Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кокарев, Смешанные формы объема и комплексное уравнение типа Монжа–Ампера на кэлеровых многообразиях положительной кривизны, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2010, том 74, выпуск 3, 65–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im2728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:11:23

УДК 514.772

В. Н. Кокарев

Смешанные формы объема и комплексное уравнение типа Монжа–Ампера на кэлеровых многообразиях положительной кривизны

Рассматривается обобщение проблемы Калаби. В аналитической трактовке оно приводит на кэлеровом многообразии к комплексному уравнению Монжа–Ампера, содержащему смешанный дискриминант данной и искомой метрик. В случае, когда кэлерово многообразие является δ -защепленным ($\delta > 1/2$), получены достаточные условия разрешимости.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: кэлерово многообразие, уравнение Монжа–Ампера.

Введение

Геометрия – естественная область возникновения и применения уравнений Монжа–Ампера, т.е. уравнений, содержащих действительный оператор Монжа–Ампера $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j})$. К таким уравнениям приводят, например, задачи о нахождении выпуклой поверхности с заданной гауссовой кривизной (проблема Минковского), с заданной метрикой (проблема Вейля), а также задачи, связанные с классификацией аффинных сфер. Достаточно полное описание соответствующих геометрических проблем и библиография имеются в [1], [2]. Многие задачи в геометрии приводят к комплексным версиям уравнения Монжа–Ампера – уравнениям, содержащим комплексный оператор Монжа–Ампера $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta})$. Такое уравнение возникает при решении проблемы Калаби [3].

Помимо уравнений, содержащих действительный или комплексный оператор Монжа–Ампера, большой интерес представляют также уравнения, содержащие смешанный дискриминант $D(\underbrace{U, \dots, U}_m, V, \dots, V)$ от матрицы Гессе $U = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j})$ неизвестной функции u и какой-нибудь другой матрицы V , либо известной, либо образованной из производных функции u первого порядка (о смешанных дискриминантах см. [4]). Оператор $D(\underbrace{U, \dots, U}_m, V, \dots, V)$ будем называть оператором Монжа–Ампера m -го порядка. Уравнения, содержащие такие операторы, также возникают в задачах, связанных с восстановлением поверхности по m -й элементарной симметрической функции ее главных кривизн, радиусов кривизны или условных радиусов кривизны [5], [1], [6]. Насколько нам известно, комплексные версии таких уравнений не рассматривались. В настоящей статье сформулируем геометрическую проблему, приводящую к комплексному

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00151).

уравнению Монжа–Ампера m -го порядка на кэлеровом многообразии, и в некоторых случаях найдем достаточные условия разрешимости этого уравнения.

Основные результаты настоящей работы сформулированы в теоремах 3, 4.

§ 1. Обобщение проблемы Калаби

Приведем одну из эквивалентных формулировок проблемы Калаби (см. [7, пп. 2.101, 11.33]): пусть (M, g^0) – компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n с кэлеровой метрикой g^0 ; любая ли $2n$ -форма μ , индуцирующая ориентацию M , является формой объема некоторой кэлеровой метрики g на M ? При этом кэлеровы формы ω_0 и ω метрик g^0 и g должны быть когомологичны.

Форма объема dV_{g^0} для кэлеровой метрики g^0 равна $\omega_0^n/n!$. В локальных координатах $dV_{g^0} = i^{n^2} \det g^0 dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n$. Форма μ пропорциональна с положительным коэффициентом форме dV_{g^0} , т. е.

$$\mu = i^{n^2} e^F \det g^0 dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n,$$

а форма объема метрики g есть

$$i^{n^2} \det g dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n = \frac{\omega^n}{n!}.$$

Поскольку формы ω и ω_0 когомологичны, на многообразии M существует такая вещественная функция φ , что $\omega = \omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$. Поэтому получается уравнение $(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi)^n = e^F \omega_0^n$ с условием, что $\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$ есть кэлерова форма положительно определенной кэлеровой метрики. Локально уравнение имеет следующий вид:

$$\det \left(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) = e^F \det (g_{\alpha\bar{\beta}}^0).$$

Разрешимость этого уравнения относительно функции φ была доказана С. Т. Яу в [3].

Пусть $g^1, \dots, g^n$ – кэлеровы метрики на кэлеровом многообразии M , $\omega_1, \dots, \omega_n$ – соответствующие кэлеровы формы. Поскольку формы четной степени при внешнем перемножении коммутируют, то $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n/n!$ является множителем при $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ в выражении $(\lambda_1 \omega_1 + \cdots + \lambda_n \omega_n)^n/n!$. По аналогии со смешанными дискриминантами и смешанными объемами естественно называть $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n/n!$ *смешанной формой объема для метрик $g^1, \dots, g^n$* или их кэлеровых форм $\omega_1, \dots, \omega_n$. В частности, $\omega_1^m \wedge \omega_2^{n-m}/n!$ будем называть *смешанной формой объема m -го порядка для метрик g^1 и g^2* . Очевидно, локально

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n/n! = i^{n^2} D(g^1, \dots, g^n) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n,$$

где D – смешанный дискриминант форм $g^1, \dots, g^n$.

Сформулируем

ОБОВЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КАЛАБИ. Пусть (M, g^0) – компактное кэлерово многообразие комплексной размерности n с кэлеровой метрикой g^0 . Любая ли $2n$ -форма μ , индуцирующая ориентацию на M , является смешанной формой объема m -го порядка некоторой кэлеровой метрики g и данной метрики g^0 ? Кэлеровы формы метрик g и g^0 также должны быть когомологичны.

