Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовой интерполяцией и учетом положения точки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 4, 49–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:36:14

УДК 517.5

Р. М. Тригуб

Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовой интерполяцией и учетом положения точки

Доказана общая прямая теорема об одновременном приближении гладких периодических функций и их производных тригонометрическими полиномами и их производными с эрмитовой интерполяцией и учетом положения точки. Исследован порядок аппроксимации полиномами, имеющими графики, расположенные выше и ниже графика функции на заданных интервалах. Доказано несколько неравенств для эрмитовой интерполяции с абсолютными константами (при любой системе узлов). Впервые получена теорема о приближении функций полиномами порядка наилучшего приближения при интерполяции в заданной системе узлов. Кроме того, указан способ построения эрмитовых интерполяционных тригонометрических полиномов для периодических функций (в случае одного узла – это тригонометрический полином Тейлора).

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: тригонометрический полином Тейлора, наилучшее приближение, модуль гладкости, двусторонние оценки приближения, кусочно односторонняя аппроксимация, факторизация дифференциальных операторов.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – множество 2π -периодических функций из $C^r(\mathbb{R})$, $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|$ и $\tau(x) = \sum_{k=p}^n c_k e^{ikx}$ – тригонометрический полином со спектром на $[p, n]$, $p \leq n$; при $n = -p \in \mathbb{Z}_+$ это полином порядка не выше n . Через $\gamma(a, b, \dots, w)$ будем обозначать положительные величины, зависящие лишь от $a, b, \dots, w$.

Пусть даны узлы интерполяции $x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_1 + 2\pi = x_{m+1}$, $\Pi = \{x_s\}$.

Рассмотрим сначала случай $m = 1$ и $x_1 = 0$. Построим полином наименьшего порядка с условием $\tau^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq r$ (тригонометрический полином Тейлора). Искомый эрмитов полином естественно искать в виде

$$\sum_{k=0}^r f^{(k)}(0) h_{k,r}(x),$$

где $h_{k,r}$ – полином порядка не выше $\frac{r+1}{2}$, удовлетворяющий условию

$$h_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{r+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (1)$$

При четном r полином $h_{k,r}$ определяется однозначно (явные формулы см. ниже в лемме 1), при нечетном r полагаем $h_{0,r} \equiv 1$, а при $k \geq 1$ имеем $h_{k,r} = h'_{k+1,r+1}$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, и для любого $x \in [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$ существует $\theta \in [0, 1]$ такое, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x) + [D_{2n}f(\theta x) - D_{2n}f(0)] h_{2n,2n}(x),$$

где $D_{2n}f(x) = q_n(\frac{d^2}{dx^2})f(x)$ и $q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x + k^2)$;

б) для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, существует тригонометрический полином τ_f порядка не выше $\frac{r+1}{2}$ такой, что для $\nu \in [0, r]$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_f^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r) \omega(f^{(r)}; \pi) \left| \sin \frac{x}{2} \right|^{r-\nu},$$

где ω – модуль непрерывности.

Зная способ построения эрмитова полинома для одного узла, можно найти эрмитов полином для любого числа узлов (см. рассуждение, приведенное перед леммой 2).

В теории аппроксимации хорошо известны теоремы о порядке, который определяется модулем гладкости ω_k функции или ее производной, приближения гладких функций полиномами растущих порядков (см., например, [1, гл. IV] или [2, гл. IV]). В работе [3] получена общая теорема о приближении функций на отрезке вещественной оси алгебраическими полиномами с эрмитовой интерполяцией в заданных узлах, а в работе [4] изучалась и односторонняя аппроксимация при дополнительных условиях, налагаемых на функцию.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и любой системы узлов $\Pi = \{x_s\}$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и $n \geq [\frac{m(r+1)}{2}]$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа) существует полином τ_n порядка не выше n такой, что при $\nu \in [0, r]$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_n^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, k, \Pi) \delta_n^{r-\nu}(x) \omega_k \left(f^{(r)}; \frac{1}{n} (n \delta_n(x))^{\frac{1}{k}} \right),$$

где

$$\delta_n(x) = \min \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|, 1 \leq s \leq m \right\}.$$

Показатель степени $\frac{1}{k}$ увеличить нельзя.

Подобная оценка приближения функций на отрезке алгебраическими полиномами наименьшей степени получена в работе [5], в случае полиномов любой степени и двух узлов интерполяции в концах отрезка – в [6], а в общем случае – в [3].

В теореме 2, кроме прочего, найден наименьший порядок полиномов, которые осуществляют указанное приближение. Поэтому константа γ зависит,

конечно, от системы узлов $\{x_s\}$, точнее от $\min_s |x_s - x_{s+1}|$. При изучении монотонных аппроксимаций появились результаты о порядке приближения с константами, зависящими лишь от числа m узлов (см., например, [7]). Иногда при достаточно больших n можно поставить в соответствующих неравенствах, как оказалось, абсолютные константы (см. ниже теорему 3). Заметим, что в случае равноотстоящих m узлов еще Д. Джексон построил такие интерполяционные полиномы порядка $2m$, а С. Н. Бернштейн уменьшил порядок до $m(1+\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ (см., например, [8, гл. 10]).

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *существует абсолютная константа c такая, что для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ и для любых наборов $\{x_s\}$, $\{y_{s,\nu}\}$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$, можно построить тригонометрический полином τ любого достаточно большого порядка, зависящего от r и $\min |x_s - x_{s+1}|$, который удовлетворяет условиям*

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}, \quad 1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad \|\tau\| \leq c \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}|;$$

б) *для любых узлов $\Pi = \{x_s\}$ и $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon, \Pi)$ такое, что при любом $n \geq N$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ можно построить полином τ_n порядка не выше n , удовлетворяющий условиям $\tau_n(x_s) = f(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, и*

$$\|f - \tau_n\| \leq (2 + \varepsilon) E_n^T(f),$$

где $E_n^T(f)$ — наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве $C(\mathbb{T})$. При этом множитель $(2 + \varepsilon)$ нельзя заменить на $(2 - \varepsilon)$ ни при одном n .

Отсюда следует, что в случае равноотстоящих узлов, когда, например, $x_s = \frac{2s\pi}{2m+1}$, $0 \leq s \leq 2m$, и лагранжевой интерполяции ($r = 0$) можно брать полиномы порядка $n \geq N = cm \log(m+1)$, и порядок приближения будет наилучшим порядком с абсолютной константой.

Рассмотрим теперь односторонние приближения, когда график полинома находится выше (или ниже) графика функции. Прямые теоремы о таких приближениях уже довольно давно успешно применены к доказательству тауберовых теорем с остаточным членом (см., например, [9, гл. I]).

Кусочно односторонняя аппроксимация не исследована, а из нее следует, например, копозитивная аппроксимация, когда знак приближающего полинома совпадает со знаком функции на конечном числе интервалов. Здесь функция предполагается, конечно, вещественной, а знаки для $f - \tau_n$ чередуются. Отметим, что не всегда существует полином (и, вообще, гладкая функция) с графиком, находящимся выше графика непрерывной функции, который должен еще совпадать с функцией в данной точке. Так, для функции $f(x) = \sqrt{|x|} \operatorname{sign} x$ нет полинома с графиком, находящимся всюду выше или ниже графика функции при условии интерполяции в нуле, а переход в нуле с одной стороны графика на другую возможен лишь в одном из двух вариантов (см. критерий в лемме 11). Поэтому в следующей теореме предполагается дифференцируемость функции. В силу периодичности функции и полинома число m узлов интерполяции (перемены знака) должно быть четным.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in C^1(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $\{x_s\}_{s=1}^m$ – узлы и число m четное. Для любого $n \geq \frac{m}{2}$ существует полином τ_n порядка не выше n такой, что при $x \in [x_s, x_{s+1}]$, $s \in [1, m]$, и δ_n из теоремы 2 имеем

$$\omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right)\delta_n(x) \leq (-1)^s(f(x) - \tau_n(x)) \leq \gamma(k, \Pi)\omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right)\delta_n(x).$$

Доказательства теорем 1–4 приводятся ниже, в § 3. Отметим также, что оператор τ_n в теореме 4 не является линейным. В случае функций, заданных на отрезке, и алгебраических полиномов можно построить линейные операторы одностороннего приближения при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на функцию [3]. Основная идея построения нелинейного оператора одностороннего приближения состоит в добавлении к полиному “хорошего” приближения специального полинома (лемма 10, случай алгебраических полиномов см. в [10]).

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [11].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Спектром $\text{спес } f$ функции $f \in L(\mathbb{T})$ называют множество номеров ее коэффициентов Фурье $\hat{f}(k)$, которые не равны нулю. При сдвиге, т. е. при замене x на $x + h$, спектр функции не меняется, а при умножении функции на e^{iqx} , $q \in \mathbb{Z}$, происходит сдвиг спектра на q .

Ближе всего к алгебраическим полиномам находятся тригонометрические полиномы степенного типа (спектр на $\mathbb{Z}_+$). Достаточно сделать замену $e^{ix} = z$. Например, лагранжев интерполяционный полином для системы узлов $\{x_s\}$: $x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = x_1 + 2\pi$, определяемый условиями $\tau(x_s) = y_s$, $1 \leq s \leq m$, $\text{спес } \tau \subset [0, m-1]$, равен

$$\sum_{s=1}^m y_s \frac{\prod_{k \neq s} (e^{ix} - e^{ix_k})}{\prod_{k \neq s} (e^{ix_s} - e^{ix_k})}.$$

Приведем простые свойства полиномов, которые используются далее.

I. Полином $\tau(z) = \sum_{k=p}^n \hat{\tau}(k) e^{ikz}$ с условиями $n \geq p$ и $\hat{\tau}(p)\hat{\tau}(n) \neq 0$ имеет в полосе $\text{Re } z \in (a, a + 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, ровно $n - p$ нулей (с учетом кратностей).

II. Для любого набора различных точек $\{z_\nu\}$, $1 \leq \nu \leq k$, из указанной в утверждении I полосы и натуральных чисел $\{r_\nu\}$, $1 \leq \nu \leq k$, с условием $\sum_{\nu=1}^k r_\nu = n - p + 1$, а также для любого набора комплексных чисел $\{y(s)\}$, $0 \leq s \leq n - p$, существует единственный полином τ со спектром в $[p, n]$, удовлетворяющий условиям

$$\tau^{(s)}(z_\nu) = y\left(\sum_{q=0}^{\nu-1} r_q + s\right), \quad 1 \leq \nu \leq k, \quad 0 \leq s \leq r_\nu - 1.$$

Для того чтобы при вещественных $\{z_\nu\}$ и $\{y(s)\}$ соответствующий полином принимал на $\mathbb{R}$ лишь вещественные значения, спектр его должен быть симметричным относительно нуля ($p = -n$).

III. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{Z}$. Если полином τ удовлетворяет условиям $\tau^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq s \leq m$, а $g(x) = e^{iqx}f(x)$, то полином $t(x) = e^{iqx}\tau(x)$ удовлетворяет условиям $t^{(\nu)}(x_s) = g^{(\nu)}(x_s)$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq s \leq m$.

IV. Пусть $\text{спес } \tau \subset [p, n]$ и $\hat{\tau}(n) \neq 0$, а $\text{спес } t \subset [k, m]$ и $\hat{t}(m) \neq 0$. Тогда при $n - p \geq m - k \geq 0$ имеем

$$\tau(x) = a(x)t(x) + b(x),$$

где a и b – полиномы со спектрами соответственно в $[p - k, n - m]$ и $[p, p + m - k - 1]$ (полином со спектром в $[p, p - 1]$ считается равным нулю тождественно). В частности, при $p = -n$ и $k = -m$, $m \leq n$, имеем

$$\tau(x) = a(x)t(x) + e^{i(m-n)x}b(x),$$

где $\text{спес } a \in [m - n, n - m]$ и $\text{спес } b \in [-m, m - 1]$.

Исследуем теперь вопрос: как найти эрмитов интерполяционный полином $\tau_{f,n}$, определяемый условиями $\tau_{f,n}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $0 \leq \nu \leq r$, $1 \leq s \leq m$?

Рассмотрим сначала случай $m = 1$ и $x_1 = 0$ (полином Тейлора) при четном $r = 2n$. В силу свойства II полином $h_{k,2n}$ порядка не выше n условием (1), т. е. по производным $h_{k,2n}^{(\nu)}(0)$, $0 \leq \nu \leq 2n$, определяется однозначно. Поэтому

$$h_{k,2n}(-x) = (-1)^k h_{k,2n}(x), \quad h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x).$$

Кроме того, легко видеть, что

$$h_{0,2n}(x) \equiv 1, \quad h_{2n,2n}(x) = \frac{2^n}{(2n)!} (1 - \cos x)^n,$$

и при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$h'_{2k-1,2n}(x) = h_{2k-2,2n}(x) - c_{k,n} h_{2n,2n}(x),$$

где числовой множитель $c_{k,n}$ определяется однозначно, если учесть, что интеграл от h' по периоду равен нулю. Это рекуррентные формулы: по $h_{2n,2n}$ можно найти $h_{2n-1,2n}$, $h_{2n-2,2n}$ и т. д.

Приведем явные формулы для $h_{k,2n}$.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) если $q_n(x) = \prod_{\nu=1}^n (x + \nu^2) = \sum_{s=0}^n a_{s,n} x^s$, то

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{[\frac{k+1}{2}] \leq s \leq n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x);$$

б) имеем $h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x)$, а при $0 \leq k \leq n$

$$h_{2k,2n}(x) = \sum_{s=k}^n b_{s,k} (1 - \cos x)^s, \quad b_{s,k} = \frac{2^{2k-s}}{(2k)! (2s)!} \frac{d^{2s}}{dx^{2s}} \{(\arcsin x)^{2k}\}_{x=0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку $a_{n,n} = 1$, то $h_{2n,2n}$ – тот же полином. Проверим, что $h_{k,2n}$ удовлетворяет условию (1).

Имеем

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x),$$

откуда $h'_{k,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x)$, $1 \leq k \leq 2n$, при четном k , а при нечетном k

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x).$$

Найдем по указанной формуле $h_{0,2n}$.

Поскольку оператор $\frac{d^2}{dx^2} + n^2$ понижает порядок n полинома τ_n и умножает свободный член $\hat{\tau}_n(0)$ на n^2 , то

$$h_{0,2n}(x) = \sum_{s=0}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s)}(x) = \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} + \nu^2 \right) h_{2n,2n}(x) = (n!)^2 \hat{h}_{2n,2n}(0).$$

Однако

$$\hat{h}_{2n,2n}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{2n,2n}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{4^{n+1}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u du = \frac{1}{(n!)^2},$$

так что $h_{0,2n}(x) \equiv 1$. Теперь индукцией по k (от $k-1$ к k) легко получить

$$h_{k,2n}(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{2n+1+\frac{1+(-1)^k}{2}}), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 \leq k \leq 2n.$$

б) Любой четный тригонометрический полином можно представить в указанном виде. Нужно только определить коэффициенты $b_{s,k}$.

После замены $\sin \frac{x}{2} = y$ при $y \rightarrow 0$ полином $h_{2k,2n}$ должен вести себя следующим образом:

$$\sum_{s=k}^n b_{s,k} \cdot 2^s y^{2s} = \frac{(2 \arcsin y)^{2k}}{(2k)!} + O(y^{2n+2}).$$

Это возможно лишь в случае

$$b_{s,k} \cdot 2^s (2s)! = \frac{4^k}{(2k)!} \frac{d^{2s}}{dy^{2s}} \{(\arcsin y)^{2k}\}_{y=0}, \quad k \leq s \leq n,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что формула из утверждения а) леммы 1 получена при участии В. П. Заставного.

Приведем некоторые свойства полиномов $h_{k,2n}$, которые следуют (см. ниже) из леммы 1:

α) для любых $k \in [1, 2n]$ и $x \in [0, \pi]$

$$h_{k,2n}(x) \leq \frac{x^k}{k!} \leq \frac{\pi^k}{k!} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^k, \quad h''_{k+1,2n}(x) \leq h'_{k,2n}(x) \leq h_{k-1,2n}(x);$$

$\beta)$ для любых $k \in [1, n]$ и $x \in [0, \pi]$

$$\frac{(2 \sin \frac{x}{2})^{2k}}{(2k)!} \leq h_{2k, 2n}(x), \quad \frac{(2 \sin \frac{x}{2})^{2k-1}}{(2k-1)!} \cos \frac{x}{2} \leq h_{2k-1, 2n}(x);$$

$\gamma)$ $h'_{2k, 2n}(x) > 0$, $x \in (0, \pi)$, и $h'_{2k-1, 2n}(x) > 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

$\delta)$ $h_{2k, 2n}(x + \pi)$ – полином с положительными коэффициентами.

Для доказательства этих свойств заметим, что $a_{s, n} > 0$ при $0 \leq s \leq n$. Проверим, что и коэффициенты $b_{s, k}$, $0 \leq k \leq s \leq n$, положительны. Биномиальный степенной ряд $(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеет при четных степенях y положительные коэффициенты. Следовательно, и проинтегрированный ряд для $\arcsin y$ имеет положительные коэффициенты. К тому же в формуле из утверждения б) леммы 1 при переходе от n к $n + 1$ добавляется лишь одно слагаемое.

Утверждение а) следует теперь из рекуррентной формулы индукцией по k с учетом того, что $h_{2n, 2n}(x) > 0$ на $(0, 2\pi)$, а $h'_{2n, 2n}(x) > 0$ на $(0, \pi)$.

Для доказательства $\beta)$ и $\gamma)$ нужно в формуле утверждения б) леммы 1 оставить только первое слагаемое для $h_{2k, 2n}$ и учесть, что $h_{2k-1, 2n} = h'_{2k, 2n}(x)$, $b_{k, k} = \frac{2^k}{(2k)!}$ и $h''_{2n, 2n}(x) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Утверждение $\delta)$ следует из утверждения а) или б) леммы 1 и разложения

$$h_{2n, 2n}(x) = \frac{4^n}{(2n)!} \left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} \right)^{2n} = \frac{1}{(2n)!} \sum_{\nu=-n}^n (-1)^\nu \frac{(2n)!}{(n+\nu)!(n-\nu)!} e^{i\nu x}.$$

Используя найденную выше формулу Тейлора (эрмитов полином для одного узла), можно построить эрмитов полином для функции с любым числом узлов $\{x_s\}$: $\tau_{f, r}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $0 \leq \nu \leq r_s$, $1 \leq s \leq m$.

Пусть t_1 – нетривиальный полином наименьшего порядка, удовлетворяющий условиям $t_1^{(\nu)}(x_1) = 0$, $0 \leq \nu \leq r_1$. Полагаем

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k, r_1}(x - x_1)}{t_1(x)}.$$

Тогда полином

$$\sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k, r_1}(x - x_1) + t_1(x) \sum_{k=0}^{r_2} f^{(k)}(x_2) h_{k, r_2}(x - x_2)$$

является эрмитовым для f в двух узлах x_1 и x_2 . Если f_2 – частное от деления разности между функцией f и этим полиномом на нетривиальный полином t_2 наименьшего порядка, удовлетворяющий условиям

$$t_2^{(\nu)}(x_1) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq r_1, \quad t_2^{(\nu)}(x_2) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq r_2,$$

то полином

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1) h_{k, r_1}(x - x_1) + t_1(x) \sum_{k=0}^{r_2} f^{(k)}(x_2) h_{k, r_2}(x - x_2) \\ & + t_2(x) \sum_{k=0}^{r_3} f^{(k)}(x_3) h_{k, r_3}(x - x_3) \end{aligned}$$

является эрмитовым для функции f в трех узлах x_1, x_2 и x_3 . И так далее.

Считаем для простоты, что $r_1 = r_2 = \dots = r$. Если еще учесть, что при любых $q \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in [0, \frac{r+1}{2}]$ выполнено

$$|h_{k,r}^{(q)}(x)| \leq \gamma(r, q) \left| \sin \frac{x}{2} \right|^{(k-q)_+}, \quad a_+ = \max\{a, 0\}$$

(при $k \leq q$ неравенство очевидно, а при $k > q$ нужно проинтегрировать $k-q$ раз по $[0, x]$ это неравенство при $k = q$), то из предыдущего рассуждения получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Для любого набора узлов $\Pi = \{x_s\}$ и чисел $\{y_{s,\nu}\}$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$, существует единственный тригонометрический полином τ со спектром на $[p, n]$, где $n - p = m(r+1) - 1$, удовлетворяющий условиям $\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$. При этом для всех $x \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$*

$$|\tau^{(q)}(x)| \leq \gamma(r, q, \Pi) \sum_{\nu=0}^r \sum_{s=1}^m |y_{s,\nu}|.$$

Подобное утверждение справедливо и в случае алгебраических полиномов. Уточним его в случае двух узлов ($m = 2$).

