*, 3-е изд., Физматгиз, М., 1961; англ. пер. 1-го изд.: I. G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1954.

В. Ю. ПРОТАСОВ (V. YU. PROTASOV)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protassov@yandex.ru

Поступило в редакцию
29.08.2007