Опять обозначив кэлеровы формы для метрик g и g^0 через ω и ω_0 соответственно и взяв $\mu = e^F \omega_0^n / n!$, с учетом когомологичности ω и ω_0 получаем уравнение

$$\left(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^m \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n \quad (1)$$

относительно неизвестной вещественной функции φ такой, что форма $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ является положительно определенной. Будем считать, что функция F и метрика g^0 принадлежат классу $C^{k,\alpha}(M)$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$.

§ 2. Необходимое условие разрешимости уравнения (1)

Обозначим через $\omega_0 = \frac{i}{2} g_{\alpha\bar{\beta}}^0 dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ кэлерову форму метрики g^0 . Пусть $\rho = \frac{i}{4} (\bar{\partial} \varphi - \partial \varphi)$. Как известно, форма ω_0 замкнута, если метрика g^0 кэлерова. Кроме того, $d\rho = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi$. Значит,

$$\left(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (\omega_0 + d\omega_1)^m \wedge \omega_0^{n-m}. \quad (2)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} &= (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m} \\ &= (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m+1} + d(\rho \wedge (\omega_0 + d\rho)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m}). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получаем, что форма в (2) и форма

$$\omega_0^n = n! dV_{g^0} \quad (3)$$

когомологичны. Форма dV_{g^0} является формой объема многообразия M для метрики g^0 . Интегрируя уравнение (1), получаем с учетом когомологичности форм (2) и (3), что объем многообразия M относительно метрики g^0 определяется формулой

$$\text{Vol}_{g^0}(M) = \int_M e^F dV_{g^0}. \quad (4)$$

Это необходимое условие разрешимости уравнения (1). Для случая $m = n$ (проблема Калаби) оно является и достаточным [3]. Как мы увидим ниже, для $m < n$ это уже не так.

§ 3. Единственность решения уравнения (1)

Здесь мы докажем, что форма ω , удовлетворяющая уравнению $\omega^m \wedge \omega_0^{n-m} = e^F \omega_0^n$, единственна при условии, что классы когомологий $[\omega]$ и $[\omega_0]$ совпадают и ω является кэлеровой формой положительно определенной метрики.

Греческие индексы у нас будут принимать значения от 1 до n . Дифференцирование по переменным $z^\alpha, \bar{z}^\beta, \dots$ в соответствующей карте будем обозначать запятой и индексами $\alpha, \bar{\beta}, \dots$ снизу.

Пусть уравнение (1) имеет два таких решения φ и $\tilde{\varphi}$, что формы $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi, \alpha\bar{\beta}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ и $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \tilde{\varphi}, \alpha\bar{\beta}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ положительно определены. Тогда, обозначив $\tilde{\rho} = \frac{i}{4}(\bar{\partial}\tilde{\varphi} - \partial\tilde{\varphi})$, из (2) получим

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_0 + d\rho)^m \wedge \omega_0^{n-m} - (\omega_0 + d\tilde{\rho})^m \wedge \omega_0^{n-m} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_0 + d\rho)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\rho})^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge (d\rho - d\tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (5)$$

В силу канонического изоморфизма $\bigwedge^{n-1, n-1}(M) \simeq \bigwedge^{*1,1} \otimes \bigwedge^{n,n}(M)$ уравнение (5) в локальных координатах можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{m-1} M_k^{\gamma\bar{\delta}} (\varphi - \tilde{\varphi})_{,\gamma\bar{\delta}} = 0.$$

Докажем, что $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ является матрицей эрмитовой положительно определенной формы для любого k .

Если $\Psi = \psi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, то

$$(\omega_0 + d\omega_1)^k \wedge (\omega_0 + d\tilde{\omega}_1)^{m-k-1} \wedge \omega_0^{n-m} \wedge \Psi = M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n,$$

где $M_k^{\gamma\bar{\delta}} \psi_{\gamma\bar{\delta}}$ равно смешанному дискриминанту соответствующих форм (см. § 1). Тогда эрмитовость матрицы $(M_k^{\gamma\bar{\delta}})$ следует из того, что этот смешанный дискриминант является действительным числом для любой эрмитовой матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$, а положительная определенность имеет место в силу того, что он положителен для любой эрмитовой положительно определенной матрицы $(\psi_{\alpha\bar{\beta}})$.

Тогда матрица $(\sum_{k=0}^{m-1} M_k^{\alpha\bar{\beta}})$ также является положительно определенной. Отсюда и из компактности многообразия M получаем, что эллиптическое на решении $\varphi - \tilde{\varphi}$ уравнение (5) может иметь решениями только константы, т. е. $\varphi - \tilde{\varphi} = \text{const}$. Если на решение уравнения (1) наложить условие $\min_M \varphi = 0$, то $\varphi = \tilde{\varphi}$. Единственность решения уравнения (1) доказана.

§ 4. Априорные оценки решения уравнения (1)

При доказательстве разрешимости уравнения (1) при $1 < m < n$ будет использован метод продолжения по параметру. Для применения этого метода требуется наличие априорных оценок искомого решения в метрике C^{2,α_0} с некоторым $\alpha_0 \in (0, 1)$. В этом параграфе мы найдем достаточные условия, которые будут гарантировать существование нужных оценок.

Здесь нам потребуются следующие две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть g, h – две кэлеровы метрики на многообразии M . Тогда в окрестности любой точки $z_0 \in M$ существует система координат такая, что

$$\begin{aligned} g_{\alpha\bar{\beta}}(z_0) &= \delta_{\alpha\beta}, & h_{\alpha\bar{\beta}}(z_0) &= \delta_{\alpha\bar{\beta}} R_\alpha, & R_\alpha &> 0, \\ g_{\alpha\bar{\beta},\gamma}(z_0) &= g_{\alpha\bar{\beta},\bar{\gamma}}(z_0) &= 0 \end{aligned}$$

для всех α, β, γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является модификацией доказательства леммы из [8, гл. 0, § 7].

