Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, Автоморфизмы накрытий Галуа общих m -канонических проекций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 121–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:48:44

УДК 512.7

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов

Автоморфизмы накрытий Галуа общих m -канонических проекций

Изучена группа автоморфизмов накрытий Галуа общих плюриканонических накрытий проективных пространств. Показано, что в размерностях один и два эти накрытия дают серии примеров специфических действий симметрических групп S_d на кривых и поверхностях, в которых эти кривые и поверхности не могут быть продеформированы с сохранением действия группы S_d в многообразия, группа автоморфизмов которых не совпадала бы с S_d . В качестве приложения приведены новые примеры G -многообразий в комплексной и вещественной геометрии, которые являются диффеоморфными, но не деформационно эквивалентными.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: общие накрытия проективной прямой и проективной плоскости, группа Галуа накрытия, расширения Галуа, группа автоморфизмов проективного многообразия.

Возможно, самым простым комбинаторным объектом является группа из $n!$ перестановок, действующая на множестве из n элементов. Эта группа имеет различное строение при каждом индивидуальном значении числа n . Основополагающий вопрос: присутствует ли в ней, тем не менее, какая-то асимптотическая согласованность, преобладающая при больших n или, по крайней мере, для какого-нибудь выделенного класса больших n . Математика все еще мало что говорит об этой задаче.

H. Weyl [1]

Введение

0.1. Терминологические соглашения. Под *накрытием* мы понимаем разветвленное накрытие, т.е. конечный морфизм $f: X \rightarrow Y$ нормального неприводимого проективного многообразия X на неособое проективное многообразие Y , определенных над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Каждому накрытию f сопоставим дивизоры ветвления (внизу и вверх) $B \subset Y$ и $R \subset f^{-1}B \subset X$, а также неразветвленную часть $X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$, которая является максимальным неразветвленным поднакрытием накрытия f . Как и всякое неразветвленное накрытие, это накрытие определяет гомоморфизм ψ из фундаментальной группы $\pi_1(Y \setminus B)$ в симметрическую группу S_d , действующую на множестве, состоящем из d элементов, где d – степень накрытия f . Этот гомоморфизм ψ (называемый *монодромией накрытия*) определен накрытием f

Работа выполнена во время пребывания первого автора в Страсбургском университете при поддержке INTAS (грант № 05-7805). Работа первого автора также частично поддержана РФФИ (гранты № 05-01-00455, 05-02-89000-НВО_а, 06-01-72017-MNTI_а, 07-01-92211-НЦНИЛ_а), а также CRDF RUM1-2692-MO-05. Второй автор благодарен за поддержку Национальному агентству научных исследований (ANR-05-0053-01).

однозначно с точностью до внутренних автоморфизмов группы S_d . Обратно, согласно теореме Грауэрта–Реммерта–Римана о продолжении этот класс сопряженности гомоморфизма ψ определяет накрытие f однозначно с точностью до изоморфизма. Его образ $\text{im } \psi = G \subset S_d$ является транзитивной подгруппой группы S_d .

Как хорошо известно, для каждого накрытия f существует единственное с точностью до изоморфизма минимальное накрытие Галуа $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$, которое пропускается через f , $\tilde{f} = f \circ h$, где $h: \tilde{X} \rightarrow X$ также является накрытием Галуа. Накрытие $\tilde{f}$ называется *расширением Галуа накрытия f* . Характеристическим свойством расширения Галуа $\tilde{f}$ является свойство минимальности, которое состоит в том, что любое накрытие Галуа, которое пропускается через f , может быть пропущено через $\tilde{f}$. С помощью теоремы Грауэрта–Реммерта–Римана о продолжении расширение Галуа накрытия f может быть получено из недиагональной компоненты расслоенного произведения d экземпляров неразветвленных частей $X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ накрытия f . В частности, группа Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/Y)$ накрытия $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ естественным образом отождествляется с определенной выше группой $G = \psi(\pi_1(Y \setminus B))$.

В настоящей статье мы исследуем действия конечных групп на расширениях Галуа общих накрытий проективных пространств. Прежде чем дать точное определение общего накрытия, приведем некоторые предварительные определения, относящиеся к действиям симметрических групп.

Пусть I – конечное множество, состоящее из $|I| = d$ элементов, и пусть $I_1 \cup \dots \cup I_k = I$ – некоторое разбиение множества I , $|I_i| = d_i \geq 1$, $\sum_{i=1}^k d_i = d$. Такое разбиение определяет однозначно с точностью до сопряжения вложение группы $S_{d_1} \times \dots \times S_{d_k}$ в симметрическую группу S_d , которое мы будем называть *стандартным вложением*. Представление $S_{d_i} \subset \text{GL}(V_i)$, где V_i – векторное пространство над $\mathbb{C}$, назовем *стандартным представлением ранга $d_i - 1$* , если найдется базис $e_1, \dots, e_{r_i}$ пространства V_i , $r_i = \dim V_i \geq d_i - 1$, такой, что действие $\sigma_{(j,j+1)}$ транспозиции $(j, j+1) \in S_{d_i}$ задается формулой

$$\sigma_{(j,j+1)}(e_l) = \begin{cases} e_l, & \text{если } l \neq j, j+1, \\ e_{j+1}, & \text{если } l = j, \end{cases}$$

при $j \neq d_i - 1$ и формулой

$$\sigma_{(d_i-1,d_i)}(e_l) = \begin{cases} e_l, & \text{если } l \neq d_i - 1, \\ -\sum_{s=1}^{d_i-1} e_s, & \text{если } l = d_i - 1, \end{cases}$$

при $j = d_i - 1$. Такой набор стандартных представлений симметрических групп $S_{d_i} \subset \text{GL}(V_i)$ рангов $d_i - 1$, $i = 1, \dots, k$, определяет представление $S_{d_1} \times \dots \times S_{d_k} \subset \text{GL}(V)$, где $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, которое мы будем называть *стандартным представлением произведения $S_{d_1} \times \dots \times S_{d_k}$ ранга $\sum d_i - k$* . Легко видеть, что если $S_{d_1} \times \dots \times S_{d_k} \subset \text{GL}(V)$ – стандартное представление ранга $\sum d_i - k$, то коразмерность в V подпространства, состоящего из векторов, неподвижных при действии группы $S_{d_1} \times \dots \times S_{d_k}$, равна $\sum d_i - k$.

Пусть группа S_d действует на гладком проективном многообразии Y . Скажем, что действие группы S_d на Y является *общим*, если стабилизатор $\text{St}_a \subset S_d$

каждой точки $a \in Y$ является стандартно вложенным произведением симметрических групп и действие, индуцированное группой St_a на касательном пространстве $T_a Y$, является стандартным представлением (это произведение и представление зависят от точки a). В согласии с этим определением, если действие группы S_d на многообразии Y стандартно, факторпространство Y/S_d является гладким проективным многообразием.

Накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim X}$ степени d называется *общим*, если группа Галуа $G = \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^{\dim X})$ расширения Галуа накрытия f является полной симметрической группой S_d , многообразия X и $\tilde{X}$ являются гладкими, а действие группы G на $\tilde{X}$ является общим. Из этого определения следует, что для любого общего накрытия f степени d группа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^{\dim X})$ является симметрической группой S_d и ее подгруппа $\text{Gal}(\tilde{X}/X)$ совпадает с $S_{d-1} \subset S_d$.

Если X неособо и $\dim X = 1$, то накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, разветвленное над $B \subset \mathbb{P}^1$, является общим тогда и только тогда, когда $|f^{-1}(b)| = \deg f - 1$ для каждой точки $b \in B$. В случае общего накрытия стабилизатор $\text{St}_{\tilde{b}} \subset S_d = \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1)$ каждой точки $\tilde{b} \in \tilde{f}^{-1}(b)$, $b \in B$, порождается некоторой транспозицией и тем самым определяет стандартное вложение $\text{St}_{\tilde{b}} = S_2$ в S_d .

Если X неособо и $\dim X = 2$, то накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ является общим тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: f разветвлено над некоторой каспидальной кривой $B \subset \mathbb{P}^2$; $|f^{-1}(b)| = \deg f - 1$ для каждой неособой точки b кривой B и $|f^{-1}(b)| = \deg f - 2$, если b является нодом или каспом кривой B . В случае общего накрытия стабилизатор $\text{St}_{\tilde{b}} \subset S_d = \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2)$ точки $\tilde{b} \in \tilde{f}^{-1}(b)$, $b \in B$, порождается транспозицией, если b – неособая точка кривой B , и в этом случае $\text{St}_{\tilde{b}} = S_2$; двумя некоммутирующими транспозициями, если b является каспом кривой B , и в этом случае $\text{St}_{\tilde{b}} = S_3$; двумя коммутирующими транспозициями, если b является нодом кривой B , и в этом случае $\text{St}_{\tilde{b}} = S_2 \times S_2$ (более подробно об этом см. в п. 3.1).

Какова бы ни была размерность накрытия, группа автоморфизмов $\text{Aut}(\tilde{X})$ многообразия $\tilde{X}$ содержит симметрическую группу S_d , но, как показывают следующие примеры, нельзя ожидать, что $\text{Aut}(\tilde{X})$ и S_d обязательно совпадают.

В качестве первого примера рассмотрим общее накрытие $f_1: Y = \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени $d + 1$ и обозначим через $\tilde{f}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$ расширение Галуа накрытия f_1 , $\tilde{f} = f_1 \circ h_1$. Тогда $\text{Gal}(\tilde{Y}/\mathbb{P}^1) = S_{d+1}$, $Y = \tilde{Y}/S_d$ и $h_1: \tilde{Y} \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$ является накрытием Галуа с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{Y}/Y) = S_d$. Накрытие $h_1: \tilde{Y} \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$ может быть рассмотрено как расширение Галуа $\tilde{X} = \tilde{Y} \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$ (с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1) = S_d$) накрытия $f: X \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$, $X = \tilde{X}/S_{d-1}$. Последнее накрытие является общим накрытием степени d , и поэтому если мы стартуем с накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, то получаем, что его группа Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1) = S_d$ не совпадает с $\text{Aut}(\tilde{X})$, так как группа $\text{Aut}(\tilde{X}) = \text{Aut}(\tilde{Y})$ содержит по крайней мере группу S_{d+1} .

Другой пример может быть получен следующим образом. Пусть $f_1: Y = \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – общее накрытие степени d , разветвленное над некоторым множеством $B_1 \subset \mathbb{P}^1$. Выберем две точки $x, y \in \mathbb{P}^1$, не принадлежащие множеству B_1 , и пусть $f_2: Z = \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является циклическим накрытием степени p , разветвленным над x и y . Рассмотрим расслоенное произведение $X = Y \times_{\mathbb{P}^1} Z$ и его

проекцию $f: X \rightarrow Z = \mathbb{P}^1$ на второй множитель. Легко видеть, что f является общим накрытием и группа $\text{Aut}(\tilde{X})$ содержит группу $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1) \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

0.2. Основные результаты. Целью настоящего исследования является нахождение численных условий для общих накрытий $f: X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim X}$, которые гарантировали бы выполнение равенства $\text{Aut}(\tilde{X}) = \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^{\dim X})$ и которые сохранялись бы при деформациях расширений Галуа.

Для формулировки полученных в статье результатов нам потребуется еще одно вспомогательное понятие. Накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim X}$ называется *численно m -каноническим* (для краткости *m -каноническим*), если оно задается такими $\dim X + 1$ сечениями линейного расслоения, численно эквивалентного m -й степени $K_X^{\otimes m}$ канонического расслоения K_X многообразия X , которые не имеют общих нулей.

Как известно, m -канонические накрытия существуют, если только размерность Кодaira многообразия X совпадает с его размерностью. Если $\dim X = 2$, то, кроме того, X должно быть минимальной поверхностью и не содержать (-2) -кривых. Если $\dim X = 1$, то род кривой X должен быть не меньше двух. Обратно, как хорошо известно, любая кривая рода $g \geq 2$ представляется в виде m -канонического накрытия при $m \geq 1$ и, как показано в [2], любая минимальная поверхность общего типа, не содержащая (-2) -кривых, также представляется в виде m -канонического накрытия по крайней мере при $m \geq 10$.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть X – кривая рода $g \geq 2$ и $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расширение Галуа m -канонического общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Если $m(g-1) \geq 500$, то группа Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1)$ совпадает со всей группой автоморфизмов кривой $\tilde{X}$.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть X – поверхность общего типа, и предположим, что она представлена в виде m -канонического общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, $m \geq 2$. Если $m^2 K_X^2 \geq 2 \cdot 84^2$ и $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ является расширением Галуа накрытия f , то группа Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2)$ совпадает со всей группой автоморфизмов поверхности $\tilde{X}$.

В качестве следствия получаем, что G -кривые такие, как в теореме 0.1, и G -поверхности такие, как в теореме 0.2, дают бесконечное множество примеров насыщенных связных компонент пространства модулей G -многообразий, $G = S_d$, где компонента называется *насыщенной*, если для любого G -многообразия, представляющего точку этой компоненты, группа G является полной группой автоморфизмов многообразия V . (Стоит отметить, что существует ряд других простых примеров насыщенных компонент с группами $G \neq S_d$, а именно компонент, заданных кривыми и поверхностями с группами автоморфизмов максимально возможного порядка: $84(g-1)$ для кривых и $42^2 K^2$ для поверхностей. Можно упомянуть также деформации жестких многообразий с нетривиальной группой автоморфизмов.)

В качестве другого приложения приведенных выше теорем мы даем контр-примеры к проблеме $\text{Dif} = \text{Def}$ для комплексных и вещественных G -многообразий. А именно, мы строим пары комплексных (соответственно, вещественных) многообразий V_1, V_2 таких, что действия групп $\text{Aut } V_1$ и $\text{Aut } V_2$ (соответ-

ственно, $Kl V_1$ и $Kl V_2$; здесь $Kl V$ – группа, образованная регулярными изоморфизмами $X \rightarrow X$ и $X \rightarrow \bar{X}$) являются диффеоморфными, но не деформационно эквивалентными. Насколько нам известно, такие примеры, особенно в вещественной геометрии, являются новыми. (Возможно, следует отметить, что в [3] в наших контрпримерах к вещественной проблеме $\text{Dif} = \text{Def}$ для поверхностей построенные поверхности имеют диффеоморфные вещественные структуры, но действия групп Клейна на этих поверхностях не диффеоморфны.)

0.3. Содержание статьи. Доказательства теорем 0.1 и 0.2 состоят из двух частей. Вначале (в § 1) с помощью методов теории групп мы исследуем минимальные расширения симметрических групп с целью ограничить число возможных случаев, а затем оставшиеся случаи исследуются с помощью геометрических методов (в § 2 для доказательства теоремы 0.1 и в § 3 для доказательства теоремы 0.2). В § 4 содержатся упоминавшиеся выше приложения.

§ 1. Минимальные расширения симметрических групп

1.1. Предварительные определения. Чтобы сформулировать теоретико-групповые утверждения, используемые в доказательствах теорем 0.1 и 0.2, нам понадобятся несколько определений. Скажем, что группа G , содержащая симметрическую группу S_d , удовлетворяет *свойству минимальности*, если не существует собственной подгруппы G_1 группы G , которая содержит S_d и не совпадает с ней, и будем называть такую группу G *минимальным расширением группы S_d* .

Вложение $\alpha: S_d \subset S_{d+2}$ называется *квазистандартным*, если образ $\alpha(\sigma_{i,j})$ каждой транспозиции $\sigma_{i,j} = (i, j) \in S_d$, $1 \leq i, j \leq d$, является произведением $\alpha(\sigma_{i,j}) = (i, j)(d+1, d+2)$ двух транспозиций (i, j) и $(d+1, d+2)$ в S_{d+2} . Отметим, что при квазистандартном вложении образ группы S_d содержится в знакопеременной подгруппе A_{d+2} группы S_{d+2} . Такое вложение $\alpha: S_d \hookrightarrow A_{d+2}$ будем называть *стандартным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть группа G является минимальным расширением симметрической группы S_d индекса $k = (G : S_d)$. Предположим, что $k \leq cd^n$, где либо (i) $c = 63$ и $n = 1$, либо (ii) $c = (2 \cdot 42)^2$ и $n = 2$. Если $d \geq \max(2c, 1000)$, то G является одной из следующих групп:

- 1) $G = S_d \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p – простое число, $p \leq cd^n$;
- 2) $G = A_d \rtimes D_r$, где $3 \leq r \leq cd^n$, r – нечетное число, D_r – диэдральная группа, заданная представлением

$$D_r = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = (\sigma\tau)^r = 1 \rangle,$$

и действие (сопряжением) элементов σ и τ на группе A_d совпадает с действием транспозиции $(1, 2) \in S_d$ при вложении $A_d \subset S_d$;

- 3) $G = S_{d+1}$ – симметрическая группа;
- 4) $G = A_{d+2}$ – знакопеременная группа, вложение группы S_d в A_{d+2} является стандартным и это расширение возможно только при предположении (ii).