ЛЕММА 3. *При любом $r \in \mathbb{Z}_+$ и любом $k \in [0, r]$ алгебраический полином $p_{k,r}$ степени $2r+1$, определяемый условиями*

$$p_{k,r}^{(\nu)} = 0, \quad \nu \neq k, \quad p_{k,r}^{(k)}(0) = 1, \quad p_{k,r}^{(\nu)}(1) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq r,$$

обладает следующими свойствами на $[0, 1]$:

$$\frac{x^k}{k!} (1-x)^{r+1} \leq p_{k,r}(x) \leq \frac{x^k}{k!} (1-x^{r+1-k}), \quad |p_{k,r}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, \nu) x^{(k-\nu)_+}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r = 0$ имеем $p_{0,0}(x) = 1 - x$. Считаем далее, что $r \in \mathbb{N}$.

При $k = 0$ имеем $p_{0,r}(0) = 1$, $p_{0,r}^{(\nu)}(0) = 0$, $1 \leq \nu \leq r$, $p_{0,r}^{(\nu)}(1) = 0$, $0 \leq \nu \leq r$. Проверим, что $p'_{0,r}(x) < 0$ на $(0, 1)$.

Если бы полином $p'_{0,r}$ степени $2r$, уже имеющий $2r$ нулей в концах отрезка $[0, 1]$, имел бы еще один нуль, то $p_{0,r} = \text{const}$, чего быть не может. Поэтому $p'_{0,r}(x) < 0$ и $0 < p_{0,r}(x) < 1$ на $(0, 1)$.

Пусть теперь $k \in [1, r]$, при этом $p_{k,r}^{(k)}(0) = 1$. Проверим, что $p_{k,r}(x) \leq \frac{x^k}{k!}$ на отрезке $[0, 1]$.

Для этого представим полином в виде

$$p_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + x^{r+1} \sum_{\nu=0}^r a_\nu (x-1)^\nu$$

и вычислим коэффициенты $\{a_\nu\}$: $a_0 = p_{k,r}(1) - \frac{1}{k!} = -\frac{1}{k!}$, а при $\nu \geq 1$

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left\{ \frac{p_{k,r}(x) - \frac{x^k}{k!}}{x^{r+1}} \right\}_{x=1} = \frac{-1}{\nu! k!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \{x^{k-r-1}\}_{x=1} \\ &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu! k!} (r-k+\nu) \cdots (r-k+1). \end{aligned}$$

Следовательно, $a_\nu(x-1)^\nu < 0$ при $\nu \in [0, r]$ и $x \in (0, 1)$. Поэтому $p_{k,r}(x) < \frac{x^k}{k!} + a_0 x^{r+1} = \frac{x^k}{k!}(1 - x^{r+1-k})$.

Аналогично оцениваем $p_{k,r}$ снизу. Имеем

$$\begin{aligned} p_{k,r}(x) &= (1-x)^{r+1} \sum_{\nu=k}^r b_\nu x^\nu, \\ b_\nu &= \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \{p_{k,r}(x)(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} = \frac{1}{k!(\nu-k)!} p_{k,r}^{(k)}(0) \frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}} \{(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!(\nu-k)!} (r+1)(r+2) \cdots (r+\nu-k) > 0. \end{aligned}$$

Так что на интервале $(0, 1)$ имеем

$$p_{k,r}(x) > b_k(1-x)^{r+1}x^k = \frac{x^k}{k!}(1-x)^{r+1}.$$

Осталось применить неравенство А. А. Маркова для производных алгебраических полиномов степени n (см., например, [1], [2, п. 5.4.6]):

$$\max_{0 \leq t \leq b} |p^{(\nu)}(t)| \leq \left(\frac{2}{b}n^2\right)^\nu \max_{0 \leq t \leq b} |p(t)|.$$

В рассматриваемом случае $n = 2r + 1$, а $b = x$ при $\nu \leq k$ и $b = 1$ при $\nu > k$.

Вернемся к рассмотрению периодического случая.

ЛЕММА 4. *Существует абсолютная константа $c > 1$ такая, что для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, для любых наборов $\Pi = \{x_s\}$ и $\{y_{s,\nu}\}$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$, можно построить такой тригонометрический полином высокого порядка, зависящего от r и $\delta = \min_s |x_s - x_{s+1}|$, который удовлетворяет условиям*

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}, \quad 1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad \|\tau\| \leq c \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}|.$$

При $r = 0$ число c можно считать сколь угодно близким к 1, но тогда порядок полинома зависит еще от разности $c - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению имеем $x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m+1} = x_1 + 2\pi$. Считаем, что $y_{m+1,\nu} = y_{1,\nu}$, $0 \leq \nu \leq r$. Построим 2π -периодический (эрмитов) сплайн h степени $2r + 1$ из класса $C^r(\mathbb{T})$. Он определяется условиями $h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}$, $1 \leq s \leq m + 1$, $0 \leq \nu \leq r$. На отрезке $[x_s, x_{s+1}]$ (где $x_{s+1} - x_s = \Delta x_s$, $p_{\nu,r}$ — полином из леммы 3) имеем

$$h(x) = \sum_{\nu=0}^r \left\{ y_{s,\nu} p_{\nu,r} \left(\frac{x - x_s}{\Delta x_s} \right) (\Delta x_s)^\nu + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r} \left(\frac{x_{s+1} - x}{\Delta x_s} \right) (\Delta x_s)^\nu (-1)^\nu \right\},$$

так как, например, при $q \leq r$

$$h^{(q)}(x_{s+1}) = \sum_{\nu=0}^r \{ y_{s,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(1) (\Delta x_s)^{\nu-q} + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(0) (\Delta x_s)^{\nu-q} (-1)^{q+\nu} \} = y_{s+1,q}.$$

В силу леммы 3 при $x \in [x_s, x_{s+1}]$ получаем

$$\begin{aligned}
 |h(x)| &\leq \sum_{\nu=0}^r \left\{ |y_{s,\nu}| \frac{(x-x_s)^\nu}{\nu!} + |y_{s+1,\nu}| \frac{(x_{s+1}-x)^\nu}{\nu!} \right\} \\
 &\leq \max_{\nu} \{ |y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}| \} \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} \{ (x-x_s)^\nu + (x_{s+1}-x)^\nu \} \\
 &\leq \max_{\nu} \{ |y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}| \} \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} (\Delta x_s)^\nu \leq e^{2\pi} \max_{\nu} \{ |y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}| \}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

При $r = 0$ вместо $e^{2\pi}$ можно поставить 1.

При $q \geq 1$ на отрезке $[x_s, x_{s+1}]$ в силу той же леммы 3 имеем

$$\begin{aligned}
 |h^{(q)}(x)| &\leq \gamma(r, q) \sum_{\nu=0}^r \left\{ |y_{s,\nu}| \left(\frac{x-x_s}{\Delta x_s} \right)^{(\nu-q)+} (\Delta x_s)^{\nu-q} \right. \\
 &\quad \left. + |y_{s+1,\nu}| \left(\frac{x_{s+1}-x}{\Delta x_s} \right)^{(\nu-q)+} (\Delta x_s)^{\nu-q} \right\} \\
 &\leq \gamma(r, q) \sum_{\nu=0}^r \{ |y_{s,\nu}| + |y_{s+1,\nu}| \} (\Delta x_s)^{\nu-q}.
 \end{aligned}$$

Поэтому при $q \geq 1$ и $\Delta x_s \geq \delta > 0$ получаем

$$\|h^{(q)}\| \leq \gamma_1(r, q) \frac{1}{\delta^q} \max_{1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r} |y_{s,\nu}|. \quad (3)$$

По теореме Джексона для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует полином порядка не выше n такой, что

$$\|h^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq c \frac{\|h^{(r+1)}\|}{(n+1)^{r+1-\nu}}, \quad 0 \leq \nu \leq r+1.$$

Возьмем теперь эрмитов полином τ , определяемый условиями

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s), \quad 1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq r.$$

В силу леммы 3 и неравенства Джексона имеем

$$\|\tau^{(q)}\| \leq \gamma(r, \Pi) \max_{s,\nu} |(h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s)| \leq c\gamma(r, \Pi) \frac{\|h^{(r+1)}\|}{n+1}.$$

Положим теперь $\tilde{\tau} = \tau_n + \tau$ (порядок этого полинома равен $\max\{n, m(r+1)-1\}$). Тогда при $1 \leq s \leq m$ и $0 \leq \nu \leq r$ имеем

$$\tilde{\tau}^{(\nu)}(x_s) = \tau_n^{(\nu)}(x_s) + (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s) = h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}.$$

При этом для $q \in [0, r]$ получаем

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\tau}^{(q)}\| &\leq \|\tau_n^{(q)}\| + \|\tau^{(q)}\| \leq \|h^{(q)} - \tau_n^{(q)}\| + \|h^{(q)}\| + \|\tau^{(q)}\| \\
 &\leq c \frac{\|h^{(r+1)}\|}{(n+1)^{r+1-q}} + \|h^{(q)}\| + c\gamma(r, \Pi) \frac{\|h^{(r+1)}\|}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Учитывая неравенство (3) при $q = r + 1$, получаем

$$\|\tilde{\tau}^{(q)}\| \leq \gamma_1(r, \Pi) \frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}} \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}| + \|h^{(q)}\|.$$

При $q = 0$, как это следует из (2), имеем

$$\|\tilde{\tau}\| \leq \left\{ \sum_{\nu=0}^r \frac{1}{\nu!} \left(\max_s \Delta x_s \right)^\nu + \gamma_1(r, \Pi) \frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}} \right\} \max_{s,\nu} |y_{s,\nu}|$$

и при достаточно большом n полином $\tilde{\tau}$ является искомым.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $\tau_{f,r}$ – эрмитов интерполяционный тригонометрический полином, определяемый условиями $\tau_{f,r}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$ (его порядок не больше $\lceil \frac{m(r+1)+1}{2} \rceil$). Тогда для $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in [0, r]$ имеем

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{f,r}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r, \Pi) \min_s \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|^{r-\nu} \omega \left(f^{(r)}; \min_s \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right),$$

$$a \|\tau_{f,r}^{(r+1)}\| \leq \gamma(r, \Pi) \omega(f^{(r)}; \pi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное в лемме – это неравенство для $(r+1)$ -й производной.