Пусть в окрестности точки z_0 задана комплексно-аналитическая карта с координатами $v^1, \dots, v^n$, относительно которой $z_0 = (0, \dots, 0)$. Комплексным линейным преобразованием координат $z^\alpha = a_\beta^\alpha v^\beta$ можно добиться, чтобы формы g и h в точке z_0 имели матрицы

$$g_{\alpha\bar{\beta}}(z_0) = \delta_{\alpha\bar{\beta}}, \quad h_{\alpha\bar{\beta}}(z_0) = \delta_{\alpha\bar{\beta}} R_\alpha$$

(см. [9, гл. 6, § 23, теорема 2a]). Значит,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} z^\gamma + a_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{z}^\gamma + \{2\}.$$

Здесь и далее $\{2\}$ – функция, имеющая в точке z_0 нуль второго порядка. Из $g_{\alpha\bar{\beta}} = \bar{g}_{\beta\bar{\alpha}}$ получаем $\bar{a}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = a_{\beta\bar{\alpha}\gamma}$, а из условий $g_{\alpha\bar{\beta},\gamma} = g_{\alpha\bar{\gamma},\beta}$, $g_{\alpha\bar{\beta},\gamma} = g_{\gamma\bar{\beta},\alpha}$ получим $a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = a_{\alpha\bar{\gamma}\beta}$, $a_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = a_{\gamma\bar{\beta}\alpha}$ для всех α, β, γ .

Сделаем еще одну замену координат, положив $z^\alpha = w^\alpha - \frac{1}{2} g^{\alpha\bar{\nu}} a_{\beta\bar{\nu}\gamma} w^\beta w^\gamma$. Тогда, учитывая, что $z^\alpha = w^\alpha + \{2\}$, $g^{\alpha\bar{\nu}} = \delta^{\alpha\bar{\nu}} + \{2\}$, получаем $h(z_0) = \delta_{\alpha\bar{\beta}} R_\alpha dw^\alpha d\bar{w}^\beta$, $g = (\delta_{\alpha\bar{\beta}} + \{2\}) dw^\alpha d\bar{w}^\beta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть голоморфная секционная кривизна кэлера многообразия (M, g^0) удовлетворяет условиям $1 - \varepsilon \leq K(\sigma) \leq 1$. Если в окрестности точки $z_0 \in M$ выбрана такая карта, что $g_{\alpha\bar{\beta}}^0(z_0) = \delta_{\alpha\bar{\beta}}$, $g_{\alpha\bar{\beta},\gamma}^0(z_0) = g_{\alpha\bar{\beta},\bar{\gamma}}^0(z_0) = 0$ для всех α, β, γ , то для координат тензора кривизны в точке z_0 выполняются соотношения

$$-1 \leq R_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq -1 + \varepsilon, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon, \quad \alpha \neq \beta, \quad (7)$$

для всех α, β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех α, β имеем скалярные произведения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right) = g_{\alpha\bar{\beta}}^0 = \delta_{\alpha\bar{\beta}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right) = 0$$

(см. [10, гл. IX, § 5]).

Если 2-плоскость σ натянута на единичные векторы X, JX , где J – оператор комплексной структуры, то голоморфная секционная кривизна в направлении σ равна $(R(X, JX)X, JX)$. Вычислив ее для единичного вектора $X = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right)$, получаем соотношения (6).

Возьмем единичные векторы

$$Y = \frac{1}{2} \left(t \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} + \frac{\partial}{\partial z^\beta} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right), \quad Z = \frac{1}{2} \left(t \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - \frac{\partial}{\partial z^\beta} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right),$$

где $\alpha \neq \beta, t \in \mathbb{R}$. Из соотношений

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{2} ((R(Y, JY)Y, JY) + (R(Z, JZ)Z, JZ)) \leq 1$$

получаем неравенства

$$4 - 4\varepsilon \leq -R_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} - R_{\beta\bar{\beta}\beta\bar{\beta}} - 2R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} - 2R_{\beta\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}} - \frac{1}{t^2} R_{\beta\bar{\alpha}\beta\bar{\alpha}} - t^2 R_{\alpha\bar{\beta}\alpha\bar{\beta}} \leq 4.$$

Поделив эти неравенства на t^2 и взяв $t \rightarrow \infty$, получим $R_{\alpha\bar{\beta}\alpha\bar{\beta}} = 0$. Умножив эти неравенства на t^2 и взяв $t \rightarrow 0$, получим $R_{\beta\bar{\alpha}\beta\bar{\alpha}} = 0$. Следовательно,

$$4 - 4\varepsilon \leq -R_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} - R_{\beta\bar{\beta}\beta\bar{\beta}} - 2R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} - 2R_{\beta\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}} \leq 4.$$

С помощью уже доказанных соотношений (6) отсюда получаем

$$2 - 4\varepsilon \leq -2R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} - 2R_{\beta\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}} \leq 2 + 2\varepsilon.$$

В силу выбора системы координат имеем $R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = R_{\beta\bar{\beta}\alpha\bar{\alpha}}$ в точке z_0 (см. [10, гл. IX, § 5, (21)]). Поэтому $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon$, $\alpha \neq \beta$. Лемма доказана.