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству предложения 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А priori имеет место один из следующих случаев.

Случай I. *Группа G содержит нетривиальную нормальную подгруппу.*

Случай II. *Группа G является простой.*

Поскольку $d > 6$, то группа S_d имеет единственную нетривиальную нормальную подгруппу, а именно знакопеременную группу A_d , следовательно, случай I может быть разделен на следующие подслучаи, где через N обозначена нетривиальная нормальная подгруппа группы G :

Случай I₁. $S_d \subset N$.

Случай I₂. $N \cap S_d = \{1\}$.

Случай I₃. $N \cap S_d = A_d$.

Разобьем случай I₃ на два подслучая.

Случай I₃₁. A_d является нормальной подгруппой в G .

Случай I₃₂. A_d не является нормальной подгруппой в G .

1.2. Анализ случая I₁. Из свойства минимальности следует, что $S_d = N$. Пусть g_1 – произвольный элемент из $G \setminus S_d$. Сопряжение на элемент g_1 индуцирует некоторый автоморфизм группы S_d . Так как $d \geq 7$, то любой автоморфизм группы S_d является внутренним. Поэтому найдется такой элемент $g_2 \in S_d$, что элемент $g = g_1 g_2$ коммутирует со всеми элементами группы S_d . Следовательно, еще раз применяя свойства минимальности, группа G расщепляется в прямое произведение группы S_d и циклической группы $\langle g \rangle$, порожденной элементом g , порядок которого является простым числом p .

1.3. Анализ случая I₃₁. Согласно п. 1.2 мы можем предполагать, что S_d не является нормальной подгруппой группы G . Следовательно, найдется элемент $g \in G$ такой, что группа $S'_d = g^{-1} S_d g$ не совпадает с S_d (но изоморфна группе S_d).

Поскольку A_d является нормальной подгруппой группы G , то $A_d \subset S'_d \cap S_d$. Кроме того, для любой транспозиции $\sigma \in S_d$ элемент $\tau = g^{-1} \sigma g$ (который мы будем называть транспозицией в S'_d) не принадлежит группе S_d . Таким образом, из свойства минимальности следует, что группа G порождается элементами из A_d и произвольными двумя транспозициями $\sigma \in S_d$ и $\tau \in S'_d$. Более того, так как сопряжение на элементы из S_d (соответственно, из S'_d) представляет всю группу автоморфизмов $\text{Aut}(A_d)$ группы A_d , то мы можем выбрать две порождающие транспозиции $\sigma \in S_d$ и $\tau \in S'_d$ таким образом, что произведение $\sigma \tau$ коммутирует со всеми элементами из A_d . Из вышеизложенного следует, что мы можем предполагать, что действие (сопряжением) элементов σ и τ на группе A_d совпадает с действием транспозиции $(1, 2) \in S_d$.

Обозначим через H подгруппу в G , порожденную элементами σ и τ . Тогда H изоморфна диэдральной группе

$$D_r = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = (\sigma \tau)^r = 1 \rangle$$

при некотором $r \in \mathbb{N}$.

Как известно, каждый элемент $g \in D_r$ либо принадлежит циклической подгруппе, порожденной элементом $\sigma\tau$, либо сопряжен одному из элементов σ или τ . Следовательно, пересечение $A_d \cap H$ лежит в $\langle \sigma\tau \rangle$, а так как элемент $\sigma\tau$ коммутирует со всеми элементами из A_d и A_d имеет тривиальный центр, то $A_d \cap H = \{1\}$. Кроме того, A_d является нормальной подгруппой в G , и G удовлетворяет свойству минимальности, следовательно,

$$G = A_d \rtimes H \simeq A_d \rtimes D_r.$$

Более того, число r должно быть нечетным, так как σ и τ сопряжены в группе G , следовательно, они сопряжены в D_r .

1.4. Анализ случая I_2 . Из свойства минимальности следует, что в этом случае группа G изоморфна полупрямому произведению $N \rtimes S_d$.

Если N не является простой группой, то мы можем найти минимальную нетривиальную нормальную подгруппу N_1 группы N . Заметим прежде всего, что N_1 не может быть нормальной подгруппой в группе G , так как G удовлетворяет свойству минимальности. Следовательно, множество подгрупп в G , сопряженных группе N_1 , состоит из более чем одного элемента. Пусть $\{N_1, \dots, N_s\}$ – множество подгрупп, сопряженных группе N_1 в G , $s \geq 2$. Каждая группа N_i , $1 \leq i \leq s$, содержится в N , так как N является нормальной подгруппой в G . Более того, каждая из них является нормальной подгруппой в N , так как N_1 нормальна в N и сопряжение на любой элемент группы G индуцирует изоморфизм группы N . Кроме того, действие группы S_d на множестве $\{N_1, \dots, N_s\}$ является транзитивным, и это множество является орбитой действия группы S_d сопряжениями на всем множестве подгрупп группы G .

Покажем, что $N \simeq N_1 \times \dots \times N_{s_1}$ при некотором $s_1 \leq s$ (возможно, после перенумерации групп N_i). Заметим, что $N_i \cap N_j = \{1\}$ при $i \neq j$. Действительно, $N_1, \dots, N_s$ являются минимальными нормальными подгруппами в N и пересечение $N_i \cap N_j$ как пересечение двух нормальных подгрупп является нормальной подгруппой. Следовательно, $[N_1, N_2] \subset N_1 \cap N_2 = \{1\}$, таким образом, подгруппа $N_1 N_2$, порожденная в N элементами групп N_1 и N_2 , изоморфна группе $N_1 \times N_2$, и эта группа $N_1 N_2$ также является нормальной подгруппой в N . По индукции предположим, что для некоторого $i < s$ подгруппа $N_{1,i} = N_1 \dots N_i$ группы N является нормальной и изоморфна группе $N_1 \times \dots \times N_i$. Тогда либо $N_{1,i} \cap N_{i+1} = \{1\}$, либо $N_{i+1} \subset N_{1,i}$ (здесь еще раз мы используем то, что N_{i+1} является минимальной нормальной подгруппой в N). Если $N_{1,i} \cap N_{i+1} = 1$, то

$$N_{1,i+1} = N_1 \dots N_{i+1} \simeq N_1 \times \dots \times N_{i+1},$$

так как $[N_{1,i}, N_{i+1}] \subset N_{1,i} \cap N_{i+1} = 1$. Эта индуктивная процедура остановится на некоторой подгруппе $N_{1,s_1} \subset N$, которая, будучи нормальной в N и инвариантной при действии группы S_d сопряжениями, является нормальной подгруппой группы G . Следовательно, группа N_{1,s_1} совпадает с N . Итак, имеем $N \simeq N_1 \times \dots \times N_{s_1}$.

Группы $N_1, \dots, N_s$, которые изоморфны друг другу, являются простыми. Действительно, если N_1 не является простой группой, то найдется нетривиальная нормальная подгруппа $\tilde{N}_1$ в N_1 , и тогда группа $\tilde{N}_1 \times \{1\} \times \dots \times \{1\}$ будет

нормальной подгруппой в N , что невозможно, так как по предположению N_1 является минимальной нормальной подгруппой в N .

Далее покажем, что $s_1 = s$, если N_1 – неабелева простая группа. Для этого, чтобы получить противоречие, предположим, что $s_1 < s$. Тогда $N_{s_1+1} \subset N_1 \times \cdots \times N_{s_1}$, проекция группы N_{s_1+1} на каждый множитель либо является изоморфизмом, либо тривиальным гомоморфизмом и по крайней мере две проекции являются изоморфизмами. Не ограничивая общности, можем предполагать, что первые две проекции являются изоморфизмами. В этом случае если элемент $g \in N_{s_1+1}$ записан в виде произведения $g = g_1 g_2 \cdots g_{s_1}$ элементов $g_i \in N_i$, то g_1 однозначно определяется элементом g_2 . С другой стороны, группа N_{s_1+1} является нормальной подгруппой в группе N , поэтому для любого элемента $g = g_1 g_2 \cdots g_{s_1} \in N_{s_1+1}$ и любого $h \in N_1$ произведение $h^{-1} g h = (h^{-1} g_1 h) g_2 \cdots g_{s_1}$ принадлежит группе N_{s_1+1} . Противоречие.

Если N_1 является неабелевой простой группой, то сопряжения на элементы из S_d переставляют группы $N_1, \dots, N_s$ транзитивно и определяют гомоморфизм $\psi: S_d \rightarrow S_s$. Поскольку $d \geq 7$, то имеется только две возможности: либо $s \leq 2$ и $A_d \subset \ker \psi$, либо ψ является вложением и, следовательно, $s \geq d$.

Предположим, что N_1 является неабелевой простой группой и $s = 2$. Тогда сопряжения на элементы из A_d определяют гомоморфизм $\psi: A_d \rightarrow \text{Aut}(N_1)$. Так как группа внешних автоморфизмов $\text{Out}(N_1) = \text{Aut}(N_1)/\text{Inn}(N_1)$ является разрешимой для простой группы N_1 (см. [4, теорема 4.240]), а группа A_d проста, то $\psi(A_d) \subset \text{Inn}(N_1)$ и либо $\psi(A_d) = 1$, либо $\psi: A_d \rightarrow \text{Inn}(N_1)$ является вложением в группу внутренних автоморфизмов. Если $\psi(A_d) = 1$, то каждый элемент из N_1 коммутирует со всеми элементами из A_d и, следовательно, A_d является нормальной подгруппой группы G , так как G порождается элементами из S_d и неединичным элементом $h \in N_1$, который коммутирует со всеми элементами из A_d . Однако этот случай уже был рассмотрен выше (случай I₃₁). Если $\psi: A_d \rightarrow \text{Inn}(N_1)$ является вложением, то порядок группы N_1 больше, чем $\frac{1}{2}d!$, и, следовательно,

$$k = (G : S_d) \geq \left(\frac{1}{2}d!\right)^2,$$

что невозможно, так как по предположению $d \geq 1000$ и k не больше, чем либо $63d$, либо $(2 \cdot 42)^2 d^2$.

Предположим теперь, что N_1 является неабелевой простой группой и $s \geq d$. Тогда (как известно, A_5 является неабелевой простой группой наименьшего порядка)

$$k = (G : S_d) = |N|^s \geq |N|^d \geq 60^d,$$

что невозможно по той же причине, что и выше.

Наконец, пусть N_1 – абелева простая группа. Тогда $N \simeq N_1 \times \cdots \times N_{s_1}$ и снова сопряжения на элементы из A_d определяют гомоморфизм $\psi: A_d \rightarrow \text{Aut}(N_1)$. Как и выше, если $\psi(A_d) = 1$, то A_d – нормальная подгруппа группы G , этот случай уже был рассмотрен ранее.

Если $\psi: A_d \rightarrow \text{Aut}(N_1)$ является вложением, то лемма 1.3 (см. ниже) влечет неравенство $s_1 \geq [\frac{d}{4}]$. Следовательно,

$$k = (G : S_d) = |N_1|^{s_1} \geq 2^{[\frac{d}{4}]},$$

что противоречит предположению о том, что $d \geq 1000$ и k не больше, чем либо $63d$, либо $(2 \cdot 42)^2 d^2$.

Конец настоящего пункта посвящен доказательству леммы 1.3, которое базируется, в свою очередь, на следующей лемме.

ЛЕММА 1.2. Пусть F – конечное поле характеристики p , и пусть H – подгруппа группы $\text{PGL}(F, n)$, изоморфная знакопеременной группе A_{4d_1} , $d_1 \in \mathbb{N}$. Тогда $n \geq d_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d_1 \leq 2$, то утверждение леммы является очевидным. Предположим, что утверждение леммы верно для $d_1 \leq k$, и положим $d_1 = k + 1$.

Рассмотрим естественный эпиморфизм $\psi: \text{GL}(F, n) \rightarrow \text{PGL}(F, n)$. Ядро эпиморфизма ψ состоит из скалярных матриц λId , $\lambda \in F^*$, и, следовательно, группа $\psi^{-1}(A_{4(k+1)})$ является центральным расширением группы $A_{4(k+1)}$.

Обозначим через Ξ множество четверок $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ попарно различных целых чисел $1 \leq i_j \leq 4(k+1)$ и для каждого $I \in \Xi$ обозначим через x_I перестановку $(i_1, i_2)(i_3, i_4) \in A_{4(k+1)}$. Эти перестановки x_I , $I \in \Xi$, порождают группу $A_{4(k+1)}$, и так как $4(k+1) > 8$, то каждые две из них сопряжены в $A_{4(k+1)}$. Для каждой пары $I_1, I_2 \in \Xi$ выберем слово w_{I_1, I_2} , состоящее из букв x_I , такое, что $x_{I_1} = w_{I_1, I_2}^{-1} x_{I_2} w_{I_1, I_2}$ в группе $A_{4(k+1)}$, затем выберем элементы $\hat{x}_I \in \psi^{-1}(x_I) \subset \psi^{-1}(A_{k+1})$ и положим

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{I_0} &= \hat{x}_{I_0}, & I_0 &= \{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4\}, \\ \tilde{x}_I &= \hat{w}_{I, I_0}^{-1} \tilde{x}_{I_0} \hat{w}_{I, I_0}, & I &\neq I_0, \end{aligned}$$

где $\hat{w}_{I, I_0}$ получено из слова w_{I, I_0} с помощью подстановки элементов $\hat{x}_I$ вместо букв x_I .

Для каждого $I \in \Xi$ имеем $\tilde{x}_I = \mu_I \hat{x}_I$, где $\mu_I \in \ker \psi$ принадлежат центру группы $\text{GL}(F, n)$. Следовательно,

$$\tilde{x}_I = \tilde{w}_{I, I_0}^{-1} \tilde{x}_{I_0} \tilde{w}_{I, I_0},$$

где $\tilde{w}_{I, I_0}$ получено из слова w_{I, I_0} с помощью подстановки элементов $\tilde{x}_I$ вместо букв x_I . С другой стороны, $x_I^2 = 1$ для каждого $I \in \Xi$, откуда следует, что $\tilde{x}_I^2 = \lambda_I \in \ker \psi$. Так как $\tilde{x}_I$ сопряжены друг другу и $\tilde{x}_I^2 = \lambda_I$ принадлежат центру, то все λ_I должны быть равны друг другу. Обозначим этот элемент через λ .

Рассмотрим группу $\text{GL}(F, n)$ как подгруппу группы $\text{GL}(\bar{F}, n)$, где $\bar{F}$ – алгебраическое замыкание поля F , и обозначим через $\tilde{A}_{4(k+1)}$ подгруппу группы $\text{GL}(\bar{F}, n)$, порожденную элементами $\tilde{x}_I$, $I \in \Xi$, и элементами, принадлежащими центру группы $\text{GL}(\bar{F}, n)$. Легко видеть, что группа $\tilde{A}_{4(k+1)}$ является центральным расширением группы $A_{4(k+1)}$.

В группе $\tilde{A}_{4(k+1)}$ найдется элемент μ такой, что $\mu^2 = \lambda^{-1}$. Положим $y_I = \mu \tilde{x}_I$. Тогда $y_I^2 = 1$ и все элементы y_I сопряжены друг другу: $y_I = v_{I,I_0}^{-1} y_{I_0} v_{I,I_0}$, где v_{I,I_0} получено из слова w_{I,I_0} с помощью подстановки элементов y_I вместо букв x_I . Далее, для каждого $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \in \Xi$, $1 \leq i_j \leq 4k$, имеем $x_I x_{I_0} = x_{I_0} x_I$, откуда следует, что $y_I y_{I_0} = \mu_I y_{I_0} y_I$ для некоторого μ_I , принадлежащего центру группы $\text{GL}(\bar{F}, n)$. Так как $y_I^2 = \text{Id}$, то $\mu_I = \pm \text{Id}$, а так как все y_I сопряжены друг другу с помощью слов, зависящих от элементов y_I , то все μ_I должны совпадать друг с другом. Следовательно, все μ_I , $I \in \Xi$, равны либо $\mu = \text{Id}$, либо $\mu = -\text{Id}$.