Сначала из него выведем неравенство о приближении. Пусть для определенности $x \in [\frac{x_s + x_{s+1}}{2}]$. Тогда

$$f^{(r)}(x) - \tau_{f,r}^{(r)}(x) = [f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)] + [\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)]$$

и в силу очевидного неравенства и монотонности ω имеем

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)| \leq \omega(f^{(r)}; |x - x_s|) \leq \omega \left(f^{(r)}; \frac{2}{\pi} \left| \sin(x - x_s) \right| \right),$$

при этом

$$|\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)| \leq \int_{x_s}^x |\tau_{f,r}^{(r+1)}(t)| dt \leq \gamma(r, \Pi) \omega(f^{(r)}; \pi) (x - x_s)$$

и необходимо воспользоваться известным неравенством (см. ниже формулу (7) при $k = 1$)

$$\omega(f; c)h \leq 2c\omega(f; h).$$

Таким образом, искомое неравенство при $\nu = r$ доказано.

Далее можно либо интегрировать это неравенство r раз по $[x_s, x]$, либо сразу воспользоваться формулой Тейлора для $f^{(\nu)} - \tau_{f,r}^{(\nu)}$ в окрестности точки x_s .

Неравенство для $(r+1)$ -й производной полинома $\tau_{f,r}$ можно доказать индукцией по m (вместо $\tau_{f,r}$ будем записывать $\tau_{f,r,m}$).

При $m = 1$ нужно лишь учесть, что при $k \in [1, r]$ существует число ξ_k такое, что $f^{(k)}(\xi_k) = 0$. Тогда при $k \leq r - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\| &= \max_x \left| \int_{\xi_k}^x f^{(k+1)}(t) dt \right| \leq \pi \|f^{(k+1)}\| \leq \pi^{r-k} \|f^{(r)}\| \\ &= \pi^{r-k} \|f^{(r)}(\cdot) - f^{(r)}(\xi_r)\| \leq \pi^{r-k} \omega(f^{(r)}; \pi). \end{aligned} \quad (4)$$

Норма производной тригонометрического полинома Тейлора при $r = 2n$ (см. лемму 1), а также и при $r = 2n - 1$, когда $h_{0,r} \equiv 1$, $h_{k,r} = h'_{k+1,r}$, следующая:

$$\left\| \sum_{k=0}^r f^{(k)}(x_1) h_{k,r}^{(r)}(\cdot - x_1) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^r f^{(k)}(x_1) h_{k,r}^{(r)}(\cdot - x_1) \right\| \leq \gamma(r) \sum_{k=1}^r \|f^{(k)}\| \leq \gamma_1(r) \|f^{(r)}\| \leq \gamma_1(r) \omega(f^{(r)}; \pi).$$

Однако при $r = 2n$, например,

$$\tau_{f,r,m}(x) = \tau_{f,r,m-1} + e^{-i[\frac{1}{2}(m-1)(r+1)]x} \prod_{s=1}^{m-1} (e^{ix} - e^{ix_s})^{r+1} \sum_{k=0}^{2n} a_k h_{k,2n}(x - x_m).$$

Теперь легко доказать такие же оценки для $|a_k|$, из которых и следует искомая оценка для $|\tau_{f,r,m}^{(r+1)}|$ (см. подобную лемму 5 в [3] для алгебраических полиномов).

Хорошо известна теорема Джексона–Стечкина: для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ и любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ существует полином τ_n порядка не выше n , удовлетворяющий неравенству

$$\|f - \tau_n\| \leq \gamma(k) \omega_k\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right), \quad (5)$$

где $\omega_0(f) = \|f\|$, а при $k \geq 1$

$$\omega_k(f; h) = \sup_{0 < \delta \leq h} \left\| \sum_{\nu=0}^k \frac{k!}{\nu! (k-\nu)!} (-1)^\nu f(\cdot + \nu\delta) \right\|$$

– модуль гладкости функции f (шага $h > 0$).

Понадобятся следующие свойства ω_k (см., например, [1] или [2]):

$$\omega_{k+1}(f; h) \leq 2\omega_k(f; h), \quad \omega_{k+1}(f; h) \leq h\omega_k(f'; h), \quad (6)$$

$$\omega_k(f; \lambda h) \leq (\lambda + 1)^k \omega_k(f; h), \quad \omega_k(f; c) h^k \leq (2c)^k \omega_k(f; h), \quad (7)$$

$$\lambda > 0, \quad 0 < h \leq c.$$

ЛЕММА 6. Если для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ существует полином τ_n порядка не выше n такой, что

$$\|f - \tau_n\| = \varepsilon_n(f),$$

то для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, и $\nu \in [0, r]$ имеем

$$\|f^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq \gamma(r) (\varepsilon_n(f^{(\nu)}) + n^\nu \varepsilon_n(f))$$

и для любого $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\|\tau_n^{(r+s)}\| \leq \gamma(r, s) n^{r+s} \left(\varepsilon_n(f) + \omega_{r+s}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $\varepsilon_n(f) = E_n^{\mathbb{T}}(f)$ и τ_n – полином наилучшего приближения, кроме того, $\varepsilon_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{(n+1)^\nu} \varepsilon_n(f^{(\nu)})$, эта лемма известна (см. [1] или [2]).

Рассмотрим полином Валле Пуссена $\tau_{1,2n}(f)$ порядка $2n$, для которого

$$\|f - \tau_{1,2n}(f)\| \leq 4E_n^{\mathbb{T}}(f) \leq 4\varepsilon_n(f).$$

Однако $\tau_{1,2n}(f^{(\nu)}) = \tau_{1,2n}^{(\nu)}(f)$ при $\nu \in [0, r]$, так как $\tau_{1,2n}(f)$ – сверточный оператор. Тогда

$$\|f^{(\nu)} - \tau_{1,2n}^{(\nu)}(f)\| \leq 4\varepsilon_n(f^{(\nu)}), \quad 0 \leq \nu \leq r.$$

Кроме того,

$$\|\tau_n(f) - \tau_{1,2n}(f)\| \leq \|f - \tau_n(f)\| + \|f - \tau_{1,2n}(f)\| \leq 5\varepsilon_n(f),$$

и в силу неравенства Бернштейна при любом $\nu \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\|\tau_n^{(\nu)}(f) - \tau_{1,2n}^{(\nu)}(f)\| \leq 5(2n)^\nu \varepsilon_n(f). \quad (8)$$

Таким образом, при $\nu \in [0, r]$ получаем

$$\|f^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}(f)\| \leq \|f^{(\nu)} - \tau_{1,2n}^{(\nu)}(f)\| + \|\tau_{1,2n}^{(\nu)}(f) - \tau_n^{(\nu)}(f)\| \leq 4\varepsilon_n(f^{(\nu)}) + 5(2n)^\nu \varepsilon_n(f).$$

Первое неравенство в лемме доказано.

В силу известного неравенства для полиномов (см. [1], [2, п. 8.2.4]) имеем

$$\|\tau_{1,2n}^{(r+s)}\| \leq \omega_{r+s}\left(\tau_{1,2n}; \frac{\pi}{2n}\right) n^{r+s}.$$

Однако

$$\begin{aligned} \omega_{r+s}(\tau_{1,2n}; h) &\leq \omega_{r+s}(f; h) + \omega_{r+s}(f - \tau_{1,2n}; h) \leq \omega_{r+s}(f; h) + 2^{r+s} \|f - \tau_{1,2n}\| \\ &\leq \omega_{r+s}(f; h) + 2^{r+s+2} E_n^{\mathbb{T}}(f). \end{aligned}$$

Применяя неравенство (5) при $k = r + s$, получаем

$$\|\tau_{1,2n}^{(r+s)}\| \leq n^{r+s} \left[\omega_{r+s}\left(f; \frac{\pi}{2n}\right) + 2^{r+s+2} \gamma(r+s) \omega_{r+s}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \right].$$

Осталось воспользоваться неравенством (8) при $\nu = r + s$:

$$\|\tau_n^{(r+s)}\| \leq 5(2n)^{r+s} \varepsilon_n(f) + \|\tau_{1,2n}^{(r+s)}\| \leq \gamma_1(r, s) n^{r+s} \left(\varepsilon_n(f) + \omega_{r+s}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right) \right).$$

ЛЕММА 7. Для любых натуральных k, m и n существует алгебраический полином p_n степени не выше n такой, что для $x \in [-1, 1]$ выполнено неравенство

$$|x^k - x^{k+m} p_n(x)| \leq \gamma(k, m) \frac{1}{n^k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [2, п. 5.4.14, b)].

ЛЕММА 8. Пусть $f \in C^r(\mathbb{T})$ и $f^{(\nu)}(x_s) = 0$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$. Тогда для любого $n \geq N(r, \Pi)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ существует полином τ_n порядка не выше n такой, что при $0 \leq \nu \leq r$

$$\|f^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq \gamma(r, \Pi) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right), \quad \tau_n^{(\nu)}(x_s) = 0, \quad 1 \leq s \leq m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства (5) найдется полином $\tau_{1,n}$ порядка не выше n такой, что

$$\|f - \tau_{1,n}\| \leq \gamma(k+r) \omega_{k+r}\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$

В силу леммы 6 при $\nu \in [0, r]$ и свойств модуля гладкости (6) имеем

$$\begin{aligned} \|f^{(\nu)} - \tau_{1,n}^{(\nu)}\| &\leq \gamma_1(r, k) \left[\omega_{k+r}\left(f^{(\nu)}; \frac{\pi}{n}\right) + n^\nu \omega_{k+r}\left(f; \frac{\pi}{n}\right) \right] \\ &\leq \gamma_1(r, k) \left[2^\nu \omega_{k+r-\nu}\left(f^{(\nu)}; \frac{\pi}{n}\right) + \pi^\nu \omega_{k+r-\nu}\left(f^{(\nu)}; \frac{\pi}{n}\right) \right] \\ &\leq \gamma_2(r, k) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия леммы $f^{(\nu)}(x_s) = 0$ теперь получаем

$$|\tau_{1,n}^{(\nu)}(x_s)| \leq \gamma_2(r, k) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right), \quad 1 \leq s \leq m, \quad 0 \leq \nu \leq r. \quad (10)$$

Пусть $X_1(x)$ – тригонометрический полином с простыми нулями $\{x_s\}$, $1 \leq s \leq m$, наименьшего диаметра спектра. При четном m имеем $X_1(x) = \prod_{s=1}^m \sin \frac{x-x_s}{2}$, а при нечетном m спектр полинома X_1 лежит в $[-\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}]$. Порядок спектра не более $[\frac{m+1}{2}]$ (см. начало настоящего параграфа).