Обозначим экстремумы формы $g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta = (g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ относительно формы $g_{\alpha\bar{\beta}}^0 dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ через $R_1, \dots, R_n$. Рассмотрим функцию

$$w(z, \eta) = \frac{(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta} = 1 + \frac{\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}$$

точки $z \in M$ и комплексного вектора $\eta = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \Big|_z$ типа $(1, 0)$ из $T'_z M$. Эта функция является инвариантно определенной на всем многообразии M для всех направлений. В силу компактности M функция w достигает максимума, равного w_0 , в некоторой точке $O \in M$ в направлении η_0 . Пользуясь леммой 1, введем карту в окрестности точки O так, чтобы в этой точке

$$g_{\alpha\bar{\beta}}^0 = \delta_{\alpha\bar{\beta}}, \quad g_{\alpha\bar{\beta},\gamma}^0 = g_{\alpha\bar{\beta},\bar{\gamma}}^0 = 0, \quad g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} R_\alpha \quad (8)$$

для всех α, β, γ . При этом в точке O векторы $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}$ будут иметь экстремальные направления, т. е. $w(O, \frac{\partial}{\partial z^\alpha}) = R_\alpha$. Выберем нумерацию координат так, чтобы $R_1 \geq \dots \geq R_n$ в точке O . Тогда определенная в окрестности точки O функция $\tilde{w}(z) = 1 + \frac{\varphi_{,1\bar{1}}(z)}{g_{1\bar{1}}^0(z)}$ также достигает максимума в точке O , причем $\tilde{w}(O) = w_0 = R_1$. Значит, $d\tilde{w} = 0$, $\tilde{w}_{,\alpha\bar{\beta}} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \leq 0$ в точке O . Тогда с учетом равенств (8) получаем в точке O

$$\tilde{w}_{,\alpha\bar{\alpha}} = \varphi_{,1\bar{1}\alpha\bar{\alpha}} - g_{1\bar{1},\alpha\bar{\alpha}}^0 \varphi_{,1\bar{1}} \leq 0. \quad (9)$$

Уравнение (1) в точке O принимает вид

$$S_m = C_n^m e^F, \quad (10)$$

где S_m — m -я элементарная симметрическая функция от $R_1, \dots, R_n$. Дифференцируя уравнение (1) по z^1 и $\bar{z}^1$ в точке O , с учетом равенств (8) получим

$$\sum_\alpha \frac{\partial S_m}{\partial R_\alpha} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1} = C_n^m (e^F)_{,1}, \quad (11)$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial S_m}{\partial R_\alpha} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}\bar{1}} = C_n^m (e^F)_{,\bar{1}}. \quad (12)$$

Двукратное дифференцирование уравнения (1) по $z^1, \bar{z}^1$ в точке O дает

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha \frac{\partial S_m}{\partial R_\alpha} (g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}}) + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 S_m}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{1}} + \sum_\alpha S_m^\alpha g_{\alpha\bar{\alpha}}^0 \\ & - \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 S_m}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \varphi_{,\alpha\bar{\beta}1} \varphi_{,\beta\bar{\alpha}\bar{1}} = C_n^m \left((e^F)_{,1\bar{1}} + e^F \sum_\alpha g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь S_m^α – m -я элементарная симметрическая функция от $R_1, \dots, R_n$, кроме R_α . Из (9) получаем

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}} \leq \varphi_{,1\bar{1}} \sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0. \quad (14)$$

Функция $S_m^{1/m}$ вогнута по положительным переменным $R_1, \dots, R_n$. Неравенство $d^2 S_m^{1/m} \leq 0$ влечет

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 S_m}{\partial R_{\alpha} \partial R_{\beta}} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{S_m} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} \xi_{\alpha}\right)^2$$

для вещественных форм. Значит, и для эрмитовых форм верно

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 S_m}{\partial R_{\alpha} \partial R_{\beta}} \xi_{\alpha} \bar{\xi}_{\beta} \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{S_m} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} \xi_{\alpha}\right) \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} \bar{\xi}_{\alpha}\right).$$

Отсюда, положив $\xi_{\alpha} = \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1}$, $\bar{\xi}_{\alpha} = \varphi_{,\bar{\alpha}\alpha\bar{1}}$ и используя равенства (10)–(12), получаем оценку

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 S_m}{\partial R_{\alpha} \partial R_{\beta}} \varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{1}} \leq C_n^m \left(1 - \frac{1}{m}\right) (e^F)_{,1} (e^F)_{,\bar{1}} (e^{-F}). \quad (15)$$

Из равенств (8) имеем $1 + \varphi_{,1\bar{1}} = R_1$. Тогда из равенства (13) с помощью соотношений (10), (14), (15) и $\varphi_{,\alpha\bar{\alpha}1} \varphi_{,\beta\bar{\beta}\bar{1}} = |\varphi_{,\alpha\bar{\beta}1}|^2 \geq 0$ получаем

$$C_n^m \left(\frac{(1 - \frac{1}{m})(e^F)_{,1} (e^F)_{,\bar{1}}}{e^F} - (e^F)_{,1\bar{1}} \right) + \sum_{\alpha} (S_m^{\alpha} - S_m) g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 \geq -R_1 \sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0. \quad (16)$$

В силу выбора системы координат в точке O имеем равенство $g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 = R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}}$ (см. [10, гл. IX, § 5, (21)]). Поэтому из (6), (7) получаем

$$\sum_{\alpha} (S_m^{\alpha} - S_m) g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon\right) (S_m - S_m^1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\right) m S_m. \quad (17)$$

Через S_k^{α} обозначим k -ю элементарную симметрическую функцию от $R_1, \dots, R_n$, кроме R_{α} . Так как $\frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} = S_{m-1}^{\alpha}$ и $\sum_{\alpha} S_{m-1}^{\alpha} = (n - m + 1) S_{m-1}$, то, используя (6) и (7), получаем

$$-R_1 \sum_{\alpha} \frac{\partial S_m}{\partial R_{\alpha}} g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 \geq \frac{1}{2} R_1 S_{m-1}^1 + (n - m + 1) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) R_1 S_{m-1}. \quad (18)$$

Поскольку $S_m - S_m^1 - R_1 S_{m-1}^1 = 0$, то при $\varepsilon \geq 0$ имеем

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon\right) (S_m - S_m^1) - \frac{1}{2} R_1 S_{m-1}^1 \leq 0. \quad (19)$$

Из (16) с помощью (17)–(19) получаем

$$\frac{C_n^m \left((1 - \frac{1}{m})(e^F)_{,1} (e^F)_{,\bar{1}} e^{-F} - (e^F)_{,1\bar{1}} \right) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon) m S_m}{(n - m + 1) S_{m-1}} \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) R_1. \quad (20)$$

Для положительных $R_1, \dots, R_n$ имеем $S_{m-1} \geq C_n^{m-1} \left(\frac{S_m}{C_n^m}\right)^{(m-1)/m}$.