Покажем, что $\mu = \text{Id}$. Рассмотрим элементы $y_{1,2,3,4}$, $y_{1,2,5,6}$ и положим $\tilde{y}_{3,4,5,6} = y_{1,2,3,4} y_{1,2,5,6}$. Имеем $\tilde{y}_{3,4,5,6} = \lambda y_{3,4,5,6}$, где λ является центральным элементом, так как $x_{3,4,5,6} = x_{1,2,3,4} x_{1,2,5,6}$. Кроме того, имеем $y_{I_0} y_{1,2,3,4} = \mu y_{1,2,3,4} y_{I_0}$ и $y_{I_0} y_{1,2,5,6} = \mu y_{1,2,5,6} y_{I_0}$. Следовательно, с одной стороны,

$$y_{I_0} \tilde{y}_{3,4,5,6} = y_{I_0} \lambda y_{3,4,5,6} = \lambda \mu y_{3,4,5,6} y_{I_0} = \mu \tilde{y}_{3,4,5,6} y_{I_0},$$

а с другой стороны,

$$y_{I_0} \tilde{y}_{3,4,5,6} = y_{I_0} y_{1,2,3,4} y_{1,2,5,6} = \mu^2 y_{1,2,3,4} y_{1,2,5,6} y_{I_0} = \mu^2 \tilde{y}_{3,4,5,6} y_{I_0}.$$

Таким образом, $\mu = \text{Id}$.

Обозначим через $\bar{A}_{4(k+1)}$ подгруппу группы $\text{GL}(\bar{F}, n)$, порожденную элементами y_I , $I \in \Xi$. Очевидно, ее образ в $\text{PGL}(\bar{F}, n)$ есть $A_{4(k+1)}$. Рассмотрим подгруппу $\bar{A}_{4k}$ группы $\bar{A}_{4(k+1)}$, порожденную элементами y_I , $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \in \Xi$, для которых выполнено неравенство $1 \leq i_j \leq 4k$. Элементы группы $\bar{A}_{4k}$ коммутируют с элементом y_{I_0} , и образ группы $\bar{A}_{4k}$ в $\text{PGL}(\bar{F}, n)$ есть A_{4k} .

Предположим сначала, что характеристика $p \neq 2$. Тогда векторное пространство $V = \bar{F}^n$ расщепляется в прямую сумму $E_+ \oplus E_-$ двух собственных подпространств, соответствующих собственным значениям ± 1 элемента y_{I_0} . Так как элемент y_{I_0} не принадлежит центру, то $\dim E_+ \geq 1$ и $\dim E_- \geq 1$, а так как элементы группы $\bar{A}_{4k}$ и элемент y_{I_0} коммутируют, то оба собственных пространства $E_{\pm}$ являются инвариантными относительно действия группы A_{4k} . Это действие не тривиально хотя бы на одном из этих пространств, скажем на E_+ . Кроме того, так как A_{4k} является простой группой, то это действие индуцирует вложение группы A_{4k} в $\text{PGL}(E_+)$. По предположению индукции имеем $\dim E_+ \geq k$ и, следовательно, $\dim V \geq k + 1 = d_1$.

Предположим теперь, что $p = 2$. Тогда подпространство $E = \{v \in V \mid y_{I_0}(v) = v\}$ пространства V инвариантно относительно действия группы A_{4k} и $\dim E < \dim V$. Если действие группы A_{4k} на пространстве E не тривиально, то $n = \dim V > \dim E \geq k$, т. е. $n \geq k + 1 = d_1$.

Чтобы завершить доказательство леммы, покажем, что если действие группы A_{4k} на E тривиально, то индуцированное действие группы A_{4k} на факторпространстве V/E является нетривиальным. Действительно, если оба действия являются тривиальными, то мы можем выбрать базис в пространстве V такой,

что в этом базисе каждый элемент $y \in A_{4k}$ может быть представлен матрицей вида

$$y = \begin{pmatrix} \text{Id}_a & A \\ 0 & \text{Id}_b \end{pmatrix},$$

где $a = \dim E$, $b = \dim V - a$, $A - (a \times b)$ -матрица и $0 - (b \times a)$ -матрица, состоящая из нулей. Однако это невозможно, поскольку такие матрицы образуют абелеву группу, тогда как группа A_{4k} не является абелевой. Таким образом, получаем, что действие группы A_{4k} на V/E не тривиально и, следовательно,

$$n = \dim V > \dim V/E \geq k,$$

т.е. $n \geq k + 1 = d_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть F – конечное поле характеристики p , и пусть H – подгруппа в $\text{GL}(F, n)$, изоморфная знакопеременной группе A_{4d_1} , $d_1 \in \mathbb{N}$. Тогда $n \geq d_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{PGL}(F, n)$ является факторгруппой группы $\text{GL}(F, n)$ по ее центру и знакопеременная группа имеет тривиальный центр, то лемма следует из леммы 1.2.

1.5. Анализ случая I_{32} . Так как N – нормальная подгруппа и $N \cap S_d = A_d$, то подгруппа $\langle N, \sigma \rangle$, порожденная в G элементами группы N и транспозицией $\sigma \in S_d$, изоморфна полупрямому произведению $N \rtimes \langle \sigma \rangle$. Группа S_d содержится в $\langle N, \sigma \rangle$, так как $A_d \subset N$. Поэтому свойство минимальности группы G влечет равенство $G = N \rtimes \langle \sigma \rangle$.

Напомним, что по предположению A_d не является нормальной подгруппой группы G .

Предположим сначала, что группа N не является простой. Выберем минимальную нетривиальную подгруппу N_1 в группе N . Тогда либо $N_1 \cap A_d = \{1\}$, либо $N_1 \cap A_d = A_d$, так как группа A_d является простой.

Если $N_1 \cap A_d = \{1\}$, то группа $N_2 = \sigma^{-1}N_1\sigma$ является нормальной подгруппой группы N и $N_2 \cap A_d = \{1\}$. Если $N_1 = N_2$, то N_1 является нормальной подгруппой в G , и этот случай уже был рассмотрен (случай I_2). Если $N_1 \neq N_2$, то $[N_1, N_2] \subset N_1 \cap N_2 = \{1\}$ и группа $N_1N_2 \simeq N_1 \times N_2$ является нормальной подгруппой группы G . Однако случай, когда $N_1N_2 \cap A_d = \{1\}$, был рассмотрен выше (случай I_2). Поэтому мы можем предполагать, что $N = N_1N_2$. Поскольку $N_i \cap A_d = \{1\}$ для $i = 1, 2$, то проекции группы A_d на множители являются вложениями. Поэтому $|N_i| \geq |A_d| = \frac{d!}{2}$ и, следовательно,

$$k = (G : S_d) = (N : A_d) \geq \frac{d!}{2},$$

что невозможно, так как по предположению $d \geq 1000$ и k не превосходит либо $63d$, либо $(2 \cdot 42)^2 d^2$.

Если $N_1 \cap A_d = A_d$, то $N_2 \cap A_d = A_d$, где $N_2 = \sigma^{-1}N_1\sigma$. Если $N_1 = N_2$, то N_1 является нормальной подгруппой в G , и этот случай уже был рассмотрен (случай I_2). Если $N_1 \neq N_2$, то $N_1 \cap N_2$ является нормальной подгруппой

группы N и $A_d \subset N_1 \cap N_2 \subset N_1$. Но это противоречит нашему начальному предположению о том, что N_1 является минимальной нетривиальной нормальной подгруппой группы N .

Таким образом, осталось исследовать случай, когда N является простой группой и $G = N \rtimes \langle \sigma \rangle$. Очевидно, N не может быть циклической группой.

Если группа N изоморфна некоторой знакопеременной группе A_{d_1} , то $d_1 - d = n_1 \geq 1$ и

$$k = (G : S_d) = (A_{d_1} : A_d) = (d+1) \cdots (d+n_1).$$

По предположению имеем $d \geq \max(2c, 1000)$ и $k \leq cd^n$, где $c = 63$, $n = 1$ (случай (i)) и $c = (2 \cdot 42)^2$, $n = 2$ (случай (ii)). Следовательно, имеем $n_1 \leq 1$ в случае (i) и $n_2 \leq 2$ в случае (ii).

Если $n_1 = 1$, то $G = S_{d+1}$ (и, более того, вложение группы S_d в $G = S_{d+1}$ является стандартным).

Покажем (прежде, чем завершить анализ случаев с другими простыми группами), что значение $n_1 = 2$ в случае (ii) невозможно.

ЛЕММА 1.4. *Вложение $\alpha: A_d \rightarrow A_{d+2}$ сопряжено стандартному вложению, если $d \geq 9$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартные действия групп $A_d \subset S_d$ и $A_{d+2} \subset S_{d+2}$ на множествах $I_d = \{1, 2, \dots, d\}$ и $I_{d+2} = \{1, 2, \dots, d+2\}$ соответственно. Если $\tau \in A_d$ – циклическая перестановка длиной 3, то ее образ $\alpha(\tau)$ является произведением $\tau_1 \cdots \tau_s$ попарно несвязных циклических перестановок, причем для каждого $i = 1, \dots, s$ выполнено равенство $\tau_i^3 = 1$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $s = 1$ для любого 3-цикла $\tau \in A_d$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $\tau = (d-2, d-1, d)$.

При действии элемента $\alpha(\tau)$ множество I_{d+2} распадается в несвязное объединение s орбит $O_{3,i}$, $i = 1, \dots, s$, состоящих из трех элементов, и $d+2-3s$ орбит $O_{1,i}$, $i = 1, \dots, d+2-3s$, состоящих из одного элемента. Рассмотрим подгруппу A_{d-3} группы A_d , элементы которой оставляют неподвижными точки $d-2, d-1, d \in I_d$. Каждый элемент из A_{d-3} коммутирует с τ . Следовательно, группа $\alpha(A_{d-3})$ действует на множестве орбит $O_{3,i}$ и на множестве орбит $O_{1,i}$. Это действие определяет гомоморфизм $\beta: A_{d-3} \rightarrow S_s \times S_{d+2-3s}$. Но $s < d-3$, если $d > 9$, и если $s > 1$, то $d+2-3s < d-3$. Следовательно, β является тривиальным гомоморфизмом, если $s > 1$, так как A_{d-3} – простая группа и $|A_{d-3}| > |S_s|$, $|A_{d-3}| > |S_{d+2-3s}|$ при $d > 9$. Поэтому гомоморфизм α индуцирует гомоморфизм из группы A_{d-3} в прямое произведение s экземпляров группы S_3 , который снова должен быть тривиальным. Окончательно получаем, что если $s > 1$, то α не может быть вложением. Лемма доказана.

Согласно лемме 1.4 мы можем предполагать, что $G \simeq A_{d+2} \rtimes \langle \sigma \rangle$ и что вложение $A_d \subset A_{d+2}$ является стандартным. Покажем, что в этом случае $G \simeq S_{d+2}$ и вложение $S_d \subset G \simeq S_{d+2}$ также является стандартным, следовательно, это расширение $S_d \subset G$ симметрической группы S_d не удовлетворяет свойству минимальности.

Действительно, рассмотрим естественный гомоморфизм

$$i: \text{Inn}(G) \rightarrow \text{Aut}(A_{d+2}) \simeq S_{d+2}.$$

Очевидно, $i(A_{d+2}) = A_{d+2} \subset S_{d+2}$, и чтобы доказать, что $G \simeq S_{d+2}$, достаточно показать, что $i(\sigma)$ не является внутренним автоморфизмом группы A_{d+2} (напомним, что σ – транспозиция, как элемент группы S_d). Если $i(\sigma) \in \text{Inn}(A_{d+2})$, то найдется такой элемент $\tau \in A_{d+2}$, что произведение $\gamma = \sigma\tau$ коммутирует со всеми элементами из A_{d+2} . В частности, оно коммутирует с τ и, следовательно, коммутирует с σ . Поскольку $\sigma \notin A_{d+2}$, то мы имеем $\gamma = \sigma\tau \neq 1$ и группа $\langle S_d, \gamma \rangle$, порожденная в G элементом γ и элементами из S_d , изоморфна группе $S_d \times \langle \gamma \rangle$. Однако существование такой подгруппы в группе $G \simeq A_{d+2} \rtimes \langle \sigma \rangle$ противоречит условию минимальности группы G .

Чтобы доказать, что вложение $j: S_d \subset G \simeq S_{d+2}$ является стандартным, заметим, что $j(\sigma)$ является произведением $\sigma_1 \cdots \sigma_s$ нечетного числа попарно несвязных транспозиций $\sigma_i \in S_{d+2}$, и мы должны показать, что $s = 1$. Предположим, что $s \geq 3$. Как и в доказательстве леммы 1.4, рассмотрим стандартные действия групп S_d и S_{d+2} на множествах $I_d = \{1, 2, \dots, d\}$ и $I_{d+2} = \{1, 2, \dots, d+2\}$ соответственно. Пусть $\sigma \in S_d$ – это транспозиция $(d-1, d)$. При действии элемента $j(\sigma)$ множество I_{d+2} распадается на несвязное объединение s орбит $O_{2,l}$, $l = 1, \dots, s$, состоящих из двух элементов, и $d+2-2s$ орбит $O_{1,l}$, $l = 1, \dots, d+2-2s$, состоящих из одного элемента. Рассмотрим подгруппу S_{d-2} группы S_d , элементы которой оставляют неподвижными точки $d-1, d \in I_d$. Каждый элемент группы S_{d-2} коммутирует с σ . Следовательно, группа $j(S_{d-2})$ действует на множествах орбит $O_{2,j}$ и $O_{1,j}$. Это действие определяет гомоморфизм $\beta: S_{d-2} \rightarrow S_s \times S_{d+2-2s}$. Однако $s < d-2$ (напомним, что $d \geq 1000$), и если $s \geq 3$, то $d+2-2s < d-3$. Поэтому композиция гомоморфизма β с проекцией на каждый множитель имеет нетривиальное ядро, если $s \geq 3$. Это ядро совпадает либо с A_{d-2} , либо со всей группой S_{d-2} . Следовательно, образ каждого элемента из S_{d-2} при вложении j имеет порядок, не превосходящий 4, что невозможно, если $d-2 \geq 5$.

Согласно следующей лемме невозможно появление других простых групп N в произведении $G = N \rtimes \langle \sigma \rangle$, таким образом, эта лемма завершает исследование случая I_{32} .

ЛЕММА 1.5. *Предположим, что простая группа G , отличная от знакопеременной группы, содержит подгруппу H_d , изоморфную либо симметрической группе S_d , либо знакопеременной группе A_d , $d \geq 1000$. Тогда $(G : H_d) > 84^2 d^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве леммы мы используем классификацию простых конечных групп (см. [4]).

Группа G не является абелевой, так как H_d – неабелева группа. Группа G не может быть спорадической простой группой, так как порядок любой спорадической простой группы не делится на $\frac{d!}{2}$, если $d \geq 33$ (для спорадических простых групп либо кратность простого числа 11 в их порядке не превосходит двух, либо их порядок не делится на 13), тогда как порядок $|G|$ должен делиться на порядок $|H_d|$, который, в свою очередь, делится на $\frac{d!}{2}$.

Пусть G – простая группа лиевского типа. Тогда G является подгруппой либо группы $\mathrm{GL}(F, n)$, либо $\mathrm{PGL}(F, n)$, где F – некоторое конечное поле. Обозначим через q число элементов поля F . Так как $H_d \subset G$, то согласно леммам 1.2 и 1.3 имеем неравенство $n \geq [\frac{d}{4}]$.

Если G – одна из следующих групп: $A_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$, ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, то

$$|G| \geq q^{r^2},$$

где $r = [\frac{n}{2}]$. Так как $[\frac{d}{8}]^2 - 16 > d \log_2 d$ при $d \geq 1000 > 3!$, то $(G : H_d) > 168^2 d^2$.

Чтобы завершить доказательство леммы, заметим, что все другие простые группы лиевского типа имеют нетривиальное неприводимое линейное представление размерности меньше, чем 250, и, следовательно, согласно лемме 1.3 они не могут иметь подгруппу, изоморфную группе A_d , если $d \geq 1000$.