Будем теперь делить $\tau_{1,n}$ на X_1 (см. свойство IV), если, конечно, $n \geq [\frac{m+1}{2}]$:

$$\tau_{1,n}(x) = a_0(x)X_1(x) + b_0(x),$$

где a_0 – полином порядка не выше $n - [\frac{m+1}{2}]$, а b_0 однозначно определяется значениями $b_0(x_s) = \tau_{1,n}(x_s)$, $1 \leq s \leq m$. Если $n \geq 2[\frac{m+1}{2}]$, то и a_0 можно разделить на X_1 . И так далее. Получим представление

$$\tau_{1,n}(x) = \sum_{p=0}^{N_1} b_p(x) X_1^p(x). \quad (11)$$

В силу леммы 2 при $r = 0$ и $q \in [0, r]$ (см., кроме того, (9)) имеем

$$\|b_0^{(q)}\| \leq \gamma(r, X_1) \frac{1}{n^r} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right).$$

После дифференцирования тождества (11) и подстановки $x = x_s$ видно, что $b_1(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, определяются значениями $\tau'_{1,n}(x_s)$ и $b'_0(x_s)$ при $1 \leq s \leq m$. В силу (10) при $\nu = 1$ и леммы 2 имеем

$$\|b_1^{(q)}\| \leq \gamma_1(r, k, X_1) \frac{1}{n^{r-1}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right).$$

По индукции при ν и $q \in [0, r]$ получаем

$$\|b_\nu^{(q)}\| \leq \gamma_2(r, k, X_1) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right).$$

Считаем далее, что $\|X_1\| = 1$. В силу леммы 7 имеем $\|X_1^\nu - X_1^{r+1} p_n(X_1)\| = O(\frac{1}{n^\nu})$. Следовательно, после умножения этого равенства на b_ν получаем

$$\|b_\nu X_1^\nu - X_1^{r+1} b_\nu p_n(X_1)\| = O\left(\frac{1}{n^r} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Таким образом, каждое слагаемое в сумме (11) при $p \leq r$ заменяем тригонометрическим полиномом, который делится без остатка на X_1^{r+1} . Получим полином $\tau_{2,N}$, порядок N которого принадлежит отрезку $[n, (2n + r + 3)[\frac{m+1}{2}]]$, при этом

$$\|\tau_{1,n} - \tau_{2,N}\| = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right) = O\left(\frac{1}{N^r}\right) \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{N}\right).$$

Последнее равенство легко доказать, используя первое неравенство в (7).

В силу неравенства Бернштейна при $\nu \in [0, r]$ имеем

$$\|\tau_{1,n}^{(\nu)} - \tau_{2,N}^{(\nu)}\| \leq \gamma_3(r, k, \Pi) \frac{1}{N^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{N}\right).$$

Из неравенства (9) при $\nu \in [0, r]$ теперь получаем

$$\|f^{(\nu)} - \tau_{2,N}^{(\nu)}\| \leq (\gamma_2(r, k) + \gamma_3(r, k, \Pi)) \frac{1}{N^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right).$$

ЛЕММА 9. Пусть $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ – линейно независимая система функций из $C^1[a, b]$, а $\Phi_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$ – полином по этой системе. Тогда при каждом n и любом $x_0 \in [a, b]$ имеем

$$\sup_{f \in C^\infty[a, b]} \frac{1}{\|f\|} \inf_{\Phi_n : |\Phi'_n(x_0)| \geq |f'(x_0)|} \|f - \Phi_n\| = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что верхняя грань $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ конечна. Тогда существуют число c и полином Φ_n такие, что для всех $f \in C^\infty[a, b]$

$$\|\Phi_n\| \leq c\|f\|, \quad |\Phi'_n(x_0)| \geq |f'(x_0)|.$$

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(a) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi'_k \right\| \leq \gamma(n) \left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\|.$$

Отсюда для любой функции $f \in C^\infty[a, b]$ имеем

$$|f'(x_0)| \leq |\Phi'_n(x_0)| \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(a) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi'_k \right\| \leq \gamma(n) \left\| \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\| \leq c\gamma(n)\|f\|.$$

Однако это не выполняется уже для функции $f(x) = \sin(\lambda(x - x_0))$ при $\lambda > c\gamma(n)$.

Теперь для доказательства теорем об односторонних аппроксимациях построим специальные полиномы. Далее функции и полиномы предполагаются вещественными.

ЛЕММА 10. *Существует абсолютная константа $c > 1$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ можно построить нечетный тригонометрический полином τ_n порядка не выше n , удовлетворяющий на отрезке $[0, \pi]$ неравенству*

$$\min\{1, n \sin x\} \leq \tau_n(x) \leq c \min\{1, n \sin x\}$$

и равенству $\tau_n(\pi - x) = \tau_n(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве искомого полинома τ_n возьмем полином Джексона функции

$$\Psi_{\varepsilon, n}(x) = \frac{n \sin x}{1 + \varepsilon n |\sin x|}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Точнее, этот полином нужно умножить на 2 (см. ниже формулу (15)). Необходимые свойства интеграла Джексона можно найти, например, в [1, п. 5 гл. II, п. 2 гл. IV].

Учитывая, что для функции $\psi_\varepsilon(t) = \frac{t}{1+\varepsilon t} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \frac{1}{1+\varepsilon t})$ при $t \geq 0$ выполнены неравенства

$$|\psi_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad |\psi'_\varepsilon(t)| \leq 1, \quad |\psi''_\varepsilon(t)| \leq 2\varepsilon,$$

при $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ получаем

$$\|\Psi_{\varepsilon, n}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \|\Psi'_{\varepsilon, n}\| \leq n = \Psi'_{\varepsilon, n}(0), \quad \|\Psi''_{\varepsilon, n}\| \leq n + 2\varepsilon n^2 \leq 3\varepsilon n^2.$$

В силу положительности ядра Джексона ($\tau_n = \tau_n(\Psi_{\varepsilon, n})$) имеем

$$\|\tau_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \|\tau'_n(\Psi_{\varepsilon, n})\| = \|\tau'_n(\Psi'_{\varepsilon, n})\| \leq n, \quad \|\tau''_n\| \leq 3\varepsilon n^2.$$

Так же, как и $\Psi_{\varepsilon, n}$, полином τ_n нечетный, а в силу теоремы Лагранжа о среднем имеем

$$|\tau_n(x)| = |\tau_n(x) - \tau_n(0)| \leq n|x| \leq \pi n \left| \sin \frac{x}{2} \right|,$$

$$|\tau_n(x)| = |\tau_n(x) - \tau_n(\pi)| \leq n|\pi - x| \leq \pi n \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

Следовательно, на отрезке $[-\pi, \pi]$ выполнено соотношение

$$|\tau_n(x)| \leq \min \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \pi n \left| \sin \frac{x}{2} \right|, \pi n \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \frac{\pi n}{\sqrt{2}} |\sin x| \right\}. \quad (12)$$

В силу теоремы Джексона имеем

$$\|\Psi'_{\varepsilon, n} - \tau'_n\| \leq \frac{c}{n} \|\Psi''_{\varepsilon, n}\| \leq 3c\varepsilon n.$$

Отсюда получаем

$$\tau'_n(0) \geq \Psi'_{\varepsilon, n}(0) - 3c\varepsilon n = n(1 - 3c\varepsilon),$$

и в силу формулы Тейлора

$$\tau_n(x) \geq \tau'_n(0) - \frac{1}{2} \|\tau''_n\| x^2 \geq n(1 - 3c\varepsilon)x - \frac{1}{2} x^2 3\varepsilon n^2.$$

Пусть теперь $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и $n \sin x \leq 1$. Тогда $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x \leq \frac{\pi}{2n}$ и выполнено соотношение

$$\tau_n(x) \geq nx \left[1 - 3c\varepsilon - \frac{3}{2} \varepsilon nx \right] \geq nx \left[1 - \varepsilon \left(3c + \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (13)$$

Если $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и $n \sin x \geq 1$, то в силу монотонности $\Psi_{\varepsilon, n}$ (или ψ_ε) имеем

$$\Psi_{\varepsilon, n}(x) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Поскольку, кроме того,

$$\|\Psi_{\varepsilon, n} - \tau_n(\Psi_{\varepsilon, n})\| \leq \frac{c}{n} \|\Psi'_{\varepsilon, n} - \tau_n(\Psi'_{\varepsilon, n})\| \leq \frac{c^2}{n^2} \|\Psi''_{\varepsilon, n}\| \leq 3c^2\varepsilon,$$

то выполнены неравенства

$$\tau_n(x) \geq \Psi_{\varepsilon, n}(x) - 3c^2\varepsilon \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} - 3c^2\varepsilon. \quad (14)$$

Выбираем теперь $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ так, чтобы

$$\varepsilon \left(3c + \frac{3\pi}{4} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad 3c^2\varepsilon \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Тогда при $n \sin x \leq 1$ (см. (13)) имеем $\tau_n(x) \geq \frac{1}{2} \sin x$, а при $n \sin x \geq 1$ (см. (14)) имеем $\tau_n(x) \geq \frac{1}{2}$, в результате на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ получаем

$$\tau_n(x) \geq \frac{1}{2} \min\{1, n \sin x\}.$$

Поскольку $\Psi_{\varepsilon, n}(\pi - x) = \Psi_{\varepsilon, n}(x)$, то $\tau_n(\pi - x) = \tau_n(x)$ (оператор Джексона, как и всякий сверточный оператор, не расширяет спектр). При $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ и $x \in [0, \pi]$ получаем (см. (12))

$$\frac{1}{2} \min\{1, n \sin x\} \leq \tau_n(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \min\{1, n \sin x\}. \quad (15)$$

При $1 \leq n < \frac{1}{\varepsilon}$ берем $\tau_1(x) = n \sin x$. Тогда на отрезке $[0, \pi]$ имеем

$$\min\{1, n \sin x\} \leq \tau_1(x) \leq \min\left\{\frac{1}{\varepsilon}, n \sin x\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \min\{1, n \sin x\}.$$

Рассмотрим теперь кусочно одностороннюю аппроксимацию. В следующей лемме дан ответ на вопрос о возможности такой аппроксимации.