Введем функцию

$$\psi_m = \left(\frac{S_m}{C_n^m} \right)^{1/m} = e^{F/m}.$$

Тогда из (20) при $0 \leq \varepsilon < 1/2$ получаем оценку

$$R_1 \leq \frac{2}{1-2\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \psi_m - (\psi_m)_{,1\bar{1}} \right). \quad (21)$$

Очевидно, положительная определенность метрики g эквивалентна положительности всех $R_1, \dots, R_n$. Докажем, что для этого достаточно выполнение неравенства

$$\left(1 - \frac{m}{n} \right)^{1/m} R_1 < \psi_m. \quad (22)$$

Действительно, если $R_n = 0$ при $R_1 \geq \dots \geq R_n$, то $S_m \leq C_{n-1}^m R_1^m$. Отсюда имеем

$$\left(\frac{S_m}{C_n^m} \right)^{1/m} \leq \left(\frac{n-m}{n} \right)^{1/m} R_1,$$

что противоречит (22). Итак, через функцию F мы можем оценить сверху собственные значения формы $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$ по отношению к форме $g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$. Ввиду (21) оценка имеет вид

$$R_{\max} \leq \max_{z,\eta} \frac{2}{1-2\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \psi_m - \eta \bar{\eta}(\psi_m) \right). \quad (23)$$

Здесь $z \in M$, η – такое векторное поле типа $(1, 0)$ в окрестности точки z , что для комплексно-сопряженного поля $\bar{\eta}$ скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta})$ равно 1. Максимум берется по всем точкам $z \in M$ и всем таким векторным полям η .

Если функция ψ удовлетворяет условию

$$\left(1 - \frac{m}{n} \right)^{1/m} \max_{z,\eta} \frac{2}{1-2\varepsilon} \left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \psi_m - \eta \bar{\eta}(\psi_m) \right) < \psi_m(x) \quad \forall x \in M, \quad (24)$$

то из неравенства (22) следует положительность собственных значений формы $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$ по отношению к форме $g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$, причем в силу строгости неравенства (24) и компактности многообразия M для этих собственных значений можно указать положительную оценку снизу, зависящую только от функции F . Поскольку метрика g^0 задана, мы получаем оценки модулей вторых производных $|\varphi_{,\alpha\bar{\alpha}}|$, $|\varphi_{,\alpha\bar{\beta}}|$ функции φ .

Для оценки $|\nabla \varphi|_{g^0}$ заметим, что функция φ удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению $g^{0\alpha\bar{\beta}} \varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = G$. В силу доказанных оценок $|G|$ оценивается сверху. В этом случае для окрестности U_p точки $p \in M$ согласно [11, п. 5.5, теорема 4] имеем

$$\max_{U_p} |\nabla \varphi| \leq C \left(\left(\int_{U_p} |G|^q dV_{g^0} \right)^{1/q} + \sup_{U_p} |\varphi| \right), \quad q > 2n,$$

где C зависит от (M, g^0) и U_p .

Функция $\varphi_p = \varphi - \varphi(p)$ также удовлетворяет уравнению $g^{0\alpha\bar{\beta}}\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = G$, и для нее $\nabla\varphi_p = \nabla\varphi$. Тогда в окрестности U_p

$$\max_{U_p} |\nabla\varphi_p| \leq C \left(\left(\int_{U_p} |G|^q dV_{g^0} \right)^{1/q} + (\text{diam } U_p) \max_{U_p} |\nabla\varphi_p| \right), \quad q > 2n.$$

Если диаметр области U_p достаточно мал, то отсюда получается оценка для $\max_{U_p} |\nabla\varphi_p|$, а значит, и оценка $\max_{U_p} |\nabla\varphi|$. В силу компактности многообразия M его можно покрыть конечным числом областей. Итак, доказано существование оценки сверху величины $|\nabla\varphi|$.

Поскольку функция φ определяется с точностью до константы, будем считать, как и ранее, что $\min \varphi = 0$. В силу компактности многообразия M его диаметр ограничен. Отсюда и из существования оценки для $|\nabla\varphi|$ получается оценка самой функции φ .

Из существования оценок величин $|\varphi_{,\alpha\bar{\alpha}}|$, $|\varphi_{,\alpha\bar{\beta}}|$ еще не следует существование C^2 -оценки функции φ . Например, если локально $\varphi = a(z^1)^2 + a(\bar{z}^1)^2$, то $\varphi_{,\alpha\bar{\beta}} = 0$ для всех α, β , но производные функции φ по вещественным переменным $\text{Re } z^1$, $\text{Im } z^1$ могут быть как угодно велики в зависимости от a . Однако C^2 -оценка функции φ легко получается. Дифференцируя уравнение (1) по вещественной переменной $x^\gamma = \text{Re } z^\gamma$, получим

$$\begin{aligned} m \left(\omega'_0 + \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\varphi' \right) \wedge \left(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m} \\ + (n-m) \left(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^m \wedge \omega_0^{n-m-1} \wedge \omega'_0 = (e^F \omega_0^n)', \end{aligned}$$