1.6. Анализ случая II. Из леммы 1.5 следует, что осталось рассмотреть только случай, когда $S_d \subset G = A_{d_1}$.

Вложение $S_d \subset A_{d_1}$ индуцирует вложение $S_d \subset S_{d_1}$. Поскольку любое вложение $S_d \subset S_{d+1}$ является стандартным, то $d_1 - d = n_1 \geq 2$. По предположению имеем $d \geq \max(2c, 1000)$ и $(A_{d_1} : S_d) = \frac{1}{2}(d+1) \cdots (d+n_1) \leq cd^n$, где $c = 63$, $n = 1$ в случае (i) и $c = (2 \cdot 42)^2$, $n = 2$ в случае (ii). Следовательно, $n_1 \leq 2$.

Покажем, что если $n_1 = 2$, то вложение $S_d \subset A_{d+2}$ является стандартным. Действительно, согласно лемме 1.4 вложение $S_d \subset A_{d+2}$ индуцирует стандартное вложение $A_d \subset A_{d+2}$. Более того, образ в $A_{d+2} \subset S_{d+2}$ транспозиции $\sigma \in S_d$ является произведением четного числа s попарно коммутирующих транспозиций σ_i группы S_{d+2} , и чтобы показать, что вложение $S_d \subset A_{d+2}$ является стандартным, достаточно доказать, что $s = 2$. Мы не приводим это доказательство, так как оно практически дословно повторяет доказательство леммы 1.4.

§ 2. Доказательство теоремы 0.1

2.1. Минимальные расширения групп Галуа общих накрытий. Обозначим через $\bar{g} = g - 1$ арифметический род кривой X , $\bar{g} \geq 1$, и пусть B – множество точек в $\mathbb{P}^1$, над которыми разветвлено накрытие $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Поскольку f является m -каноническим общим накрытием, то

$$d = \deg f = 2m\bar{g}.$$

По формуле Гурвица, примененной к f , имеем

$$|B| = 2d + 2\bar{g} = 2(2m + 1)\bar{g}.$$

Множество точек, над которыми разветвлено накрытие $\tilde{f}$ (расширение Галуа накрытия f), совпадает с B , и все индексы ветвления в точках ветвления накрытия $\tilde{f}$ равны 2. Следовательно, согласно формуле Гурвица, примененной к накрытию $\tilde{f}$, имеем

$$2\tilde{g} = -2d! + \frac{1}{2} d! |B| = d! (d + \bar{g} - 2), \quad (2.1)$$

где $\tilde{g} = g(\tilde{X}) - 1$ – арифметический род кривой $\tilde{X}$.

Предположим, что $\text{Aut}(\tilde{X}) \neq \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^1)$, и выберем в группе $\text{Aut}(\tilde{X})$ подгруппу G такую, что $S_d \subset G$ является минимальным расширением группы S_d .

Обозначим через $k = (G : S_d)$ индекс подгруппы S_d в группе G . Из оценки Гурвица порядка группы автоморфизмов алгебраической кривой (см., например, [5]) вытекает, что $|G| \leq 84\tilde{g}$. Следовательно,

$$k \leq 42(d + \bar{g} - 2). \quad (2.2)$$

В частности, мы имеем неравенство

$$k < 63d. \quad (2.3)$$

Таким образом, из предложения 1.1 следует, что группа G является одной из следующих групп:

- 1) $G = S_d \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \geq 2$, p – простое число;
- 2) $G = A_d \rtimes D_r$, где $r \geq 3$ и r является нечетным числом, D_r – диэдральная группа, заданная копредставлением

$$D_r = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = (\sigma\tau)^r = 1 \rangle,$$

и действие (с помощью сопряжения) элементов σ и τ на группе A_d совпадает с действием транспозиции $(1, 2) \in S_d$ на $A_d \subset S_d$;

- 3) $G = S_{d+1}$ – симметрическая группа.

2.2. Исследование оставшихся трех случаев. Рассмотрим случай 1). Обозначим через γ порождающий элемент группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Поскольку действие элемента γ на кривой $\tilde{X}$ коммутирует с действием любого элемента группы S_d , то действие группы $\langle \gamma \rangle$ на кривой $\tilde{X}$ опускается как на X , так и на $\mathbb{P}^1$. Обозначим через $\tilde{X}_1 = \tilde{X}/\langle \gamma \rangle$, $X_1 = X/\langle \gamma \rangle$ соответствующие факторпространства и через $\tilde{r}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$, $r: X \rightarrow X_1$, $h_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$, $r_P: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1/\langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{P}^1$ соответствующие морфизмы. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \\ \tilde{r} \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow r_P \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{h_1} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Циклическое накрытие $r_P: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ является накрытием степени $p \geq 2$ и разветвлено в двух точках, скажем над $x_1, x_2 \in \mathbb{P}^1$. Следовательно, циклическое накрытие r разветвлено по крайней мере в $2(d-1)$ точках, лежащих в $f^{-1}(x_1) \cup f^{-1}(x_2)$, и индексы ветвления в этих точках равны p . Согласно формуле Гурвица имеем

$$2\bar{g} \geq 2p(g(X_1) - 1) + 2(d-1)(p-1),$$

что влечет

$$2\bar{g} \geq -2p + 2(2m\bar{g} - 1)(p-1).$$

Окончательно мы получаем неравенство

$$p \leq \frac{(2m+1)\bar{g}+1}{2m\bar{g}-2} = 1 + \frac{\bar{g}+3}{2m\bar{g}-2} < 2,$$

которое показывает, что случай 1) невозможен.

Рассмотрим случай 2). Для подходящей пары порождающих элементов σ, τ группы D_r имеем: $S_d = A_d \rtimes \langle \sigma \rangle \subset G$; группа $S'_d = A_d \rtimes \langle \tau \rangle$ сопряжена группе S_d и не совпадает с S_d (но она изоморфна группе S_d). Кроме того, $A_d \subset S'_d \cap S_d$. Обозначим через $X_1 = \tilde{X}/S'_{d-1}$, $\mathbb{P}^1 = \tilde{X}/S'_d$ и $X_0 = \tilde{X}/A_d$ соответствующие факторпространства. Эти пространства можно включить в следующую коммутативную диаграмму, в которой морфизмы f_{0i} , $i = 1, 2$, имеют степень два и морфизм f_{01} разветвлен над всеми точками, принадлежащими множеству B , так как f является общим накрытием:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & \\ & \swarrow & \downarrow h_0 & \searrow h^1 & \\ & X & X_0 & X_1 & \\ & \downarrow f & \swarrow f_{01} & \searrow f_{02} & \downarrow f_1 \\ & \mathbb{P}^1 & & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Морфизмы f_{0i} , $i = 1, 2$, степени 2 определяют вложение $i: X_0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, образ которого $i(X_0)$ является кривой бистепени $(2, 2)$ на поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Поэтому $i(X_0)$ является эллиптической кривой и проекции кривой $i(X_0)$ на каждый множитель разветвлены в четырех точках. С другой стороны, морфизм f_{01} разветвлен над всеми точками, лежащими в B , и $|B| = 2d + 2\bar{g} > 4$. Следовательно, случай 2) невозможен.

Исследуем случай 3). Отметим, прежде всего, что вложение группы S_d в $G = S_{d+1}$ является стандартным.

Рассмотрим факторпространство $\tilde{X}/G$ и факторотображение $\bar{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$. Морфизм $\bar{f}$ пропускается через $\tilde{f}$, так что $\tilde{X}/G \simeq \mathbb{P}^1$ и $\bar{f}$ является композицией следующих морфизмов:

$$\tilde{X} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1,$$

где r – морфизм степени $d+1$. Поскольку S_d и S_{d+1} не имеют общих нормальных подгрупп, то $\bar{f}$ является расширением Галуа накрытия r .

Обозначим через $B_1 \subset \mathbb{P}^1$ множество точек, над которыми разветвлен морфизм r , и сравним число точек множества B с числом точек множества $r(B) \subset B_1$.

Симметрическая группа S_{d+1} действует как группа перестановок на множестве $I = \{1, \dots, d+1\} \subset \mathbb{N}$. Пусть $H_i = \{\gamma \in S_{d+1} \mid \gamma(i) = i\}$, так что наша группа S_d равна группе H_{d+1} . Все группы H_i сопряжены друг другу. Следовательно, для каждого i накрытие $\tilde{f}_i: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H_i \simeq \mathbb{P}^1$ является расширением Галуа общего накрытия.

Пусть $a \in \tilde{X}$ — одна из точек ветвления накрытия $\tilde{f}_{d+1} = \tilde{f}$. Стабилизатор $\text{St}_a(\tilde{f}) = \{g \in G \mid g(a) = a\}$ этой точки является циклической группой, порядок которой равен индексу ветвления накрытия $\tilde{f}$ в точке a . Пусть τ — порождающий элемент группы $\text{St}_a(\tilde{f})$. Пересечение $\text{St}_a(\tilde{f}) \cap S_d = \text{St}_a(\tilde{f}_{d+1})$ является группой второго порядка и порождается транспозицией $\sigma \in H_{d+1}$, так как $\tilde{f}_{d+1}$ является расширением Галуа общего накрытия. Следовательно, $\sigma = \tau^k$, и, кроме того, $\tau^{2k} = 1$.

Покажем сначала, что k является нечетным числом. Действительно, запишем τ в виде произведения циклических перестановок:

$$\tau = (i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1}) \cdots (i_{s,1}, \dots, i_{s,k_s}).$$

Мы можем предполагать, что (с точностью до перенумерации) $\sigma = (i_{1,1}, \dots, i_{1,k_1})^k$ и $(i_{j,1}, \dots, i_{j,k_j})^k = 1$ при $j = 2, \dots, s$. Теперь легко видеть, что $k_1 = 2$, k является нечетным числом и все k_j являются делителями числа k при $j = 2, \dots, s$.

Покажем, что $k = 1$ и, таким образом, $\tau = \sigma$. Для каждого i пересечение $\text{St}_a(\tilde{f}) \cap H_i = \text{St}_a(\tilde{f}_i)$ является группой, порядок которой не превосходит двух, и если ее порядок равен двум, то она также порождается транспозицией $\sigma_i \in H_i$, так как $\tilde{f}_i$ является расширением Галуа накрытия, сопряженного накрытию $\tilde{f}_{d+1}$. С другой стороны, элемент

$$\sigma\tau = (i_{2,1}, \dots, i_{2,k_2}) \cdots (i_{s,1}, \dots, i_{s,k_s}) \in \text{St}_a(\tilde{f}) \cap H_{i_{1,1}} = \text{St}_a(\tilde{f}_{i_{1,1}})$$

имеет нечетный порядок. Следовательно, $\sigma = \tau$.

Рассмотрим теперь слой $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(a))$, содержащий точку a . Слой $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(a))$ может быть отождествлен с множеством правых смежных классов $\{\text{St}_a(\bar{f})\gamma\}$ в группе S_{d+1} , так что стабилизатор $\text{St}_{(a)\gamma}(\bar{f})$ точки $(a)\gamma$ порождается транспозицией $\gamma^{-1}\sigma\gamma$.

Слой $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(a))$ распадается в несвязное объединение орбит действия группы H_{d+1} , каждая из которых является слоем накрытия $\tilde{f}_{d+1}$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что группа $\text{St}_a(\bar{f})$ порождается элементом $\sigma = (1, 2)$. Тогда легко видеть, что каждая из этих орбит может быть отождествлена с одним из множеств $F_i = \{\text{St}_a(\bar{f})\gamma \mid \gamma \in \sigma_i H_{d+1}\}$, где $\sigma_i = (i, d+1)$, если $2 \leq i < d+1$, и $\sigma = (1, 2)$, если $i = d+1$. (Транспозиции $\sigma_1 = (1, d+1)$ и $\sigma_2 = (2, d+1)$ задают одну и ту же орбиту при действии группы H_{d+1} , так как $(1, 2)(1, d+1)(1, 2) = \text{Id} \cdot (2, d+1)$.)

Точки $a_i = (a)\sigma_i$ имеют один и тот же стабилизатор

$$\text{St}_{a_i}(\bar{f}) = \langle (1, 2) \rangle \subset H_{d+1},$$

если $i > 2$. Поэтому при $i \geq 3$ точки, принадлежащие множеству F_i , являются точками ветвления накрытия $\tilde{f}_{d+1}$ и, следовательно, $\tilde{f}_{d+1}(F_i) \in B$. Легко видеть, что точки, принадлежащие множеству F_2 , не являются точками ветвления накрытия $\tilde{f}_{d+1}$. Следовательно, точка $\tilde{f}_{d+1}(F_2)$ является точкой ветвления накрытия r .

В качестве следствия получаем, что если $\tilde{b} \in r(B)$, то слой $r^{-1}(\tilde{b})$ состоит из $d - 1$ точек, принадлежащих множеству B , и еще одной точки (точки ветвления накрытия r), которая не принадлежит множеству B . Поэтому число $|B| = 2d + 2\bar{g} = 2(m + 1)\bar{g}$ делится на $d - 1 = 2m\bar{g} - 1$. Таким образом, число $2\bar{g} + 1$ должно делиться на $2m\bar{g} - 1$, но это возможно только в том случае, если $\bar{g} = 1$ и $m = 1$ или $m = 2$.

§ 3. Доказательство теоремы 0.2

3.1. Локальное поведение общих накрытий и их расширений Галуа. В этом пункте мы специализируем на случай поверхностей определения, относящиеся к общим действиям симметрических групп, сравниваем эти определения с традиционными определениями общих накрытий, выводим свойства локального поведения общих накрытий из свойств локального поведения этих действий и фиксируем соответствующие понятия и обозначения.

Напомним, что расширение Галуа $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ общего накрытия $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени d пропускается через накрытие f , $\tilde{f} = f \circ h$, где $h: \tilde{X} \rightarrow X$ также является накрытием Галуа с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{X}/X) = S_{d-1} \subset S_d = \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2)$. Множество точек $B \subset \mathbb{P}^2$, над которыми накрытие f разветвлено, совпадает с множеством, над которым разветвлено накрытие $\tilde{f}$. Мы называем накрытие f *общим*, если действие группы S_d на многообразии $\tilde{X}$ является общим. Последнее означает, что для любой точки $a \in \tilde{X}$ ее стабилизатор $\text{St}_a(S_d)$ является стандартно вложенным в S_d произведением (зависящим от точки a) симметрических групп, и действие, индуцированное группой $\text{St}_a(S_d)$ на касательном пространстве $T_a\tilde{X}$, является стандартным представлением ранга ≤ 2 (см. введение).

С другой стороны, для размерности два более традиционно под общим накрытием $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ степени d понимается накрытие, локальное поведение которого описывается следующим образом. Множеством точек B , над которыми накрытие f разветвлено, является каспидальная кривая. Над некоторой окрестностью U гладкой точки кривой B прообраз $f^{-1}(U)$ распадается в несвязное объединение $d - 1$ связных компонент, в одной из них накрытие двулистно и изоморфно проекции на (x, y) -плоскость поверхности, заданной уравнением $x = z^2$ в окрестности начала координат, а на других компонентах это накрытие является локальными изоморфизмами. Над окрестностью каспа кривой B прообраз распадается в несвязное объединение $d - 2$ связных компонент, в одной из них накрытие является складкой, т. е. является трехлистным накрытием, которое изоморфно проекции на (x, y) -плоскость поверхности, заданной уравнением $y = z^3 + xz$ в окрестности начала координат, а на всех других компонентах это накрытие является локальными изоморфизмами. Над окрестностью ноуда кривой B прообраз распадается в несвязное объединение $d - 2$ связных компонент, в двух из них это накрытие является двулистным, и на объединении этих компонент накрытие изоморфно проекции на (x, y) -плоскость объединения двух поверхностей, заданных уравнениями $x = z^2$ и $y = z^2$ в окрестности начала координат, а на всех других компонентах это накрытие является локальными

изоморфизмами. Нетривиальные локальные группы Галуа в соответствующих трех случаях – это группы $\mathbb{Z}/2$, S_3 и $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Все их нетривиальные представления в $GL(2, \mathbb{C})$, которые дают неособые факторпространства, являются стандартными представлениями ранга ≤ 2 , следовательно, наше определение общих накрытий совпадает с традиционным.