ЛЕММА 11. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *если f – ограниченная 2π -периодическая функция, $x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = x_1 + 2\pi$, m – четное число и функция f непрерывна в точках x_s , $1 \leq s \leq m$, то для того, чтобы существовал полином τ_f с условиями*

$$\tau_f(x_s) = f(x_s), \quad (-1)^s(f(x) - \tau_f(x)) > 0, \quad x \in (x_s, x_{s+1}), \quad 1 \leq s \leq m,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $s \in [1, m]$

$$\lim_{x \rightarrow x_s} (-1)^s \frac{f(x) - f(x_s)}{x - x_s} > -\infty;$$

б) *если $f \in C^1(\mathbb{T})$, то существует полином τ порядка не выше $\frac{m}{2}$ такой, что на интервалах (x_s, x_{s+1}) , $1 \leq s \leq m$, выполнено*

$$(-1)^s(f(x) - \tau(x)) > 0,$$

$$\omega(f'; \pi) \min_{\nu} \left| \sin \frac{x - x_{\nu}}{2} \right| \leq (-1)^s(f(x) - \tau(x)) \leq \gamma(\Pi) \omega(f'; \pi) \min_{\nu} \left| \sin \frac{x - x_{\nu}}{2} \right|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Докажем необходимость. Имеем $\tau(x_s) = f(x_s)$, $1 \leq s \leq m$. Пусть $x \in (x_s, x_{s+1})$. Тогда при данном полиноме τ выполнено

$$\begin{aligned} (-1)^s \frac{f(x) - f(x_s)}{x - x_s} &= (-1)^s \frac{f(x) - \tau(x)}{x - x_s} + (-1)^s \frac{\tau(x) - \tau(x_s)}{x - x_s} \\ &> (-1)^s \frac{\tau(x) - \tau(x_s)}{x - x_s}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\lim_{x \rightarrow x_s + 0} (-1)^s \frac{f(x) - f(x_s)}{x - x_s} \geq (-1)^s \tau'(x_s).$$

Аналогично при $x \in (x_{s-1}, x_s)$ и $s \in [2, m+1]$ имеем

$$\begin{aligned} (-1)^s \frac{f(x) - f(x_s)}{x - x_s} &= (-1)^{s-1} \frac{f(x) - \tau(x)}{x_s - x} + (-1)^s \frac{\tau(x) - \tau(x_s)}{x - x_s} \\ &> (-1)^s \frac{\tau(x) - \tau(x_s)}{x - x_s}, \end{aligned}$$

и нужно лишь устремить x к $x_s - 0$.

Докажем достаточность указанного в лемме условия в каждой точке x_s . Пусть $x \in (x_s, x_{s+1})$. Тогда $\sin \frac{x - x_{\nu}}{2} > 0$ при $s \geq \nu \geq 1$ и $\sin \frac{x - x_{\nu}}{2} < 0$ при $s < \nu \leq m$. Следовательно, если $h_0(x) = \prod_{\nu=1}^m \sin \frac{x - x_{\nu}}{2}$ (полином порядка $\frac{m}{2}$), то на (x_s, x_{s+1}) имеем $(-1)^s h_0(x) > 0$. Нужно доказать, что при $x \in \mathbb{R}$ и $x \neq x_s$, $1 \leq s \leq m$, для некоторого полинома τ порядка $\frac{m}{2}$ выполнено

$$\frac{f(x) - \tau(x)}{h_0(x)} > 0.$$

Пусть τ_f – полином, определяемый условиями $\tau_f(x_s) = f(x_s)$, $1 \leq s \leq m$ (его порядок не выше $\frac{m}{2}$). Проверим, что существует такое число M , что для всех $x \in \mathbb{R}$ и $x \neq x_s$, $1 \leq s \leq m$, выполнено

$$g(x) = \frac{f(x) - \tau_f(x)}{h_0(x)} > M.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_s} \frac{f(x) - \tau_f(x)}{h_0(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_s} \left(\frac{f(x) - f(x_s)}{h_0(x)} + \frac{\tau_f(x_s) - \tau_f(x)}{h_0(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_s} 2 \frac{f(x) - f(x_s)}{x - x_s} \frac{\sin \frac{x - x_s}{2}}{h_0(x)} - \frac{2\tau'_f(x_s)}{\prod_{\nu \neq s} \sin \frac{x_s - x_\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Однако при любом $s \in [1, m]$ имеем

$$(-1)^s h'_0(x_s) = \frac{1}{2} (-1)^s \prod_{\nu \neq s} \sin \frac{x_s - x_\nu}{2} > 0,$$

и в силу условия леммы этот предел больше $-\infty$. Таким образом, функция g ограничена снизу в достаточно малых окрестностях точек $\{x_s\}$, а значит, и всюду, так как числитель ограничен, а знаменатель h_0 – непрерывная функция и $h_0(x) \neq 0$ при $x \neq x_s$. Однако тогда при $\tau(x) = \tau_f(x) + Mh_0(x)$ и $x \neq x_s$

$$\frac{f(x) - \tau(x)}{h_0(x)} = g(x) - M > 0.$$

б) Рассмотрим тот же полином $\tau(x) = \tau_f(x) + Mh_0(x)$. Не уменьшая общности, считаем, что $f(x_1) = 0$. Тогда (см. (4))

$$\|f\| \leq \pi \|f'\| \leq \omega(f'; \pi).$$

Как видно из доказательства достаточности в п. а), можно считать для $f \in C^1(\mathbb{T})$, что

$$|M| \leq \gamma_1(\Pi)(\|f'\| + \|\tau'_f\|).$$

Из леммы 2 при $r = 0$ и $q = 1$ следует, что

$$\|\tau'_f\| \leq \gamma(\Pi) \max_s |f(x_s)| = \gamma(\Pi) \max_s |f(x_s) - f(x_1)| \leq \pi \gamma(\Pi) \|f'\| \leq \pi \gamma(\Pi) \omega(f'; \pi).$$

Поэтому при любом $x \in [x_1, x_{m+1}]$ и любом $s \in [1, m+1]$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - \tau(x)| &= |[f(x) - f(x_s)] + [\tau_f(x_s) - \tau_f(x)] - Mh_0(x)| \\ &\leq \|f'\| |x - x_s| + \|\tau'_f\| |x - x_s| + |M| \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$|f(x) - \tau(x)| \leq \gamma_2(\Pi) \omega(f'; \pi) \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right|,$$

значит, при любом $\gamma > 0$ и $x \in (x_s, x_{s+1})$

$$(-1)^s (f(x) - \tau(x) + \gamma h_0(x)) \geq \gamma \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right| - \gamma_2(\Pi) \omega(f'; \pi) \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right|.$$

Выбирая $\gamma = (\gamma_2(\Pi) + 1) \omega(f'; \pi)$, при $x \in (x_s, x_{s+1})$ получаем

$$\begin{aligned} \omega(f'; \pi) \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right| &\leq (-1)^s (f(x) - \tau(x) + \gamma h_0(x)) \\ &\leq \gamma_3(\Pi) \omega(f'; \pi) \min_\nu \left| \sin \frac{x - x_\nu}{2} \right|. \end{aligned}$$

Как видно из следующей леммы (см. утверждение а)), в последнем неравенстве вместо $\omega(f'; \pi)$ можно поставить $\omega_k(f'; \pi)$ при любом $k \geq 2$.

ЛЕММА 12. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ и любого $k \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\frac{1}{4} \omega(f; \pi) \leq E_0^{\mathbb{T}}(f) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|f - \lambda\| \leq c \omega_k(f; \pi);$$

б) *при $p \leq k$ и $h \in (0, \pi]$ имеем*

$$\omega_p(f; h^k) \leq \gamma(p, k) \omega_k(f; h^p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если $f = f_1 + if_2$, где f_1 и f_2 – непрерывные периодические и вещественные функции, то

$$\omega(f; \pi) \leq \omega(f_1; \pi) + \omega(f_2; \pi) = 2E_0^{\mathbb{T}}(f_1) + 2E_0^{\mathbb{T}}(f_2) \leq 4E_0^{\mathbb{T}}(f),$$

так как если $f_1(x_1) = \max f_1(x)$, а $f_1(x_2) = \min f_1(x)$ на периоде, то, считая, что $|x_1 - x_2| \leq \pi$, имеем

$$E_0^{\mathbb{T}}(f_1) = \frac{f_1(x_1) - f_1(x_2)}{2} = \frac{1}{2} \omega(f_1; \pi).$$

Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1, x_1 + k\pi]$ функция $f_1(x) - \frac{1}{2}(f_1(x_1) + f_1(x_2))$ имеет $k + 1$ точек альтернанса. По теореме П. Л. Чебышева для алгебраических полиномов (см. [1] или [2]) получаем

$$E_0^{\mathbb{T}}(f_1) = E_{k-1}(f_1; [x_1, x_1 + k\pi]).$$

По теореме Уитни–Сендова (см. [12], $c \leq 6$) имеем

$$E_{k-1}(f_1; [x_1, x_1 + k\pi]) \leq c \omega_k\left(f_1; \frac{k\pi}{k+1}\right) \leq c \omega_k(f_1; \pi).$$

Аналогичные неравенства справедливы для f_2 и f .

б) Ранее автором доказано следующее неравенство для любых функций на отрезке $[0, \pi]$ (см. [2, п. 4.6.5с]): при $0 < h \leq \min\{1, (\frac{\pi}{k})^{\frac{1}{p}}, (\frac{\pi}{p})^{\frac{1}{k}}\}$

$$\omega_k\left(f; \frac{\pi}{k}\right) \omega_p(f; h^k) \leq \gamma_1(p, k) \omega_p\left(f; \frac{\pi}{p}\right) (\pi + 1)^{k-p} \omega_k(f; h^p).$$

Необходимо убрать зависимость постоянных множителей от функции f , т. е. доказать неравенство $\omega_p(f; \frac{\pi}{p}) \leq \gamma_2(p, k) \omega_k(f; \frac{\pi}{k})$. Здесь важно, что функции периодические.

Воспользуемся свойствами модулей гладкости (6), (7) и утверждением а):

$$\omega_p\left(f; \frac{\pi}{p}\right) \leq \omega_p(f; \pi) \leq 2^{p-1} \omega(f; \pi) \leq 4c \cdot 2^{p-1} \omega_k(f; \pi) \leq 4c \cdot 2^{p-1} (k+1)^k \omega_k\left(f; \frac{\pi}{k}\right).$$

§ 3. Доказательство теорем 1–4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение б) является частным случаем ($m = 1$) леммы 5.

Для доказательства утверждения а) используем факторизацию дифференциальных операторов по Фробениусу и обобщенную теорему Ролля, доказанную Пойа (см. [13, гл. IV], [14, разд. V, гл. 1]).