где через $\partial\bar{\partial}\varphi'$, ω'_0 , $(e^F \omega_0)'$ обозначены формы, координаты которых получены из координат форм $\partial\bar{\partial}\varphi$, ω_0 , $e^F \omega_0^n$ дифференцированием по x^γ . Тогда функция $\theta = \partial\varphi/\partial x^\gamma$ будет удовлетворять линейному эллиптическому уравнению $A^{\alpha\bar{\beta}}\theta_{,\alpha\bar{\beta}} = H$, коэффициенты которого $A^{\alpha\bar{\beta}}$, H оцениваются в силу существования оценок для $|\varphi_{,\alpha\bar{\alpha}}|$, $|\varphi_{,\alpha\bar{\beta}}|$. Тогда, опять используя [11, п. 5.5, теорема 4], получаем оценку величины $|\nabla\theta|$, равной $|\nabla\partial\varphi/\partial x^\gamma|$. Аналогично получается оценка для $|\nabla\partial\varphi/\partial y^\gamma|$, $y^\gamma = \text{Im } z^\gamma$. Существование этих оценок для всех γ означает, что существует C^2 -оценка функции φ .

Для доказательства существования $C^{2,\alpha}$ -оценки функции φ воспользуемся [5, теорема 7.2]. Условием теоремы 7.2 из [5] являются неравенства (7.3), (7.4) из работы [5], при выполнении которых найдется такое $\alpha_0 \in (0, 1)$, что возможно дать C^{2,α_0} -оценку решения уравнения (1) при наличии C^2 -оценки. Можно считать, что $\alpha_0 < \alpha$. Обозначим

$$\left(\omega_0 + \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^m \wedge \omega_0^{n-m} = \mathcal{F} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n.$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\mathcal{F}^{1/m} = (e^F \det(g_{\alpha\bar{\beta}}^0))^{1/m}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_{,\alpha\bar{\beta}}} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq R_n^{m-1} |\xi|^2.$$

Поскольку R_n оценивается положительной константой снизу, последнее неравенство и является условием (7.3) из [5]. Условие (7.4) из [5]

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi_{\alpha\bar{\beta}} \partial \varphi_{\gamma\bar{\delta}}} \xi^{\alpha\bar{\beta}} \xi^{\gamma\bar{\delta}} \leq 0$$

означает вогнутость функции $\mathcal{F}^{1/m}$ по переменным $\varphi_{\alpha\bar{\beta}}$ в области, где форма $(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{\alpha\bar{\beta}}) dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ является положительно определенной. Это свойство доказано в [4]. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если φ – решение уравнения (1), то при выполнении условий (24) для функции φ можно указать оценку в метрике C^{2,α_0} , $0 < \alpha_0 < \alpha$, зависящую только от заданной метрики g^0 , функции F и ее производных до второго порядка.*

§ 5. Условие положительной определенности искомой метрики при $m = 1$

При $m = 1$ уравнение (1) линейное. В этом случае нам достаточно найти условия положительной определенности искомой метрики g . Снова рассмотрим функцию

$$w(z, \eta) = \frac{(g_{\alpha\bar{\beta}}^0 + \varphi_{\alpha\bar{\beta}}) \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta} = 1 + \frac{\varphi_{\alpha\bar{\beta}} \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}{g_{\alpha\bar{\beta}}^0 \eta^\alpha \bar{\eta}^\beta}$$

точки $z \in M$ и комплексного вектора $\eta = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \Big|_z$ типа $(1, 0)$ из $\mathbf{T}'_z M$. В силу компактности M функция w достигает минимума, равного w_0 , в некоторой точке $O \in M$ в направлении η_0 . Так же, как в § 4, введем карту в окрестности точки O , чтобы в этой точке выполнялись условия (8). Выберем нумерацию координат так, чтобы $R_1 \leq \dots \leq R_n$. Тогда определенная в окрестности точки O функция $\tilde{w}(z) = 1 + \frac{\varphi_{1\bar{1}}(z)}{g_{1\bar{1}}^0(z)}$ также достигает минимума в точке O , причем $\tilde{w}(O) = w_0 = R_1$. Для положительной определенности метрики g достаточно, чтобы $R_1 > 0$.

В точке O имеем $d\tilde{w} = 0$, $\tilde{w}_{\alpha\bar{\beta}} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq 0$. Тогда с учетом (8) в точке O получаем

$$\tilde{w}_{\alpha\bar{\alpha}} = \varphi_{1\bar{1}\alpha\bar{\alpha}} - g_{1\bar{1},\alpha\bar{\alpha}}^0 \varphi_{1\bar{1}} \geq 0. \quad (25)$$

Дифференцируя уравнение (1) в точке O по z^1 и $\bar{z}^1$, получим при $m = 1$

$$\sum_{\alpha} (g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 + \varphi_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}) + \sum_{\alpha} S_1^\alpha g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 = n \left((e^F)_{,1\bar{1}} + e^F \sum_{\alpha} g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 \right).$$

Отсюда с помощью $g_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}^0 = R_{\alpha\bar{\alpha},1\bar{1}}$ и неравенств (6), (7), (25) получаем в точке O неравенство

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) e^F - (e^F)_{,1\bar{1}} \leq \frac{1}{2} R_1 \left(1 + \frac{n-1}{n} \varepsilon \right).$$

Тогда получаем, что для положительной определенности метрики g достаточно, чтобы во всех точках $z \in M$ для всех η выполнялось неравенство

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) e^F - \eta \bar{\eta} (e^F) > 0, \quad (26)$$

где $\eta, \bar{\eta}$ означают то же, что и в (23).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если φ – решение уравнения (1) при $m = 1$, то при выполнении условия (26) метрика с кэлеровой формой $\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi$ положительно определена.*

§ 6. Доказательство разрешимости уравнения (1)

Здесь, опираясь на теоремы 1, 2, докажем теоремы о разрешимости уравнения (1) при $1 < m < n$ и $m = 1$.