Глобальное поведение общих накрытий легко описать, исходя из приведенных выше локальных моделей. В частности, легко видеть следующее: $f^*(B) = 2R + C$, где R (дивизор ветвления накрытия f) является неособой кривой, кривая C приведена и неособа над неособыми точками кривой B ; кривые R и C пересекают друг друга только в точках, лежащих над ноудами и каспами кривой B ; они пересекаются в двух точках над каждым ноудом, и эти пересечения трансверсальны; они также пересекаются в одной точке, лежащей над каждым каспом, и это пересечение является простым касанием.

Рассмотрим то же самое локальное поведение с точки зрения действия группы S_d на поверхности $\tilde{X}$, свойства этого действия будут использованы неоднократно в наших дальнейших рассуждениях в этом параграфе.

В малой окрестности произвольной точки $a \in \tilde{X}$ действие группы $St_a(S_d)$ может быть линеаризовано (процедура линеаризации Картана [6], которая с помощью подходящей замены координат позволяет отождествить локальное действие с индуцированным действием на касательном пространстве $T_a\tilde{X}$, воспроизведена ниже в доказательстве леммы 4.2). Далее мы исследуем случай за случаем все возможности для $St_a(S_d)$ и с помощью линеаризации действия в соответствии с определением стандартных представлений даем описание локального поведения накрытий f , $\tilde{f}$ и h .

Если группа $St_a(S_d) = S_2$ порождена транспозицией $\sigma \in S_d$, то в некоторой окрестности точки a дивизор ветвления $\tilde{R}$ накрытия $\tilde{f}$ совпадает с множеством неподвижных точек относительно действия σ , которое мы обозначим через $\tilde{R}_\sigma$. Это множество является гладкой кривой, и, в частности, кривая $\tilde{R}$ является гладкой в точке a . Образ $h(a)$ точки a принадлежит кривой ветвления R накрытия f (что эквивалентно тому, что a не принадлежит кривой ветвления накрытия h) тогда и только тогда, когда $\sigma \notin S_{d-1}$. Более того, кривая $h(\tilde{R}_\sigma)$ совпадает с R в некоторой окрестности точки $h(a)$, если $\sigma \notin S_{d-1}$ (в противном случае она совпадает с кривой C , определение которой дано выше). В обоих случаях, когда $\sigma \in S_{d-1}$ и $\sigma \notin S_{d-1}$, кривая $h(\tilde{R}_\sigma)$ является гладкой в точке $h(a)$. Кроме того, в обоих случаях точка $\tilde{f}(a)$ принадлежит B и кривая B является неособой в этой точке.

Если группа $St_a(S_d) = S_2 \times S_2$ порождена двумя коммутирующими транспозициями $\sigma_1 \in S_d$ и $\sigma_2 \in S_d$, то точка a принадлежит пересечению $\tilde{R}_{\sigma_1} \cap \tilde{R}_{\sigma_2}$, кривые $\tilde{R}_{\sigma_1}$ и $\tilde{R}_{\sigma_2}$ неособы и пересекаются трансверсально в точке a . Далее, кривые $h(\tilde{R}_{\sigma_1})$ и $h(\tilde{R}_{\sigma_2})$ являются неособыми и пересекаются трансверсально. Если одна из транспозиций, скажем σ_1 , не принадлежит группе S_{d-1} , то кривая $h(\tilde{R}_{\sigma_1})$ содержится в дивизоре R и, более того, совпадает с R в окрестности точки $h(a)$. Если $\sigma_1 \in S_{d-1}$, то кривая $h(\tilde{R}_{\sigma_1})$ не содержится в R (но содержится в C). Если обе транспозиции σ_1 и σ_2 принадлежат группе S_{d-1} , то точка $h(a)$ не является точкой ветвления накрытия f (и тогда она является ноудом кривой C и

$C = h(\tilde{R}_{\sigma_1}) \cup h(\tilde{R}_{\sigma_2})$ в окрестности точки $h(a)$). Во всех случаях точка $\tilde{f}(a)$ является нодом кривой B .

Если группа $\text{St}_a(S_d) = S_3$ порождена двумя некоммутирующими транспозициями $\sigma_1 \in S_d$ и $\sigma_2 \in S_d$, то точка a принадлежит пересечению $\tilde{R}_{\sigma_1} \cap \tilde{R}_{\sigma_2} \cap \tilde{R}_{\sigma_3}$, где $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$, кривые $\tilde{R}_{\sigma_1}$, $\tilde{R}_{\sigma_2}$ и $\tilde{R}_{\sigma_3}$ являются неособыми и их попарное пересечение в точке a трансверсально. Если все три транспозиции принадлежат группе S_{d-1} , то точка $h(a)$ не является точкой ветвления накрытия f . В противном случае одна и только одна из этих транспозиций, скажем σ_3 , принадлежит группе S_{d-1} , и тогда $h(\tilde{R}_{\sigma_1}) = h(\tilde{R}_{\sigma_2})$ и $h(\tilde{R}_{\sigma_3})$ являются неособыми кривыми, они касаются друг друга и кривая $h(\tilde{R}_{\sigma_1}) = h(\tilde{R}_{\sigma_2})$ совпадает с R (тогда как $h(\tilde{R}_{\sigma_3})$ совпадает с C) в окрестности точки $h(a)$. Во всех случаях точка $\tilde{f}(a)$ является каспом кривой B .

3.2. Инварианты m -канонических общих накрытий. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ является общим m -каноническим накрытием, разветвленным над каспидальной кривой $B \in \mathbb{P}^2$. Тогда X является минимальной моделью поверхности основного типа, не содержащей (-2) -кривых, и степень накрытия f равна

$$d = \deg f = m^2 K_X^2.$$

Согласно формуле для канонического дивизора конечного накрытия имеем $K_X = f^*K_{\mathbb{P}^2} + [R]$. Следовательно, дивизор R численно эквивалентен дивизору $(3m+1)K_X$. Поскольку, кроме того, кривая R является неособой и поверхность X не содержит (-2) -кривых (в случае, когда f является m -каноническим общим накрытием, дивизор K_X обилен), то R является неприводимой кривой. Следовательно, B как кривая, бирационально изоморфная кривой R , также является неприводимой. Таким образом, мы можем применить результаты работы [7]. В частности, получаем следующие формулы для степени $\deg B$ и числа каспов c кривой B (см. [7, доказательство теоремы 2]):

$$\deg B = m(3m+1)K_X^2, \quad (3.1)$$

$$c = (12m^2 + 9m + 3)K_X^2 - 12p_a, \quad (3.2)$$

где $p_a = p_g - q + 1$ – арифметический род поверхности X . Отметим, что если степень общего накрытия f больше двух, то кривая B , над которой разветвлено накрытие f , обязательно имеет каспидальные особые точки, т.е. $c > 0$ (действительно, образ монодромии накрытия f является транзитивной подгруппой группы S_d , и так как для общих накрытий этот образ порождается транспозициями, он совпадает со всей группой S_d ; следовательно, $\pi_i(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ является неабелевой группой, если $d \geq 3$, тогда как согласно теореме Зариского $\pi_i(\mathbb{P}^2 \setminus B)$ является абелевой группой, если B – нодальная кривая).

Наконец, применяя формулу для канонического дивизора конечного накрытия к накрытию $\tilde{f}$, получаем, что $K_{\tilde{X}} = \tilde{f}^*(K_{\mathbb{P}^2}) + [\tilde{R}] = \tilde{f}^*(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}[B])$ и, следовательно,

$$K_{\tilde{X}}^2 = \frac{1}{4}(\deg B - 6)^2 d! = d! \left(\frac{m(3m+1)}{2} K_X^2 - 3 \right)^2. \quad (3.3)$$

3.3. Минимальные расширения групп Галуа общих накрытий.

Предположим, что $\text{Aut}(\tilde{X}) \neq \text{Gal}(\tilde{X}/\mathbb{P}^2)$, и выберем в группе $\text{Aut}(\tilde{X})$ такую подгруппу G , что $S_d \subset G$ является минимальным расширением группы S_d . Обозначим через $k = (G : S_d)$ индекс подгруппы S_d в группе G .

Оценка Ксяо (см. [8]) порядков групп автоморфизмов поверхностей общего типа утверждает, что $|G| \leq 42^2 K_{\tilde{X}}^2$. Из нее вытекает неравенство

$$k \leq 42^2 \left(\frac{m(3m+1)}{2} K_{\tilde{X}}^2 - 3 \right)^2. \quad (3.4)$$

Окончательно получаем

$$k < (2 \cdot 42)^2 d^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, согласно предложению 1.1 группа G может быть одной из следующих групп:

- 1) $G = S_d \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \geq 2$, p – простое число;
- 2) $G = A_d \rtimes D_r$, где $r \geq 3$, r – нечетное число, а D_r – диэдральная группа, заданная копредставлением

$$D_r = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = \tau^2 = (\sigma\tau)^r = 1 \rangle,$$

и действие (с помощью сопряжения) элементов σ и τ на группе A_d совпадает с действием транспозиции $(1, 2) \in S_d$ на $A_d \subset S_d$;

- 3) $G = S_{d+1}$ – симметрическая группа;
- 4) $G = A_{d+2}$ – знакопеременная группа и вложение группы S_d в $G = A_{d+2}$ является стандартным.

3.4. Случай 1). Обозначим через g порождающий элемент группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Как и в доказательстве теоремы 0.1, поскольку действие элемента g на поверхности $\tilde{X}$ коммутирует с действием каждого элемента из S_d , действие группы $\langle g \rangle = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ опускается как на поверхность X , так и на проективную плоскость $\mathbb{P}^2$. Обозначим через $\tilde{X}_1 = \tilde{X}/\langle g \rangle$, $X_1 = X/\langle g \rangle$ соответствующие факторпространства и через $\tilde{r}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$, $r: X \rightarrow X_1$, $h_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ и $r_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/\langle g \rangle = Y$ соответствующие морфизмы. Получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 \\ \tilde{r} \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow r_P \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{h_1} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

Автоморфизм g плоскости $\mathbb{P}^2$ задается линейным отображением $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ порядка p . Следовательно, он имеет либо три изолированные неподвижные точки, скажем $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}^2$, либо одну изолированную неподвижную точку, скажем $x \in \mathbb{P}^2$, и неподвижную прямую $E \subset \mathbb{P}^2$. Соответственно, циклическое накрытие $r_P: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2/\langle g \rangle = Y$ имеет степень p и разветвлено либо в трех точках x_1, x_2, x_3 , либо в точке x и вдоль прямой E . Рассмотрим отдельно эти два случая.

Если накрытие r_P разветвлено в трех изолированных точках, то накрытие r разветвлено по крайней мере в $3(d-2)$ точках, лежащих в объединении слоев $F = f^{-1}(x_1) \cup f^{-1}(x_2) \cup f^{-1}(x_3)$, и индекс ветвления в каждой из них равен p . Только точки из F являются неподвижными точками автоморфизма g , действующего на поверхности X . Следовательно, согласно теореме Лефшеца о неподвижных точках имеем

$$|F| = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{tr}_i, \quad (3.6)$$

где tr_i – след линейного преобразования g^* , действующего на $H^i(X, \mathbb{R})$. Из формулы (3.6) следует, что

$$3(d-2) \leq |F| \leq \sum_{i=0}^4 |\text{tr}_i| \leq \sum_{i=0}^4 b_i(X) = e(X) + 4b_1(X) \quad (3.7)$$

(где e означает топологическую эйлерову характеристику). С другой стороны, формула Нётера $1 - q + p_g = \frac{K_X^2 + e(X)}{12}$, где $2q = b_1$, дает неравенство

$$e(X) + 4b_1(X) = 12 - K_X^2 + 12p_g - 4q \leq 12 - K_X^2 + 12p_g. \quad (3.8)$$

Следовательно, объединяя неравенства (3.7) и (3.8) и применяя неравенство Нётера $2p_g \leq K_X^2 + 4$, получаем

$$3(m^2 K_X^2 - 2) \leq 12 - K_X^2 + 12p_g \leq 5K_X^2 + 36. \quad (3.9)$$

Поэтому

$$(3m^2 - 5)K_X^2 \leq 42,$$

что противоречит неравенству $m^2 K_X^2 \geq 2 \cdot 84^2$, если $m \geq 2$, так как $K_X^2 \geq 1$ для минимальной поверхности общего типа.

Предположим теперь, что накрытие r_P разветвлено в точке $x \in \mathbb{P}^2$ и вдоль прямой $E \subset \mathbb{P}^2$. В этом случае каждая прямая $L \subset \mathbb{P}^2$, проходящая через точку x , инвариантна при действии элемента g на $\mathbb{P}^2$. Следовательно, каждая кривая $C = f^{-1}(L) \subset X$ является инвариантной при действии g на X . Выберем общую прямую L , проходящую через точку x . Согласно формуле Гурвица имеем

$$2(g(C) - 1) = -2d + \deg B - 2m^2 K_X^2 + m(3m + 1)K_X^2 = m(m + 1)K_X^2, \quad (3.10)$$

где $g(C)$ – геометрический род кривой C .

Рассмотрим ограничение $r|_C: C \rightarrow C/\langle g \rangle = Z \subset X_1$ накрытия r на кривую C . Циклическое накрытие $r|_C$ имеет степень p и разветвлено по крайней мере в $2d-3 = 2m^2 K_X^2 - 3$ точках, принадлежащих объединению $f^{-1}(x) \cup f^{-1}(L \cap E)$. Следовательно,

$$2(g(C) - 1) \geq 2p(g(Z) - 1) + (2m^2 K_X^2 - 3)(p - 1). \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) следует, что

$$m(m+1)K_X^2 \geq -2p + (2m^2K_X^2 - 3)(p-1),$$

и поэтому

$$m(3m+1)K_X^2 \geq (2m^2K_X^2 - 5)p.$$

Окончательно, так как $(m^2 - m)K^2 \geq 84^2 > 10$, получаем неравенство

$$p \leq \frac{m(3m+1)K_X^2}{2m^2K_X^2 - 5} < 2,$$

которое противоречит тому, что p – натуральное число, $p > 1$.

3.5. Случай 2). Теоретико-групповая часть. Поскольку r – нечетное число, $r \geq 3$, то класс сопряженности элемента σ в группе D_r состоит из r элементов $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \tau$. Для каждого i , $1 \leq i \leq r$, группа $S_{d,i}$, порожденная в G элементом σ_i и элементами из группы A_d , изоморфна группе $A_d \rtimes \langle \sigma_i \rangle \simeq S_d$. Группы $S_{d,i}$ сопряжены друг другу в группе G . Кроме того, действие элемента $\sigma_i \in S_{d,i}$ на группе $A_d \subset S_{d,i}$ совпадает с действием транспозиции $(1, 2)$. Обозначим через $\sigma_{i,(i_1,i_2)}$ элемент группы $S_{d,i}$, который сопряжен элементу σ_i и действие которого на группе A_d совпадает с действием транспозиции (i_1, i_2) . Для заданных двух подмножеств $J_1 \neq \emptyset$, J_2 множества $I = \{1, \dots, d\}$, не имеющих общих элементов, обозначим через $S_{J_1, J_2, i}$ подгруппу группы $G = A_d \rtimes D_r$, порожденную элементами $\sigma_{i,(i_1,i_2)}$, $(i_1, i_2) \in (J_1 \times J_1) \cup (J_2 \times J_2)$.