ЛЕММА А. Пусть при $\lambda > 0$ и $n \geq 2$ функция $f \in C^n[0, \frac{\pi}{\lambda})$ имеет $m \geq 3$ нулей на полуинтервале $[0, \frac{\pi}{\lambda})$ с учетом кратностей. Тогда функция $f'' + \lambda^2 f$ имеет на том же полуинтервале не менее $m - 2$ нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, считаем $\lambda = 1$ (преобразование подобия). Легко видеть, что

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \left\{ \sin^2 x \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right) \right\}.$$

Если $f(x) \neq 0$ на $(0, \pi)$ и, значит, $f^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq m - 1$, то по известной лемме Адамара частное $\frac{f(x)}{\sin x} \in C^{n-1}[0, \pi)$ имеет в нуле нуль кратности $m - 1$, но тогда функция, записанная в фигурных скобках, имеет в нуле нуль кратности m . Следовательно, функция $f'' + f$ имеет в нуле $m - 2$ нулей (не менее).

Если функция f имеет нули на интервале $(0, \pi)$, то используем аналогичное рассуждение с применением теоремы Ролля. Лемма доказана.

Как видно из доказательства, если нули f лежат на $[0, \delta\pi]$ при $\delta < 1$, то и нули $f'' + f$ лежат на $[0, \delta\pi]$.

Положим

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x),$$

а при $x \in (0, 2\pi)$ пусть

$$H(x) = \frac{\Delta_n(x)}{h_{2n,2n}(x)}, \quad F(y) = \Delta_n(y) - H(x) h_{2n,2n}(y).$$

Очевидно, что $\Delta_n^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq 2n$, $F^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \leq \nu \leq 2n - 1$ и $F(x) = 0$.

Если, кроме того, $F^{(2n)}(0) = 0$, то $\Delta_n^{(2n)}(0) - H(x) h_{2n,2n}^{(2n)}(0) = 0$ и $H(x) = 0$, т. е.

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x) = 0,$$

и доказательство очевидно ($\theta = 1$).

Считаем далее, что $F^{(2n)}(0) \neq 0$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$. К функции F , имеющей $2n+1$ нулей на отрезке $[0, x]$, применяем лемму А при $\lambda = n$. Тогда функция $F'' + n^2 F$ имеет на $[0, \frac{\pi}{n})$ не менее $2n-1$ нулей. При этом в нуле ровно $2n-2$ нулей, так как

$$(F'' + n^2 F)_{x=0}^{(2n-2)} = F^{(2n)}(0) \neq 0,$$

значит, хотя бы один нуль лежит в интервале $(0, x)$.

Если $n \geq 2$, то применяем лемму А при $\lambda = n-1$ к функции $F'' + n^2 F$. Продолжая таким же образом, получим, что существует число $\xi \in (0, x)$ такое, что $D_{2n}F(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\Delta_n(x) = H(x)h_{2n,2n}(x) = \frac{D_{2n}\Delta_n(\xi)}{D_{2n}h_{2n,2n}(\xi)} h_{2n,2n}(x).$$

Очевидно, что для любого полинома τ порядка не выше n

$$D_{2n}\tau(x) \equiv (n!)^2 \hat{\tau}(0) = (n!)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) dt.$$

Для любой функции $f \in C^{2n}$ выполнено

$$D_{2n}f(x) = q_n \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \sum_{s=0}^n a_{s,n} f^{(2s)}(x),$$

а так как (см. лемму 1)

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{s=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^n a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x),$$

то при четном k получаем

$$\hat{h}_{k,2n}(0) = \sum_{s=\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^n a_{s,n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x) = a_{\frac{k}{2},n} \hat{h}_{2n,2n}(0) = \frac{1}{(n!)^2} a_{\frac{k}{2},n},$$

а при нечетном k имеем $\hat{h}_{k,2n}(0) = 0$. При этом $D_{2n}h_{2n,2n} \equiv a_{n,n} = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} D_{2n}\Delta_n(\xi) &= D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) D_{2n}h_{k,2n}(\xi) \\ &= D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) (n!)^2 \hat{h}_{k,2n}(0) \\ &= D_{2n}f(\xi) - \sum_{s=0}^n a_{s,n} f^{(2s)}(0) = D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0). \end{aligned}$$

Таким образом, для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$ существует $\xi \in (0, x)$ такое, что

$$f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x) = (D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0)) h_{2n,2n}(x).$$

Подобное равенство имеет место, конечно, и при $x \in (-\frac{\pi}{n}, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть τ_f – эрмитов полином, определяемый условиями $\tau_f^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$ (его порядок не выше $[\frac{m(r+1)}{2}]$). В силу леммы 8 при $n \geq N(r, \Pi)$ найдется полином τ_n порядка не выше n такой, что $\tau_n^{(\nu)}(x_s) = 0$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$, и

$$\|f^{(\nu)} - \tau_f^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq \gamma(r, k, \Pi) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left((f - \tau_f)^{(r)}; \frac{1}{n}\right).$$

Однако в силу свойств модулей гладкости и неравенства Бернштейна имеем

$$\omega_k(\tau_f^{(r)}; h) \leq \|\tau_f^{(r+k)}\| h^k \leq \left(\frac{m(r+1)}{2}\right)^{k-1} \|\tau_f^{(r+1)}\| h^k,$$

а после применения леммы 5 и леммы 12, б) (см., кроме того, (7)) получаем

$$\begin{aligned} \|\tau_f^{(r+1)}\| h^k &\leq \gamma_1(r, k, \Pi) h^k \omega(f^{(r)}; \pi) \leq \gamma_2(r, k, \Pi) h^k \omega_k(f^{(r)}; \pi) \\ &\leq (2\pi)^k \gamma_2(r, k, \Pi) \omega_k(f^{(r)}; h). \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 < h \leq \pi$ имеем

$$\omega_k((f - \tau_f)^{(r)}; h) \leq \omega_k(f^{(r)}; h) + \omega_k(\tau_f^{(r)}; h) \leq \gamma_3(r, k, \Pi) \omega_k(f^{(r)}; h),$$

а значит, при $0 \leq \nu \leq r$

$$\|f^{(\nu)} - \tau_f^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}\| \leq \gamma_4(r, k, \Pi) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right).$$

Пусть $\tau_{1,n} = \tau_n + \tau_f$. Тогда $\tau_{1,n}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq \nu \leq r$, и

$$\|f^{(\nu)} - \tau_{1,n}^{(\nu)}\| \leq \gamma_4(r, k, \Pi) \frac{1}{n^{r-\nu}} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad (16)$$

а если учесть лемму 6 при $s = 1$, то получим

$$\|\tau_{1,n}^{(r+1)}\| \leq \gamma_5(r, k, \Pi) n \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right). \quad (17)$$

При любом $x \in [x_1, x_{m+1}]$ в силу формулы Тейлора и неравенства (16) при $\nu = r$ и любом $s \in [1, m+1]$ имеем

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| &\leq \frac{1}{(r-\nu)!} \|f^{(r)} - \tau_{1,n}^{(r)}\| |x - x_s|^{r-\nu} \\ &\leq \gamma_4 \frac{1}{(r-\nu)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-\nu} \left|\sin \frac{x - x_s}{2}\right|^{r-\nu} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

а значит, при $0 \leq \nu \leq r$ для всех $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_6 \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r-\nu} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad (18)$$

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq 2^k \gamma_6 \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r-\nu} \|f^{(r)}\|. \quad (19)$$

Пусть теперь $f \in C^{r+k}(\mathbb{T})$. Получим сначала два результата частного характера, которые затем проинтерполируем.

Используя неравенство (17), получаем

$$\begin{aligned} |f^{(r)}(x) - \tau_{1,n}^{(r)}(x)| &= |(f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)) + (\tau_{1,n}^{(r)}(x_s) - \tau_{1,n}^{(r)}(x))| \\ &\leq \|f^{(r+1)}\| |x - x_s| + \|\tau_{1,n}^{(r+1)}\| |x - x_s| \\ &\leq \frac{\pi}{2} \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \left(\|f^{(r+1)}\| + \gamma_5 n \omega_k \left(f^{(r)}; \frac{1}{n} \right) \right) \leq \gamma_7 \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \|f^{(r+1)}\|. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя это неравенство $r - \nu$ раз от x_s до x и учитывая то, что $\tau_{1,n}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$, $0 \leq \nu \leq r$, получим

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_8 \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|^{r+1-\nu} \|f^{(r+1)}\|.$$

Отсюда и из неравенства (16) следует, что (см., кроме того, (7) и (6))

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_9 \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r+1-\nu} \|f^{(r+1)}\|. \quad (21)$$

С другой стороны, из неравенства (16) следует

$$\|f^{(\nu)} - \tau_{1,n}^{(\nu)}\| \leq \gamma_4 \frac{1}{n^{r+k-\nu}} \|f^{(r+k)}\|, \quad 0 \leq \nu \leq r, \quad (22)$$

и после применения метода Бернштейна (см., например, [2, п. 4.5.3]) имеем

$$\|f^{(r+1)} - \tau_{1,n}^{(r+1)}\| \leq \gamma_{10} \frac{1}{n^{k-1}} \|f^{(r+k)}\|, \quad k \geq 2.$$

Кроме того, в силу (18) при $\nu \in [0, r]$ получаем

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_{11} \frac{1}{n^k} \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|^{r-\nu} \|f^{(r+k)}\|$$

и после применения формулы Тейлора при $k \geq 2$ и $k = 1$ (см. (20)) имеем

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| &\leq \frac{1}{(r+1-\nu)!} \|f^{(r+1)} - \tau_{1,n}^{(r+1)}\| |x - x_s|^{r+1-\nu} \\ &\leq \gamma_{12} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right|^{r+1-\nu} \|f^{(r+k)}\|. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) и (23) теперь следует

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| \leq \gamma_{13} \frac{\|f^{(r+k)}\|}{n^{k-1}} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r+1-\nu}. \quad (24)$$

Выбирая произвольно $g \in C^{r+k}(\mathbb{T})$, учитывая линейность оператора $\tau_{1,n}(f)$ и объединяя вместе оценки (19) и (24), получаем

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(f; x)| &= |[f^{(\nu)}(x) - g^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(f - g; x)] + [g^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(g; x)]| \\ &\leq \gamma_{14} \left(\min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r-\nu} \|f^{(r)} - g^{(r)}\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^{k-1}} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r+1-\nu} \|g^{(r+k)}\| \right) \\ &= \gamma_{14} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r-\nu} \left(\|f^{(r)} - g^{(r)}\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^{k-1}} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\} \|g^{(r+k)}\| \right). \end{aligned}$$

Однако известно (см., например, [15], [2]), что при $h > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{g \in C^k(\mathbb{T})} \{ \|f - g\| + h^k \|g^{(k)}\| \} \leq \gamma(k) \omega_k(f; h)$$

(в качестве g можно взять функцию типа Стеклова или просто полином τ_n из неравенства (5) при $n = [\frac{1}{h}]$, как это видно из леммы 6, например, при $\varepsilon_n(f) = \omega_k(f; \frac{1}{n})$, $r = k$, $s = 0$).