При $1 < m < n$ разрешимость уравнения (1) докажем методом продолжения по параметру. Включим уравнение (1) в семейство уравнений

$$\left(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^m \wedge \omega_0^{n-m} = (te^F + 1 - t)\omega_0^n, \quad t \in [0, 1]. \quad (27)$$

При $t = 1$ уравнение (27) становится уравнением (1). При $t = 0$ и условии $\min \varphi = 0$ уравнение (27) имеет единственное решение $\varphi = 0$ (см. § 3). При выполнении необходимого условия (4) для правой части уравнения (1) такое же условие выполняется для правой части уравнения (27):

$$\text{Vol}_{g^0}(M) = \int_M (te^F + 1 - t) dV_{g^0}.$$

Пусть правая часть уравнения (27) при любом $t \in [0, 1]$ удовлетворяет условию (24). Докажем, что множество T тех t из отрезка $[0, 1]$, при которых уравнение (27) разрешимо, одновременно открыто и замкнуто, а значит, кроме 0, содержит 1.

Сначала докажем, что множество T открыто. Пусть $t_0 \in T$, φ^0 – решение уравнения (27), соответствующее $t = t_0$. Левая часть уравнения (1) порождает отображение

$$\mathcal{F} : \varphi \rightarrow \frac{(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi)^m \wedge \omega_0^{n-m}}{dV_{g^0}}$$

из множества $A = C^{k+2,\alpha}(M)$ в множество $B = \{f \in C^{k,\alpha}(M) \mid \int_M f dV_{g^0} = 0\}$. Множества A и B являются банаховыми пространствами относительно $C^{k+2,\alpha}$ - и $C^{k,\alpha}$ -нормы соответственно. В множестве $L^2(M)$, а значит, и в $C^k(M)$ вводится скалярное произведение $\langle f, g \rangle = \int_M fg dV_{g^0}$.

Очевидно, дифференциал отображения $\mathcal{F}$ в точке φ^0 будет задаваться формулой

$$D\mathcal{F}_{\varphi^0}(\psi) = \frac{i}{2} \frac{\partial\bar{\partial}\psi \wedge (\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi^0)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m}}{dV_{g^0}},$$

а касательные пространства к A и B отождествляются с A и B соответственно. По теореме Гильдебрандта–Гревза [12] для локальной обратимости отображения $\mathcal{F}$ в окрестности точек φ^0 и $\mathcal{F}(\varphi^0)$ достаточно, чтобы его дифференциал в точке φ^0 был полностью обратим. Полная обратимость дифференциала $D\mathcal{F}_{\varphi^0}$ означает, что уравнение

$$\frac{i}{2} \frac{\partial\bar{\partial}\psi \wedge (\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi^0)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m}}{dV_{g^0}} = \Phi \quad (28)$$

должно быть разрешимо для любой функции $\Phi \in B$. Это линейное эллиптическое уравнение на компактном многообразии M . Для разрешимости этого уравнения достаточно, чтобы все решения сопряженного однородного уравнения были ортогональны Φ (см. [7, приложение, п. 31]). Докажем, что оператор $D\mathcal{F}_{\varphi^0}$ является самосопряженным.

Обозначим $(\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m} = \Omega$. Поскольку Ω – произведение кэлеровых форм, то $d\Omega = 0$. Так как Ω – форма типа $(n-1, n-1)$, то $\partial f \wedge \partial\psi \wedge \Omega = 0$, $\bar{\partial}f \wedge \bar{\partial}\psi \wedge \Omega = 0$. Тогда, используя теорему Стокса, получаем

$$0 = \int_{\partial M = \emptyset} f(\bar{\partial}\psi - \partial\psi) \wedge \Omega = \int_M (\partial f \wedge \bar{\partial}\psi + \partial\psi \wedge \bar{\partial}f) \wedge \Omega + 2f\partial\bar{\partial}\psi \wedge \Omega.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \langle f, D\mathcal{F}_{\varphi^0}(\psi) \rangle &= \frac{i}{2} \int_M f\partial\bar{\partial}\psi \wedge \Omega = -\frac{i}{4} \int_M (\partial f \wedge \bar{\partial}\psi + \partial\psi \wedge \bar{\partial}f) \wedge \Omega \\ &= \langle \psi, D\mathcal{F}_{\varphi^0}(f) \rangle. \end{aligned}$$

Итак, оператор $D\mathcal{F}_{\varphi^0}$ самосопряженный.

Рассмотрим уравнение $D\mathcal{F}_{\varphi^0}(\psi) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial\bar{\partial}\psi \wedge (\omega_0 + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\varphi^0)^{m-1} \wedge \omega_0^{n-m}}{dV_{g^0}} = 0. \quad (29)$$

В силу компактности многообразия M по принципу максимума (см. [12, гл. I, теорема 3, II]) получаем $\psi = c$, где $c = \text{const}$. Из определения скалярного произведения $\langle, \rangle$ и принадлежности функции Φ множеству B получаем $\langle c, \Phi \rangle = \int_M c\Phi dV_{g^0} = 0$. Итак, всякое решение однородного сопряженного уравнения, соответствующего (28), ортогонально правой части уравнения (28). Тогда уравнение (28) разрешимо и его решение принадлежит классу $C^{k+2, \alpha}(M)$ (см. [7, приложение, п. 31]). Это доказывает, что множество T открыто.