Рассмотрим стабилизатор $\text{St}_a \subset \text{Aut } \tilde{X}$ точки $a \in \tilde{X}$. Для подгруппы H группы $\text{Aut } \tilde{X}$ положим $\text{St}_a(H) = H \cap \text{St}_a$. Для каждой точки $a \in \tilde{X}$ действие, индуцированное группой $\text{St}_a(S_d)$ на касательном пространстве $T_a \tilde{X}$, является стандартным представлением ранга ≤ 2 и группа $\text{St}_a(S_d)$ либо является тривиальной, либо изоморфна группе $S_{J_1, J_2, 1}$, где либо $2 \leq |J_1| \leq 3$ и $J_2 = \emptyset$, либо $|J_1| = |J_2| = 2$. Поскольку группы $S_{d,i}$ сопряжены друг другу, то для каждого i и любой точки $a \in \tilde{X}$ группа $\text{St}_a(S_{d,i})$ имеет те же самые свойства. Следовательно, пересечение $\text{St}_a(S_{d,i}) \cap A_d$ порождается циклической перестановкой $(i_1, i_2, i_3) \in A_d$, если $J_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$ и $J_2 = \emptyset$, и произведением двух транспозиций, если $J_1 = \{i_1, i_2\}$ и $J_2 = \{i_3, i_4\}$. В остальных случаях ($|J_1| = 2$ и $J_2 = \emptyset$ либо $\text{St}_a(S_{d,i}) = \{1\}$) группа $\text{St}_a(S_{d,i}) \cap A_d$ является тривиальной. Отсюда следует, что если $\text{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$, где $|J_1| = 3$ и $J_2 = \emptyset$, то для каждого i группа $\text{St}_a(S_{d,i})$ совпадает с $S_{J'_1, J'_2, i}$, где $J'_1 = J_1$ и $J'_2 = \emptyset$. Аналогично, если $\text{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$, где $J_1 = \{i_1, i_2\}$ и $J_2 = \{i_3, i_4\}$, то для каждого i группа $\text{St}_a(S_{d,i})$ совпадает с $S_{J'_1, J'_2, i}$, где $J'_1 = J_1$ и $J'_2 = J_2$. Если $\text{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$, где $J_1 = \{i_1, i_2\}$ и $J_2 = \emptyset$, то для каждого i либо $\text{St}_a(S_{d,i})$ является тривиальной группой, либо $\text{St}_a(S_{d,i})$ совпадает с $S_{J'_1, J'_2, i}$, где $|J'_1| = 2$ и $J'_2 = \emptyset$.

Исследуем более детально случай, когда для каждого i группа $\text{St}_a(S_{d,i})$ совпадает с $S_{J_1, J_2, i}$, где $|J_1| = 3$ и $J_2 = \emptyset$. Пусть $J_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$. Обозначим через y циклическую перестановку $(i_1, i_2, i_3) \in A_d$. Группа $\text{St}_a(G)$ содержит подгруппу F_3 , порожденную тремя элементами: $x_1 = \sigma_{1,(i_1,i_2)}$ (сопряженным

элементу σ), $x_2 = \sigma_{2,(i_1,i_2)}$ (сопряженным элементу τ) и y . Легко видеть, что F_3 имеет следующее копредставление:

$$F_3 = \langle x_1, x_2, y \mid x_1^2 = x_2^2 = (x_1 x_2)^r = y^3 = [y, x_1 x_2] = [y, x_2 x_1] = 1, \\ x_1^{-1} y x_1 = y^{-1}, x_2^{-1} y x_2 = y^{-1} \rangle \quad (3.12)$$

(напомним, что $r \geq 3$). Группа F_3 является неабелевой. Она содержит максимальную нормальную подгруппу N_3 , порожденную элементами y и $z = x_1 x_2$. Эта подгруппа изоморфна прямому произведению $\langle y \rangle \times \langle z \rangle$ двух циклических групп порядка 3 и r соответственно. С другой стороны, в соответствии с хорошо известными свойствами конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ (см., например, [9]) факторгруппа группы F_3 по ее центру должна быть либо циклической группой, либо диэдральной группой, либо A_4 , либо A_5 , либо S_5 . Однако $F_3 = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, следовательно, она имеет тривиальный центр, так как r – нечетное число. Отсюда следует, что число r не может делиться на 3 (напомним, что кривая ветвления B имеет по крайней мере одну каспидальную особую точку; см. п. 3.2) и группа F_3 должна быть изоморфна диэдральной группе $D_{r'}$, $r' = 3r$.

Кроме того, еще раз применяя классификацию классов сопряженности конечных подгрупп в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, получаем, что действие группы $F_3 \simeq D_{3r}$ вблизи точки a изоморфно единственному двумерному линейному представлению группы D_{3r} . В частности, в окрестности точки a множество неподвижных точек автоморфизма $\sigma_{i,(i_1,i_2)}$, $i_1, i_2 \in J_1$, является гладкой кривой, которую обозначим через $\tilde{R}_{i,(i_1,i_2)}$. Любые две кривые $\tilde{R}_{i,(i_1,i_2)}$ и $\tilde{R}_{i',(i'_1,i'_2)}$ при $(i, (i_1, i_2)) \neq (i', (i'_1, i'_2))$ не совпадают друг с другом и пересекаются трансверсально в точке a .

Исследуем теперь случай, когда $\mathrm{St}_a(S_{d,i}) = S_{J_1, J_2, i}$, где $J_1 = \{i_1, i_2\}$ и $J_2 = \{i_3, i_4\}$. Группа $\mathrm{St}_a(G)$ содержит подгруппу $F_{2,2}$, порожденную тремя элементами: $x_1 = \sigma_{1,(i_1,i_2)}$ (сопряженным элементу σ), $x_2 = \sigma_{2,(i_1,i_2)}$ (сопряженным элементу τ) и $y = (i_1, i_2)(i_3, i_4) \in A_d$. Легко видеть, что $F_{2,2}$ имеет следующее копредставление:

$$F_{2,2} = \langle x_1, x_2, y \mid x_1^2 = x_2^2 = (x_1 x_2)^r = y^2 = [y, x_1] = [y, x_2] = 1 \rangle \quad (3.13)$$

(напомним, что r – нечетное число, $r \geq 3$). Группа $F_{2,2}$ содержит максимальную нормальную подгруппу $N_{2,2}$, порожденную элементами y и $z = x_1 x_2$. Эта подгруппа изоморфна прямому произведению $\langle y \rangle \times \langle z \rangle$ двух циклических групп порядков 2 и r соответственно. Следовательно, $F_{2,2}$ изоморфна диэдральной группе D_{2r} . Из классификации классов сопряженности конечных подгрупп группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ следует, что действие $F_{2,2} \simeq D_{2r}$ вблизи точки a изоморфно единственному двумерному представлению группы D_{2r} . В частности, аналогично рассмотренному выше случаю, для любых $i_1, i_2, i'_1, i'_2 \in J_1 \sqcup J_2$ кривые $\tilde{R}_{i,(i_1,i_2)}$ и $\tilde{R}_{i',(i'_1,i'_2)}$, для которых $(i, (i_1, i_2)) \neq (i', (i'_1, i'_2))$, не совпадают друг с другом и пересекаются трансверсально в точке a .

Наконец, рассмотрим случай, когда $\mathrm{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$ и $\mathrm{St}_a(S_{d,2}) = S_{J'_1, J'_2, 2}$, где $J_1 = \{j_1, j_2\}$, $J_2 = \emptyset$, $J'_1 = \{j_3, j_4\}$, $J'_2 = \emptyset$. Покажем, что в этом случае $J_1 = J'_1$.

Действительно, если $|J_1 \cap J'_1| = 1$, то мы можем предполагать, что $j_2 = j_3$, так что $\sigma_{2,(j_3,j_4)} = \eta^{-1}\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta$, где $\eta = (j_4, j_2, j_1) \in A_d$. Имеем $\eta^3 = 1$ и

$$\begin{aligned} (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_3,j_4)})^r &= (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\eta\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta^{-1})^r = (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta)^r \\ &= (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_1,j_2)})^r\eta^r = \eta^r = \eta^{\pm 1}, \end{aligned}$$

так как r не делится на 3. Следовательно, $\eta \in \text{St}_a(G)$, и это противоречит предположению о том, что $\text{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$.

Если $J_1 \cap J'_1 = \emptyset$, то $\sigma_{2,(j_3,j_4)} = \eta^{-1}\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta$, где $\eta = (j_1, j_3)(j_2, j_4) \in A_d$. Обозначим $\eta_1 = (j_1, j_2)(j_3, j_4) \in A_d$. Имеем $\eta^2 = \eta_1^2 = 1$ и

$$\begin{aligned} (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_3,j_4)})^r &= (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\eta\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta^{-1})^r \\ &= (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_1,j_2)}^{-1}\eta\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta^{-1})^r \\ &= (\sigma_{1,(j_1,j_2)}\sigma_{2,(j_1,j_2)}\eta_1)^r = \eta_1. \end{aligned}$$

Поэтому $\eta_1 \in \text{St}_a(G)$, что противоречит предположению о том, что $\text{St}_a(S_{d,1}) = S_{J_1, J_2, 1}$.

3.6. Случай 2). Геометрическая часть. Имеем $A_d = S_{d,i} \cap S_{d,j}$ при $i \neq j$. Обозначим $X_i = \tilde{X}/S_{d-1,i}$, $\mathbb{P}^2 = \tilde{X}/S_{d,i}$ и $X_0 = \tilde{X}/A_d$ соответствующие факторпространства. Они могут быть включены в следующую коммутативную диаграмму (фрагмент которой приведен ниже), в которой f_{0i} при $i = 1, \dots, r$ являются морфизмами степени два:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & & \\ & \swarrow h_i & \downarrow h_0 & \searrow h_j & \\ X_i & & X_0 & & X_j \\ \downarrow f_i & \swarrow f_{0i} & & \searrow f_{0j} & \downarrow f_j \\ \mathbb{P}^2 & & & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

Поскольку каждый морфизм f_{0i} сопряжен накрытию $f_{01}: X_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$, разветвленному над кривой $B_1 = B$, то накрытия f_{0i} разветвлено над точками каспидальной кривой $B_i \subset \mathbb{P}^2$, имеющей ту же степень и то же самое число каспов и ноудов, что и кривая B . Обозначим через $R_{i,0} \subset X_0$ кривую ветвления накрытия f_{0i} .

Группа D_r действует на поверхности X_0 . Образ элемента $\sigma_{i,(j_1,j_2)} \in S_{d,i}$ (см. п. 3.5) при естественном эпиморфизме из группы G в D_r совпадает с σ_i . Следовательно, множество неподвижных точек автоморфизма σ_i совпадает с $R_{i,0}$.

Поверхность X_0 является нормальным проективным многообразием. Множество ее особых точек совпадает с прообразом $f_{01}^{-1}(\text{Sing } B_1)$: над каждым каспом мы имеем особую точку типа A_2 и над каждым ноудом – особую точку типа A_1 . Следовательно, для любого i , $1 \leq i \leq r$, все точки из $f_{01}^{-1}(\text{Sing } B_1)$ принадлежат кривой $R_{i,0}$. Кроме того, как следует из наблюдений, сделанных в конце п. 3.5, любые две кривые $R_{i,0}$ и $R_{j,0}$ при $i \neq j$ не пересекаются в неособых точках поверхности X_0 .

Пусть $\nu: Z \rightarrow X_0$ – минимальное разрешение особенностей. Исключительный дивизор этого разрешения имеет следующий вид:

$$\bar{E} = \nu^{-1}(\text{Sing } X_0) = \bigcup_{k=1}^c (\bar{E}_{1,s_k} \cup \bar{E}_{2,s_k}) \cup \bigcup_{l=2c+1}^{2c+n} \bar{E}_{s_l},$$

где $\bar{E}_{1,s_k}, \bar{E}_{2,s_k}$, $1 \leq k \leq c$, – неприводимые компоненты дивизора $\bar{E}$, стягивающиеся в касп s_k поверхности X_0 , и $\bar{E}_{s_l}$, $l = 2c+1, \dots, 2c+n$, – неприводимая компонента дивизора $\bar{E}$, стягивающаяся в ноуд s_l поверхности X_0 .

Поскольку f_{0i} является двойным накрытием, разветвленным над каспидальной кривой B_{i0} , то описанное выше минимальное разрешение особенностей может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\nu} & X_0 \\ \bar{f}_{0i} \downarrow & & \downarrow f_{0i} \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\nu_i} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ν_i – раздутие всех особых точек кривой B_i и $\bar{f}_{0i}$ – двулистное накрытие поверхности $\mathbb{P}^2$, разветвленное над собственным прообразом $\bar{B}_i \subset \mathbb{P}^2$ поверхности B_i .

Приведем более подробное описание этого разрешения, которое позволит вычислить индексы пересечения кривых.

Пусть точка s является каспом кривой B_i . Обозначим через $E \subset \mathbb{P}^2$ исключительную кривую $\nu_i^{-1}(s) = \mathbb{P}^1$ раздутия ν_i , лежащую над s . Тогда кривая $\bar{B}_i \subset \mathbb{P}^2$ пересекает E в одной точке, является неособой в этой точке и имеет с кривой E простое касание в этой точке. Собственный прообраз $\bar{R}_{i,0} = f_{0i}^{-1}(\bar{B}_i)$ является кривой ветвления накрытия $\bar{f}_{0i}$, он неособ и совпадает с собственным прообразом кривой $R_{i,0}$. Прообраз $\bar{f}_{0i}^{-1}(E)$ распадается в объединение $\bar{E}_{1,s} \cup \bar{E}_{2,s} \subset Z$ двух гладких кривых, пересекающихся трансверсально, так что

$$\begin{aligned} (\bar{E}_{1,s}^2)_Z &= (\bar{E}_{2,s}^2)_Z = -2, \\ (\bar{E}_{1,s}, \bar{E}_{2,s})_Z &= (\bar{E}_{1,s}, \bar{R}_{i,0})_Z = (\bar{E}_{2,s}, \bar{R}_{i,0})_Z = 1. \end{aligned}$$

Пусть точка s является ноудом кривой B_i . Тогда кривая $\bar{B}_i \subset \mathbb{P}^2$ пересекает исключительную кривую $E = \nu_i^{-1}(s)$ в двух точках, является неособой в этих точках и пересекает в них кривую E трансверсально. Собственный прообраз $f_{0i}^{-1}(E) = \bar{E}_s \subset Z$ является исключительной кривой разрешения особенностей ν , он пересекает трансверсально собственный прообраз $\bar{R}_{i,0} = f_{0i}^{-1}(\bar{B}_i)$ в двух неособых точках кривой $\bar{R}_{i,0}$. Следовательно, имеем

$$(\bar{E}_s^2)_Z = -2, \quad (\bar{E}_s, \bar{R}_{i,0})_Z = 2.$$

Покажем, что индекс пересечения $(\bar{R}_{i,0}, \bar{R}_{j,0})_Z$ не зависит от i и j , если $i \neq j$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \tilde{X} \\ \bar{h}_0 \downarrow & & \downarrow h_0 \\ \bar{Z} & \xrightarrow{\mu} & X_0 \end{array}$$

в которой $\bar{X} = \tilde{X} \times_{X_0} \bar{Z}$ – расслоенное произведение поверхностей $\tilde{X}$ и $\bar{Z}$ над X_0 и $\mu: \bar{Z} \rightarrow X_0$ – композиция разрешения особенностей ν и раздутий во всех точках пересечений (-2) -кривых $\bar{E}_{1,s_k}$ и $\bar{E}_{2,s_k}$, $k = 1, \dots, c$, лежащих на поверхности Z (все эти кривые являются компонентами дивизора $\bar{E}$, которые стягиваются отображением ν в каспы поверхности X_0). Обозначим через $\bar{E}_{1,2,s_k} \subset \bar{Z}$ исключительную кривую, лежащую над точкой $\bar{E}_{1,s_k} \cap \bar{E}_{2,s_k}$, и, чтобы упростить обозначения, обозначим так же через $\bar{R}_{i,0}$, $\bar{E}_{1,s_k}$, $\bar{E}_{2,s_k}$ и $\bar{E}_{s_l}$ собственные прообразы в $\bar{Z}$ кривых $\bar{R}_{i,0}$, $\bar{E}_{1,s_k}$, $\bar{E}_{2,s_k}$, $k = 1, \dots, c$, и $\bar{E}_{s_l}$, $l = 2c+1, \dots, 2c+n$, лежащих в Z .

Легко видеть, что $\bar{h}_0$ является накрытием Галуа, разветвленным над кривыми $\bar{E}_{\cdot, s_k}$ и $\bar{E}_{s_l}$. Индексы ветвления (см. локальные вычисления в [2, § 2]) над кривыми $\bar{E}_{\cdot, s_k}$ равны трем, а индексы ветвления над кривыми $\bar{E}_{s_l}$ равны двум. Морфизм $\bar{\mu}$ раздувает один раз каждую из точек, лежащих над нодами поверхности X_0 , и осуществляет три раздутия во всех точках, лежащих над каспами поверхности X_0 . Следовательно, собственные прообразы $\bar{\mu}^{-1}(\tilde{R}_{i,(j_1,j_2)})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j_1, j_2 \leq d$, попарно не пересекаются. Однако $\bigcup_{j_1, j_2} \bar{\mu}^{-1}(\tilde{R}_{i,(j_1,j_2)}) = \bar{h}_0^{-1}(\bar{R}_{i,0})$, поэтому после стягивания всех кривых $\bar{E}_{1,2,s_k}$ получим, что

$$(\bar{R}_{i,0}, \bar{R}_{j,0})_Z = c$$

при $i \neq j$ и эти индексы пересечения не зависят от i и j . Отметим также, что индексы пересечения кривых $\bar{R}_{j,0}$ и неприводимых компонент дивизора $\bar{E}$ не зависят от j .