Таким образом, минимизируя по $g \in C^{r+k}(\mathbb{T})$, при $\nu \in [0, r]$ получим

$$\begin{aligned} |f^{(\nu)}(x) - \tau_{1,n}^{(\nu)}(x)| &\leq \gamma_{15} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{r-\nu} \\ &\quad \times \omega_k \left(f^{(r)}; \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} \min_s \left\{ \frac{1}{n}, \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\}^{\frac{1}{k}} \right). \end{aligned}$$

Это и есть искомая оценка приближения при $n \geq N = N(r, k, \Pi)$. При $[\frac{m(r+1)}{2}] \leq n \leq N$ можно взять просто эрмитов интерполяционный полином функции f (см. лемму 5 и лемму 12, б)).

Для доказательства последнего утверждения в теореме (о показателе $\frac{1}{k}$) применяем лемму 9. Неравенство

$$\|f - \tau_n\| \leq \gamma(\alpha) \omega_k(f; |x - x_0|^\alpha)$$

не верно ни при одном n , если $\alpha > \frac{1}{k}$. Действительно, в противном случае для всех $f \in C^k(\mathbb{T})$ имеем

$$\|f - \tau_n\| \leq \gamma(\alpha) 2^k \|f\|, \quad \|f - \tau_n\| \leq \gamma(\alpha) \|f^{(k)}\| |x - x_0|^{\alpha k}.$$

Из второго неравенства при $\alpha > \frac{1}{k}$ следует, что $\tau_n(x_0) = f(x_0)$, а после деления на $|x - x_0|$ и перехода к пределу при $x \rightarrow x_0$ получаем $\tau'_n(x_0) = f'(x_0)$. Это противоречит лемме 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждение а) доказано в лемме 4.

Докажем утверждение б). Если $\|f - \tau_n\| = E_n^\Pi(f)$, то в силу утверждения а) при любом $\varepsilon > 0$ можно построить полином $\tau_{f,n}$ такой, что ($r = 0$)

$$\tau_{f,n}(x_s) = f(x_s) - \tau_n(x_s), \quad 1 \leq s \leq m, \quad \|\tau_{f,n}\| \leq (1 + \varepsilon) E_n^\Pi(f).$$

Полагаем $\tau_{1,n} := \tau_n + \tau_{f,n}$. Тогда $\tau_{1,n}(x_s) = f(x_s)$, $1 \leq s \leq m$, и

$$\|f - \tau_{1,n}\| \leq \|f - \tau_n\| + \|\tau_{f,n}\| \leq (2 + \varepsilon)E_n^{\mathbb{T}}(f).$$

Предположим, что множитель $(2 + \varepsilon)$ можно заменить (хотя бы при одном n и одном узле x_1) на $(2 - \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Возьмем какую-либо функцию f_δ , имеющую на периоде $2n + 2$ точек чебышевского альтернанса, две из которых x_1 и $x_1 + \delta$ соседние, а $\|f_\delta\|$ не зависит от δ . Можно взять просто кусочно линейную непрерывную и периодическую функцию. Тогда существует полином $\tau_{\delta,n}$ такой, что $\tau_{\delta,n}(x_1) = f_\delta(x_1)$ и

$$|f_\delta(x) - \tau_{\delta,n}(x)| \leq (2 - \varepsilon)E_n^{\mathbb{T}}(f_\delta) = (2 - \varepsilon)\|f_\delta\|.$$

Очевидно, что

$$|\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1 + \delta)| \leq \|\tau'_{\delta,n}\|\delta \leq n\|\tau_{\delta,n}\|\delta \leq n(3 - \varepsilon)\|f_\delta\|\delta.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} 2\|f_\delta\| &= |f_\delta(x_1) - f_\delta(x_1 + \delta)| \leq |\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1 + \delta)| + |\tau_{\delta,n}(x_1 + \delta) - f_\delta(x_1 + \delta)| \\ &\leq n(3 - \varepsilon)\|f_\delta\|\delta + (2 - \varepsilon)\|f_\delta\|. \end{aligned}$$

При достаточно малом δ имеем противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В силу теоремы 2 при $r = 1, \nu = 0$ и $n \geq \frac{m}{2}$ существует полином τ_n такой, что на отрезке $[x_s, x_{s+1}]$, $s \in [1, m]$, выполнено

$$-\gamma(r, k, \Pi)\omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right)\delta_n(x) \leq (-1)^s(f(x) - \tau_n(x)) \leq \gamma(r, k, \Pi)\omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right)\delta_n(x).$$

Если $\tau_{0,n}$ — полином из леммы 10, то положим

$$\tau_{1,n}(x) = \prod_{k=1}^m \tau_{0, [\frac{2n}{m}]} \left(\frac{x - x_k}{2} \right).$$

В силу четности m это полином порядка не выше n . При $x \in (x_1, x_2)$ он меньше нуля, а затем меняет знак в x_s , $2 \leq s \leq m$. Проверим, что полином

$$\tau_{2,n}(x) = \tau_n(x) - \gamma_0 \tau_{1,n}(x)$$

при специально выбранном числе γ_0 является искомым.

При $n \geq m$ имеем $[\frac{2n}{m}] \geq \frac{n}{m}$. Поэтому на отрезке $[x_s, x_{s+1}]$ в силу леммы 10 получаем

$$\prod_{k=1}^m \min_k \left\{ 1, \frac{n}{m} \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right| \right\} \leq (-1)^s \tau_{1,n}(x) \leq c^m \prod_{k=1}^m \min_k \left\{ 1, \frac{2n}{m} \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right| \right\}.$$

Однако правая часть этого неравенства не более

$$c^m \min_k \left\{ 1, n \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right| \right\} = c^m \delta_n(x).$$

Подставим и в левую часть подобную функцию. Считая для определенности, что $x \in [x_s, \frac{x_s + x_{s+1}}{2}]$, получаем

$$n\delta_n(x) \leq m \min_s \left\{ 1, \frac{n}{m} \left| \sin \frac{x - x_s}{2} \right| \right\},$$

$$1 \leq \gamma_1(\Pi) \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right|, \quad 1 \leq k \leq m, \quad k \neq s.$$

Следовательно, при $n \geq N = N(\Pi)$ имеем

$$\min_k \left\{ 1, \frac{n}{m} \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right|, k \neq s \right\} = 1.$$

Поэтому при $n \geq N$ получаем

$$n\delta_n(x) \leq m \prod_{k=1}^m \min_s \left\{ 1, \frac{n}{m} \left| \sin \frac{x - x_k}{2} \right| \right\} \leq m(-1)^s \tau_{1,n}(x).$$

Осталось выбрать $\gamma_0 = \frac{m}{n} \omega_k(f'; \frac{1}{n})(\gamma(r, k, \Pi) + 1)$.

Действительно, при $x \in [x_s, \frac{x_s + x_{s+1}}{2}]$ имеем следующую оценку приближения снизу:

$$\begin{aligned} (-1)^s(f(x) - \tau_{2,n}(x)) &= (-1)^s(f(x) - \tau_n(x)) + \gamma_0(-1)^s \tau_{1,n}(x) \\ &\geq -\gamma \delta_n(x) \omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right) + \gamma_0 \frac{n}{m} \delta_n(x) = \delta_n(x) \omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right), \quad n \geq N, \end{aligned}$$

и подобную оценку сверху.

При $\frac{m}{2} \leq n \leq N$ для доказательства теоремы подходит полином из леммы 11, b).

Одинаковые двусторонние оценки (сверху и снизу) приближения функций линейными операторами через модули гладкости получены впервые автором (см., например, [1, гл. 5, п. 5] или [2, п. 8.2]). Однако с модулем гладкости производной функции для методов суммирования, построенных введением множителей в ряд Фурье, такие неравенства невозможны. Здесь (в теореме 4) существенно, что операторы τ_n нелинейные.

Список литературы

1. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
2. R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
3. Р. М. Тригуб, “Общая прямая теорема о приближении функций из класса C^r алгебраическими полиномами с эрмитовской интерполяцией”, *Докл. РАН*, **386**:5 (2002), 599–601; англ. пер.: R. M. Trigub, “A general direct theorem on approximation of functions of class C^r by algebraic polynomials with Hermitian interpolation”, *Dokl. Math.*, **66**:2 (2002), 247–249.

4. Р. М. Тригуб, “Приближение функций полиномами с эрмитовской интерполяцией и ограничениями на коэффициенты”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:1 (2003), 199–221; англ. пер.: R. M. Trigub, “Approximation of functions by polynomials with Hermitian interpolation and restrictions on the coefficients”, *Izv. Math.*, **67**:1 (2003), 183–206.
5. I. E. Gopengauz, “Pointwise estimates of the Hermitian interpolation”, *J. Approx. Theory*, **77**:1 (1994), 31–41.
6. К. Копотун, “Simultaneous approximation by algebraic polynomials”, *Constr. Approx.*, **12**:1 (1996), 67–94.
7. М. Г. Плешаков, П. А. Попов, “Второе неравенство Джексона в знаковосхраняющем приближении периодических функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:1 (2004), 123–128; англ. пер.: M. G. Pleshakov, P. A. Popov, “Second Jackson inequality in a sign-preserving approximation of periodic functions”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:1 (2004), 153–160.
8. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
9. М. А. Субханкулов, *Тауберовы теоремы с остатком*, Наука, М., 1976.
10. Р. М. Тригуб, “Односторонние и комонотонные приближения алгебраическими полиномами с положительными коэффициентами”, *Теория приближений и ее приложения* (Киев, Украина, 1999), Ин-т матем. НАН Укр., Киев, 2000, 461–476.
11. Р. М. Тригуб, “Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовской интерполяцией и учетом положения точки. Кусочно односторонняя аппроксимация”, *Доповіді НАН Укр.*, **5** (2006), 19–22.
12. Bl. Sendov, “The constants of H. Whitney are bounded”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **38** (1985), 1299–1302.
13. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
14. Г. Поляа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Мир, М., 1956; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Zweiter Band. Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie*, Julius Springer, Berlin, 1925.
15. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **223**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

Р. М. ТРИГУБ (R. M. TRIGUB)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: roald@ukrpost.ua

Поступило в редакцию
30.08.2007