Докажем замкнутость множества T . Пусть $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ – последовательность значений параметра t , сходящаяся к t_0 . Пусть уравнение (27) разрешимо для каждого значения параметра из этой последовательности и $\varphi^{(i)}$ – решение, соответствующее значению параметра t_i . При условии (24) для правой части уравнения (27) из результатов § 4 следует наличие C^{2, α_0} -оценки решений $\varphi^{(i)}$ для некоторого $\alpha_0 \in (0, 1)$. Поскольку последовательность $\{\varphi^{(i)}\}$ ограничена в C^{2, α_0} -норме, она компактна в C^{2, α_1} -норме, $0 < \alpha_1 < \alpha_0$ (см. [13, гл. II, § 4, лемма 4.1]). Предельную функцию этой последовательности обозначим $\varphi^{(0)}$. Она принадлежит классу C^{2, α_1} и является решением уравнения (27) при $t = t_0$. По теореме Ниренберга о регулярности решений эллиптических уравнений (см. [14, теорема 11.3]) функция $\varphi^{(0)}$ на самом деле принадлежит классу $C^{k+2, \alpha}$. Итак, множество $\mathfrak{T}$ замкнуто.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – компактное кэлерово многообразие с кэлеровой формой ω_0 и с голоморфной секционной кривизной $K(\sigma)$, удовлетворяющей условиям $1 - \varepsilon \leq K(\sigma) \leq 1$, $\varepsilon < 1/2$. Чтобы форма $\mu = e^F \omega_0$ являлась формой смешанного объема t -го порядка, $1 < t < n$, для единственной из того же

класса, что и ω_0 , кэлеровой формы ω и формы ω_0 , достаточно выполнения условий:

$$1) \int_M e^F \omega_0 = \int_M \omega_0,$$

2) $(1 - \frac{m}{n})^{1/m} \max_{z, \eta} \frac{2}{1-2\varepsilon} ((\frac{1}{2} + \varepsilon) \psi_{mt} - \eta \bar{\eta}(\psi_{mt}))(z) < \psi_{mt}(x) \quad \forall x \in M$, где $\psi_{mt} = (te^F + 1 - t)^{1/m}$, $0 < t < 1$, η – векторное поле типа $(1, 0)$ в окрестности точки z такое, что для $\bar{\eta}$ – комплексно-сопряженного векторного поля – скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta})$ равно 1; максимум берется по всем точкам $z \in M$ и всем таким векторным полям η .

Если $\omega_0, F \in C^{k, \alpha}(M)$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k, \alpha}$; если ω_0 и F вещественно-аналитические, то форма ω также вещественно-аналитическая.

При $m = 1$ уравнение (1) линейное. Приведем его к виду

$$\frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi \wedge \omega_0^{n-1} = (e^F - 1) \omega_0^n.$$

Условием разрешимости последнего уравнения является ортогональность его правой части любому решению соответствующего однородного сопряженного уравнения. Ранее доказано, что все решения однородного самосопряженного уравнения – константы. Поэтому условие разрешимости $\int_M c(e^F - 1) dV_{g^0} = 0$ совпадает с необходимым условием (4). Условием положительной определенности искомой метрики является неравенство (26).

Таким образом, получена

ТЕОРЕМА 4. Пусть M – компактное кэлерово многообразие с кэлеровой формой ω_0 и с голоморфной секционной кривизной $K(\sigma)$, удовлетворяющей условиям $1 - \varepsilon \leq K(\sigma) \leq 1$, $\varepsilon < 1/2$. Чтобы форма $\mu = e^F \omega_0$ являлась формой смешанного объема первого порядка для единственной из того же класса, что и ω_0 , кэлеровой формы ω и формы ω_0 , достаточно выполнения условий

$$1) \int_M e^F \omega_0 = \int_M \omega_0,$$

2) $(\frac{1}{2} - \varepsilon) e^F - \eta \bar{\eta}(e^F) > 0$, где η – векторное поле типа $(1, 0)$ в окрестности точки z такое, что для $\bar{\eta}$ – комплексно-сопряженного векторного поля – скалярное произведение $(\eta, \bar{\eta})$ равно 1; неравенство должно выполняться для всех точек $z \in M$ и всех таких векторных полей η .

Если $\omega_0, F \in C^{k, \alpha}(M)$, $k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, то $\omega \in C^{k, \alpha}$; если ω_0 и F вещественно-аналитические, то форма ω также вещественно-аналитическая.

Список литературы

1. А. В. Погорелов, *Многомерная проблема Минковского*, Наука, М., 1975; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *The Minkowski multidimensional problem*, Wiley, New York–Toronto–London, 1978.
2. А. В. Погорелов, *Многомерное уравнение Монжа–Ампера* $\det(z_{ij}) = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$, Наука, М., 1988.
3. Sh.-T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.
4. А. Д. Александров, “К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы”, *Матем. сб.*, **3(45)**:2 (1938), 227–251.

5. Н. М. Ивочкина, “Решение задачи Дирихле для уравнений кривизны порядка m ”, *Матем. сб.*, **180**:7 (1989), 867–887; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “Solution of the Dirichlet problem for curvature equations of order m ”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 317–339.
6. В. Н. Кокарев, “Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны”, *Укр. геом. сб.*, **23** (1980), 65–74.
7. А. Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
8. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
9. А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, 3-е изд., Наука, М., 1970; англ. пер. 2-го изд.: A. I. Mal'cev, *Foundations of linear algebra*, Freeman, San Francisco–London, 1963.
10. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, *Intersci. Publ.*, New York–London–Sydney, 1963.
11. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
12. К. Миранда, *Уравнения в частных производных эллиптического типа*, ИЛ, М., 1957; пер. с англ.: C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **2**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
13. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, М., 1971; англ. пер.: E. M. Landis, *Second order equations of elliptic and parabolic type*, *Transl. Math. Monogr.*, **171**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
14. С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, *Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**:4 (1959), 623–727.

В. Н. КОКАРЕВ (V. N. KOKAREV)
 Самарский государственный университет
 E-mail: ko1949@yandex.ru

Поступило в редакцию
 14.09.2007