Действие группы D_r на поверхности X_0 поднимается до действия на поверхности Z . Кривая $\bar{R}_{i,0} \subset Z$ (соответственно, $R_{i,0} \subset X_0$) является множеством неподвижных точек автоморфизма $\sigma_i \in D_r$. Поскольку $\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i \neq \sigma_j$ при $j \neq i$, то $\sigma_i(\bar{R}_{j,0}) \neq \bar{R}_{j,0}$ (соответственно, $\sigma_i(R_{j,0}) \neq R_{j,0}$) при $j \neq i$. В частности, имеем $R_{3,0} = \sigma_1(R_{2,0}) \neq R_{2,0}$, и поэтому $R_{2,0} + R_{3,0} = f_{01}^{-1}(D)$ для некоторой кривой $D \subset \mathbb{P}^2$.

Поскольку группа D_r действует транзитивно на множестве кривых $\bar{R}_{i,0}$ (соответственно, на множестве кривых $R_{i,0}$), то имеют место равенства $(\bar{R}_{1,0}^2)_Z = (\bar{R}_{2,0}^2)_Z = (\bar{R}_{3,0}^2)_Z$ и, как уже было показано, равенства

$$(\bar{R}_{1,0}, \bar{R}_{2,0})_Z = (\bar{R}_{1,0}, \bar{R}_{3,0})_Z = (\bar{R}_{2,0}, \bar{R}_{3,0})_Z.$$

Обозначим через L подпространство в группе Нерона–Севери $\text{NS}(Z) \otimes \mathbb{Q}$, ортогональное (относительно формы пересечения) подпространству V_E , порожденному дивизорами $\bar{E}_{1,s_k}$, $\bar{E}_{2,s_k}$, $k = 1, \dots, c$, и $\bar{E}_{s_l}$, $l = 2c+1, \dots, 2c+n$. Форма

пересечения на V_E отрицательно определена. Следовательно, согласно теореме Ходжа об индексе форма пересечения на L имеет сигнатуру $(1, \dim L - 1)$.

Вычислим индексы пересечений некоторых дивизоров в L , которые нам понадобятся далее. Спроектируем классы Нерона–Севери дивизоров $\bar{R}_{i,0}$ на подпространство L , обозначим эти проекции через $(\bar{R}_{i,0})_L$, а их пересечения в L обозначим через $(\bar{R}_{i,0} \cdot \bar{R}_{j,0})_L$ (эти числа равны соответствующим индексам $\mathbb{Q}$ -пересечений на $\mathbb{Q}$ -многообразии X_0).

Заметим, что $f_{i,0}^* B_i = 2R_{i,0}$ и $\nu^* R_{i,0} = \bar{R}_{i,0} \pmod L$. Поэтому

$$(\bar{R}_{i,0}^2)_L = (\bar{R}_{j,0}^2)_L = \frac{1}{2}(\deg B)^2 > 0$$

для всех i, j . Пусть $(\bar{R}_{2,0})_L = \lambda(\bar{R}_{1,0})_L + T$, где элемент $T \in L$ ортогонален к элементу $(\bar{R}_{1,0})_L$. Имеем

$$(\bar{R}_{2,0} \cdot \bar{R}_{1,0})_L = \lambda(\bar{R}_{1,0}^2)_L = (\bar{R}_{3,0} \cdot \bar{R}_{1,0})_L = (\bar{R}_{2,0} \cdot \bar{R}_{3,0})_L,$$

так как индексы пересечения кривых $\bar{R}_{j,0}$ с неприводимыми компонентами дивизора $\bar{E}$ не зависят от j , а индексы пересечения $(\bar{R}_{i,0}, \bar{R}_{j,0})_Z$ также не зависят от i и j при $i \neq j$.

Кроме того, дивизор $(\bar{R}_{2,0} + \bar{R}_{3,0})_L$ совпадает с $\nu^*(f_{01}^*(D))$. Следовательно, дивизор $(\bar{R}_{2,0} + \bar{R}_{3,0})_L$ пропорционален дивизору $(\bar{R}_{1,0})_L = \frac{1}{2}\nu^*(f_{01}^*(B_1))$. Отсюда следует, что $(\bar{R}_{3,0})_L = \lambda(\bar{R}_{1,0})_L - T$, где $\lambda > 0$. Имеем $(\bar{R}_{2,0}^2)_L = \lambda^2(\bar{R}_{1,0}^2)_L + T^2 = (\bar{R}_{1,0}^2)_L$, следовательно,

$$T^2 = (1 - \lambda^2)(\bar{R}_{1,0}^2)_L \leq 0.$$

Таким образом, $\lambda \geq 1$, более того, $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда $T^2 = 0$, т.е. тогда и только тогда, когда $T = 0 \in L$.

Поскольку $(\bar{R}_{2,0} \cdot \bar{R}_{3,0})_L = (\bar{R}_{2,0} \cdot \bar{R}_{1,0})_L$, имеем

$$\lambda^2(\bar{R}_{1,0}^2)_L - T^2 = \lambda(\bar{R}_{1,0}^2)_L, \quad T^2 = (\lambda^2 - \lambda)(\bar{R}_{1,0}^2)_L \leq 0,$$

откуда следует, что $\lambda \leq 1$. Объединяя это неравенство с неравенством $\lambda \geq 1$, получаем равенства $\lambda = 1$ и $T = 0$, из которых следует, что $(\bar{R}_{i,0})_L = (\bar{R}_{j,0})_L$ для всех i, j . Это позволяет заключить, что $\deg D = \deg B$, так как $2(\deg D)^2 = ((\bar{R}_{2,0} + \bar{R}_{3,0})^2)_L = 4(\bar{R}_{2,0}^2)_L = 2(\deg B)^2$.

Следовательно, имеем

$$(\bar{R}_{1,0}^2)_Z = \frac{1}{2}(\bar{R}_{1,0}, \bar{R}_{2,0} + \bar{R}_{3,0})_Z = c.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{1,0}^2)_Z &= \frac{1}{2} \left(\nu_1^*(B_1) - 2 \sum' E_{s_k} - 2 \sum'' E_{s_l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\deg B)^2 - 2c - 2n = \frac{1}{2} (\bar{R}_{1,0}, \bar{R}_{2,0} + \bar{R}_{3,0})_Z = c, \end{aligned}$$

где сумма $\sum'$ (соответственно, $\sum''$) взята по всем каспидальным (соответственно, ноудальным) точкам кривой B_1 . Отсюда следует, что

$$(\deg B)^2 - 4n = 6c.$$

С другой стороны, как известно (см. [7, доказательство леммы 3]), имеет место неравенство

$$(\deg B)^2 - 2n \leq 6c$$

для произвольного общего накрытия степени $d \geq 3$, кроме того, в [10] показано, что $n > 0$, если $d \geq 6$. Противоречие между полученными оценками числа каспов показывает, что случай 2) невозможен.

3.7. Случай 3). Симметрическая группа $G = S_{d+1}$ действует на множестве $I = \{1, \dots, d+1\} \subset \mathbb{N}$ как группа перестановок. Обозначим через H_i подгруппу $\{\gamma \in S_{d+1} \mid \gamma(i) = i\}$ в S_{d+1} , так что группа S_d совпадает с H_{d+1} .

Как и в доказательстве теоремы 0.1, рассмотрим факторпространство $\tilde{X}/G = Y$ и факторотображение $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$. Поверхность Y является нормальным проективным многообразием. Морфизм $\tilde{f}$ пропускается через $\tilde{f}_i$; таким образом, морфизм $\tilde{f}$ является композицией следующих морфизмов:

$$\tilde{X} \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2 \xrightarrow{r} Y,$$

где r – конечный морфизм степени $d+1$. Поскольку группы S_d и S_{d+1} не имеют общих нормальных подгрупп, то $\tilde{f}$ является расширением Галуа накрытия r .

Пусть $\bar{B} \subset Y$ – множество точек, над которыми накрытие r разветвлено. Имеем $r(B) = B_1 \subset \bar{B}$. Прообраз $r^{-1}(B_1)$ является объединением кривой B и некоторой кривой $B' \subset \mathbb{P}^2$.

Поскольку Y является нормальной проективной поверхностью, то мы можем найти неособую проективную кривую $L \subset Y \setminus \text{Sing}(Y)$, которая трансверсально пересекается с кривой $\bar{B}$. Положим $E = r^{-1}(L)$, $F = f^{-1}(E)$ и $\tilde{F} = \tilde{f}^{-1}(E)$. Тогда $f|_F: F \rightarrow E$ является общим накрытием, разветвленным над $B \cap E$, накрытие $\tilde{f}|_{\tilde{F}}: \tilde{F} \rightarrow E$ является расширением Галуа общего накрытия $f|_F: F \rightarrow E$ с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{F}/E) = S_d$ и $\tilde{f}|_{\tilde{F}}: \tilde{F} \rightarrow L$ является расширением Галуа накрытия $r|_E: E \rightarrow L$ с группой Галуа $\text{Gal}(\tilde{F}/L) = S_{d+1}$.

Рассмотрим образ $b_1 = r(b)$ точки $b \in B \cap E$. Как и в доказательстве теоремы 0.1, легко видеть, что прообраз $r^{-1}(b_1)$ состоит из $d-1$ точек, принадлежащих кривой B , и еще одной точки, принадлежащей кривой B' (являющейся точкой ветвления накрытия $r|_E$). Другими словами, накрытие $r|_{B'}: B' \rightarrow B_1$ имеет степень 1, накрытие $r|_B: B \rightarrow B_1$ имеет степень $d-1$, и полный прообраз $r^*(B_1) = B + 2B'$. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \deg B' \cdot \deg E &= (B', E)_{\mathbb{P}^2} = (B_1, L)_Y, \\ \deg B \cdot \deg E &= (B, E)_{\mathbb{P}^2} = (d-1)(B_1, L)_Y. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\deg B = (d-1) \deg B'.$$

Поскольку $d = m^2 K_X^2$ и $\deg B = m(3m + 1)K_X^2$, то отсюда следует, что число $mK_X^2 + 3$ делится на $m^2 K_X^2 - 1$, а это противоречит предположению о том, что выполнено неравенство $m^2 K_X^2 \geq 2 \cdot 84^2$.

3.8. Случай 4). Обозначим стандартное вложение $S_d \rightarrow A_{d+2}$ через α . Для каждой транспозиции $\sigma \in S_d$ множество $\tilde{X}_\sigma = \tilde{X}_{\alpha(\sigma)} \subset \tilde{X}$ неподвижных точек автоморфизма σ является неособой кривой. Поэтому для каждого элемента $\tau \in A_{d+2}$, который сопряжен элементу $\alpha(\sigma)$, множество $\tilde{X}_\tau$ неподвижных точек автоморфизма τ также является неособой кривой.

В [10] было показано, что если $d > 6$, то кривая ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ имеет по крайней мере один ноуд. Следовательно, для каждого произведения $\eta = \sigma_1 \sigma_2$ двух коммутирующих транспозиций $\sigma_1, \sigma_2 \in S_d$ множество $\tilde{X}_\eta$ неподвижных точек автоморфизма η является конечным и не пусто. Отсюда следует, что для произвольного η' , сопряженного произведению $\alpha(\eta)$ в группе A_{d+2} , множество $\tilde{X}_{\eta'}$ также является конечным и не пусто. С другой стороны, если $\sigma_1 = (j_1, j_2)$ и $\sigma_2 = (j_3, j_4)$, то элементы $\alpha(\sigma_1) = (j_1, j_2)((d+1), (d+2))$, $\alpha(\sigma_2) = (j_3, j_4)((d+1), (d+2))$ и $\alpha(\eta) = (j_1, j_2)(j_3, j_4)$ сопряжены друг другу в группе A_{d+2} . Противоречие.

§ 4. Некоторые приложения

4.1. Деформационная стабильность. В этом пункте мы докажем некоторые утверждения о деформационной стабильности примеров, предоставляемых теоремами 0.1 и 0.2. Чтобы сформулировать соответствующие утверждения, введем несколько понятий. А именно, под G -многообразием мы будем понимать неособое проективное многообразие вместе с регулярным действием группы G и под гладким G -семейством, или G -деформацией, G -многообразий – гладкий собственный морфизм (т. е. собственную субмерсию) $p: \mathcal{X} \rightarrow B$, где $\mathcal{X}$ и B – гладкие квазипроективные многообразия и $\mathcal{X}$ снабжено регулярным действием группы G , сохраняющим каждый слой морфизма p (сохранение слоев означает, что $p \circ G = p$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если один из слоев гладкого G -семейства является расширением Галуа общего накрытия пространства $\mathbb{P}^n$, то и всё семейство состоит из расширений Галуа общих накрытий пространства $\mathbb{P}^n$.*

Для доказательства предложения 4.1 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. *Пусть G – конечная группа и $p: \mathcal{X} \rightarrow B$ – гладкая G -деформация G -многообразий. Предположим, что для некоторого элемента $g \in G$ множество его неподвижных точек $\mathcal{X}^g = \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) = x\}$ не пусто. Тогда:*

- (i) $\mathcal{X}^g$ является гладким замкнутым подмногообразием многообразия $\mathcal{X}$;
- (ii) ограничение морфизма p на многообразие $\mathcal{X}^g$ является гладким собственным сюръективным морфизмом;
- (iii) пересечение многообразия $\mathcal{X}^g$ с каждым слоем X_t , $t \in B$, морфизма p является трансверсальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, для любой точки $x \in \mathcal{X}$, неподвижной относительно действия подгруппы H группы G , действие группы H может быть линеаризовано, т.е. существуют локальные аналитические координаты в некоторой окрестности точки x , относительно которых действие группы H является линейным.

Далее, напомним процедуру Картана линеаризации действия конечных групп (см. [6]). Сначала выбираем произвольную систему локальных координат $z_1, \dots, z_n$, принимающих значение 0 в рассматриваемой точке x , которая является неподвижной при действии группы H . Для любого $h \in H$ обозначим через h' линейную часть разложения в ряд Тейлора (относительно координат $z_1, \dots, z_n$) автоморфизма h в точке x . Тогда замена координат, заданная отображением

$$\sigma = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} (g')^{-1} g,$$

превращает действие группы H в линейное. А именно, эта замена сопрягает автоморфизмы h и h' для любого $h \in H$, так как $\sigma \circ h = h' \circ \sigma$ (действительно, имеем $\sigma \circ h = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} (g')^{-1} g \circ h = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} h'(g' \circ h')^{-1} g \circ h = \frac{1}{|H|} h' \sum_{e \in H} (e')^{-1} e = h' \circ \sigma$).

Такая замена координат является касательной к тривиальной замене координат и действует тривиально на каждом линейном (относительно координат $z_1, \dots, z_n$) подпространстве, на котором действие группы H уже является линейным. Следовательно, чтобы доказать утверждение (i), достаточно линеаризовать действие элемента g (и тогда в новых координатах множество $\mathcal{X}^g$ станет линейным), а чтобы доказать утверждения (ii) и (iii), достаточно выбрать произвольную систему локальных координат в точке $t \in B$ и включить ее подъем в систему локальных координат $z_1, \dots, z_n$ (это гарантирует нам сюръективность отображения на уровне касательных пространств, $T_x(\mathcal{X}^g) \rightarrow T_{p(x)}B$; собственность и сюръективность морфизма $p: \mathcal{X}^g \rightarrow B$ вытекает из собственности морфизма $p: \mathcal{X} \rightarrow B$ и замкнутости подмногообразия $\mathcal{X}^g$ в $\mathcal{X}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Мы приведем доказательство предложения только для случая $n \leq 2$, так как доказательство в общем случае является аналогичным.

Пусть $X_o, o \in B$, – слой морфизма p , являющийся расширением Галуа общего накрытия $X_o \rightarrow \mathbb{P}^n$. Дивизор ветвления этого накрытия является объединением гладких коразмерности один многообразий $R_{o(i,j)}$, $1 \leq i < j \leq d$; эти многообразия являются множествами неподвижных точек транспозиций $(i, j) \in S_d$. Согласно лемме 4.2 множества неподвижных точек $\mathcal{X}^{(i,j)} \subset \mathcal{X}$ тех же самых транспозиций, действующих на многообразии $\mathcal{X}$, также являются гладкими коразмерности один многообразиями и для любого $t \in B$ пересечение $R_{t(i,j)} = \mathcal{X}^{(i,j)} \cap X_t$ является трансверсальным для любой транспозиции $(i, j) \in S_d$. Кроме того, если $\mathcal{X}^g \neq \emptyset$ для некоторого элемента $g \in S_d$, $g \neq 1$, то согласно лемме 4.2 имеем $\mathcal{X}^g \cap X_o \neq \emptyset$, и так как действие группы S_d на многообразии X_o является общим, то отсюда следует, что элемент g является

транспозицией в случае $n = 1$ и в случае $n = 2$ элемент g – это либо транспозиция, либо произведение двух коммутирующих транспозиций, либо циклическая перестановка длины три.

Пусть $n = 2$ и g – это циклическая перестановка (j_1, j_2, j_3) (остальные случаи рассматриваются аналогично). Покажем, что действие группы $S_{\{j_1, j_2, j_3\}}$ на многообразии $\mathcal{X}$ так же, как и на каждом слое X_t , $t \in B$, является общим. Действительно, не ограничивая общности, можем считать, что $\dim B = 1$. Тогда согласно лемме 4.2 многообразие $\mathcal{X}^g$ является гладкой кривой, а $\mathcal{X}^{(j_1, j_2)}$ и $\mathcal{X}^{(j_1, j_3)}$ являются гладкими поверхностями, пересекающимися со всеми слоями трансверсально. Поскольку $\mathcal{X}^g \cap X_o = R_{o(j_1, j_2)} \cap R_{o(j_1, j_3)}$, то, применяя еще раз лемму 4.2, получаем, что $\mathcal{X}^{(j_1, j_2)} \cap \mathcal{X}^{(j_1, j_3)} = \mathcal{X}^g$ и $X_t^g = R_{t(j_1, j_2)} \cap R_{t(j_1, j_3)}$ для всех $t \in B$. Следовательно, $\mathcal{X}^g$ (соответственно, X_t^g) совпадает с множеством неподвижных точек при действии группы $S_{\{j_1, j_2, j_3\}}$ на многообразии $\mathcal{X}$ (соответственно, на X_t).

В качестве следствия получаем, что действие группы S_d на многообразии $\mathcal{X}$ и на каждом слое X_t , $t \in B$, является общим. Следовательно, факторпространство $\mathcal{X}/S_d$ является гладким многообразием, и индуцированный морфизм $p_1: \mathcal{X}/S_d \rightarrow B$ является гладким собственным морфизмом. Таким образом, остается заметить, что $X_t/S_d = X_o/S_d = \mathbb{P}^n$ для любого $t \in B$, так как гладкое проективное многообразие M изоморфно проективному пространству $\mathbb{P}^n$, если существует C^∞ -диффеоморфизм $M \rightarrow \mathbb{P}^n$, который отображает канонический класс в канонический класс (в случае $n = 1$ это известно со времен Римана; если $n = 2$, то можно использовать классификацию Кодаиры–Энрикеса алгебраических поверхностей (см. [11]); следует также упомянуть, что в [12] доказано следующее: в любой размерности если компактное комплексное многообразие деформационно эквивалентно проективному пространству $\mathbb{P}^n$, то оно изоморфно ему).

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *G-многообразия такие, как в теоремах 0.1 и 0.2, образуют связные компоненты в пространствах модулей соответственно G-кривых и G-поверхностей общего типа. Эти компоненты являются насыщенными (см. введение, п. 0.2). Кроме того, в размерности один такие G-кривые, как в теореме 0.1, образуют собственные подмногообразия в пространстве модулей кривых общего типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из предложения 4.1. Второе утверждение следует из первого и теорем 0.1 и 0.2. Третье утверждение следует из первого и замечания о том, что любое бирациональное преобразование однопараметрического семейства деформаций кривых рода $g \geq 2$, которое сохраняет каждый слой неподвижным и является регулярным во всех точках всех слоев, за исключением конечного набора слоев, продолжается до преобразования, регулярного во всех точках этого семейства.

4.2. Примеры $\text{Dif} \neq \text{Def}$ комплексных G-многообразий. В этом пункте мы рассматриваем регулярные действия конечных групп на комплексных поверхностях и строим примеры диффеоморфных действий, которые, однако, не являются деформационно эквивалентными. Основная идея, используемая

при построении таких примеров, состоит в применении теоремы 0.2 к диффеоморфным, но не деформационно эквивалентным поверхностям.

Пусть X – жесткая не вещественная минимальная поверхность общего типа, т. е. минимальная поверхность общего типа, которая стабильна при деформациях и не изоморфна своей комплексно-сопряженной копии $\bar{X}$. Такие поверхности были построены в [13]. Обозначим через $Y_1 = \tilde{X}$ расширение Галуа общего m -канонического накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ и через Y_2 ее комплексное сопряжение, $Y_2 = \bar{Y}_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть Y_1 и Y_2 – описанные выше поверхности. Тогда для любого m такого, как в теореме 0.2, действия группы $S_d = \text{Aut } Y_1 = \text{Aut } Y_2$ на поверхностях Y_1 и Y_2 являются диффеоморфными, но Y_1 и Y_2 не являются S_d -деформационно эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 0.2 имеем $\text{Aut } Y_1 = \text{Aut } Y_2 = S_d$, где d – степень m -канонического накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Действие группы S_d на поверхности Y_1 тождественно диффеоморфно действию на Y_2 , так как $Y_2 = \bar{Y}_1$.

Предположим, что $Y_1 = \tilde{X}$ и $Y_2 = \bar{Y}_1$ являются S_d -деформационно эквивалентными, и пусть $p: \mathcal{X} \rightarrow B$ – гладкая S_d -деформация, соединяющая их (рассмотрение случая, когда имеется цепочка деформаций, дословно повторяет этот случай). Согласно предложению 4.1 для любого $t \in B$ накрытие $X_t \rightarrow \mathbb{P}^n$ является общим. Следовательно, $\mathcal{X}/S_{d-1} \rightarrow B$ является деформацией, соединяющей поверхность $X = Y_1/S_{d-1}$ с поверхностью $\bar{X} = Y_2/S_{d-1}$, что невозможно.

4.3. Примеры $\text{Dif} \neq \text{Def}$ вещественных G -многообразий. В этом пункте мы расширим категорию G -многообразий, а именно рассмотрим конечные подгруппы клейновых расширений групп автоморфизмов. Напомним, что группа Клейна $\text{Kl}(X)$ комплексного многообразия X – это по определению группа, состоящая из бирегулярных изоморфизмов $X \rightarrow X$ и $X \rightarrow \bar{X}$ (некоторые математики называют эти группы *группами дианалитических автоморфизмов*). Если X – вещественное многообразие и s – вещественная структура на нем, то имеет место следующая точная последовательность:

$$1 \rightarrow \langle c \rangle = \mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{Kl}(X) \rightarrow \text{Aut } X \rightarrow 1.$$

Рассмотрим две вещественные поверхности Кампеделли (X_1, c_1) и (X_2, c_2) , построенные в [3, § 2]. Как показано в [3], эти поверхности не являются вещественно деформационно эквивалентными, но их вещественные структуры $c_1: X_1 \rightarrow X_1$ и $c_2: X_2 \rightarrow X_2$ диффеоморфны.

Эти поверхности Кампеделли являются минимальными поверхностями общего типа. Таким образом, мы можем рассмотреть m -канонические общие накрытия $X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Более того, мы можем выбрать эти накрытия такими, что они являются вещественными, т. е. эти накрытия являются эквивариантными при комплексном сопряжении относительно стандартной вещественной структуры на проективном пространстве $\mathbb{P}^2$ и вещественных структур c_1, c_2 на X_1, X_2 . Обозначим через $\tilde{X}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $\tilde{X}_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ расширения Галуа

таких накрытий. Поверхности $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ являются вещественными, вещественные структуры на которых подняты с $\mathbb{P}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Группы Клейна $\mathrm{Kl}(\tilde{X}_1)$ и $\mathrm{Kl}(\tilde{X}_2)$ изоморфны, их действия диффеоморфны, однако не существует эквивариантной деформации, соединяющей $(\tilde{X}_1, \mathrm{Kl}(\tilde{X}_1))$ с $(\tilde{X}_2, \mathrm{Kl}(\tilde{X}_2))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предложения 4.4, отсутствие существования эквивариантной деформации является прямым следствием предложения 4.1.

Чтобы доказать два других утверждения, достаточно построить вещественный диффеоморфизм $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, коммутирующий с действиями группы Галуа. Для этого достаточно построить вещественные диффеоморфизмы $X_1 \rightarrow X_2$, $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, коммутирующие с выбранными выше m -каноническими общими накрытиями $X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Напомним некоторые детали построения поверхностей X_1, X_2 из [3]. Построение начинается с выбора однопараметрического вещественного семейства конфигураций Кампеделли $\mathcal{L}(t)$, $t \in T = \{|t| \leq 1, t \in \mathbb{C}\}$, прямых на проективной плоскости, т.е. семейства семерок прямых $L_1(t), \dots, L_7(t)$, занумерованных ненулевыми элементами $\alpha \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. Эти прямые являются вещественными при вещественных значениях t , и семейство осуществляет треугольное преобразование в точке $t = 0$ (см. определение треугольного преобразования в [3]). Рассмотрим накрытие Галуа $Y \rightarrow \mathbb{P}^2 \times T$ с группой Галуа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, разветвленное над $\sum_{i=1}^7 \mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_i = \{(p, t) \in \mathbb{P}^2 \times T : p \in L_i(t)\}$ и определенное выбранной нумерацией прямых. Слои Y_t проекции многообразия Y на T являются неособыми поверхностями Кампеделли для почти всех значений t , в частности для всех $t \neq 0$, достаточно близких к нулю. Интересующие нас поверхности X_1 и X_2 – это поверхности Y_t с соответственно положительным и отрицательным t , достаточно близким к нулю. Слой Y_0 имеет две особые точки, каждая из которых – это так называемая $T(-4)$ -особая точка; эти точки не являются вещественными, но они комплексно сопряжены друг другу. Для каждой неособой поверхности Кампеделли Y_t , $t \neq 0$, и для каждого i , $1 \leq i \leq 7$, полный прообраз $L_i^*(t) \subset Y_t$ прямой $L_i(t) \subset \mathbb{P}^2$ представляет биканонический класс, $[L_i^*(t)] = 2K_{Y_t}$.

Поскольку $Y \rightarrow \mathbb{P}^2 \times T$ является конечным морфизмом, то $E_m = m[\mathcal{L}_i^*]$ являются относительно очень обильными дивизорами при достаточно больших m (и любого i); см., например, [14]. Выберем такое целое число m и рассмотрим определенное линейной системой $|E_m|$ вещественное вложение (относительно B) многообразия Y в $\mathbb{P}^N \times T$ (чтобы построить такое вложение, надо подкрутить пучок E_m на полный прообраз очень обильного пучка на T). Отметим, что так как $[L_i^*(t)] = 2K_{Y_t}$, то это вложение задает $(2m)$ -каноническое вложение поверхностей Кампеделли Y_t в пространство $\mathbb{P}^N$. Как следует из [2, теорема 0.1], если $m \geq 5$, то линейная проекция $Y_t \rightarrow \mathbb{P}^2$ с центром в подпространстве $\mathbb{P}^{N-3}$ (выбранном достаточно общим образом) является общим накрытием для всех, за исключением конечного числа, значений $t \in T$, в частности для всех $t \neq 0$, достаточно близких к нулю. Для вещественного пространства $\mathbb{P}^{N-3}$

проекция $Y \rightarrow \mathbb{P}^2 \times T$ является вещественной, и для достаточно общим образом выбранных вещественных пространств $\mathbb{P}^{N-3}$ две особые точки поверхности Y_0 проектируются в разные комплексно-сопряженные точки. Обозначим эти особые точки через $y, \bar{y}$, а их образы при проекции через $b, \bar{b}$. Можно показать, повторяя дословно аргументы из [2], что проекция $Y_0 \rightarrow \mathbb{P}^2$ является общей всюду (общая проекция в особой точке означает, что слой проекции, проходящий через особую точку $y \in Y_0$ (соответственно, через $\bar{y} \in Y_0$), находится в общем положении по отношению к касательному конусу $C_b Y_0$ (соответственно, к $C_{\bar{b}} Y_0$)).

Ограничим теперь наше внимание на малых значениях параметра t . Накрытия $Y_t \rightarrow \mathbb{P}^2$ являются общими при $t \neq 0$, разветвленными над каспидальными кривыми B_t . При $t = 0$ кривая ветвления B_0 является каспидальной всюду, за исключением двух различных комплексно-сопряженных точек b и $\bar{b}$. Вырежем два небольших комплексно-сопряженных шара Милнора $V(b)$ и $V(\bar{b})$ с центрами в этих точках. С помощью семейства диффеоморфизмов Морса–Лефшеца пополним изотопию дополнений $B_{te^{i\varphi}} \setminus (V(b) \cup V(\bar{b}))$ изотопиями внутри шара $V(b)$, а затем пополним полученную изотопию комплексно-сопряженной изотопией внутри шара $V(\bar{b})$. Эта изотопия определяет эквивариантный диффеоморфизм между накрытиями Галуа, разветвленными над кривыми B_t и B_{-t} соответственно. Диффеоморфизмы Морса–Лефшеца можно рассматривать как преобразования, действующие тождественно на дополнении к объединению $V(b) \cup V(\bar{b})$. Следовательно, эпиморфизм $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_t) \rightarrow S_d$, определяющий накрытия Галуа, не меняется, и поэтому построенный диффеоморфизм накрытий Галуа является диффеоморфизмом из $\tilde{X}_1$ в $\tilde{X}_2$. Он эквивариантен относительно действия группы Галуа и относительно вещественной структуры. Для завершения доказательства осталось заметить, что согласно теореме 0.2 группы $\text{Aut}(\tilde{X}_1)$ и $\text{Aut}(\tilde{X}_2)$ совпадают с группой Галуа накрытия.

Список литературы

1. Н. Weyl, *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1949.
2. В. С. Куликов, Вик. С. Куликов, “Общие накрытия плоскости с A - D - E -особенностями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:6 (2000), 65–106; англ. пер.: V. S. Kulikov, Vik. S. Kulikov, “Generic coverings of the plane with A - D - E -singularities”, *Izv. Math.*, **64**:6 (2000), 1153–1195.
3. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “Поверхности с $\text{DIF} \neq \text{DEF}$ вещественными структурами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 135–174; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, V. M. Kharlamov, “Surfaces with $\text{DIF} \neq \text{DEF}$ real structures”, *Izv. Math.*, **70**:4 (2006), 769–807.
4. Д. Горенштейн, *Конечные простые группы: Введение в их классификацию*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, University Series in Mathematics, Plenum, New York–London, 1982.
5. Н. М. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.

6. H. Cartan, “Quotient d’un espace analytique par un groupe d’automorphismes”, *Algebraic geometry and topology*, A symposium in honor of S. Lefschetz (Princeton, 1954), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957, 90–102.
7. Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 83–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture”, *Izv. Math.*, **63**:6 (1999), 1139–1170.
8. G. Xiao, “Bound of automorphisms of surfaces of general type. II”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:4 (1995), 701–793.
9. L. Dornhoff, *Group representation theory. Part A: Ordinary representation theory*, Pure Appl. Math., **7**, Dekker, New York, 1971.
10. Вик. С. Куликов, “Обобщенная гипотеза Кизини”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 122–131; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Generalized Chisini’s conjecture”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **241** (2003), 110–119.
11. W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
12. Yum-Tong Siu, “Global nondeformability of the complex projective space”, *Prospects in complex geometry* (Katata and Kyoto, 1989), Lecture Notes in Math., **1468**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 254–280.
13. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “О вещественных структурах на жестких поверхностях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 133–152; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, V. M. Kharlamov, “On real structures on rigid surfaces”, *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 133–150.
14. R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math., **156**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 04.09.2007

В. М. Харламов (V. M. Kharlamov)
 University Louis Pasteur, Strasbourg, France
E-mail: kharlam@math.u-strasbg.fr